CINEMÁTICA DE UNA PARTÍCULA

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

cc BY NC SA

ÍNDICE

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

MECÁNICA

- Cinemática
  - Es la parte de la mecánica que se ocupa del estudio del movimiento de los objetos haciendo abstracción de las causas que lo producen o modifican.
- Dinámica
  - Es la parte de la mecánica que se ocupa del estudio de las fuerzas como causas que producen o modifican el movimiento de los objetos.
- Estática
  - Es la parte de la mecánica que se ocupa del estudio del estado de equilibrio de los objetos sometidos a fuerzas.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

PRIMERAS DEFINICIONES

- Partícula material
  - Es un objeto de masa finita y que no tiene dimensiones. Es decir, sus dimensiones se pueden asimilar a las de un punto geométrico.
- Sistema de referencia
  - Queremos describir el movimiento real de un objeto en función de sus cambios de posición en intervalos de tiempo conocidos. Es decir, debemos saber dónde está y en qué instante. Para ello hay que referir la posición del objeto a algo que esté en reposo.
  - Ese "algo" es lo que llamaremos sistema de referencia y, consideraremos que está fijo o que tiene un movimiento conocido.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

PRIMERAS DEFINICIONES

- Espacio absoluto
  - Aunque puedan existir problemas de coherencia, es necesario aceptar como hipótesis básica de la mecánica newtoniana que el espacio es absoluto, homogéneo e isótropo, constituyendo así el marco fijo donde tienen lugar todos los fenómenos.
  - En este espacio absoluto newtoniano las medidas también tienen carácter absoluto.
  - Independientemente de su estado de movimiento, dos observadores distintos miden la misma distancia entre dos puntos A y B del espacio.

PRIMERAS DEFINICIONES

- Tiempo absoluto
  - El tiempo es absoluto en cuanto que también tiene una existencia propia independiente del observador. Transcurre de la misma forma en todo el espacio, independientemente de la medida que de él hagamos.
  - Newton escribió: "El tiempo absoluto, real y matemático, por sí, desde su propia naturaleza discurre igualmente sin relación con ninguna cosa externa, y por otro nombre se le llama duración".

PRIMERAS DEFINICIONES

- Reposo y movimiento
  - Diremos que un objeto está en reposo con respecto a un determinado sistema de referencia cuando sus coordenadas en ese sistema de referencia no son funciones del tiempo.
  - En caso contrario diremos que está en movimiento.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

PRIMERAS DEFINICIONES

- Coordenadas
  - En un sistema físico son el conjunto de parámetros necesario para determinar, en cada instante, la posición en el espacio de todas las partes que componen el sistema.
    - Por ejemplo, si el sistema es una única partícula material y su movimiento lo estamos refiriendo a un sistema de referencia cartesiano, necesitaremos tres parámetros $(x(t),y(t),z(t))$ para tener determinada su posición en cada instante.
    - Estos parámetros son longitudes en este caso, pero no necesariamente siempre. Si utilizásemos un sistema de referencia en coordenadas esféricas, los tres parámetros serían una longitud y dos ángulos

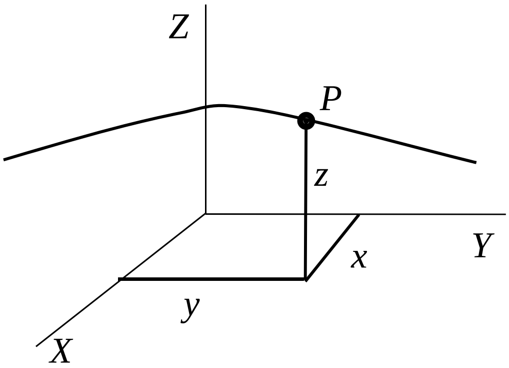
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

POSICIÓN

Ecuaciones paramétricas del movimiento:

La posición de una partícula material P en el espacio, en función del tiempo, se puede conocer si se conocen sus coordenadas, $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, en un determinado sistema de referencia.

Estas tres funciones son las ecuaciones paramétricas del movimiento o ecuaciones horarias:



$$x = x(t)$$
$$y = y(t)$$
$$z = z(t)$$

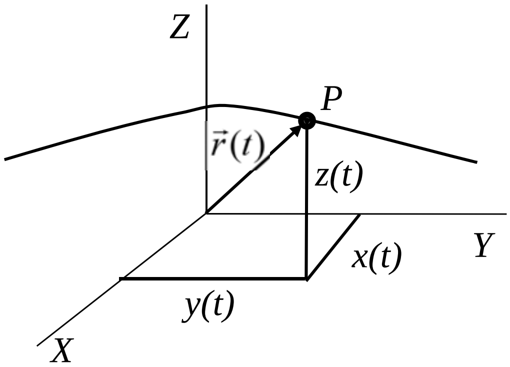
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

POSICIÓN

Vector de posición:

Vector que tiene origen en el origen de coordenadas y componentes la posición de la partícula a lo largo del tiempo.

Es decir, sus componentes son las ecuaciones paramétricas del movimiento.



