



VECTORES

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



ÍNDICE

DEFINICIÓN DE VECTOR
CLASIFICACIONES DE LOS VECTORES
TRIEDRO DE REFERENCIA
COMPONENTES CARTESIANAS
COSENOS DIRECTORES
SISTEMAS COORDENADOS
 CARTESIANO
 CILÍNDRICO
 ESFÉRICO



J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval





ÍNDICE

PRODUCTO POR UN ESCALAR

SUMA VECTORIAL

PRODUCTO ESCALAR

PRODUCTO VECTORIAL

PRODUCTO MIXTO

DOBLE PRODUCTO VECTORIAL

MOMENTO DE UN VECTOR RESPECTO A UN PUNTO

CAMBIO DE CENTRO DE MOMENTOS

TEOREMA DE CAMBIO DE POLO

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



ÍNDICE

MOMENTO AXIAL

MOMENTO DE UN VECTOR RESPECTO A UN EJE

SISTEMAS DE VECTORES DESLIZANTES

CAMBIO DE CENTRO DE MOMENTOS DE UN SISTEMA

TEOREMA DEL CAMBIO DE POLO

PAR DE VECTORES

REDUCCIÓN DE UN SISTEMA DE VECTORES A UN
PUNTO

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval





ÍNDICE

FUNCIONES ESCALARES Y VECTORIALES

CAMPOS ESCALARES Y VECTORIALES

REPRESENTACIÓN DE SUPERFICIES

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL

CASOS PARTICULARES

INTEGRACIÓN DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL

INTEGRAL DE LÍNEA DE UN CAMPO VECTORIAL

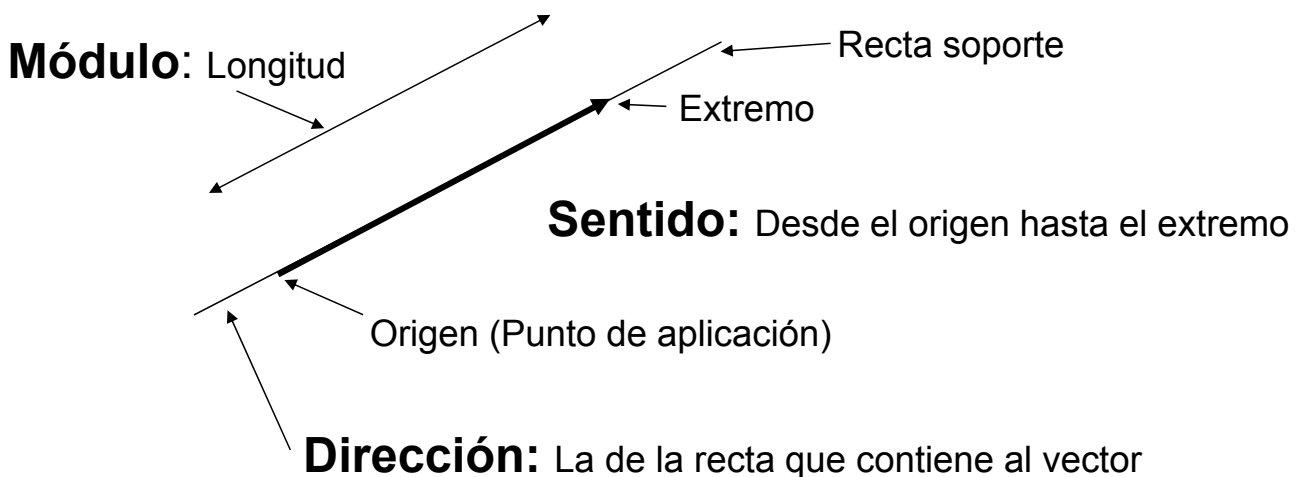
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



DEFINICIÓN DE VECTOR



Las magnitudes físicas vectoriales son entes abstractos caracterizados por los conceptos de igualdad y suma y susceptibles de ser medidos que requieren especificar una dirección en el espacio a lo largo de la que actúan



J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval





CLASIFICACIONES DE LOS VECTORES

- Libres
 - Quedan indeterminados el origen y la recta soporte
 - Ejemplos: momento de un par, velocidad angular.
- Deslizantes
 - Queda indeterminado el origen.
 - Ejemplo: fuerzas que actúan sobre un sólido
- Ligados o Fijos
 - Completamente determinados.
 - Ejemplos: velocidad o aceleración de una partícula, fuerza en una partícula, campos vectoriales



CLASIFICACIONES DE LOS VECTORES

- Iguales
 - Idénticos módulo, dirección, sentido y origen.
- Equipolentes
 - Idénticos módulo, dirección y sentido, diferente origen.





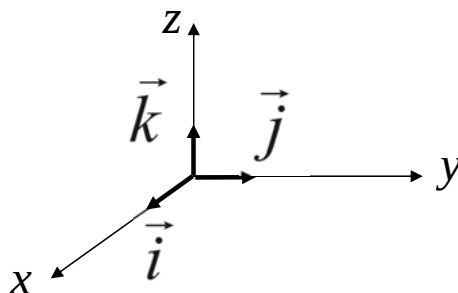
CLASIFICACIONES DE LOS VECTORES

- Opuestos
 - Sentido contrario
- Coplanarios
 - Rectas soporte en el mismo plano
- Concurrentes
 - Las rectas soporte se cortan en un punto



TRIEDRO DE REFERENCIA

Ejes orientados ortogonales
con el mismo origen



Versores o vectores unitarios: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

