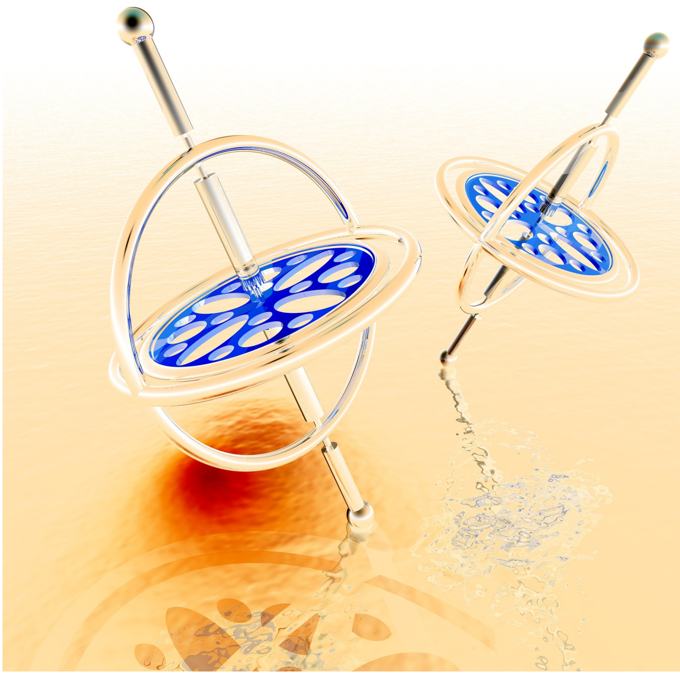
Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

POLITÉCNICA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO

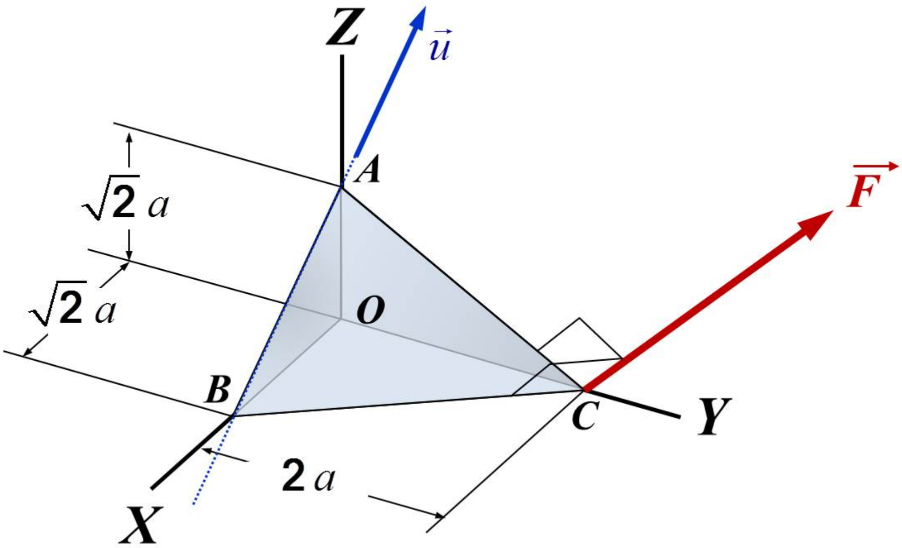
# FÍSICA I

## TEORÍA
## Mecánica



POLITÉCNICA

# ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO




# TEMA 1.- VECTORES


*José Carlos JIMÉNEZ SÁEZ*
*Pablo PALACIOS CLEMENTE*
*Santiago RAMÍREZ DE LA PISCINA MILLÁN*

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

# ÍNDICE VECTORES

# 1 Vectores

## 1.1. Definición de vector

Las magnitudes físicas vectoriales se pueden representar mediante los vectores. Los conceptos de igualdad y adición de vectores son esencialmente distintos a los correspondientes a los escalares.

En este capítulo desarrollaremos distintos aspectos del cálculo vectorial, que es la herramienta matemática que nos permitirá utilizar en física los vectores como representantes de las magnitudes vectoriales.

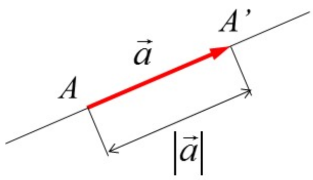



**Figura 1.1:** Vector.

Los vectores admiten una representación gráfica muy adecuada para su manejo. Geométricamente se representan mediante un segmento orientado cuya longitud es igual (en una determinada escala) a su módulo. En el texto representaremos los vectores utilizando la notación de variable con flecha encima o utilizando dos letras mayúsculas con flecha encima cuando queramos designar origen y extremo.

$$\vec{a} = \overrightarrow{AA'}$$

Un vector queda perfectamente definido por las siguientes características (véase Fig. 1.1):

- ORIGEN (o PUNTO DE APLICACIÓN): Punto $A$.
- DIRECCIÓN: Coincide con la de la recta que contiene al segmento *AA'* (también llamada recta soporte).
- SENTIDO: Coincide con el del recorrido desde $A$ (origen) hasta *A'* (extremo o afijo). Se indica situando una punta de flecha en *A'*.
- MÓDULO: Longitud del segmento $\overline{AA'}$ expresado en una escala determinada. Designaremos el módulo de un vector con el símbolo del vector encerrado entre barras.

$$\left|\overrightarrow{AA'}\right| = |\vec{a}|$$

## 1.2. Clasificaciones de los vectores

Desde el punto de vista de la física los vectores se pueden clasificar, atendiendo a sus características, en:

- **LIBRES**: Son aquellos vectores de los que se conoce su dirección, sentido y módulo, quedando indeterminado su origen (y, en consecuencia, su extremo y su recta soporte). Son ejemplos de magnitudes físicas vectoriales que se pueden representar mediante vectores libres: momento de un par, velocidad angular de rotación de un sólido rígido, etc...
- **DESLIZANTES**: Son aquellos vectores de los que se conoce su dirección, sentido, módulo y recta soporte, quedando indeterminado su origen (y, en consecuencia, su extremo). Como ejemplo de magnitudes físicas vectoriales que pueden representarse mediante vectores deslizantes tenemos las fuerzas aplicadas a un sólido rígido.
- **LIGADOS** o **FIJOS**: Son aquellos vectores de los que se conoce su dirección, sentido, módulo y origen (y, en consecuencia, su extremo y su recta soporte). Son ejemplos de magnitudes físicas que pueden representarse mediante vectores ligados: velocidad de una partícula material, aceleración de una partícula material, momento de una partícula, etc...

Los vectores se pueden clasificar, atendiendo a las relaciones entre ellos en:

- **EQUIPOLENTES**: Dos vectores son equipolentes si tienen el mismo: módulo, dirección y sentido y distinto origen.
- **IGUALES**: Dos vectores fijos son iguales si tienen el mismo: módulo, dirección, sentido y origen. Obsérvese que si dos vectores son iguales, necesariamente han de ser también equipolentes, mientras que la afirmación contraria no es cierta.
- **OPUESTOS**: Dos vectores de cualquier tipo (libre, deslizante o ligado) son opuestos cuando tienen igual módulo y dirección pero sentido contrario.
- **COPLANARIOS**: Los vectores de un sistema (de vectores deslizantes o ligados) son coplanarios cuando sus rectas soporte están contenidas en el mismo plano.
- **CONCURRENTES**: Un conjunto de vectores deslizantes es concurrente cuando sus rectas soporte se cortan en un punto. Un conjunto de vectores ligados es concurrente cuando su origen es el mismo.

## 1.3. Representación vectorial de superficies

Se puede definir un vector área $\vec{S}$ asociado con cualquier área plana, de forma que $\vec{S}$ tenga por módulo el valor correspondiente a la superficie del área plana y dirección perpendicular a ella. Queda indeterminado el sentido, que se deberá elegir por convenio entre los dos posibles, y el punto de aplicación, que podrá ser cualquiera de los puntos del área plana.

Un elemento de superficie, suficientemente pequeño para que pueda considerarse plano, se puede representar mediante un vector $d\vec{S}$, cuyo módulo es el área del elemento $dS$, su dirección es la normal a la superficie y, por convenio, su sentido es el del avance de un sacacorchos cuando se le hace girar según un sentido fijado para recorrer el contorno del elemento de superficie, según se indica en la Fig. 1.2.