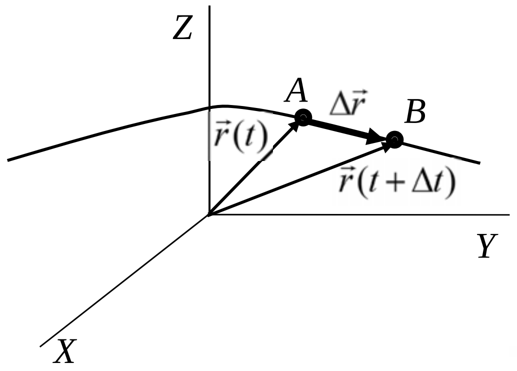
$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

POSICIÓN

Vector desplazamiento:

Se llama vector desplazamiento entre dos posiciones de la partícula, consecutivas en el tiempo, a un vector con origen en la primera posición y extremo en la segunda.



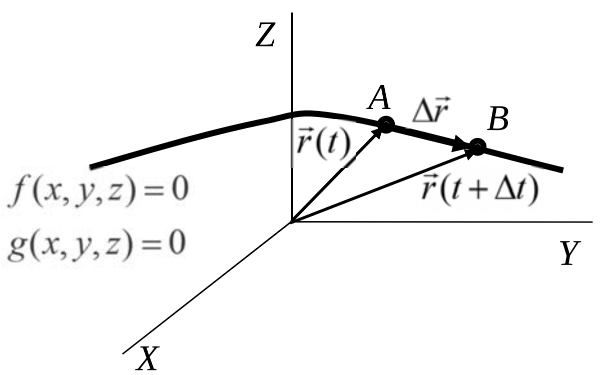
$$\Delta\vec{r} = \overrightarrow{AB} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

POSICIÓN

Trayectoria:

Lugar geométrico de las sucesivas posiciones que la partícula va ocupando en el espacio a lo largo de su movimiento.



Eliminando el tiempo entre las tres ecuaciones paramétricas, se obtiene la ecuación analítica de la trayectoria

$$f(x,y,z)=0$$

$$g(x,y,z)=0$$

que será, en general, una curva alabeada en el espacio

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

VELOCIDAD

Vector velocidad:

Variación del vector de posición con el tiempo.

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

En coordenadas cartesianas:

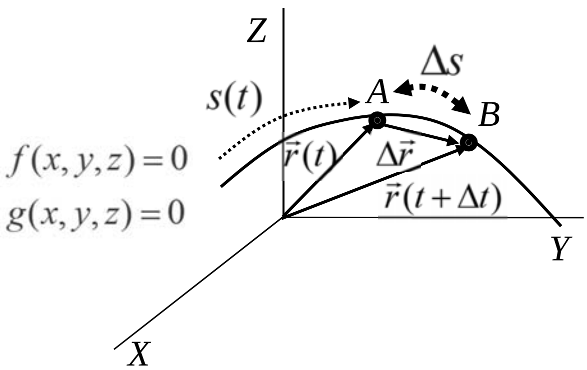
$$\vec{v}(t) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

VELOCIDAD

Ley horaria $s(t)$:

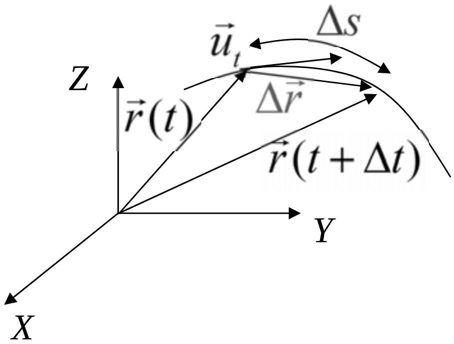
Espacio recorrido por la partícula a lo largo de la trayectoria en función del tiempo a partir de una cierta posición inicial.



J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

VELOCIDAD

$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|}\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta s}\frac{\Delta s}{\Delta t} \underset{\Delta t\to 0}{\longrightarrow} \vec{u}_t \; 1 \, |\vec{v}|$$



$\vec{u}_t$ =Vector unitario tangente

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{u}_t = v\,\vec{u}_t$$

Variación del camino recorrido $s(t)$ con el tiempo en la dirección del vector unitario tangente

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

ACELERACIÓN

Vector aceleración:

Variación del vector velocidad con el tiempo $\vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

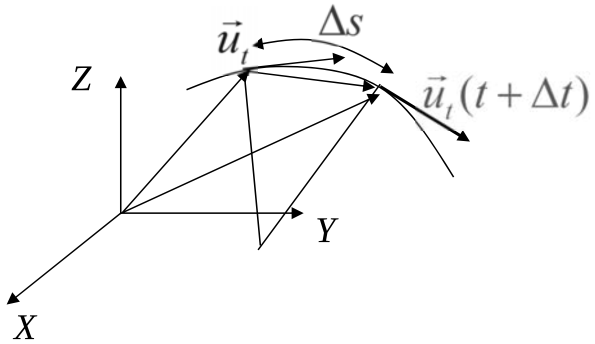
En coordenadas cartesianas: $\vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\vec{i} + \ddot{y}(t)\vec{j} + \ddot{z}(t)\vec{k}$