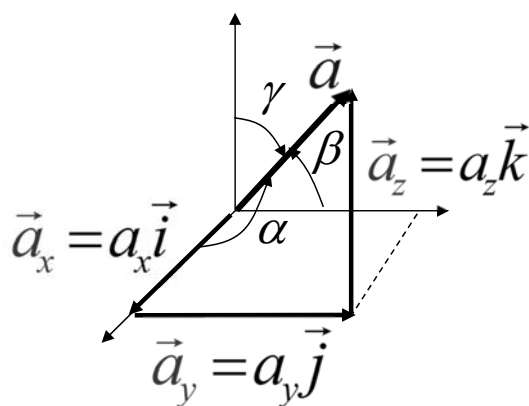




COMPONENTES CARTESIANAS

Proyecciones en los ejes: a_x , a_y , a_z

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

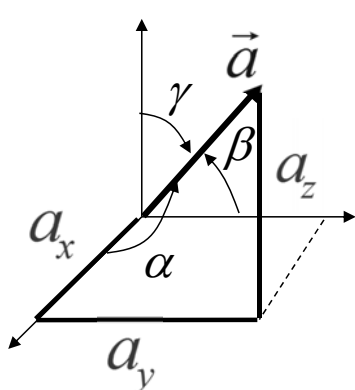


Módulo de $\vec{a}$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$



COSENOS DIRECTORES



$$a_x = |\vec{a}| \cos \alpha$$

$$a_y = |\vec{a}| \cos \beta$$

$$a_z = |\vec{a}| \cos \gamma$$

Ángulos directores: α , β , γ

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

$$\vec{a} = |\vec{a}| (\cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}) = |\vec{a}| \vec{u}_a$$

$$\vec{u}_a = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}$$

Vector unitario
Módulo 1

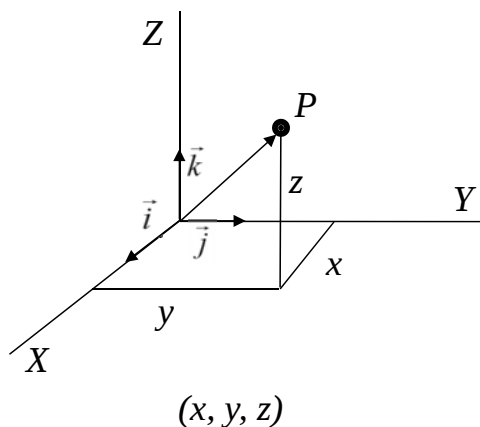
$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$



SISTEMAS COORDENADOS

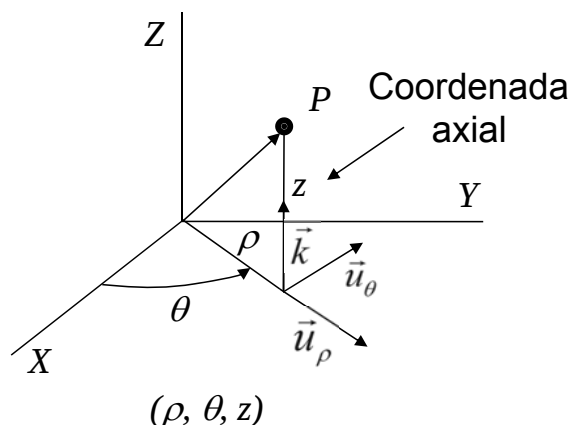


CARTESIANO $\leftrightarrow$ CILÍNDRICO



$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$



$$x = \rho \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \theta$$

Vector radial $\vec{u}_\rho = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$

Vector azimuthal $\vec{u}_\theta = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

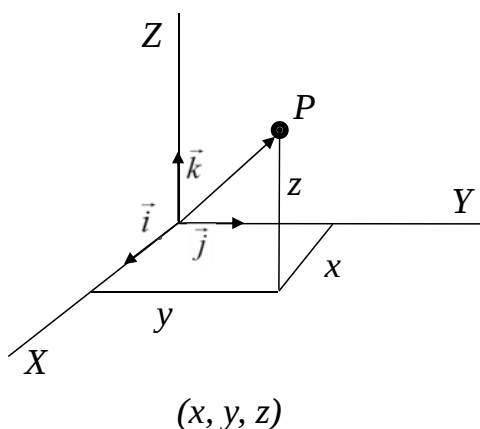
13/59



SISTEMAS COORDENADOS



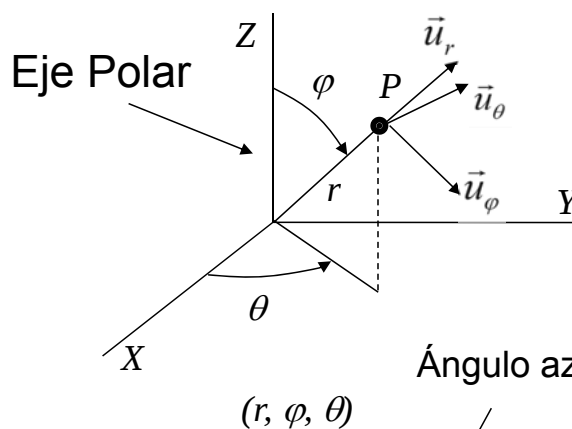
CARTESIANO $\leftrightarrow$ ESFÉRICO



$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$



$$x = r \sin \varphi \cos \theta$$

$$y = r \sin \varphi \sin \theta$$

$$z = r \cos \varphi$$

Ángulo polar

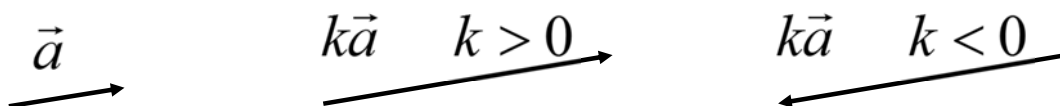
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

14/59





PRODUCTO POR UN ESCALAR



Expresión en componentes cartesianas:

$$\lambda \vec{a} = \lambda a_x \vec{i} + \lambda a_y \vec{j} + \lambda a_z \vec{k}$$



PRODUCTO POR UN ESCALAR

Propiedades:

Asociativa respecto de escalares: $\lambda(\beta \vec{a}) = (\lambda\beta) \vec{a}$

Distributiva respecto de los escalares: $(\lambda + \beta) \vec{a} = \lambda \vec{a} + \beta \vec{a}$

Distributiva respecto de los vectores: $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$





PRODUCTO POR UN ESCALAR

Aplicaciones:

Vector Unitario (Versor): Vector de módulo 1

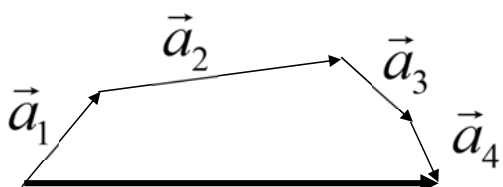
$$\vec{u}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \quad \vec{a} = |\vec{a}| \vec{u}_a$$

también $\vec{a} = a \vec{u}_a \quad (a > 0 \text{ o } a < 0)$



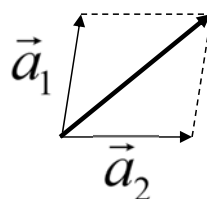
SUMA VECTORIAL

Regla del polígono



$$\vec{s} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4$$

Regla del paralelogramo



$$\vec{s} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$$

Expresión en componentes cartesianas:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j} + (a_z + b_z)\vec{k}$$





SUMA VECTORIAL

Propiedades

Asociativa $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

Conmutativa $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

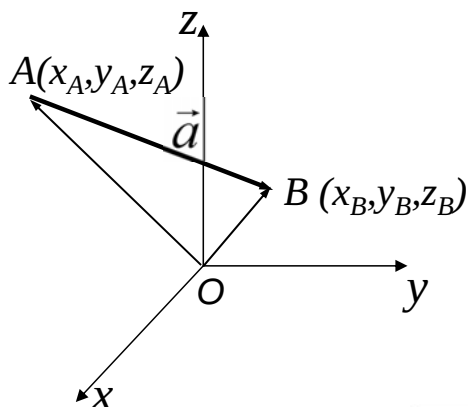
Elemento neutro $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

Elemento simétrico $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$



SUMA VECTORIAL

EXPRESIÓN DE UN VECTOR EN COMPONENTES CARTESIANAS



$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$$

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

Restando los dos vectores:

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$$

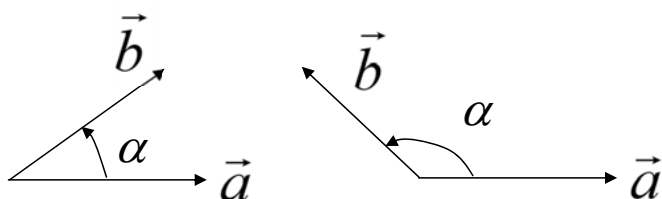
Módulo:

$$|\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$



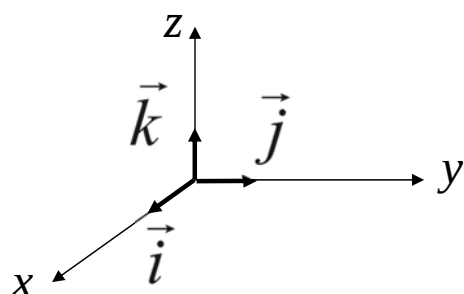


PRODUCTO ESCALAR



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha$$

Producto escalar de los vectores unitarios del triedro:



$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$$

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

$$a_x = \vec{a} \cdot \vec{i}; \quad a_y = \vec{a} \cdot \vec{j}; \quad a_z = \vec{a} \cdot \vec{k}$$



PRODUCTO ESCALAR

Expresión en componentes cartesianas:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}; \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$





PRODUCTO ESCALAR

Propiedades:

Conmutativa: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

Distributiva: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

Asociativa respecto de escalares: $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$



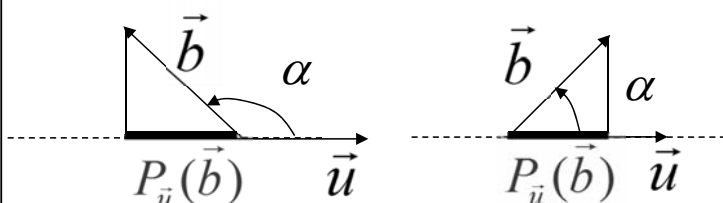
PRODUCTO ESCALAR

Aplicaciones:

Módulo de un vector: $|\vec{a}| = (\vec{a} \cdot \vec{a})^{1/2}$

Perpendicularidad: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

Proyección de un vector $\vec{b}$ sobre una recta orientada $\vec{u}$ ($P_{\vec{u}}(\vec{b})$):



$$\cos \alpha = \frac{P_{\vec{u}}(\vec{b})}{|\vec{b}|}$$

$$P_{\vec{u}}(\vec{b}) = |\vec{b}| \cos \alpha = \vec{b} \cdot \vec{u}$$

$$|\vec{u}| = 1$$

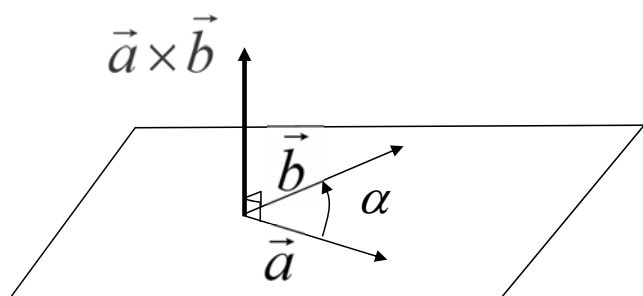




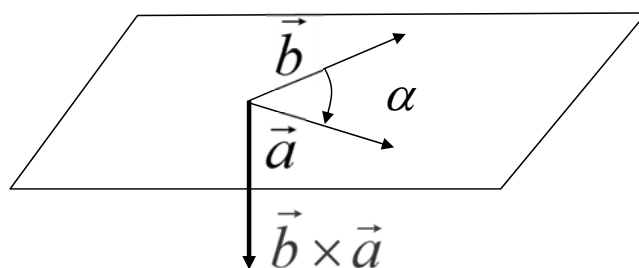
PRODUCTO VECTORIAL

Módulo: $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha$

Dirección: Perpendicular a $\vec{a}$ y $\vec{b}$



Sentido: El de avance de un sacacorchos al girar desde $\vec{a}$ hacia $\vec{b}$



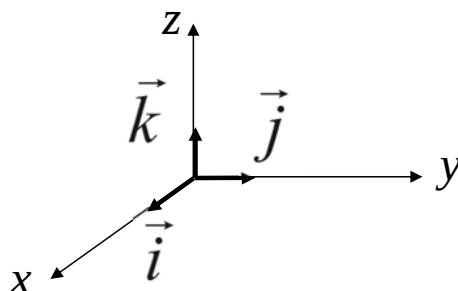
Sentido: El de avance de un sacacorchos al girar desde $\vec{b}$ hacia $\vec{a}$