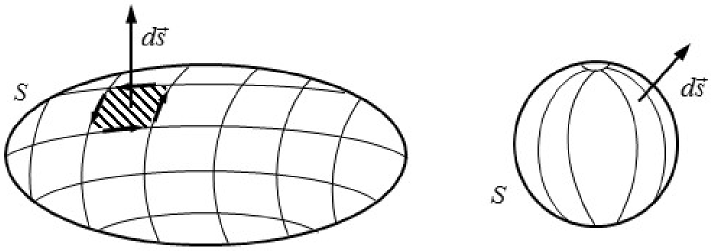



**Figura 1.2:** Representación vectorial de superficies.

Cuando se toma una superficie $S$ limitada por un contorno C y se fija un sentido para el recorrido de dicho contorno, y se divide la superficie en elementos $dS$, el recorrido del contorno de estos elementos debe tener el mismo sentido que el recorrido del contorno C de toda la superficie.

Si la superficie es cerrada, los vectores $d\vec{S}$ representativos de cualquier elemento de esta superficie tienen, por convenio, el sentido positivo tomado de dentro a fuera del volumen que encierra la superficie.

## 1.4. Aritmética vectorial

### 1.4.1. Suma vectorial

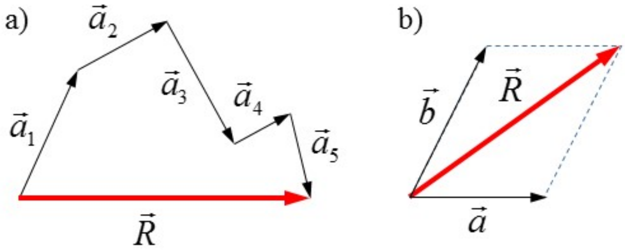



**Figura 1.3:** Suma vectorial.

Se define la suma de $n$ vectores $\vec{a}_i$ como otro vector $\vec{R}$, llamado vector suma o resultante, que se obtiene llevando, a partir de un punto, vectores equipolentes a los dados de forma que el extremo de uno coincida con el origen del siguiente, siendo $\vec{R}$ el vector que tiene como origen el origen del primer vector y como extremo el extremo del último (Fig. 1.3(a)). Esta definición gráfica de la adición vectorial se conoce con el nombre de "regla del polígono".

Si lo que se pretende es sumar únicamente dos vectores, basta con llevar a un origen común vectores equipolentes a los dados (Fig. 1.3(b)). El vector suma es la diagonal del paralelogramo construido sobre ellos. Esta definición gráfica de adición de dos vectores se conoce con el nombre de **“regla del paralelogramo”**.

Analíticamente, esta suma **geométrica** la expresaremos con la siguiente notación:

$$\vec{R} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + .... + \vec{a}_i + .... + \vec{a}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i$$

**Propiedades**

ASOCIATIVA: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

CONMUTATIVA: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

Existe ELEMENTO NEUTRO. Se denomina vector nulo y se representa por $\vec{0}$ o $\mathbf{0}$. Cumple $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$. El vector $\vec{0}$ tiene módulo 0.

Existe ELEMENTO SIMÉTRICO. Se denomina vector opuesto de un vector dado $\vec{a}$ y se representa por $(-\vec{a})$. Cumple $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$. El vector $(-\vec{a})$ tiene el mismo módulo que el vector $\vec{a}$.

### 1.4.2. Diferencia vectorial

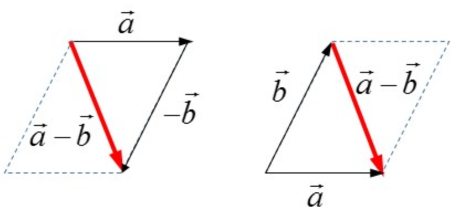



**Figura 1.4:** Diferencia vectorial.

Dados dos vectores, $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se define la diferencia de los mismos $\vec{a} - \vec{b}$ como otro vector $\vec{c}$ tal que sumado al vector $\vec{b}$ dé como resultado el vector $\vec{a}$. Su expresión es: $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.

Gráficamente se obtiene sumando el vector $\vec{a}$ con el opuesto del vector $\vec{b}$ (Fig. 1.4).

## 1.5. Producto de un vector por un escalar

El producto de un vector $\vec{a}$ por un escalar $k$ es, por definición, otro vector de módulo $|k||\vec{a}|$, dirección la misma del vector $\vec{a}$ y sentido el mismo o contrario según que el escalar $k$ sea positivo o negativo respectivamente (Fig. 1.5).

La interpretación es la de sumar $\vec{a}$ $k$ veces o $-\vec{a}$ $|k|$ veces según que $k$ sea positivo o negativo respectivamente.

### 1.5.1. Propiedades

1) ASOCIATIVA RESPECTO DE LOS ESCALARES: $\lambda(\beta\vec{a}) = (\lambda\beta)\vec{a}$

2) DISTRIBUTIVA RESPECTO DE LOS ESCALARES: $(\lambda + \beta)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \beta\vec{a}$

3) DISTRIBUTIVA RESPECTO DE LOS VECTORES: $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$

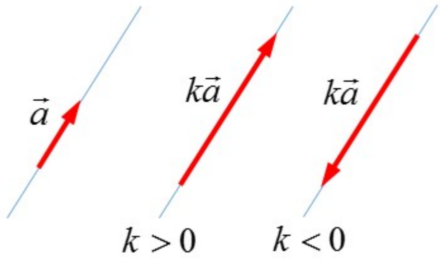



**Figura 1.5:** Producto de un vector por un escalar.

## 1.6. Versor (Vector unitario)

Se llama versor o vector unitario a un vector de módulo unidad. Dado un vector $\vec{a}$ para obtener un versor de la misma dirección y sentido basta con multiplicar el vector $\vec{a}$ por el escalar correspondiente al inverso de su módulo: $\vec{u}_a = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

Los versores se utilizan para representar una dirección y un sentido. Es decir, un vector $\vec{a}$ siempre se puede escribir como el producto de su módulo por su versor asociado:

$$\vec{a} = |\vec{a}|\,\vec{u}_a \tag{1.1}$$

De la expresión anterior se deduce inmediatamente el carácter adimensional de los vectores unitarios.

## 1.7. Proyección de un vector sobre una recta orientada

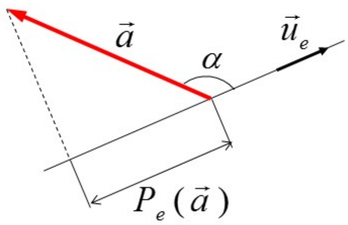



**Figura 1.6:** Proyección de un vector sobre una recta orientada. En el caso dibujado esta proyección es negativa.

Una recta en el espacio representa una dirección y dos sentidos.

Por “orientar” una recta entendemos elegir como positivo uno de esos dos sentidos, asociando a la recta uno de los dos posibles versores que se pueden obtener de su dirección. Una recta orientada se denomina **eje** (Fig. 1.6).

La proyección de un vector sobre un eje es un escalar que se obtiene multiplicando el módulo del vector por el coseno del menor ángulo que forman el vector y el versor del eje. Este ángulo puede variar entre 0 y $\pi$ y de su valor depende que la proyección del vector sea positiva, negativa o nula. La proyección del vector $\vec{a}$ sobre el eje “e” se designará por: $P_e(\vec{a})$.

### 1.7.1. Propiedades de la proyección de un vector sobre un eje

1) Si $\vec{a} = \vec{b}$, entonces $P_e(\vec{a}) = P_e(\vec{b})$. La recíproca no es cierta.

2) $P_e(k\vec{a}) = k\ P_e(\vec{a})$

3) $P_e(\vec{a} + \vec{b}) = P_e(\vec{a}) + P_e(\vec{b})$

## 1.8. Triedro de referencia

Utilizaremos como triedro de referencia un sistema formado por tres ejes orientados, ortogonales, que se cortan en un punto que denominamos origen del triedro de referencia. Cada uno de los ejes orientados lleva asociado un versor. Un triedro así definido recibe el nombre de triortonormal. Los versores mutuamente ortogonales asociados a los ejes O$x$, O$y$ y O$z$ se designan por $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$, y $\vec{u}_z$ respectivamente.

Diremos que un triedro de referencia es “a derechas” (dextrógiro) si, al hacer girar un sacacorchos colocado en la dirección O$z$ desde $\vec{u}_x$ hacia $\vec{u}_y$ por el camino más corto, el sacacorchos avanza en el sentido positivo del versor $\vec{u}_z$. En caso contrario diremos que el triedro de referencia es “a izquierdas” (levógiro). Mientras no se diga lo contrario todos los triedros de referencia que utilizaremos serán a derechas y a los versores asociados $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ los designaremos por $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$ respectivamente (Fig. 1.7).