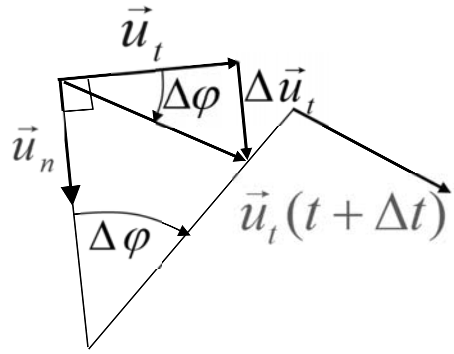
$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ y como $\vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{u}_t$

$$\vec{a} = \frac{d((ds/dt)\vec{u}_t)}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}\vec{u}_t + \frac{ds}{dt}\frac{d\vec{u}_t}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_t + v\frac{d\vec{u}_t}{dt}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

ACELERACIÓN





$\vec{u}_n$=Vector unitario normal

$\vec{u}_t$=Vector unitario tangente

$$\vec{u}_t \cdot \vec{u}_t = 1 \rightarrow \vec{u}_t \cdot \frac{d\vec{u}_t}{dt} + \frac{d\vec{u}_t}{dt} \cdot \vec{u}_t = 0 \rightarrow \vec{u}_t \cdot \Delta\vec{u}_t = 0$$

$$\vec{u}_t \perp \Delta\vec{u}_t = 0 \rightarrow \Delta\vec{u}_t = \left|\Delta\vec{u}_t\right|\vec{u}_n$$

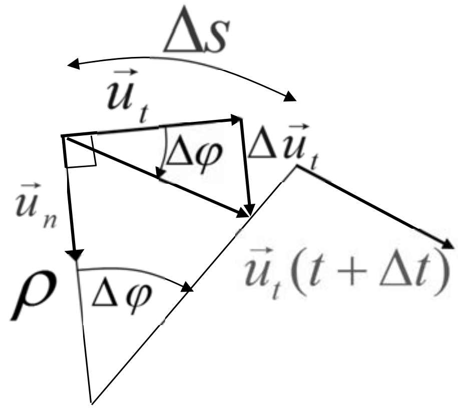
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

ACELERACIÓN

$$\frac{d\vec{u}_t}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{u}_t}{\Delta t}$$

$$\Delta\vec{u}_t = \left|\Delta\vec{u}_t\right|\vec{u}_n$$

$$\left|\Delta\vec{u}_t\right| = \left|\vec{u}_t\right|\Delta\varphi$$



$$\frac{\Delta\vec{u}_t}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{u}_t}{\Delta\varphi}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\vec{u}_n \cdot \overbrace{\left|\vec{u}_t\right|}^{1} \cdot \Delta\varphi}{\Delta\varphi}\frac{\Delta s / \rho}{\Delta s}\, v = \frac{v}{\rho}\vec{u}_n \rightarrow \frac{d\vec{u}_t}{dt} = \frac{v}{\rho}\vec{u}_n$$

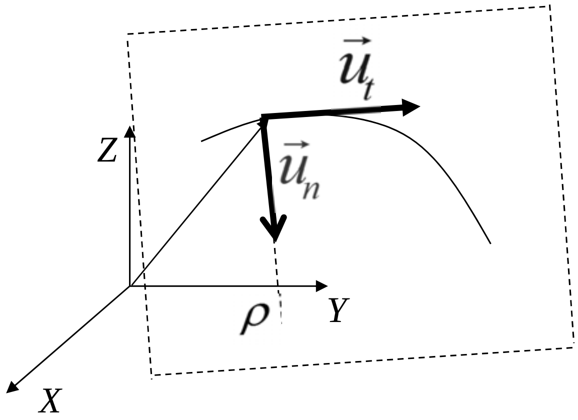
$$\Delta s = \Delta\varphi \;\rho$$

Arco = ángulo × radio

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_t + \frac{v^2}{\rho}\vec{u}_n$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

ACELERACIÓN



$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_t + \frac{v^2}{\rho}\vec{u}_n$$

Plano osculador:

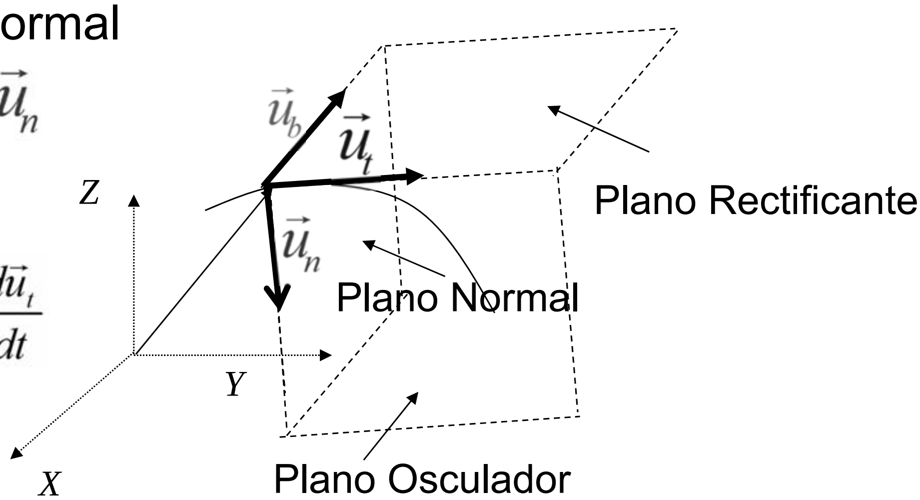
Plano definido por $\vec{u}_t$ y $\vec{u}_n$. El unitario perpendicular a este plano define la dirección binormal.