También puede ser escrito con la notación: $\vec{a} \wedge \vec{b}$



PRODUCTO VECTORIAL

Producto vectorial de los vectores unitarios del triedro:



$$\begin{aligned} \vec{i} \times \vec{j} &= \vec{k}; & \vec{i} \times \vec{k} &= -\vec{j}; & \vec{j} \times \vec{k} &= \vec{i} \\ \vec{i} \times \vec{i} &= \vec{0}; & \vec{j} \times \vec{j} &= \vec{0}; & \vec{k} \times \vec{k} &= \vec{0} \end{aligned}$$





PRODUCTO VECTORIAL

Expresión en componentes cartesianas:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} + (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (-1)(a_x b_z - a_z b_x) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}$$



PRODUCTO VECTORIAL

Propiedades

Anticonmutativa: $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$

Distributiva: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$





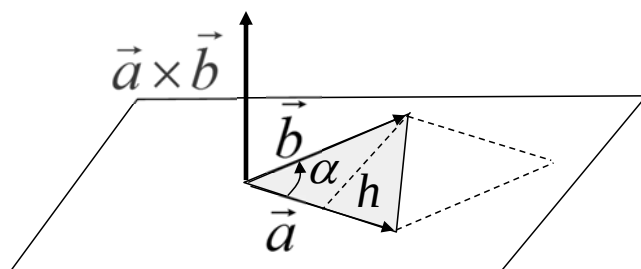
PRODUCTO VECTORIAL

Aplicaciones:

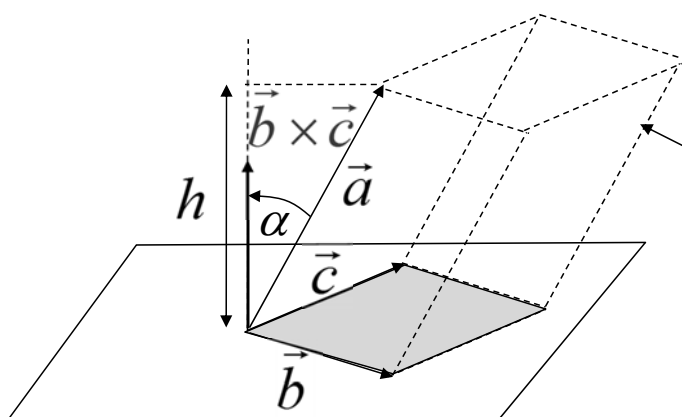
Paralelismo: $\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$

Área paralelogramo = 2 x Área triángulo

$$2 \frac{1}{2} |\vec{a}| h = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha = |\vec{a} \times \vec{b}|$$



PRODUCTO MIXTO



Volumen
del
Paralelepípedo

||

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = |\vec{a}| |\vec{b} \times \vec{c}| \cos \alpha = h |\vec{b} \times \vec{c}| = h \times \left(\begin{array}{c} \text{Área} \\ \text{Paralelogramo} \end{array} \right)$$





PRODUCTO MIXTO

Propiedad Cíclica:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$$

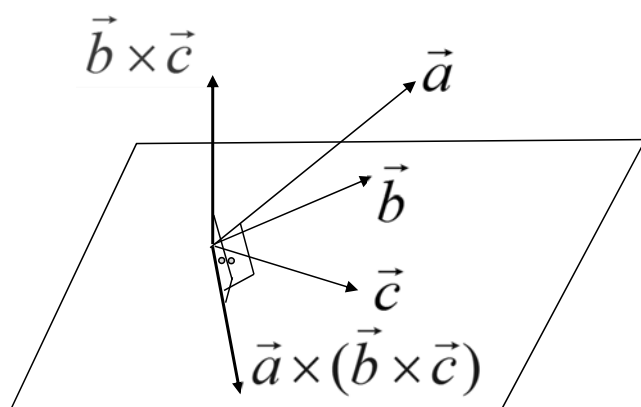
Es cero si dos de los vectores son paralelos

Expresión en componentes cartesianas:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$



DOBLE PRODUCTO VECTORIAL



$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$$

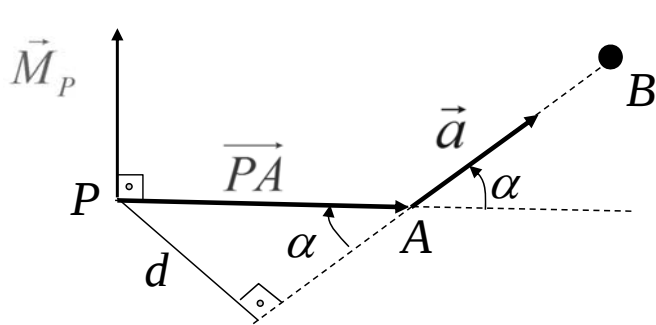
contenido en el plano $\{\vec{b}, \vec{c}\}$
y perpendicular a $\vec{a}$.

Propiedad: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$





MOMENTO DE UN VECTOR RESPECTO A UN PUNTO



Se define como el vector libre

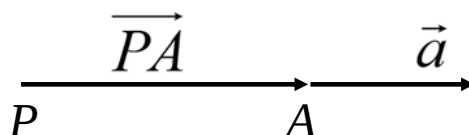
$$\vec{M}_P = \overrightarrow{PA} \times \vec{a}$$

$$|\vec{M}_P| = |\overrightarrow{PA}| |\vec{a}| \sin \alpha = |\vec{a}| d$$

El vector $\vec{a}$ puede aplicarse en cualquier punto de la recta soporte sin que cambie el valor del momento

$$\vec{M}_P = \overrightarrow{PA} \times \vec{a} = \overrightarrow{PB} \times \vec{a}$$

Es nulo si $\overrightarrow{PA}$ es paralelo a $\vec{a}$



MOMENTO DE UN VECTOR RESPECTO A UN PUNTO

$$\vec{M}_P = \overrightarrow{PA} \times \vec{a}$$

$$\overrightarrow{PA} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad \vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