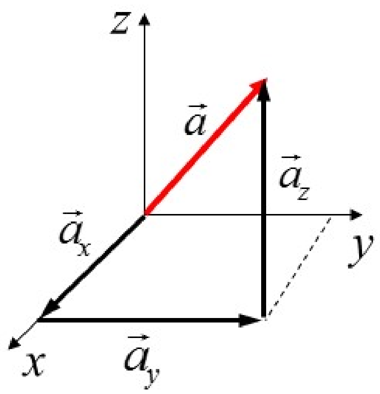



**Figura 1.7:** Triedro de referencia a derechas.

# 1.9. Componentes cartesianas de un vector

Consideramos un triedro cartesiano de referencia y un vector genérico $\vec{a}$ como se muestra en la Fig. 1.8. El vector $\vec{a}$ se puede obtener como suma de tres vectores: $\vec{a}_x$, $\vec{a}_y$ y $\vec{a}_z$ dirigidos cada uno de ellos a lo largo de cada uno de los ejes del triedro. Es decir: $\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z$.

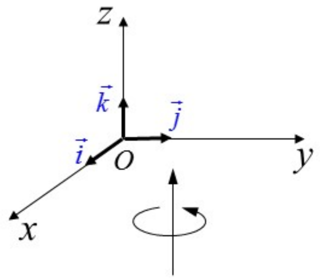



**Figura 1.8:** Componentes cartesianas de un vector.

Como ya vimos (ec. [1.1]) un vector siempre puede expresarse como el producto de un escalar por un versor unitario en su misma dirección. Así:

$$\vec{a}_x = a_x\vec{i}; \quad \vec{a}_y = a_y\vec{j}; \quad \vec{a}_z = a_z\vec{k}$$

Sustituyendo,

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \tag{1.2}$$

Los escalares $a_x$, $a_y$ y $a_z$ (que pueden ser positivos o negativos) se conocen con el nombre de componentes cartesianas del vector $\vec{a}$.

Si se cambia de sistema de referencia, cambia la representación del vector, es decir, cambian sus componentes, pero no el vector, que sigue siendo el mismo. Esto se conoce con el nombre de invariancia ante cambios de sistemas de referencia. En otras palabras, un vector se puede definir sin utilizar un sistema de referencia.

La anterior expresión [1.2] de $\vec{a}$ en función de $a_x$, $a_y$ y $a_z$ y de los versores $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$ se conoce como "representación" del vector $\vec{a}$ en el sistema de ejes O$xyz$.

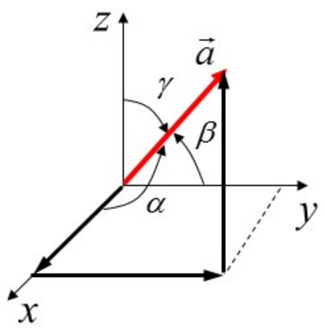



**Figura 1.9:** Ángulos directores.

Otra forma de caracterizar analíticamente un vector cuando estamos utilizando un triedro cartesiano de referencia es utilizando su módulo y los ángulos que el vector forma con los tres ejes coordenados (Fig. 1.9).

Llamando $\alpha$ al ángulo que forma el vector $\vec{a}$ con el eje O$x$, $\beta$ al que forma con el eje O$y$ y $\gamma$ al que forma con el eje O$z$, sus componentes cartesianas se pueden expresar como:

$$\begin{cases} a_x = a \ \cos\alpha \\ a_y = a \ \cos\beta \\ a_z = a \ \cos\gamma \end{cases}$$

El vector $\vec{a}$ puede, entonces, escribirse como:

$$\vec{a} = a(\cos\alpha\ \vec{i} + \cos\beta\ \vec{j} + \cos\gamma\ \vec{k}) \tag{1.3}$$

Estos tres cosenos se conocen con el nombre de cosenos directores del vector $\vec{a}$ y son las componentes del versor asociado a dicho vector:

$$\vec{u}_a = \cos\alpha\ \vec{i} + \cos\beta\ \vec{j} + \cos\gamma\ \vec{k}$$

Los cosenos directores de un determinado vector no son, en consecuencia, independientes entre sí, sino que necesariamente deben cumplir la relación:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Las suma y diferencia de dos vectores y el producto de uno de ellos por un escalar tienen una expresión analítica sencilla e inmediata cuando se utilizan triedros de referencia cartesianos.

Sean dos vectores genéricos $\vec{a}$ y $\vec{b}$, cuyas expresiones en coordenadas cartesianas son:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

$$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$$

Las expresiones mencionadas serán:

$$\begin{aligned} &\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j} + (a_z + b_z)\vec{k} \\ &\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x)\vec{i} + (a_y - b_y)\vec{j} + (a_z - b_z)\vec{k} \\ &\lambda\vec{a} = \lambda a_x\vec{i} + \lambda a_y\vec{j} + \lambda a_z\vec{k} \end{aligned} \tag{1.4}$$

# 1.10. Expresión analítica de un vector en función de las coordenadas de sus extremos

Suponemos conocidas las coordenadas cartesianas del origen A($x_A$, $y_A$, $z_A$) y del extremo B($x_B$, $y_B$, $z_B$) de un determinado vector $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$.

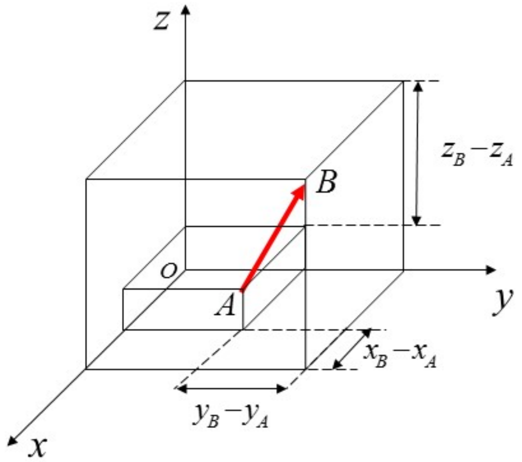



**Figura 1.10:** Expresión de un vector en función de las coordenadas de sus extremos.

Consideramos los vectores $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ (con origen en el origen del triedro de referencia y extremo en el punto A) y $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ (con origen en el origen del triedro de referencia y extremo en el punto B). Estos vectores serán, expresados en el triedro de referencia (Fig. 1.10):

$$\vec{a} = x_A\vec{i} + y_A\vec{j} + z_A\vec{k}$$
$$\vec{b} = x_B\vec{i} + y_B\vec{j} + z_B\vec{k}$$

El vector $\vec{c}$ se puede obtener como diferencia de los vectores $\vec{b}$ y $\vec{a}$ ($\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$). Así, recordando la expresión analítica [1.4] de la diferencia de dos vectores en coordenadas cartesianas se tiene:

$$\vec{c} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k} \tag{1.5}$$

La distancia entre dos puntos $A$ y $B$ es el módulo del vector $\vec{c}$ que, expresado en función de las componentes conduce a la conocida fórmula

$$|\vec{c}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

## 1.11. Ángulo que forman dos vectores

Se define el ángulo que forman dos vectores (Fig. 1.11) como el ángulo existente entre dos vectores equipolentes a los dados con un origen común, o lo que es equivalente el ángulo que forman rectas paralelas a sus rectas soporte, orientadas según los vectores, que se corten en un punto.

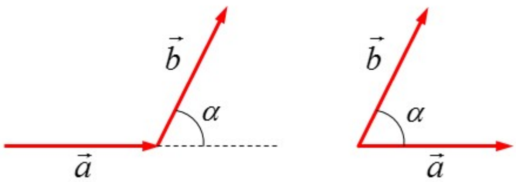



**Figura 1.11:** Ángulo que forman dos vectores.

## 1.12. Producto escalar

Dados dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, que forman entre sí un ángulo $\alpha$, se define su producto escalar como el escalar que resulta de multiplicar sus módulos por el coseno del ángulo que forman. Se representa por $\vec{a}\cdot\vec{b}$ y se lee "$a$ escalar $b$".

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha \tag{1.6}$$

El producto escalar admite una interpretación geométrica. Si recordamos el concepto de proyección de un vector sobre un eje, el producto escalar es el producto del módulo de uno de los vectores por la proyección del otro sobre él.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|P_a(\vec{b}) = |\vec{b}|P_b(\vec{a})$$

### 1.12.1. Propiedades

1) CONMUTATIVA: $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$

2) DISTRIBUTIVA: $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

3) ASOCIATIVA RESPECTO A ESCALARES: $(\lambda\vec{a})\cdot(\beta\vec{b}) = \lambda\beta(\vec{a}\cdot\vec{b})$

4) $|\vec{a}| = (\vec{a}\cdot\vec{a})^{1/2}$

5) Si $\vec{a}\neq 0,\ \vec{b}\neq 0,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=0$ entonces $\vec{a}$ es perpendicular a $\vec{b}$.