ACELERACIÓN

Unitario Binormal

$$\vec{u}_b = \vec{u}_t \times \vec{u}_n$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_t + v\frac{d\vec{u}_t}{dt}$$



El triedro intrínseco o de Frenet está formado por el unitario tangente, normal y binormal.

ACELERACIÓN

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

$\vec{a}_t = \dfrac{dv}{dt}\vec{u}_t$ vector aceleración tangencial

$\vec{a}_n = \dfrac{v^2}{\rho}\vec{u}_n$ vector aceleración normal

$\dfrac{1}{\rho} = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta s}$ radio de curvatura $\left(\rho = \dfrac{v^3}{|\vec{a}\times\vec{v}|}\right)$

$$\frac{v^3}{|\vec{a}\times\vec{v}|} = \frac{v^3}{|(\vec{a}_t+\vec{a}_n)\times\vec{v}|} = \frac{v^3}{|\vec{a}_n\times\vec{v}|} = \frac{v^3}{v^3/\rho} = \rho$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

ACELERACIÓN

Casos particulares:

- Movimiento Circular de Radio R: $\rho = R$

  Movimiento Circular Uniforme: $\vec{a}_t = 0; |\vec{a}_n| = cte$

- Movimiento Rectilíneo: $\rho = \infty$

  $\vec{a}_n = 0$

  Movimiento Rectilíneo Uniforme: $\vec{a}_t = 0$

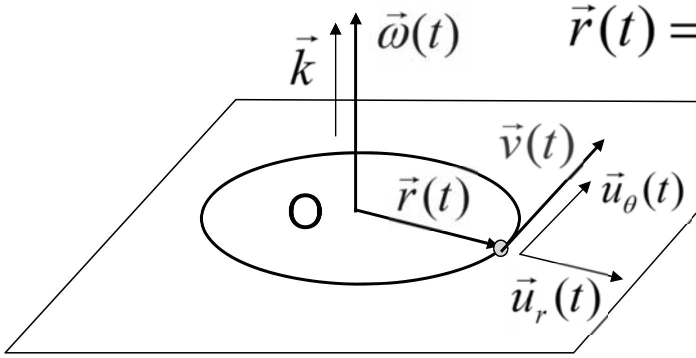
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

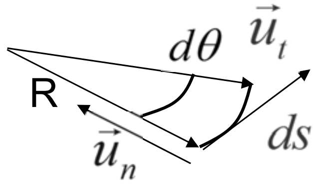
MOVIMIENTO CIRCULAR

Tomamos como origen del sistema de referencia O el centro de giro:

Utilizando los versores de coordenadas cilíndricas:

$$\vec{r}(t) = R\,\vec{u}_r$$





$$\vec{u}_t = \vec{u}_\theta; \quad \vec{u}_n = -\vec{u}_r$$

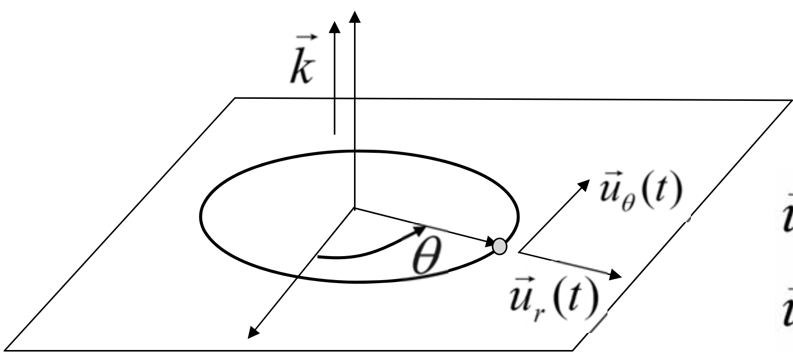
$$\vec{v}(t) = \frac{ds}{dt}\vec{u}_t = \frac{Rd\theta}{dt}\vec{u}_\theta = \omega R\,\vec{u}_\theta \rightarrow \vec{v}(t) = \omega R\,\vec{u}_\theta$$

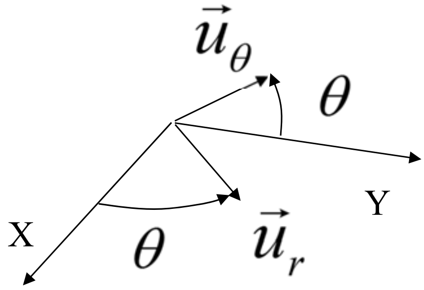
Vector velocidad angular

También: $\vec{v}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t) = \omega\vec{k} \times R\vec{u}_r = \omega R\,\vec{u}_\theta$