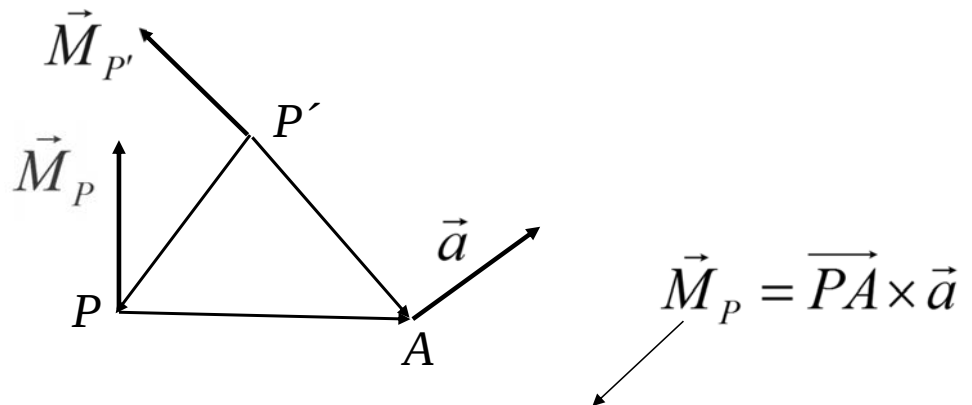
$$\vec{M}_P = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$



CAMBIO DE CENTRO DE MOMENTOS



TEOREMA DEL CAMBIO DE POLO



$$\vec{M}_{P'} = \vec{P'A} \times \vec{a} = (\vec{P'P} + \vec{PA}) \times \vec{a} = \vec{P'P} \times \vec{a} + \vec{PA} \times \vec{a}$$

$$\vec{M}_{P'} = \vec{P'P} \times \vec{a} + \vec{M}_P$$



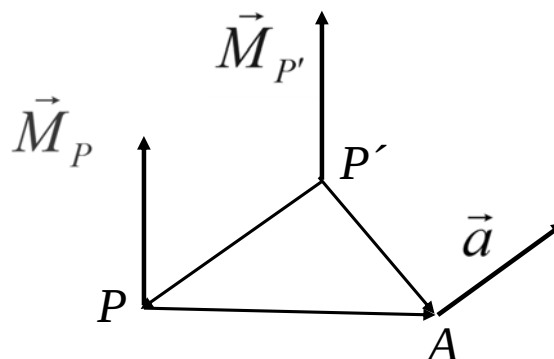
CAMBIO DE CENTRO DE MOMENTOS



TEOREMA DEL CAMBIO DE POLO

Caso particular

$$\vec{M}_{P'} = \vec{M}_P \Leftrightarrow \vec{P'P} \times \vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{P'P} \parallel \vec{a}$$



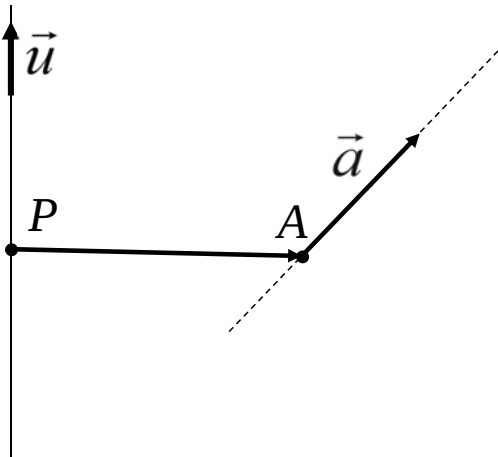
MOMENTO AXIAL



MOMENTO DE UN VECTOR RESPECTO A UN EJE

Proyección sobre el eje del momento del vector con respecto a un punto cualquiera del eje

$$M_e = \vec{u} \cdot (\overrightarrow{PA} \times \vec{a}) = \vec{u} \cdot \vec{M}_P$$



$$M_e = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ (\overrightarrow{PA})_x & (\overrightarrow{PA})_y & (\overrightarrow{PA})_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

37/59

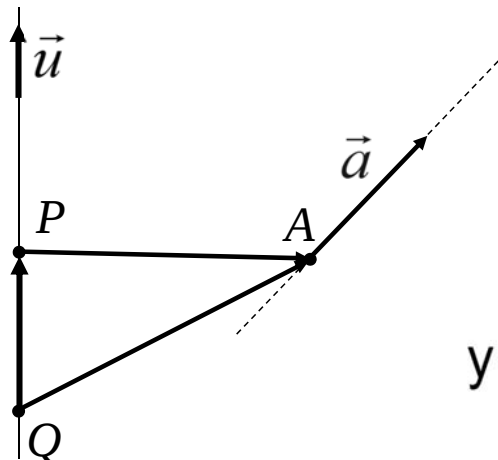


MOMENTO AXIAL



MOMENTO DE UN VECTOR RESPECTO A UN EJE

No depende del punto P elegido sobre el eje para calcularlo.



$$\begin{aligned} M_e &= \vec{u} \cdot (\overrightarrow{QA} \times \vec{a}) = \\ &= \vec{u} \cdot \left[(\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PA}) \times \vec{a} \right] \end{aligned}$$

$$\text{y como } \overrightarrow{QP} \parallel \vec{u} \quad M_e = \vec{u} \cdot (\overrightarrow{PA} \times \vec{a})$$

Es cero si $\vec{u}$ y $\vec{a}$ son paralelos o $\overrightarrow{PA}$ y $\vec{a}$ son paralelos (la recta soporte corta al eje).