### 1.12.2. Expresión analítica

En un triedro cartesiano de referencia, las expresiones de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \ \ ; \quad \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$$

Por aplicación sucesiva de la propiedad distributiva y teniendo en cuenta que:

$$\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1 \quad \text{y} \quad \vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = 0$$

se puede obtener la expresión analítica del producto escalar en **coordenadas cartesianas**:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z \tag{1.7}$$

Como todos los escalares, el producto escalar es invariante ante cambios de sistema de referencia, es decir, la expresión analítica de $\vec{a}\cdot\vec{b}$ no cambia al cambiar de sistema de referencia a pesar de que sí lo hacen las componentes de $\vec{a}$ y las de $\vec{b}$.

Consecuencia directa de la expresión [1.7] es la siguiente, que nos permite calcular analíticamente el módulo de un vector en coordenadas cartesianas:

$$|\vec{a}| = (\vec{a}\cdot\vec{a})^{1/2} = ({a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2)^{1/2} \tag{1.8}$$

Es conveniente insistir en que las expresiones anteriores son válidas **ÚNICAMENTE** para vectores expresados en un sistema de referencia cartesiano (triortonormal).

El producto escalar también se puede utilizar para expresar analíticamente la proyección de un vector sobre un eje:

$$P_e(\vec{a}) = \vec{a}\cdot\vec{u}_e \tag{1.9}$$

En particular, las componentes cartesianas de un vector (proyecciones sobre cada uno de los ejes coordenados de dicho vector) pueden calcularse como:

$$\begin{cases} a_x = P_x(\vec{a}) = \vec{a}\cdot\vec{i} \\ a_y = P_y(\vec{a}) = \vec{a}\cdot\vec{j} \\ a_z = P_z(\vec{a}) = \vec{a}\cdot\vec{k} \end{cases}$$

Asimismo, de la propia definición de producto escalar, se puede obtener el ángulo $\alpha$ que forman dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, el cual, expresado en función de las componentes de los vectores es

$$\alpha = \arccos\frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_x}{|\vec{a}|\ \left|\vec{b}\right|}$$

# 1.13. Producto vectorial

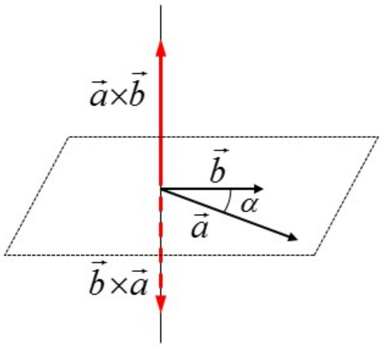



**Figura 1.12:** Producto vectorial.

Dados dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, que forman entre sí un ángulo $\alpha$, se define su producto vectorial como un vector $\vec{p}$, cuyo módulo $p$ es igual al producto de los módulos de cada uno de los vectores por el seno del ángulo que forman ($p = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right| \sin\alpha$), cuya dirección es la de una recta perpendicular al plano que definen dos vectores equipolentes a los dados y con un origen común y cuyo sentido es el de avance de un sacacorchos cuando lo hacemos girar desde el primer vector hacia el segundo por el camino más corto (Fig. 1.12). Se representa por $\vec{a} \times \vec{b}$ y se lee "a vectorial b". También se utiliza la notación $\vec{a} \wedge \vec{b}$**.**

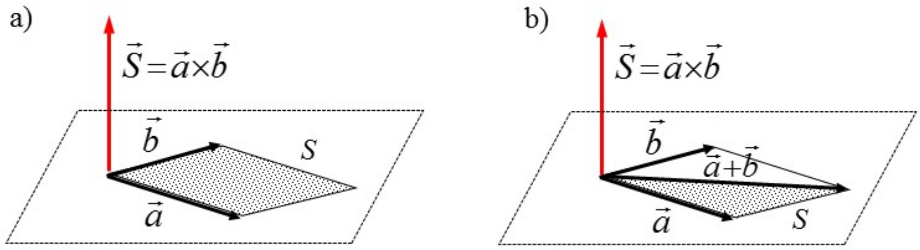



**Figura 1.13:** Interpretación geométrica del producto vectorial.

El módulo del producto vectorial admite una interpretación geométrica (Fig. 1.13 (a)). Coincide con el valor del área del paralelogramo determinado por dos vectores equipolentes a los dados con un origen común. También representa el doble del área del triángulo determinado por $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{a}+\vec{b}$ (Fig. 1.13 (b)).

## 1.13.1. Propiedades

1) ANTICONMUTATIVA: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

2) DISTRIBUTIVA: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

3) Si $\vec{a} \neq 0,\ \vec{b} \neq 0, \quad \vec{a} \times \vec{b} = 0$ entonces $\vec{a}$ es paralelo a $\vec{b}$.

### 1.13.2. Expresión analítica

En un triedro cartesiano de referencia, la expresión de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$
$$\vec{b} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

Por aplicación sucesiva de la propiedad distributiva y teniendo en cuenta que:

$$\vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} = 0 \quad \text{y} \quad \vec{i}\times\vec{j} = \vec{k};\ \vec{j}\times\vec{k} = \vec{i};\ \vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}$$

Se puede obtener la expresión analítica del producto vectorial en **coordenadas cartesianas**:

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\,\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\,\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\,\vec{k}$$

Esta última expresión puede escribirse en forma simbólica utilizando la notación empleada para determinantes:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \tag{1.10}$$

## 1.14. Producto mixto de tres vectores

Dados tres vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ se define su producto mixto como el escalar resultado de multiplicar escalarmente uno de ellos por el producto vectorial de los otros dos. Se representa por $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ y se lee "producto mixto $a$, $b$, $c$".

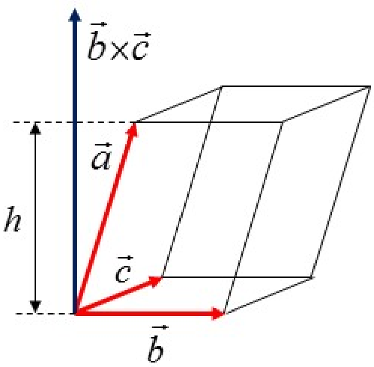



**Figura 1.14:** Interpretación geométrica del producto mixto.

El producto mixto admite una interpretación geométrica (Fig. 1.14). Su valor absoluto coincide con el volumen del paralelepípedo determinado por tres vectores equipolentes a los dados con un origen común. Como consecuencia, tres vectores son coplanarios cuando su producto mixto es cero.

El producto mixto cumple la denominada “propiedad cíclica”:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) \tag{1.11}$$

Utilizando las expresiones en coordenadas cartesianas del producto escalar y del producto vectorial se puede encontrar la forma compacta de expresar el producto mixto en coordenadas cartesianas a partir de un determinante:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \tag{1.12}$$

La propiedad cíclica se demuestra fácilmente a partir de las propiedades de los determinantes.

## 1.15. Doble producto vectorial

Dados tres vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ se define su doble producto vectorial como el vector que se obtiene al multiplicar el primero por el producto vectorial de los otros dos. Se representa por

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$$

y se lee “doble producto vectorial $a$, $b$, $c$”.

### 1.15.1. Propiedades

1) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ está contenido en el plano determinado por $\vec{b}$ y $\vec{c}$ y es perpendicular al vector $\vec{a}$.

2) Verifica la propiedad:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a} \cdot \vec{b}) \tag{1.13}$$

Esta propiedad se puede utilizar para descomponer un vector según una dirección $\vec{b}$ y su normal. Dicha normal se encuentra en el plano que forman el propio vector $\vec{b}$ con la dirección dada $\vec{c}$. Haciendo en la expresión [1.13] $\vec{a} = \vec{b}$ y despejando $\vec{c}$ queda:

$$\vec{c} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|b|^2}\,\vec{b} - \frac{\vec{b} \times (\vec{b} \times \vec{c})}{|b|^2} \tag{1.14}$$

# 1.16. Momento de un vector con respecto a un punto

El momento de un vector $\vec{a}$ (deslizante o ligado) con respecto a un punto $O$ ($\vec{M}_O$) es, por definición, otro vector $\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{a}$ siendo $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$ un vector con origen en $O$ y extremo en un punto $A$ cualquiera de la recta soporte del vector $\vec{a}$ (Fig. 1.15). El momento de un vector en un punto es un vector ligado a dicho punto.

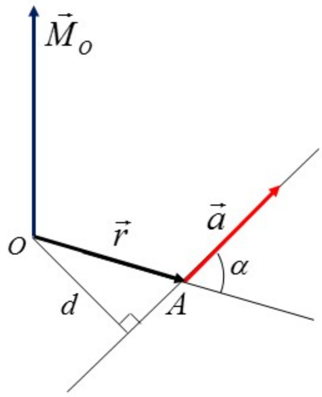



**Figura 1.15:** Momento de un vector respecto a un punto.

El momento no depende del punto $A$ de la recta soporte elegido para calcularlo. El módulo del momento de $\vec{a}$ con respecto a $O$ ($\left|\vec{M}_O\right|$) se obtiene multiplicando el módulo de $\vec{a}$ por la distancia más corta entre su recta soporte y el punto $O$: $\left|\vec{M}_O\right| = |\vec{a}|\,|\vec{r}|\,\sin\alpha = |\vec{a}|\,d$.