MOVIMIENTO CIRCULAR

En función del ángulo:



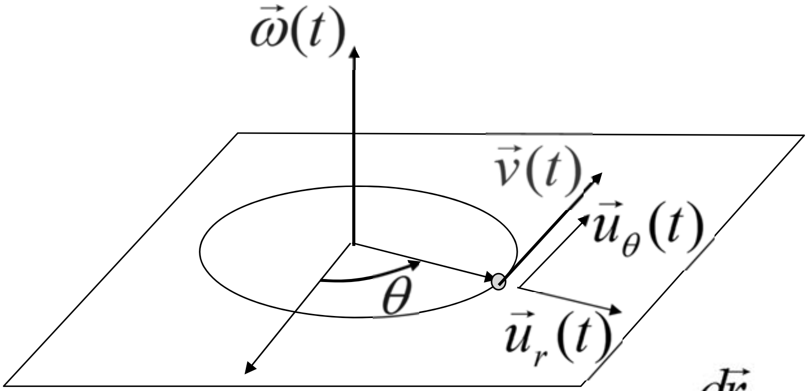


$$\vec{u}_r(\theta) = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}$$

$$\vec{u}_\theta(\theta) = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}$$

$$\frac{d\vec{u}_r}{d\theta} = \vec{u}_\theta; \quad \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = -\vec{u}_r$$

MOVIMIENTO CIRCULAR



$$\vec{\omega}(t)=\dot{\theta}\vec{k}=\omega\vec{k}=\frac{d\theta}{dt}\vec{k}$$

$$\vec{\alpha}(t)=\ddot{\theta}\vec{k}=\frac{d\omega}{dt}\vec{k}=\alpha\vec{k}$$

Vector aceleración angular

$$\vec{v}(t)=\frac{d\vec{r}}{dt}=R\frac{d\vec{u}_r}{dt}=R\frac{d\vec{u}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=R\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

$$\vec{a}(t)=\ddot{\theta}R\,\vec{u}_\theta+R\dot{\theta}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}=\alpha R\,\vec{u}_\theta-R\omega^2\vec{u}_r=\alpha R\vec{u}_t+R\omega^2\vec{u}_n$$

$\vec{a}_n$ $\vec{a}_t$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

MOVIMIENTO CIRCULAR

$$\vec{v}(t)=\vec{\omega}(t)\times\vec{r}(t)$$

$$\vec{a}(t)=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}(t)+\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{a}(t)=\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}(t)+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}(t)\times\vec{r}(t))$$

$$\vec{a}_n=\vec{\omega}\times(\vec{\omega}(t)\times\vec{r}(t)) \qquad \vec{a}_t=\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}(t)=\vec{\alpha}\times\vec{r}(t)$$

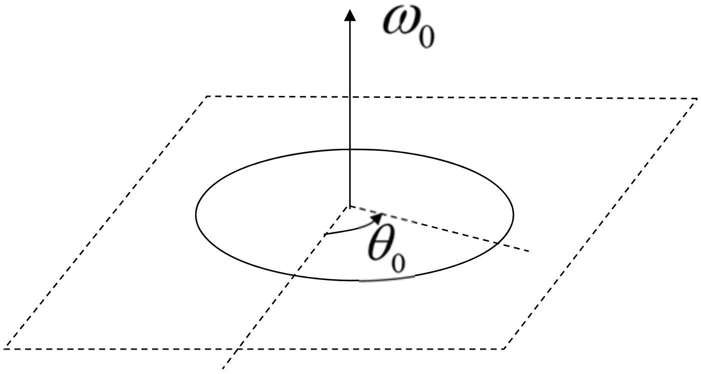
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

MOVIMIENTO CIRCULAR

Movimiento circular uniforme $(\alpha = 0)$:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_0 = cte \longrightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^{t} \omega_0 dt \longrightarrow \theta = \theta_0 + \omega_0 (t - t_0)$$

Separación de variables



El ángulo inicial para $t=t_0$ es θ_0

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

MOVIMIENTO CIRCULAR

Movimiento Circular Uniformemente Acelerado $(\alpha = cte)$:

$$\frac{d\omega}{dt} = \alpha_0 = cte \longrightarrow \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_{t_0}^{t} \alpha_0 dt \longrightarrow \frac{d\theta}{dt} = \omega = \omega_0 + \alpha_0 (t - t_0)$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^{t} (\omega_0 + \alpha_0 (t - t_0)) dt$$

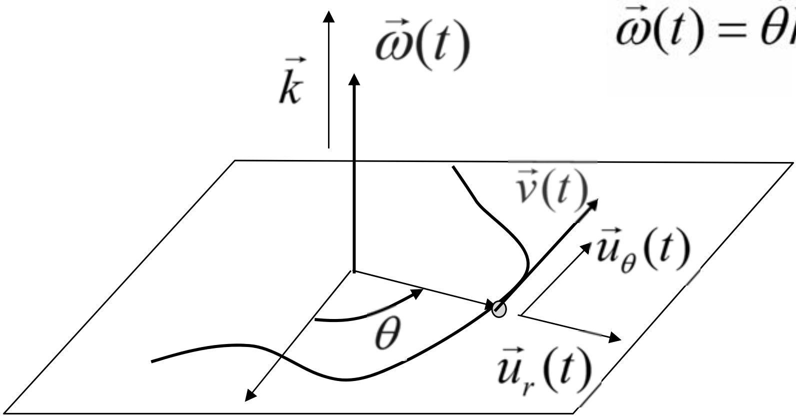
$$\theta = \theta_0 + \omega_0 (t - t_0) + \frac{1}{2} \alpha_0 (t - t_0)^2$$