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

38/59





SISTEMAS DE VECTORES DESLIZANTES

Para un sistema de n vectores: $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n$ aplicados en los puntos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ de sus respectivas rectas soporte, se define:

$$\text{Resultante: } \vec{R} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \dots + \vec{a}_n = \sum_{i=1}^n \vec{a}_i$$

(Invariante vectorial del sistema de vectores)

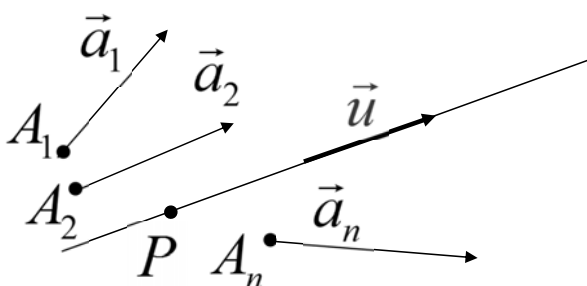
Momento resultante respecto a un punto P :

$$\vec{M}_P = \overrightarrow{PA_1} \times \vec{a}_1 + \overrightarrow{PA_2} \times \vec{a}_2 + \overrightarrow{PA_3} \times \vec{a}_3 + \dots + \overrightarrow{PA_n} \times \vec{a}_n$$

$$\vec{M}_P = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{PA_i} \times \vec{a}_i$$



SISTEMAS DE VECTORES DESLIZANTES



$$\vec{M}_P = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{PA_i} \times \vec{a}_i$$

Momento respecto de un eje $\vec{u}$ (momento axial) que contiene al punto P :

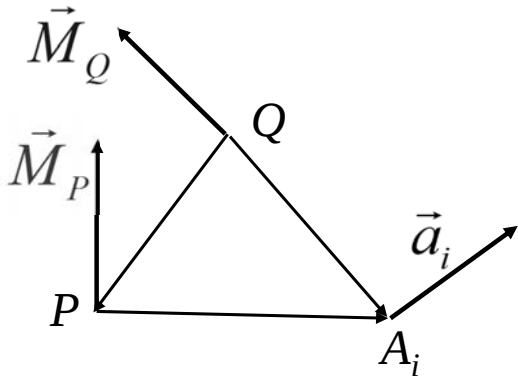
$$M_e = \vec{u} \cdot \vec{M}_P = \vec{u} \cdot \left(\sum_{i=1}^n \overrightarrow{PA_i} \times \vec{a}_i \right)$$



CAMBIO DE CENTRO DE MOMENTOS DE UN SISTEMA



TEOREMA DEL CAMBIO DE POLO



$$\begin{aligned}\vec{M}_Q &= \sum_{i=1}^n \overrightarrow{QA_i} \times \vec{a}_i = \sum_{i=1}^n (\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PA_i}) \times \vec{a}_i = \\ &= \overrightarrow{QP} \times \sum_{i=1}^n \vec{a}_i + \sum_{i=1}^n \overrightarrow{PA_i} \times \vec{a}_i = \overrightarrow{QP} \times \vec{R} + \vec{M}_P\end{aligned}$$

$$\vec{M}_Q = \vec{M}_P + \vec{R} \times \overrightarrow{PQ}$$

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{a}_i \quad \vec{M}_P = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{PA_i} \times \vec{a}_i$$



CAMBIO DE CENTRO DE MOMENTOS DE UN SISTEMA

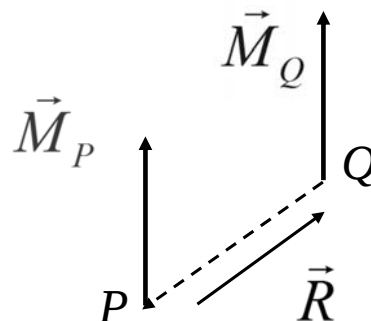


TEOREMA DEL CAMBIO DE POLO

Caso particular

$$\overrightarrow{QP} \times \vec{R} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{QP} \parallel \vec{R} \Rightarrow \vec{M}_Q = \vec{M}_P$$

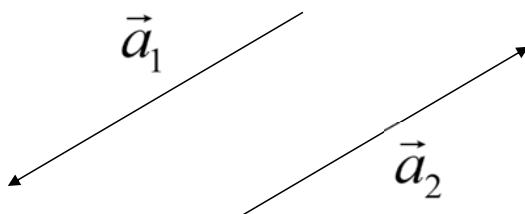
$$\vec{R} = \vec{0} \Rightarrow \vec{M}_Q = \vec{M}_P$$





PAR DE VECTORES

Es el sistema formado por dos vectores del mismo módulo, pero opuestos (rectas soporte paralelas).

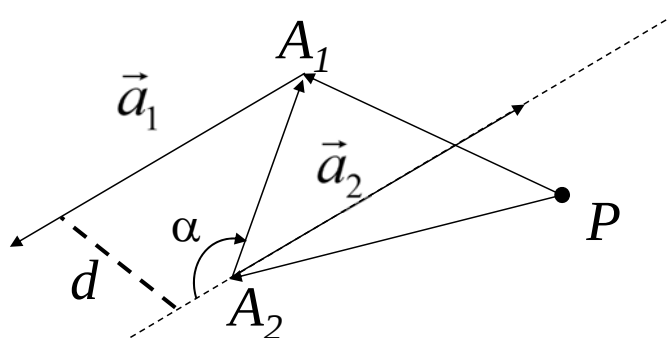


$$|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| \quad \vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2 \quad \vec{a}_1 = -\vec{a}_2$$



PAR DE VECTORES

Su momento no depende del punto en el que se calcula pues la resultante es cero.



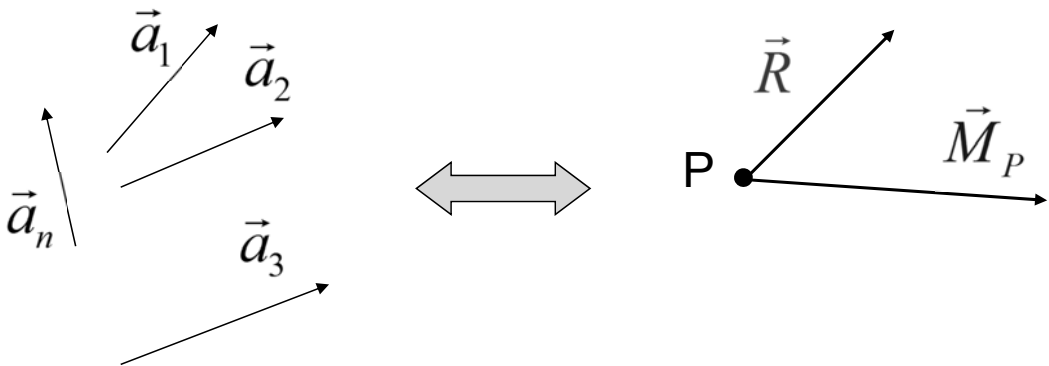
$$\begin{aligned} \vec{M}_P &= \overrightarrow{PA_1} \times \vec{a}_1 + \overrightarrow{PA_2} \times \vec{a}_2 = \overrightarrow{PA_1} \times \vec{a}_1 + \overrightarrow{PA_2} \times (-\vec{a}_1) = \\ &= (\overrightarrow{PA_1} - \overrightarrow{PA_2}) \times \vec{a}_1 = \overrightarrow{A_2A_1} \times \vec{a}_1 \end{aligned}$$

$$|\vec{M}_P| = |\vec{a}_1| |\overrightarrow{A_2A_1}| \sin \alpha = |\vec{a}_1| d$$