El momento de un vector con respecto a un punto será nulo cuando: $\vec{a} = 0$ o $\vec{r} = 0$ o $\vec{a}$ sea paralelo a $\vec{r}$. Es decir, el momento de un vector no nulo solamente es cero si lo calculamos con respecto al propio origen del vector o con respecto a cualquier punto de su recta soporte.

## 1.16.1. Expresión analítica

Sea un sistema cartesiano de referencia y, en ese sistema, $a_x$, $a_y$ y $a_z$ las componentes del vector $\vec{a}$ y $x$, $y$ y $z$ las del vector $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$, el momento del vector $\vec{a}$ con respecto al punto $O$ se puede escribir de forma simbólica utilizando la notación de los determinantes como:

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} \tag{1.15}$$

# 1.17. Teorema del cambio de polo

Este teorema relaciona los momentos de un mismo vector con respecto a puntos distintos (Fig. 1.16).

*"El momento de un vector $\vec{a}$ con respecto a un punto O' ($\vec{M}_{O'}$) es igual a su momento con respecto a otro punto O, más el momento con respecto a O' de un vector equipolente al dado aplicado en O"*

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + \overrightarrow{O'O} \times \vec{a} \tag{1.16}$$

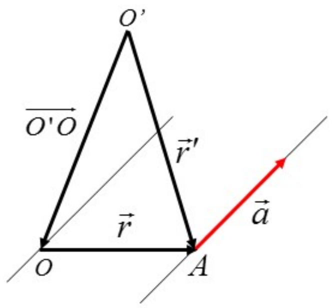



**Figura 1.16:** Variables del teorema de cambio de polo.

Sabiendo que $\vec{M}_{O'} = \vec{r}' \times \vec{a}$, $\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{a}$ y $\vec{r}' = \overrightarrow{O'O} + \vec{r}$:

$$\vec{M}_{O'} = (\overrightarrow{O'O} + \vec{r}) \times \vec{a} = \overrightarrow{O'O} \times \vec{a} + \vec{r} \times \vec{a} = \vec{M}_O + \overrightarrow{O'O} \times \vec{a}$$

Conviene ahora analizar con cierto detalle las condiciones bajo las cuales el momento de un vector con respecto a puntos distintos tiene el mismo valor.

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O \Leftrightarrow \overrightarrow{O'O} \times \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{O'O} \text{ es paralelo a } \vec{a} \text{ (con } \overrightarrow{O'O} \neq 0 \text{ y } \vec{a} \neq 0)$$

Es decir, el momento de un vector con respecto a puntos distintos es el mismo, únicamente si esos puntos están sobre una misma recta paralela al vector.

# 1.18. Momento de un vector con respecto a un eje

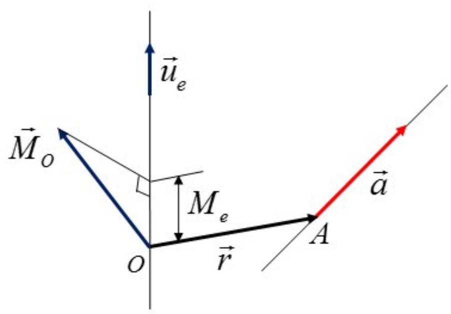



**Figura 1.17:** Momento axial de un vector.

Consideramos un eje e (orientado), definido mediante el versor $\vec{u}_e$, un punto O cualquiera sobre dicho eje y un vector $\vec{a}$. Se define el momento axial o momento del vector $\vec{a}$ con respecto al eje e (y se representa por $(M_e(\vec{a}))$) como el escalar que resulta de proyectar el momento del vector $\vec{a}$ con respecto al punto O sobre el eje e (Fig. 1.17). Es decir, $M_e = P_e(\vec{M}_O) = \vec{M}_O \cdot \vec{u}_e$.

### 1.18.1. Propiedades

1) El momento de un vector con respecto a un eje no depende del punto $O$ del eje elegido para calcularlo.

2) El momento de un vector con respecto a un eje es nulo si vector y eje son paralelos o se cortan el eje y la recta soporte del vector.

La demostración de estas propiedades se basa en las propiedades del producto mixto.

### 1.18.2. Expresión analítica

Si las componentes cartesianas de los vectores $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{a}$ y $\vec{u}_e$ son $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ y $\vec{u}_e = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}$ respectivamente, y recordando la definición de momento de un vector con respecto a un punto y de producto mixto, el momento axial se puede obtener como:

$$M_e = \vec{M}_O \cdot \vec{u}_e = (\vec{r} \times \vec{a}) \cdot \vec{u}_e = \begin{vmatrix} x & y & z \\ a_x & a_y & a_z \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} \tag{1.17}$$

Particularizando para los ejes coordenados y recordando que los versores asociados a dichos ejes $x$, $y$ y $z$ son $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$ respectivamente se tiene:

$$M_x = (\vec{r} \times \vec{a}) \cdot \vec{i} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ a_x & a_y & a_z \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = ya_z - za_y$$
$$M_y = (\vec{r} \times \vec{a}) \cdot \vec{j} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ a_x & a_y & a_z \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = za_x - xa_z$$
$$M_z = (\vec{r} \times \vec{a}) \cdot \vec{k} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ a_x & a_y & a_z \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = xa_y - ya_x$$

Como puede observarse, las componentes cartesianas del momento de un vector con respecto a un punto coinciden con los momentos de ese vector con respecto a tres ejes ortogonales que tienen a ese punto como origen. La componente $x$ del momento de un vector con respecto al origen del sistema de referencia es, por definición, la proyección sobre el eje $x$ de dicho momento, es decir, $M_x$.

# 1.19. Análisis vectorial

## 1.19.1. Derivada de una función vectorial de una variable real

Una función vectorial de una variable real, $\vec{A}(t)$, es un vector que toma distintos valores para distintos valores de $t$. La variación de una función vectorial cuando cambia la variable $t$ se puede producir en módulo, dirección y sentido.

Como en el caso de funciones escalares, se define la derivada de la función vectorial $\vec{A}(t)$ con respecto a la variable escalar $t$ como

$$\dot{\vec{A}} = \frac{d\vec{A}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{A}(t+\Delta t) - \vec{A}(t)}{\Delta t}$$

Si utilizamos un sistema de referencia triortogonal donde la expresión de $\vec{A}(t)$ sea $\vec{A}(t) = A_x(t)\vec{i} + A_y(t)\vec{j} + A_z(t)\vec{k}$ (hemos supuesto que los versores $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$ no dependen de $t$), la derivada queda:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{A}(t+\Delta t) - \vec{A}(t)}{\Delta t} = \frac{dA_x}{dt}\vec{i} + \frac{dA_y}{dt}\vec{j} + \frac{dA_z}{dt}\vec{k} \qquad (1.18)$$

Como se ve la representación del vector $\vec{A}(t)$ en un sistema de referencia se realiza mediante tres funciones escalares $A_x(t)$, $A_y(t)$ y $A_z(t)$ y las componentes de la derivada del vector $\vec{A}$ son las derivadas respectivas de $A_x$, $A_y$ y $A_z$ con respecto de $t$. Que la función $\vec{A}(t)$ sea derivable equivale a que lo sean sus tres componentes en cada punto.

Veamos a continuación algunas propiedades de la derivación de funciones vectoriales:

- **Derivada de una suma/diferencia**:

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{A}(t) \pm \vec{B}(t)\right] = \frac{d\vec{A}(t)}{dt} \pm \frac{d\vec{B}(t)}{dt}$$

- **Derivada del producto de una función vectorial por un escalar constante o no**:

$$\lambda = cte \ ; \ \frac{d}{dt}\left[\lambda\vec{A}(t))\right] = \lambda\frac{d\vec{A}(t)}{dt}$$

$$\lambda = \lambda(t); \ \frac{d}{dt}\left[\lambda(t)\vec{A}(t))\right] = \lambda\frac{d\vec{A}(t)}{dt} + \vec{A}\frac{d\lambda(t)}{dt}$$

- **Derivada del producto escalar de dos funciones vectoriales**:

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{A}(t)\cdot\vec{B}(t)\right] = \frac{d\vec{A}(t)}{dt}\cdot\vec{B}(t) + \vec{A}(t)\cdot\frac{d\vec{B}(t)}{dt}$$

- **Derivada del producto vectorial de dos funciones vectoriales**:

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{A}(t)\times\vec{B}(t)\right]=\frac{d\vec{A}(t)}{dt}\times\vec{B}(t)+\vec{A}(t)\times\frac{d\vec{B}(t)}{dt}$$

Una vez más la regla es similar a la derivación del producto de dos funciones escalares. Conviene recordar, no obstante, que en este último caso hay que respetar el orden al no ser conmutativo el producto vectorial.