El ángulo y velocidad angular iniciales para $t=t_0$ son θ_0 y ω_0, respectivamente.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

MOVIMIENTO EN UN PLANO

Coordenadas polares:



$$\vec{\omega}(t) = \dot{\theta}\vec{k} = \frac{d\theta}{dt}\vec{k} \qquad \vec{r}(t) = r\,\vec{u}_r$$

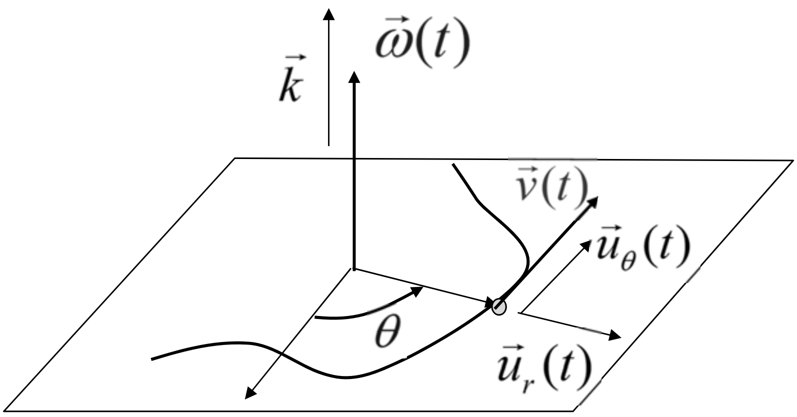
$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(r(t)\vec{u}_r(t))}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \overbrace{\dot{r}\,\vec{u}_r}^{\text{radial}} + \underbrace{r\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta}_{\text{transversal o polar}}$$

$$|v| = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

MOVIMIENTO EN UN PLANO

Coordenadas polares:



$$\vec{v}(t) = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$$

$$\vec{a}(t) = \ddot{r}\,\vec{u}_r + \dot{r}\frac{d\vec{u}_r}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}$$

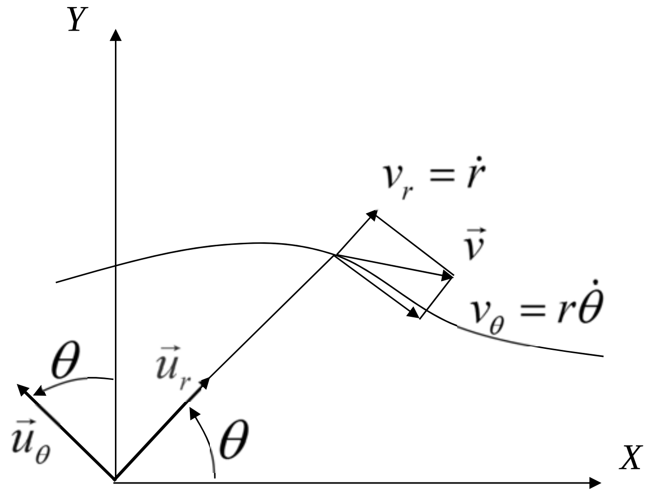
$$\vec{a}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\vec{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\vec{u}_\theta$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

MOVIMIENTO EN UN PLANO

Coordenadas polares:

$$\vec{v}(t) = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta \qquad \vec{a}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\vec{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\vec{u}_\theta$$



Movimiento Circular

$$r = R; \quad \dot{r} = 0; \quad \ddot{r} = 0$$

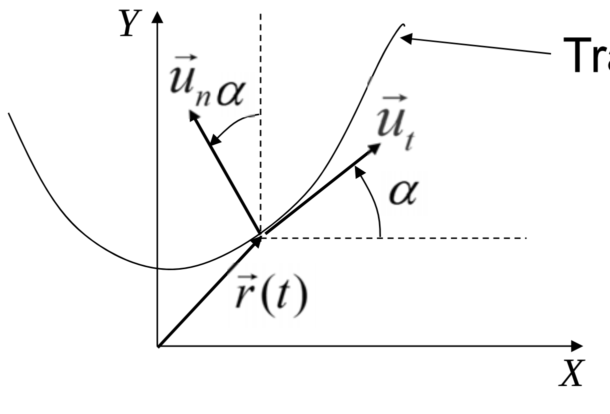
$$\vec{v}(t) = R\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$$

$$\vec{a}(t) = -R\dot{\theta}^2\vec{u}_r + R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

MOVIMIENTO EN UN PLANO

Coordenadas cartesianas:



Trayectoria: $y = y(x)$

$$\vec{v}(t) = \frac{ds}{dt}\vec{t} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j}$$