REDUCCIÓN DE UN SISTEMA DE VECTORES A UN PUNTO



Todo sistema de vectores deslizantes es equivalente (puede sustituirse sin variar los efectos que causa) a la resultante aplicada en un punto y al momento resultante respecto de ese punto.



FUNCIONES ESCALARES Y VECTORIALES

Función Escalar

Correspondencia Unívoca: $t \rightarrow A(t)$

Función Vectorial

$$t \rightarrow A_x(t)\vec{i} + A_y(t)\vec{j} + A_z(t)\vec{k}$$

Correspondencia Unívoca:

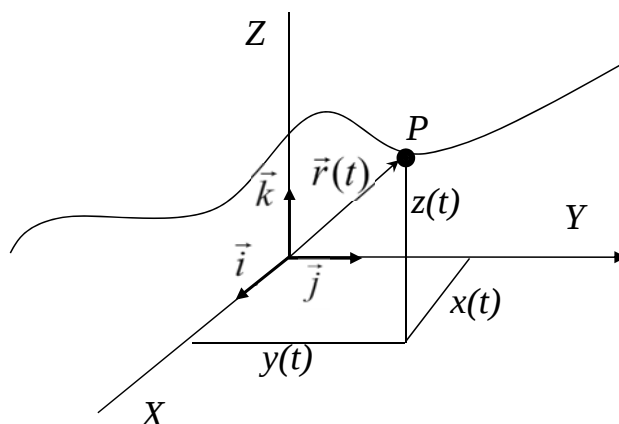
$$t \rightarrow \vec{A}(t)$$





FUNCIONES ESCALARES Y VECTORIALES

Ejemplo: Curva en el espacio



$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

47/59



CAMPOS ESCALARES Y VECTORIALES

Campo Escalar

Correspondencia Unívoca:

$$P(x, y, z) \rightarrow U(x, y, z)$$

$$\vec{r} \rightarrow U(\vec{r})$$

Superficies equiescalares: superficies con $U = cte = U_i$

Campo Vectorial

Correspondencia Unívoca:

$$(x, y, z) \rightarrow A_x(x, y, z)\vec{i} + A_y(x, y, z)\vec{j} + A_z(x, y, z)\vec{k}$$

$$\vec{r} \rightarrow \vec{A}(\vec{r})$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

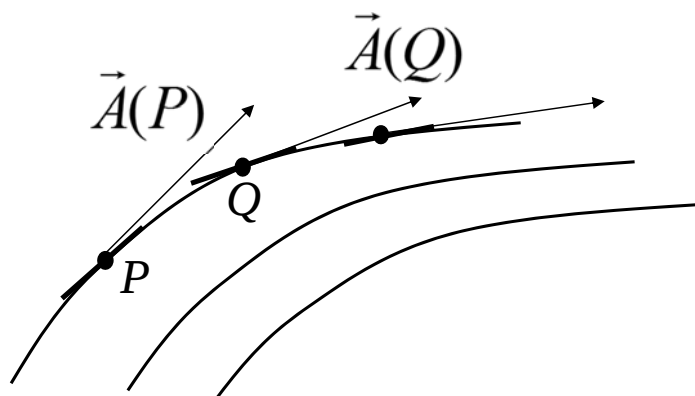
48/59





CAMPOS ESCALARES Y VECTORIALES

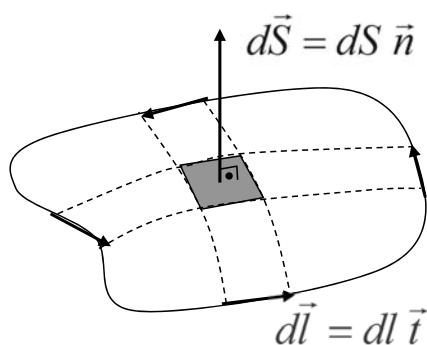
Representación: Líneas de campo, vectoriales o de fuerza.



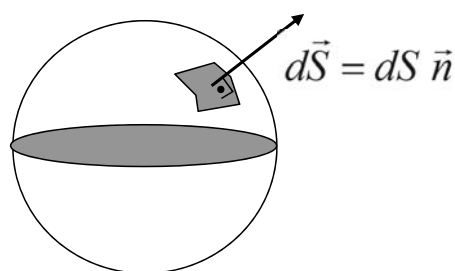
Unión de las sucesivas tangentes a los vectores campo



REPRESENTACIÓN DE SUPERFICIES



$$\vec{S} = \int d\vec{S}$$



Superficies abiertas

Sentido positivo: avance de un tornillo girando con el contorno

Superficies cerradas

Sentido positivo: hacia afuera

$\vec{n}$: normal local a la superficie

$\vec{t}$: tangente local a la curva

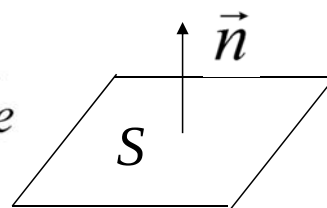




REPRESENTACIÓN DE SUPERFICIES

Ejemplo

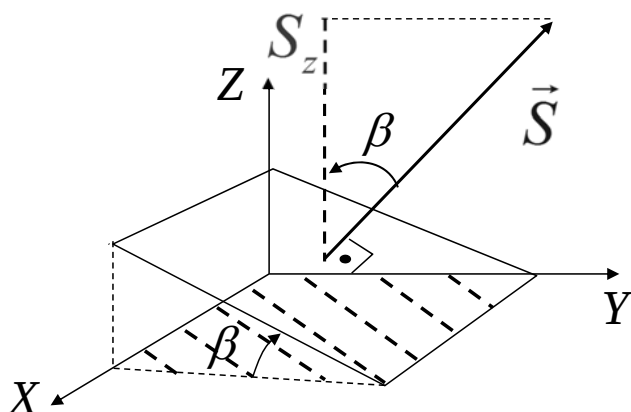
En superficies planas: $\vec{S} = S \vec{n}$ $\vec{n} = \text{cte}$