- **Derivadas sucesivas**: Las derivadas sucesivas de $\vec{A}(t)$ se definen de forma análoga. Por ejemplo,

$$\frac{d^2\vec{A}}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)$$

y lo mismo para la $n$-sima derivada, mientras se pueda definir.

### 1.19.2. Derivada de una función vectorial de dirección constante

Sea una función vectorial $\vec{A}(t)=A(t)\vec{u}$ con $\vec{u}$ un vector unitario constante. El vector $\vec{A}(t)$ se encuentra contenido en la misma recta definida por $\vec{u}$ para todo valor de $t$. La derivada, que es

$$\frac{d\vec{A}}{dt}=\frac{dA}{dt}\vec{u}\quad \text{o}\quad \dot{\vec{A}}=\dot{A}\vec{u}\,,$$

se reduce por tanto a la derivada de la función escalar por el vector $\vec{u}$. Si $A$ o su derivada son positivos tienen el mismo sentido que $\vec{u}$ y al revés.

### 1.19.3. Derivada de una función vectorial de módulo constante

Una función vectorial $\vec{A}(t)$ de módulo constante se puede expresar como

$$\vec{A}(t)=\left|\vec{A}\right|\vec{u}_A(t)\ \text{con}\ \left|\vec{A}\right|\ \text{constante.}$$

Si consideramos fijo el origen del vector $\vec{A}$, entonces su extremo se mueve sobre una superficie esférica de radio $\left|\vec{A}\right|$. La derivada de $\vec{A}$ es perpendicular a la propia función para cada valor de $t$. En efecto:

$$0=\frac{d(\left|\vec{A}\right|^2)}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\vec{A}\cdot\vec{A}\right)=2\vec{A}\cdot\frac{d\vec{A}}{dt}$$

Luego

$$\vec{A}\cdot\frac{d\vec{A}}{dt}=0\quad \text{y}\quad \vec{A}\perp\frac{d\vec{A}}{dt}$$

En particular, todos los vectores unitarios (de módulo constante e igual a la unidad) función de una variable escalar $t$, $\vec{u}(t)$, cumplen todo lo expuesto en este apartado.

### 1.19.4. Derivada de una función vectorial en coordenadas polares

Una función vectorial $\vec{r}(t)$ contenida en un plano $OXY$ se representa únicamente mediante dos componentes. Por ejemplo, en coordenadas cartesianas:

$$\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$$

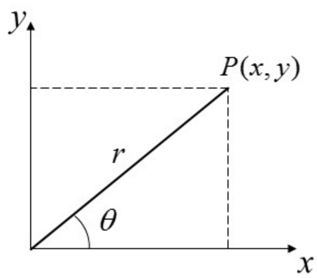



**Figura 1.18:** Coordenadas polares.

Si fijamos el origen de $\vec{r}(t)$ entonces su extremo describe una trayectoria plana. En este caso la derivada de $\vec{r}$ es tangente a la trayectoria en cada punto, como se ve fácilmente a partir de la definición de derivada de un vector. Sobre esto volveremos a incidir en el tema de cinemática de la partícula.

Ahora la variación del vector $\vec{r}$ con $t$ se debe a dos causas: cambio de módulo y cambio de dirección. Para analizar estos efectos separadamente es conveniente utilizar (Fig. 1.18) las coordenadas polares radial y angular (o ángulo polar) ($r$,$\theta$) en vez de las cartesianas ($x$,$y$), dadas por:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2}; \quad r \in [0, \infty] \\ \theta &= \arctan \frac{y}{x}; \quad \theta \in [0, 2\pi] \end{aligned} \tag{1.19}$$

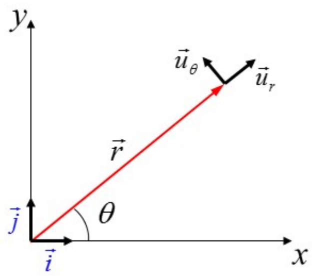



**Figura 1.19:** Unitarios radial y transversal de las coordenadas polares.

Definimos los vectores unitarios asociados a las variables $r$ y $\theta$ como sigue (Fig. 1.19): $\vec{u}_r$ o unitario radial tiene la dirección de la coordenada $r$, sentido según valores de $r$ crecientes y está aplicado en el punto que estemos considerando ($|\vec{u}_r| = 1$); $\vec{u}_\theta$ o unitario angular (o transversal) tiene dirección perpendicular a $\vec{u}_r$, sentido según valores de $\theta$ crecientes y está aplicado en el mismo punto que $\vec{u}_r$ ($|\vec{u}_\theta| = 1$).

Si el sistema OXY es fijo, los versores $\vec{i}$ y $\vec{j}$ no dependen de $t$, pero $\vec{u}_r$ y $\vec{u}_\theta$ sí. Son funciones vectoriales de módulo constante. Los valores de sus derivadas vienen dados por:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{u}}_r &= \frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{|d\vec{u}_r|\,\vec{u}_\theta}{dt} = \frac{|\vec{u}_r|\,d\theta\vec{u}_\theta}{dt} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta \\ \dot{\vec{u}}_\theta &= \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\frac{|d\vec{u}_\theta|\,\vec{u}_r}{dt} = -\frac{|\vec{u}_\theta|\,d\theta\vec{u}_r}{dt} = -\dot{\theta}\vec{u}_r \end{aligned} \qquad (1.20)$$

según se comprueba fácilmente en la Fig. 1.20 donde se ha aproximado la longitud del vector diferencial por la de un arco de circunferencia de radio unidad.

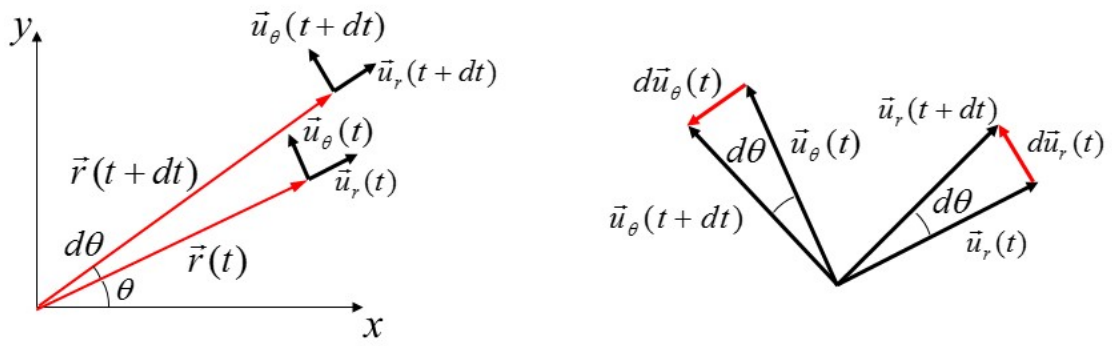



**Figura 1.20:** Derivadas de los vectores unitarios en coordenadas polares.

La representación del vector $\vec{r}(t)$ en coordenadas polares viene dada por:

$$\vec{r} = r(t)\vec{u}_r(t)$$

siendo $r$ (componente radial) la proyección de $\vec{r}$ sobre $\vec{u}_r$.

La representación en coordenadas polares de su derivada será:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\vec{u}}_r = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta \qquad (1.21)$$

Es decir, las componentes radial y angular de la derivada de $r$ son:

$\dot{r}$ mide el cambio en módulo de $\vec{r}$

$r\dot{\theta}$ mide el cambio en dirección de $\vec{r}$

Si imponemos la condición de que la dirección de $\vec{r}$ sea constante e igual a $\vec{u}_r$ fijo, entonces

$$\dot{\theta} = 0 \quad \text{y} \quad \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{u}$$

y si exigimos

$$|\vec{r}| = r = \text{cte} \Rightarrow \dot{\vec{r}} = r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

que es perpendicular a $\vec{r}$, como vimos en el apartado 1.19.3.

En el caso más general de una función $\vec{A}(t) = A\vec{u}_A$ en tres dimensiones siempre es posible representar la derivada en dos componentes, una según $\vec{A}$ (vector unitario $\vec{u}_A$) que mide su cambio en módulo y otra según una dirección perpendicular a $\vec{A}$ (vector unitario $\vec{u}_n$) que mide su cambio en dirección:

$$\dot{\vec{A}} = \dot{A}\,\vec{u}_A + (\dot{\vec{A}})_n\vec{u}_n$$

pero ahora la dirección de $\vec{u}_n$ no es tan fácil de determinar como en el caso plano. $\vec{u}_n$ es perpendicular a $\vec{u}_A$ pero no está contenido en un plano determinado. Este caso se tratará con detalle más adelante al estudiar las componentes intrínsecas del vector aceleración.

## 1.20. Integración de una función vectorial de una variable real

Dada una función vectorial de una variable real $\vec{A}(t)$ decimos que existe otra función $\vec{B}(t)$, a la que llamamos integral indefinida de $\vec{A}(t)$, si se cumple

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \vec{A}(t)$$

y denotamos a $\vec{B}$ como

$$\vec{B} = \int \vec{A}dt$$

Evidentemente, si $\vec{B}(t)$ es una función vectorial que cumple la definición anterior, también lo hace $\vec{B}(t) + \vec{C}$, donde $\vec{C}$ representa cualquier vector constante.

Para definir la integral definida en un cierto intervalo $[t_a,\ t_b]$ de una función vectorial $\vec{A}(t)$ procedemos de forma similar al caso de funciones reales. Dividimos el intervalo $[t_a,\ t_b]$ en una partición numerable de $N$ intervalos $[t_{i-1},\ t_i]$ de "longitud" $\Delta t_i = t_i$ - $t_{i-1}$, de manera que $t_b - t_a = \sum_{i=1}^{N} \Delta t_i$. Sea $\xi_i \in (t_{i-1}, t_i)$, definimos

$$\int_{t_a}^{t_b} \vec{A}(t)dt = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \vec{A}(\xi_i)\Delta t_i$$

que es similar a la definición de integral de Riemann salvo porque el integrando es una función vectorial.

Si la función vectorial $\vec{A}(t)$ está representada en un sistema cartesiano de referencia y son $A_x$, $A_y$ y $A_z$ sus componentes en dicho sistema, la integral anterior se puede descomponer en suma de tres integrales de funciones escalares

$$\int_{t_a}^{t_b} \vec{A}(t)dt = \left(\int_{t_a}^{t_b} A_x(t)dt\right)\vec{i} + \left(\int_{t_a}^{t_b} A_y(t)dt\right)\vec{j} + \left(\int_{t_a}^{t_b} A_z(t)dt\right)\vec{k}$$

ya que los versores de la base son constantes en el sistema de referencia utilizado. Estas tres integrales, al ser de funciones escalares, cumplen todas las propiedades características del cálculo integral.

### 1.20.1. Integral de línea de un vector

Se llama campo vectorial a la correspondencia entre cada punto de una región del espacio y una función vectorial que denotaremos por $\vec{a}(x,\, y,\, z)$. A cada punto del espacio le corresponde uno y solo un valor de la magnitud vectorial.

Dentro de dicha región se puede trazar una curva $L$ que denominaremos trayectoria o camino y se fija un recorrido sobre la trayectoria, digamos desde un extremo A hacia el otro B. Un elemento $d\vec{l}$ es un vector elemental contenido en la trayectoria y cuyo sentido coincide con el del recorrido.

Por definición, se llama **INTEGRAL DE LÍNEA** del campo vectorial $\vec{a}$ a lo largo de la trayectoria $L$ a la integral

$$\Gamma = \int_{A\ L}^{B} \vec{a} \cdot d\vec{l}$$

La integral de línea de un vector recibe el nombre de circulación cuando la trayectoria $L$ es cerrada. En este caso, se utiliza la siguiente notación

$$\Gamma = \oint_L \vec{a} \cdot d\vec{l}.$$

De la definición deducimos que el valor de la integral de línea o circulación cambia de signo cuando se invierte el recorrido, pero no cambia su valor absoluto. Esta magnitud tiene significados físicos concretos que veremos más adelante.

## 1.21. Introducción a los sistemas de vectores deslizantes

Se define un sistema de vectores deslizantes como un conjunto de $n$ vectores $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ tal que cualquier vector genérico $\vec{a}_i$ de este sistema puede aplicarse en un punto cualquiera $\mathrm{A}_i$ de su recta soporte (Fig. 1.21).

Manejar un número grande de vectores puede resultar tedioso. Trataremos aquí la manera de reducir el sistema a “algo” más simple y cuyos efectos físicos sean similares. Es decir, encontraremos un “SISTEMA EQUIVALENTE”.

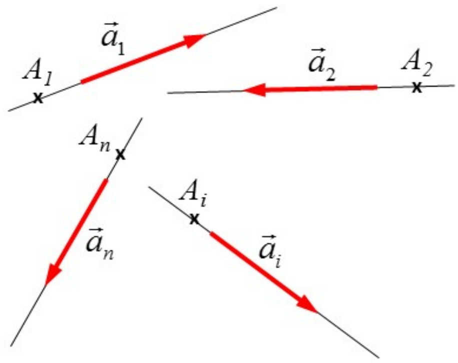



**Figura 1.21:** Sistema de vectores deslizantes.

## 1.22. Primeras definiciones

**RESULTANTE**: Definimos la resultante ($\vec{R}$) del sistema como el vector obtenido al sumar los $n$ vectores que lo forman.

$$\vec{R} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i \tag{1.22}$$

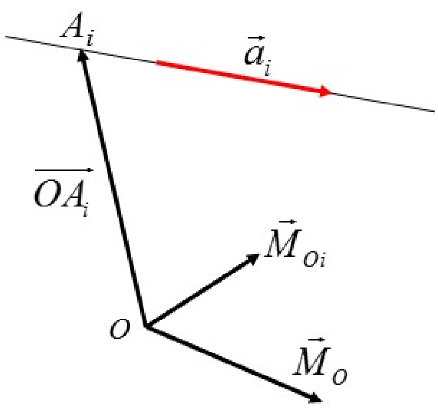



**Figura 1.22:** Momento de un sistema de vectores deslizantes.

**MOMENTO RESULTANTE RESPECTO A UN PUNTO**: Definimos el momento resultante del sistema con respecto a un punto $O$ ($\vec{M}_O$) como el vector obtenido al sumar los momentos con respecto al punto $O$ de cada uno de los vectores del sistema (Fig. 1.22).

$$\vec{M}_O = \overrightarrow{OA}_1 \times \vec{a}_1 + \overrightarrow{OA}_2 \times \vec{a}_2 + \ldots + \overrightarrow{OA}_n \times \vec{a}_n = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA}_i \times \vec{a}_i \tag{1.23}$$

También $\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{a}_i$ donde $\vec{r}_i = \overrightarrow{OA}_i$.

La resultante ($\vec{R}$) y el momento resultante con respecto a un punto ($\vec{M}_O$) son dos vectores que caracterizan al sistema en un punto $O$. Por su propia definición, el momento resultante depende del punto elegido para calcularlo, mientras que la resultante no.

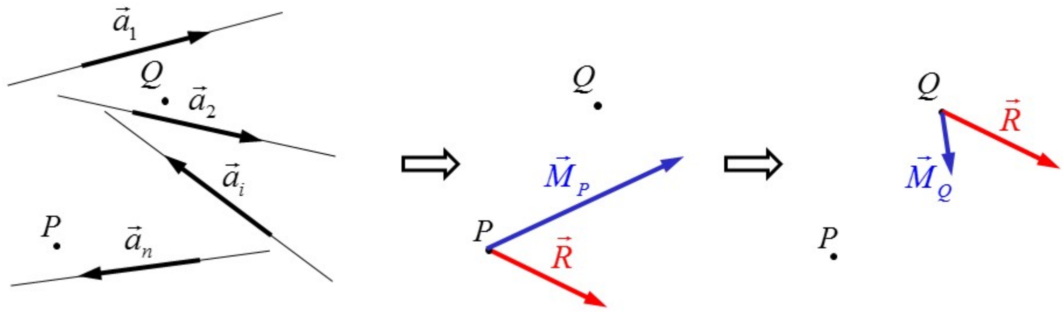



**Figura 1.23:** Reducción de un sistema de vectores deslizantes a un punto.

En la figura 1.23, el sistema se reduce a un punto $P$, a la resultante $\vec{R}$ y a $\vec{M}_P$ y a un punto $Q$ también a la resultante $\vec{R}$ y a un momento resultante $\vec{M}_Q$. Los tres sistemas son mecánicamente equivalentes.

**REDUCCIÓN DEL SISTEMA A UN PUNTO**: Todo sistema de vectores deslizantes es equivalente (o bien, puede sustituirse sin variar los efectos que causa) por la resultante del sistema aplicada en un punto y el momento resultante del sistema con respecto a ese punto (Fig. 1.23).