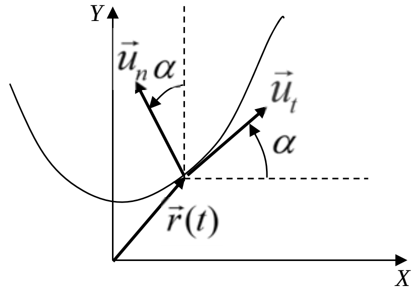
$$|\vec{v}(t)| = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \longrightarrow ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$\longrightarrow \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

MOVIMIENTO EN UN PLANO

Coordenadas cartesianas:



$$\tan\alpha = \frac{dy}{dx}$$

$$\vec{u}_t = \cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j} = \cos\alpha(\vec{i} + \tan\alpha\,\vec{j}) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}(\vec{i} + \tan\alpha\,\vec{j})$$

$$\vec{u}_t = \pm\frac{1}{\sqrt{1+(dy/dx)^2}}(\vec{i} + \frac{dy}{dx}\vec{j})$$ (el signo depende del sentido de movimiento, en la figura +)

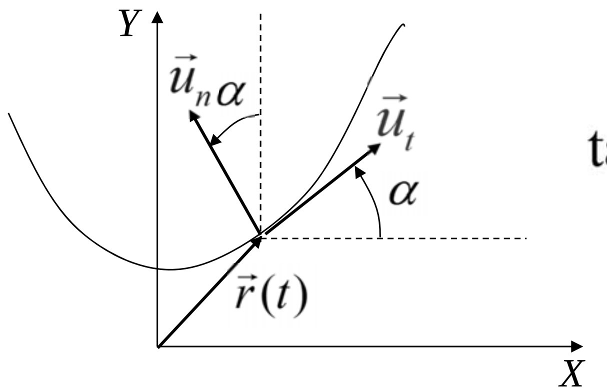
$$\vec{u}_n = -\sin\alpha\,\vec{i} + \cos\alpha\,\vec{j} = \cos\alpha(-\tan\alpha\vec{i} + \vec{j}) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}(-\tan\alpha\vec{i} + \vec{j})$$

$$\vec{u}_n = \pm\frac{1}{\sqrt{1+(dy/dx)^2}}(-\frac{dy}{dx}\vec{i} + \vec{j})$$ (el signo depende de la curvatura de la trayectoria, en la figura +)

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

MOVIMIENTO EN UN PLANO

Coordenadas cartesianas:



$$\tan\alpha = \frac{dy}{dx}$$

Se puede demostrar que:

$$\rho = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

MOVIMIENTO RECTILÍNEO

Movimiento Rectilíneo Uniforme (MRU):

$$\frac{dx}{dt} = v_0 = cte \longrightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v_0 dt \longrightarrow x = x_0 + v_0(t - t_0)$$

Separación de Variables

La posición inicial para $t=t_0$ es x_0

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

MOVIMIENTO RECTILÍNEO

Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado (MRUA):

$$\frac{dv}{dt} = a_0 = cte \longrightarrow \int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a_0 dt \longrightarrow \frac{dx}{dt} = v = v_0 + a_0(t - t_0)$$

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} (v_0 + a_0(t - t_0))dt \longrightarrow x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a_0(t - t_0)^2$$

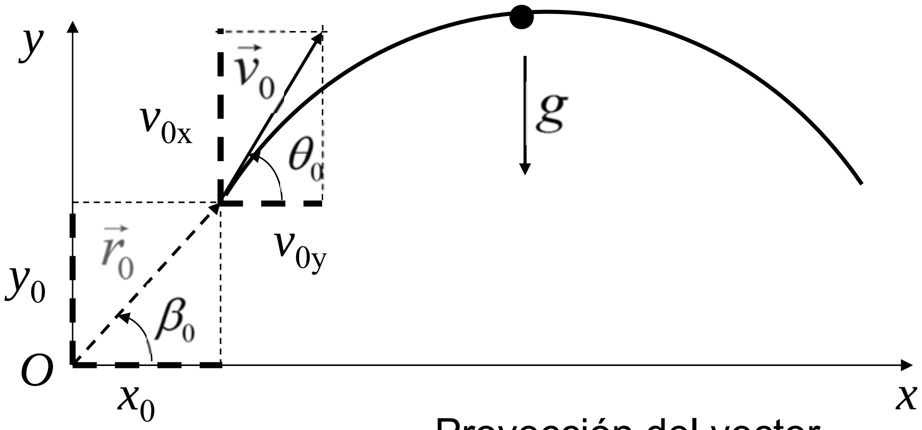
La posición y velocidad inicial para $t=t_0$ es x_0 y v_0, respectivamente.