$$\vec{S} = S_x \vec{i} + S_y \vec{j} + S_z \vec{k}$$

S_z es la proyección de la superficie en el plano XY

$$S_z = S \cos \beta$$



DERIVADA DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL

Dada la función vectorial: $\vec{A}(t) = A_x(t)\vec{i} + A_y(t)\vec{j} + A_z(t)\vec{k}$

Se define la derivada:

$$\frac{d\vec{A}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{A}(t + \Delta t) - \vec{A}(t)}{\Delta t} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\vec{A}(t) - \vec{A}(t_0)}{t - t_0}$$

En componentes cartesianas:

$$\frac{d\vec{A}(t)}{dt} = \frac{dA_x(t)}{dt} \vec{i} + \frac{dA_y(t)}{dt} \vec{j} + \frac{dA_z(t)}{dt} \vec{k}$$





DERIVADA DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL

Derivada segunda:
$$\frac{d^2 \vec{A}(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left[\frac{d\vec{A}(t)}{dt} \right]$$

Suma:
$$\frac{d(\vec{A}(t) + \vec{B}(t))}{dt} = \frac{d\vec{A}(t)}{dt} + \frac{d\vec{B}(t)}{dt}$$

Producto por un escalar:
$$\frac{d(\lambda \vec{A}(t))}{dt} = \lambda \frac{d\vec{A}(t)}{dt}$$



DERIVADA DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL

Producto por una función:

$$\frac{d(\lambda(t) \vec{A}(t))}{dt} = \lambda(t) \frac{d\vec{A}(t)}{dt} + \frac{d\lambda(t)}{dt} \vec{A}(t)$$

Producto escalar:

$$\frac{d(\vec{A}(t) \cdot \vec{B}(t))}{dt} = \frac{d\vec{A}(t)}{dt} \cdot \vec{B}(t) + \vec{A}(t) \cdot \frac{d\vec{B}(t)}{dt}$$

Producto vectorial:

$$\frac{d(\vec{A}(t) \times \vec{B}(t))}{dt} = \frac{d\vec{A}(t)}{dt} \times \vec{B}(t) + \vec{A}(t) \times \frac{d\vec{B}(t)}{dt}$$



DERIVADA DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL



CASOS PARTICULARES

Función Vectorial de dirección constante

$$\vec{A}(t) = A(t)\vec{u}$$

$$\frac{d\vec{A}(t)}{dt} = \frac{dA(t)\vec{u}}{dt} = \frac{dA(t)}{dt}\vec{u} + A(t)\frac{d\vec{u}}{dt}$$

Y como $\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{0} \rightarrow \frac{d\vec{A}(t)}{dt} = \frac{dA(t)}{dt}\vec{u}$



DERIVADA DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL



CASOS PARTICULARES

Función Vectorial de módulo constante

$$\vec{A}(t) = A\vec{u}(t)$$

$$\frac{d(A^2)}{dt} = 0 \rightarrow \frac{d(\vec{A}(t) \cdot \vec{A}(t))}{dt} = 0$$

$$\frac{d(\vec{A}(t) \cdot \vec{A}(t))}{dt} = 2\vec{A}(t) \cdot \frac{d\vec{A}(t)}{dt} \Rightarrow \vec{A}(t) \perp \frac{d\vec{A}(t)}{dt}$$





INTEGRACIÓN DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL

Integral indefinida:

$$\vec{B}(t) = \int \vec{A}(t) dt + \vec{C} \quad \left(\frac{d\vec{B}(t)}{dt} = \vec{A}(t) \right)$$

Integral definida:

$$\int_{t_a}^{t_b} \vec{A}(t) dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \vec{A}(\xi_i) \Delta t_i \quad \xi_i \in (t_{i-1}, t_i) \text{ y } t_1 = t_a, t_N = t_b$$

$$\int_{t_a}^{t_b} \vec{A}(t) dt = \left(\int_{t_a}^{t_b} A_x(t) dt \right) \vec{i} + \left(\int_{t_a}^{t_b} A_y(t) dt \right) \vec{j} + \left(\int_{t_a}^{t_b} A_z(t) dt \right) \vec{k}$$

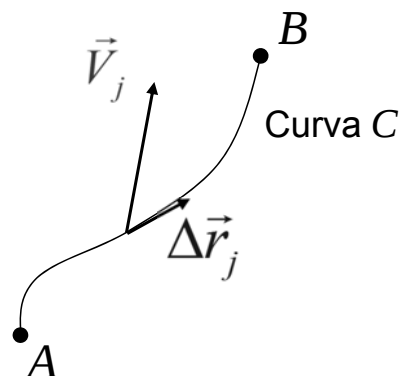


INTEGRAL DE LÍNEA DE UN CAMPO VECTORIAL

Sea un campo vectorial $\vec{V}(x, y, z)$

Se define la integral de línea:

$$\int_A^B \vec{V}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = \sum_{j=1}^N \vec{V}_j \cdot \Delta \vec{r}_j$$



Para una curva cerrada
se le llama circulación:

$\oint_C \vec{V} \cdot d\vec{l}$ si C es una curva cerrada





CIRCULACIÓN DE UN CAMPO VECTORIAL

Propiedades

Curva $C = \text{Curva } C_1 + \text{Curva } C_2$

$$\int_A^B \vec{V} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{V} \cdot d\vec{l} + \int_A^B \vec{V} \cdot d\vec{l}$$

$$\int_A^B \vec{V} \cdot d\vec{l} = -\int_B^A \vec{V} \cdot d\vec{l}$$