## 1.23. Teorema del cambio de polo

Una vez calculado el momento resultante del sistema con respecto a un punto O, es fácil determinar el momento resultante con respecto a otro punto O' sin necesidad de tener que volver a repetir todo el proceso utilizando de nuevo la definición [1.23].

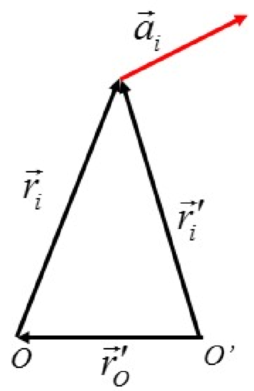



**Figura 1.24:** Variables de teorema de cambio de polo.

Suponemos conocido: $\vec{M}_O = \sum\limits_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{a}_i$ y queremos calcular: $\vec{M}_{O'} = \sum\limits_{i=1}^{n} \vec{r}_i' \times \vec{a}_i$. Como $\vec{r}_i'=\vec{r}_O'+\vec{r}_i$ y aplicando la propiedad distributiva del producto vectorial:

$$\vec{M}_{O'} = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}'_O \times \vec{a}_i) + \vec{M}_O$$

pero además:

$$\sum_{i=1}^{n} (\vec{r}'_O \times \vec{a}'_i) = \vec{r}'_O \times \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i = \vec{r}'_O \times \vec{R}$$

Y, por definición de resultante [1.22], este término se puede escribir como $\vec{r}'_O \times \vec{R}$. Es decir:

$$\vec{M}_{O'} = \vec{r}'_O \times \vec{R} + \vec{M}_O \tag{1.24}$$

"*El momento resultante del sistema con respecto a un punto* $O'(\vec{M}_{O'})$ *es igual al momento resultante del sistema con respecto a otro punto* $O(\vec{M}_O)$*más el momento con respecto a O' de la resultante del sistema* ($\vec{R}$) *aplicada en el punto O* ($\vec{r}'_o \times \vec{R}$)"

### 1.23.1. Casos particulares en que coinciden los momentos en dos puntos

A) $\vec{r}'_O = 0 \Rightarrow O' \equiv O$

B) $\vec{R} = 0$

Cuando la resultante del sistema de vectores es nula, el momento del sistema con respecto a un punto es independiente del punto elegido para calcularlo.

El ejemplo más simple de sistema de vectores deslizantes con resultante nula es el conocido como **PAR DE VECTORES** (Fig. 1.25): "Sistema formado por dos vectores de igual módulo, rectas soporte paralelas y sentidos opuestos".

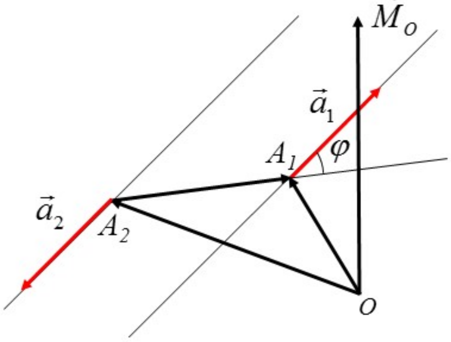



**Figura 1.25:** Par de vectores.

Como ya hemos demostrado si $\vec{R} = 0$ el momento resultante es independiente del punto elegido para calcularlo [1.24].

$$\vec{M}_{O'} = \vec{r}_O' \times \vec{R} + \vec{M}_O = \vec{M}_O$$

Este momento vale $\vec{M}_O = \vec{r}_1 \times \vec{a}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{a}_2$ que con $\vec{a}_1 = -\vec{a}_2$ y aplicando la propiedad distributiva del producto vectorial:

$$\vec{M}_O = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{a}_1 = \vec{r}_{21} \times \vec{a}_1 \; ; \quad \vec{r}_{21} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

cuyo módulo es $\left|\vec{M}_O\right| = |\vec{r}_{12}| \, |\vec{a}_1| \sin\varphi = |\vec{a}_1| \, d$ siendo $d$ la distancia que separa las rectas soporte de ambos vectores y $\varphi$ el ángulo que forman $\vec{r}_{21}$ y $\vec{a}_1$.

El par de vectores es un sistema caracterizado por ser equivalente a un momento de valor conocido y aplicado en cualquier punto del espacio (vector libre).

Si disponemos de un sistema formado por un conjunto de pares de vectores, la resultante ($\vec{R}$) del sistema seguirá siendo nula, e independiente del punto elegido para reducir el sistema; cada uno de los pares es equivalente a un único vector momento que, como ya sabemos, es un vector libre.

Así, el sistema será equivalente a un único vector momento obtenido como suma de los momentos de cada uno de los pares:

$$\vec{R} = 0 \, ; \;\; \vec{M}_O = \sum_i \vec{M}_{Oi}$$

El concepto de par de vectores es útil para completar el significado físico de las fuerzas aplicadas a un sólido rígido. El principio de transmisibilidad permite tratar las fuerzas aplicadas a un sólido rígido como vectores deslizantes. Los efectos mecánicos de las fuerzas no cambian si estas se trasladan a lo largo de su recta de acción (recta soporte). Pero, ¿qué ocurre si lo que se pretende es trasladar la fuerza a un punto que no esté sobre su recta soporte (es decir, paralelamente a sí misma)?

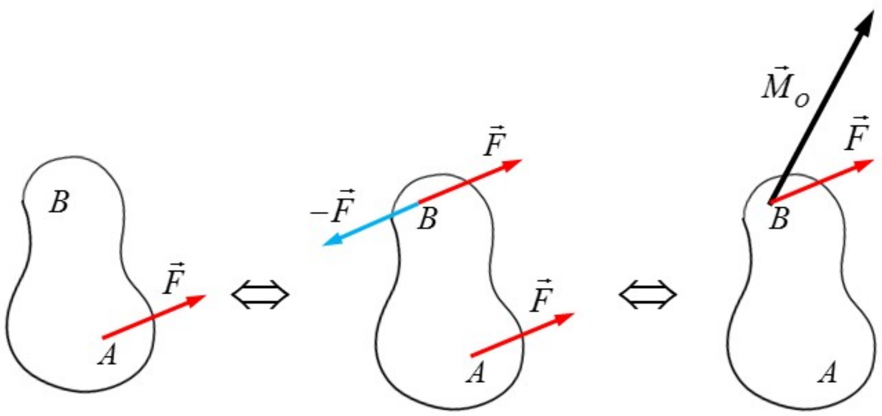



**Figura 1.26:** Reducción de una fuerza a un punto diferente.

Supongamos un sólido sometido a una única fuerza $\vec{F}$ aplicada en el punto A (Fig. 1.26). Se trata de aplicar la misma fuerza $\vec{F}$ en otro punto B del sólido de forma que los efectos físicos (mecánicos) sean los mismos que cuando estaba aplicada en A.

Añadimos un sistema con resultante nula y momento resultante con respecto a cualquier punto también nulo. Este sistema estará compuesto por dos vectores iguales y opuestos aplicados en un mismo punto, en este caso el punto B. Considerando ahora el conjunto de las fuerzas, tendremos un sistema con resultante $\vec{R} = \vec{F}$ aplicada en B y un par de momento $\vec{M}_B = \vec{r}_{BA} \times \vec{F}$.

Si en lugar de una única fuerza $\vec{F}$ hubiera $n$ fuerzas, se puede seguir el mismo proceso para cada una de ellas y, en definitiva, el sistema sería equivalente a una resultante $\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i$ y un momento resultante $\vec{M}_B = \sum_i \vec{M}_{Bi}$.

C) $\vec{r}_O'$ paralelo a $\vec{R}$.

El momento resultante del sistema con respecto a puntos situados en una misma recta paralela a la resultante ($\vec{R}$) es el mismo.

La dirección de la resultante define rectas paralelas a ella y caracterizadas cada una por el hecho de que el momento resultante del sistema es el mismo independientemente del punto de la recta elegido para calcularlo. Dada una recta $r_1$ paralela a la resultante ($\vec{R}$), el momento resultante del sistema es el mismo con respecto a cualquier punto de esa recta. Para otra recta paralela a $\vec{R}$, $r_2$ ocurrirá igual, aunque el momento no tiene por qué valer lo mismo.

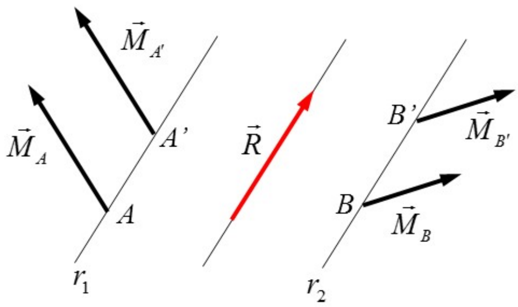



**Figura 1.27:** Campo de momentos.