El movimiento se dice acelerado si velocidad y aceleración tienen el mismo sentido y retardado si tienen sentidos opuestos.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

MOVIMIENTO PARABÓLICO

Es una combinación de dos movimientos rectilíneos



$$a_x = 0$$
$$a_y = -g$$

Condiciones iniciales:

Proyección del vector de posición inicial en cada eje

$$x_0 = r_0 \cos\beta_0$$
$$y_0 = r_0 \sin\beta_0$$

Proyección del vector velocidad inicial en cada eje

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta_0$$
$$v_{0y} = v_0 \sin\theta_0$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

MOVIMIENTO PARABÓLICO

Integrando una vez, teniendo en cuenta las condiciones iniciales de velocidad, se calcula la velocidad

$$\int_{v_{0x}}^{v_x} dv_x = \int_0^t 0\,dt \rightarrow v_x(t) = v_{0x}$$
$$\int_{v_{0y}}^{v_y} dv_y = \int_0^t (-g)\,dt \rightarrow v_y(t) = v_{0y} - g\,t$$

Condiciones iniciales de velocidad:

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta_0$$
$$v_{0y} = v_0 \sin\theta_0$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

MOVIMIENTO PARABÓLICO

Integrando otra vez, y teniendo en cuenta las condiciones iniciales de posición, se calculan las ecuaciones paramétricas del movimiento:

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t v_{0x} dt \rightarrow x(t) = x_0 + v_{0x}\, t$$

$$\int_{y_0}^{y} dy = \int_0^t (v_{0y} - gt) dt \rightarrow y(t) = y_0 + v_{0y}\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

Condiciones iniciales de posición: (x_0, y_0)

Si elegimos el sistema de referencia con origen en el origen del movimiento:

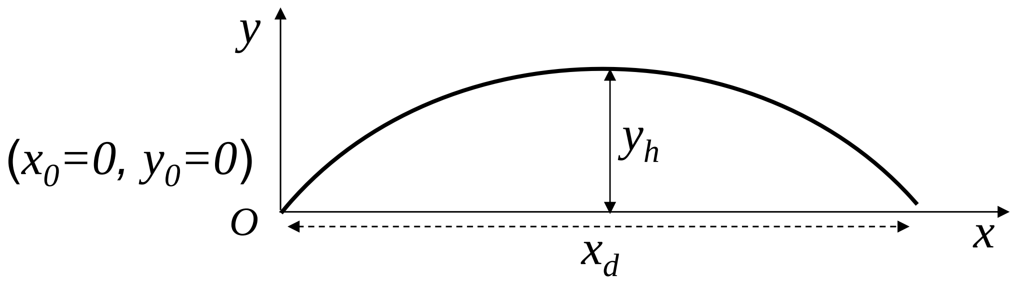
$(x_0=0,\ y_0=0)$ $\rightarrow$ $\begin{cases} x = v_0 t \cos\alpha \\ y = v_0 t \sin\alpha - g t^2 \end{cases}$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

MOVIMIENTO PARABÓLICO

Altura máxima (y_h)

Se calcula determinando el tiempo para el que la componente vertical de la velocidad se anula y sustituyendo este valor en la componente vertical de posición.



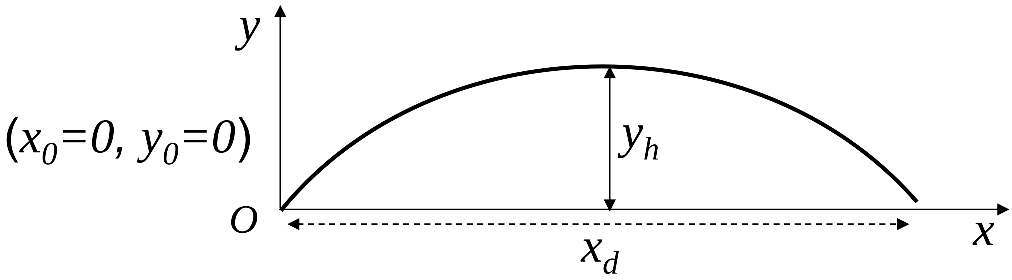
$$v_y = v_0 \sin\alpha - g t_h = 0$$

$$\rightarrow t_h = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} \rightarrow y_h = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

MOVIMIENTO PARABÓLICO

Alcance (x_d)
Se calcula determinando el tiempo para el que la componente vertical de la posición se anula y sustituyendo este valor en la componente horizontal de posición.



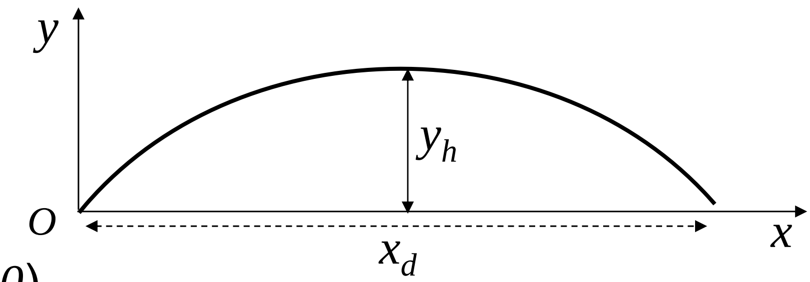
$$0 = v_0 t_d \sin\alpha - g t_d^2$$

$$t_d = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g} \longrightarrow x_d = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

MOVIMIENTO PARABÓLICO

Trayectoria:
Se calcula eliminando el tiempo en las ecuaciones paramétricas.



(x_0=0, y_0=0)

$$y = x\tan\alpha - \frac{g(1+\tan^2\alpha)}{2v_0^2}x^2$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval