

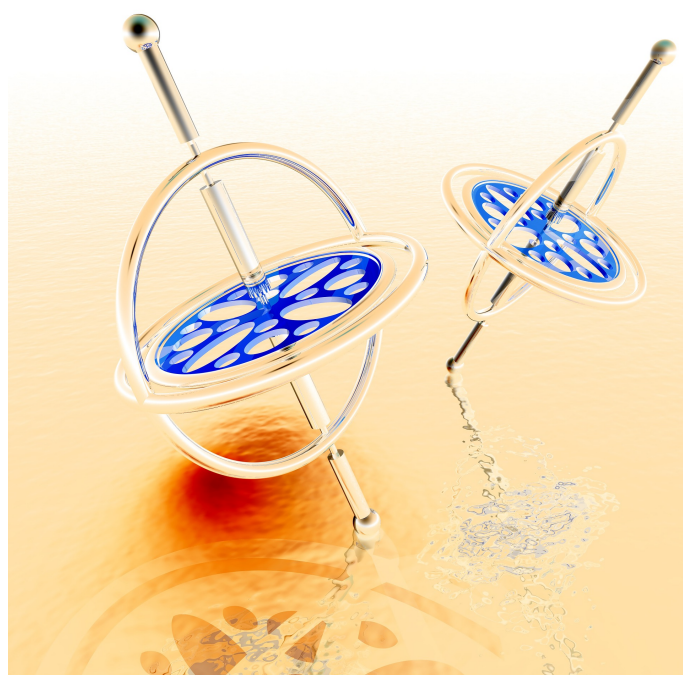


POLITÉCNICA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA
AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO

FÍSICA I

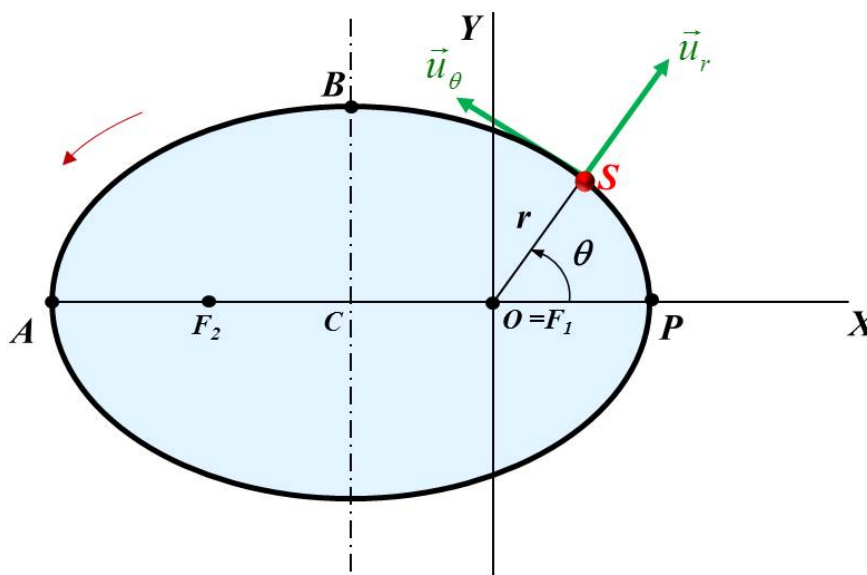
TEORÍA
Mecánica





POLITÉCNICA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO



TEMA 2.- CINEMÁTICA DE LA PARTÍCULA

José Carlos JIMÉNEZ SÁEZ

Pablo PALACIOS CLEMENTE

Santiago RAMÍREZ DE LA PISCINA MILLÁN

ÍNDICE CINEMÁTICA DE LA PARTÍCULA

2. Cinemática de la Partícula	1
2.1. Introducción	1
2.2. Conceptos previos	3
2.2.1. Partícula material	3
2.2.2. Espacio y tiempo	4
2.2.3. Sistemas de referencia. Reposo y movimiento	5
2.2.4. Sistema físico	5
2.2.5. Coordenadas. Grados de libertad	6
2.3. Descripción del movimiento de una partícula material en un sistema de referencia cartesiano	6
2.3.1. Ecuaciones paramétricas. Vector de posición	6
2.3.2. Trayectoria. Vector desplazamiento	7
2.3.3. Velocidad media. Vector velocidad	8
2.3.4. Vector aceleración	9
2.3.5. Hodógrafa	9
2.4. Descripción del movimiento de una partícula en función de parámetros de la trayectoria	10
2.4.1. Ley horaria	10
2.4.2. Velocidad	11
2.4.3. Aceleración	12
2.4.4. Triedro intrínseco o de Frenet	16
2.5. Relación entre la descripción del movimiento utilizando variables de camino y utilizando un sistema de referencia cartesiano	17
2.5.1. Movimiento plano	17
2.5.2. Movimiento espacial	18
2.6. Otros sistemas de coordenadas	20
2.6.1. Coordenadas polares	20
2.6.2. Coordenadas cilíndricas	23
2.6.3. Coordenadas esféricas	25
2.7. Estudio de algunos movimientos particulares	27
2.7.1. Movimiento rectilíneo	27
2.7.2. Movimiento circular	30
2.7.3. Combinación de dos movimientos rectilíneos. Movimiento parabólico	34
2.7.4. Movimiento helicoidal	38
2.8. Movimiento armónico simple (m.a.s.)	42
2.8.1. Introducción	42
2.8.2. Movimientos periódicos	42
2.8.3. Posición, velocidad y aceleración	42
2.8.4. Ecuación diferencial	44

2.8.5. Superposición de dos movimientos armónicos de la misma dirección y la misma frecuencia	47
2.8.6. Superposición de dos movimientos armónicos de la misma frecuencia y direcciones perpendiculares	49

2

Cinemática de la Partícula

2.1. Introducción

La parte de la física que se ocupa del estudio del movimiento y de las causas que lo producen se llama MECÁNICA. La mecánica se aplica a cualquier objeto y a cualquier movimiento. Estudiaremos la mecánica “clásica” o “newtoniana” (llamada así en honor de Isaac Newton) cuya aplicación queda restringida a objetos “grandes” comparados con el átomo y que se mueven a velocidades “pequeñas” comparadas con la de la luz. Otros apellidos, como cuántica o relativista, son los que acompañan a la mecánica cuando se ocupa del estudio del movimiento de objetos más “pequeños” o que se muevan a velocidades más “grandes”. La idea es que solo nos preocupa el movimiento de objetos “normales” y que se mueven a velocidades “normales”.

Establecidas estas restricciones, se da por hecho que siempre que hablemos de mecánica sin apellidos nos estaremos refiriendo a la mecánica clásica o newtoniana y que, cuando tengamos necesidad de referirnos a alguna otra, lo haremos explícitamente.

Históricamente la mecánica, en el sentido en que la hemos definido, tuvo como precursor a Galileo Galilei (1564-1642) y como primer autor de una teoría completa a Isaac Newton (1643-1727) quien en sus “Principios matemáticos de filosofía natural”, publicado en 1687, propuso sus tres famosas leyes sobre el movimiento, así como la ley de gravitación universal y aplicó todo ello al estudio de numerosos problemas, utilizando fundamentalmente conceptos y demostraciones geométricas.

A lo largo del siglo XVIII se desarrollaron planteamientos matemáticamente más perfeccionados de la mecánica por obra, esencialmente, de Leonard Euler (1707-1783), Jean le Roud d’Alembert (1717-1783), Joseph L. de Lagrange (1736-1813) y Pierre S. Laplace (1749-1827), que condujeron a la mecánica analítica, basada en la utilización del análisis matemático, con unos fundamentos más generales que el que proporcionan las leyes de Newton.

En el siglo XIX continuó el desarrollo de la mecánica analítica, al que contribuyó fundamentalmente William R. Hamilton (1805-1865), y se inició el estudio de la mecánica de los medios continuos que llevó a las ecuaciones básicas de la elasticidad y de la mecánica de fluidos, por obra de Claude Navier (1785-1836), Augustin L. Cauchy (1789-1857) y Georges G. Stokes (1819-1903).

A principios del siglo XX la mecánica desarrollada en épocas anteriores, a la que hacíamos mención al inicio del capítulo con el nombre de mecánica clásica, se manifestó inadecuada para interpretar los fenómenos que ocurren a velocidades próximas a la de la luz.

Fue sustituida, en ese ámbito, por la teoría especial de la relatividad, cuyos fundamentos se deben a Albert Einstein (1879-1955) y de la que la mecánica clásica constituye, como ya hemos mencionado, una buena aproximación para velocidades bajas.

Lo mismo sucedió con el estudio de fenómenos a escala microscópica (atómica o subatómica), para los que fue preciso desarrollar una nueva teoría, la mecánica cuántica, iniciada por Louis de Broglie (1892-1978), Erwin Schrödinger (1887-1961) y Paul Dirac (1902-1984). Hacia mediados del siglo XIX el éxito alcanzado por la mecánica clásica fue tal que se consideraba que el estudio del movimiento era un tema totalmente comprendido. A finales de dicho siglo Henri Poincaré (1854-1912) fue el primero en indicar que la realidad objeto de la mecánica es mucho más compleja de lo que se creía y que, incluso en sistemas aparentemente simples, es imposible encontrar siempre soluciones de las ecuaciones características de un sistema mecánico válidas para todo instante. Se inició así una extensión del objeto de la mecánica en lo que se conoce como teoría general de los sistemas dinámicos, que ha tenido un enorme desarrollo en los últimos años.

El hecho de haber tenido que recurrir en determinados casos a otras teorías diferentes no resta validez a la mecánica clásica, simplemente define con mayor precisión sus límites de aplicación, dentro de los cuales sigue siendo la teoría más adecuada.

A pesar de existir formulaciones teóricas, matemáticamente muy poderosas, de la mecánica clásica, vamos a utilizar la más tradicional, basada en el concepto de fuerza como mecanismo básico para explicar la causa que modifica el movimiento de un cuerpo y utilizando el análisis matemático como herramienta para desarrollar la teoría. Este enfoque sigue siendo el más adecuado para los objetivos de un curso de este nivel enfocado hacia una enseñanza de tipo tecnológico. Como leyes fundamentales utilizaremos las tres de Newton.

Dividiremos el estudio en tres partes:

Cinemática: Es la parte de la mecánica que se ocupa del estudio del movimiento de los objetos haciendo abstracción de las causas que lo producen o modifican.

Dinámica: Es la parte de la mecánica que se ocupa del estudio de las fuerzas como causas que producen o modifican el movimiento de los objetos.

Estática: Es la parte de la mecánica que se ocupa del estudio del estado de equilibrio de los objetos sometidos a fuerzas.

Es decir, la cinemática nos proporcionará las herramientas necesarias para describir el movimiento de los objetos (para explicar CÓMO se mueven), mientras que la dinámica hará lo propio para explicar esos movimientos (nos dirá POR QUÉ se mueven).

Iniciaremos el estudio de la mecánica describiendo los movimientos (cinemática) para pasar después a explicar el por qué de esos movimientos (dinámica), terminando con el estudio del equilibrio (estática) como un caso particular del movimiento. Y dentro de cada apartado seguiremos una secuencia lógica que nos conduzca a estudiar los problemas de menor a mayor complejidad.

El movimiento de un objeto estará definido cuando lo esté el de cada uno de los puntos que lo componen. Así, comenzaremos estudiando el movimiento de un punto (partícula material),

seguiremos con el de muchos puntos sin ligaduras específicas entre ellos (sistemas de partículas) para terminar con el estudio del movimiento de puntos ligados entre sí de una forma muy característica para formar un objeto (sólido rígido).

2.2. Conceptos previos

Al hablar del movimiento de objetos nos encontramos enseguida con algunos conceptos primarios, con respecto a los cuales es necesario que nos pongamos de acuerdo en cuanto a su significado. La idea de movimiento es intuitiva y conduce inmediatamente a los conceptos de **espacio** y **tiempo**. Ese movimiento es el de un **objeto** que también hay que definir. Y además, la explicación de cómo se mueve algo va unida siempre a la **referencia** con respecto a la cual vamos a describir ese movimiento. No se pretende dar una definición enciclopédica de estos conceptos ya que, como corresponde a conceptos primarios, es prácticamente imposible hacerlo, aunque todo el mundo cree tener una idea intuitiva de lo que son. Ya lo dijo Newton en sus “Principia”: “No defino el tiempo, el espacio, la posición y el movimiento, ya que son bien conocidos de todos”. Y es cierto. Nuestras ideas intuitivas sobre el espacio, el tiempo y el movimiento coinciden plenamente con los conceptos de espacio, tiempo y movimiento aplicables en la mecánica clásica que, como ya hemos dicho en repetidas ocasiones, es en la que centraremos nuestro estudio.

Haremos ahora algunos comentarios sobre partícula material, espacio, tiempo, sistemas de referencia, coordenadas y grados de libertad, reposo y movimiento.

2.2.1. Partícula material

Denominamos partícula material a un objeto de masa finita y que no tiene dimensiones. Es decir, para su estudio, sus dimensiones se pueden asimilar a las de un punto geométrico. Es, evidentemente, una idealización ya que, como sabemos, todos los objetos con masa ocupan un cierto volumen y no se pueden reducir a un punto. Es una simple abstracción matemática con la ventaja que supone despreciar las dimensiones de un objeto y, por tanto, tener perfectamente determinada su posición en un sistema de referencia.

A la pregunta de cuándo podemos aplicar a un objeto la simplificación de partícula material, no se puede responder taxativamente con un sí o un no, sino con un depende. La respuesta es función de las circunstancias que rodean el problema. Un mismo objeto podrá ser tratado como una partícula material en unos casos y en otros no.

Así por ejemplo, si nos interesa solamente estudiar el movimiento de la Tierra con respecto al Sol, estudiaremos el movimiento de su centro de masas, pero no podrá tratarse como partícula material si añadimos en el estudio su movimiento diario de rotación. Si estamos interesados en la posición de un camión en ruta, lo asimilaremos a una partícula material y la ruta a una curva geométrica, pero si nos interesa estudiar dinámicamente el comportamiento de los neumáticos en las curvas, el concepto de partícula material es inadecuado y ni siquiera es aplicable el de sólido rígido. Se puede dar una regla (que siempre tendrá excepciones) diciendo que el concepto de partícula material es aplicable a todo objeto cuyas dimensiones sean pequeñas comparadas con las longitudes características de su movimiento.

2.2.2. Espacio y tiempo

Aunque Newton conocía las dificultades para definir el movimiento de un objeto si no es con referencia a otros (movimiento relativo) consideró posible definir un movimiento absoluto respecto a ciertas referencias como las estrellas “fijas”, lo que lleva implícita la hipótesis de considerar un espacio absoluto e inmóvil respecto al que tales estrellas serían realmente fijas. Como hoy sabemos, ello no está justificado dado que solo son aparentemente fijas debido a la enorme distancia a que se encuentran de nosotros. No obstante, al existir problemas de coherencia, es necesario aceptar como hipótesis básica de la mecánica que el espacio es absoluto, homogéneo e isótropo, constituyendo así el marco fijo donde tienen lugar todos los fenómenos.

El espacio absoluto es una especie de vacío anterior a todos los objetos y en el seno del cual estos se mueven.

Su carácter absoluto viene impuesto por el hecho de que posee una existencia propia independiente del observador y que tampoco depende de que haya algún objeto en él o moviéndose a través de él. Según Newton en sus “Principios matemáticos de filosofía natural”, “el espacio absoluto, en su estado natural, sin relación con nada externo, permanece siempre igual e inamovible”.

El espacio es entonces algo donde todos los objetos se mueven (experimentan cambios continuos de su posición con el tiempo) sin que exista ninguna interacción espacio-objeto.

En este espacio absoluto newtoniano las medidas también tienen carácter absoluto. Independientemente de su estado de movimiento, dos observadores distintos miden la misma distancia entre dos puntos A y B del espacio. Estas medidas están de acuerdo con la geometría euclidiana (por ejemplo, la distancia más corta entre dos puntos siempre es la línea recta) y, por tanto, nuestro espacio absoluto newtoniano es también euclidiano.

Que el espacio es homogéneo significa que todos sus puntos son equivalentes y tienen las mismas propiedades. Y que es isótropo indica que en él todas las direcciones son equivalentes. Las leyes de la mecánica deben de ser independientes del punto donde nos encontremos y de la dirección en que nos movamos.

El tiempo es absoluto en cuanto que también tiene una existencia propia independiente del observador. Transcurre de la misma forma en todo el espacio, independientemente de la medida que de él hagamos. Distintos observadores en distintos estados de movimiento miden los mismos intervalos de tiempo para los mismos fenómenos. Newton en su libro tantas veces mencionado escribió: “El tiempo absoluto, real y matemático, por sí, desde su propia naturaleza discurre igualmente sin relación con ninguna cosa externa, y por otro nombre se le llama duración”. El tiempo es universal: todos los relojes del universo marcan el tiempo con el mismo ritmo.

Espacio y tiempo son conceptos completamente independientes uno de otro. Y sin embargo se establece inconscientemente una relación muy estrecha entre ellos. Intuitivamente sabemos que no puede existir un objeto que ocupe un espacio durante “NINGÚN TIEMPO” o que durante un cierto tiempo esté en “NINGÚN SITIO”.

Es claro que a las hipótesis relativas al espacio y al tiempo tal como se conciben en mecánica clásica se les pueden hacer muchas objeciones. En realidad estas hipótesis no están totalmente justificadas y solo se pueden aceptar como aproximadamente ciertas en el marco restringido

de ciertos fenómenos (que son los que se estudian habitualmente en mecánica clásica). Más adelante insistiremos brevemente sobre los conceptos de espacio y tiempo.

2.2.3. Sistemas de referencia. Reposo y movimiento

Queremos describir el movimiento **real** de un objeto en función de sus cambios de posición en intervalos de tiempo conocidos. Es decir, debemos saber dónde está y en qué instante. Para ello hay que referir la posición del objeto a algo que esté en reposo.

Pero ¿realmente hay algo en reposo? Y si lo hay ¿en reposo respecto a qué? Ya hemos mencionado que Newton decía que en lugar de conocer posiciones y movimientos absolutos, deberíamos de conocerlos relativos a “algo”. Ese “algo” es lo que llamaremos sistema de referencia y, consideraremos que está fijo o que tiene un movimiento conocido.

Cuando decimos frases como “ese coche se mueve” todo el mundo entiende que se mueve respecto a la superficie de la Tierra. Implícitamente estamos refiriendo el movimiento del coche a un conjunto de objetos que no cambian su posición en el tiempo con respecto a nosotros (las casas que nos rodean, la carretera) suponiendo que estemos quietos respecto a la superficie de la tierra. Eso no significa que la superficie de la Tierra permanezca inmóvil. Sabemos que tiene un movimiento propio de rotación y otro de traslación alrededor del Sol.

La elección del sistema de referencia es algo arbitrario. Habrá que tener cuidado para elegir el “mejor” en cada caso. ¿Cuál es el mejor? El mejor será el más adecuado, es decir, aquel en el que la descripción del movimiento resulte lo más sencilla posible.

A partir de ahora, en mecánica, utilizaremos los mismos sistemas de referencia que en vectores, es decir, sistemas de referencia cartesianos.

Diremos que un objeto está en reposo con respecto a un determinado sistema de referencia cuando sus coordenadas en ese sistema de referencia no son funciones del tiempo. En caso contrario diremos que está en movimiento.

2.2.4. Sistema físico

Para poder aplicar las leyes y ecuaciones de alguna rama de la física (la mecánica en el caso que nos ocupa ahora) debemos, en primer lugar, identificar la parte del mundo físico que vamos a estudiar. Esto se consigue estableciendo una frontera entre los objetos directos de nuestro estudio y el resto del Universo. Esta frontera, que tiene que ser una superficie cerrada (real o ficticia) contiene en su interior lo que denominaremos **sistema físico** a estudiar y fuera queda el resto del mundo físico que puede interactuar o no con el sistema. Si las interacciones se conocen, o pueden formularse como incógnitas del problema, la frontera está bien establecida. En caso contrario habrá que redefinir el problema. En mecánica los propios problemas suelen condicionar de forma natural el sistema físico a manejar. Su elección será generalmente sencilla y muchas veces se hace de forma implícita sin que se planteen problemas para la identificación del sistema. Insistiremos con mayor rigurosidad en este concepto así como en los de universo, entorno y fronteras del sistema cuando estudiemos la termodinámica.

2.2.5. Coordenadas. Grados de libertad

Coordenadas de un sistema físico son el conjunto de parámetros necesario para determinar, en cada instante, la posición en el espacio de todas las partes que componen el sistema.

Por ejemplo, si el sistema es una única partícula material y su movimiento lo estamos refiriendo a un sistema de referencia cartesiano, necesitaremos tres parámetros $(x(t), y(t), z(t))$ para tener determinada su posición en cada instante.

Estos parámetros son longitudes en este caso, pero no necesariamente siempre. Si utilizásemos un sistema de referencia en coordenadas esféricas, los tres parámetros serían una longitud y dos ángulos.

Puede ocurrir que alguno de estos parámetros no sea independiente, es decir, que exista entre ellos alguna relación (relación que vendrá impuesta por las características del problema). Este tipo de relaciones se conocen con el nombre de ecuaciones de ligadura. Por ejemplo, si la partícula material estuviera obligada a moverse sobre un plano, $f(x,y,z)=0$, las coordenadas $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ estarían obligadas a cumplir la ecuación del plano. Cada ecuación de ligadura permite expresar una de las coordenadas en función de las demás.

Así, no siempre todas las coordenadas son independientes. Si p es el número de coordenadas y l el número de ligaduras ($p > l$), habrá $p-l=g$ coordenadas independientes.

A este conjunto de coordenadas independientes se le llama grados de libertad del sistema y su número (g) coincide con el MENOR número de parámetros necesario para describir el movimiento de un sistema.

En el ejemplo anterior, una partícula material no sometida a ligaduras es un sistema físico con tres grados de libertad. Si está obligada a moverse sobre un plano (que ya vimos que introducía una ligadura) el sistema tendrá $3-1=2$ grados de libertad. Si la partícula tuviera que moverse sobre una recta (recordemos que una recta en el espacio viene definida por dos ecuaciones de la forma $f_1(x,y,z)=0$, $f_2(x,y,z)=0$, que representan, por tanto, dos ligaduras), el sistema tendría $3-2=1$ grado de libertad. Más adelante, en dinámica insistiremos en el concepto de ligaduras.

2.3. Descripción del movimiento de una partícula material en un sistema de referencia cartesiano

2.3.1. Ecuaciones paramétricas. Vector de posición

La posición de una partícula material en el espacio, en función del tiempo, se puede conocer si se conocen sus coordenadas, $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, en un determinado sistema de referencia. Estas tres funciones

$$\begin{aligned}x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t)\end{aligned}\tag{2.1}$$

se denominan **ecuaciones paramétricas del movimiento o ecuaciones horarias**. Se suelen considerar como el extremo de un vector, que se llama **vector de posición** de la partícula material, con origen fijo en el origen O del sistema de referencia (Fig 2.1).

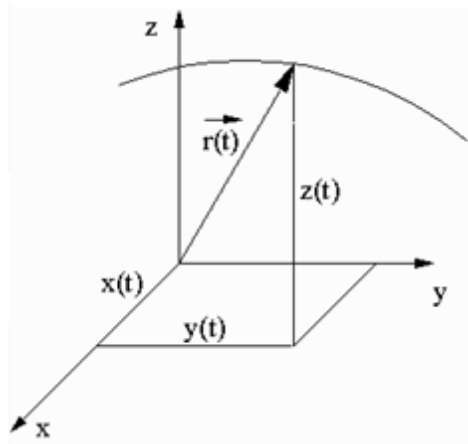


Figura 2.1: Vector de posición de la partícula.

Este vector es función del tiempo por serlo sus componentes, aunque, a veces, por simplificar la notación, esta dependencia se omita explícitamente.

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \quad \text{o} \quad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (2.2)$$

Como su nombre indica es un vector cuyo extremo señala, en cada instante, la posición de la partícula material.

2.3.2. Trayectoria. Vector desplazamiento

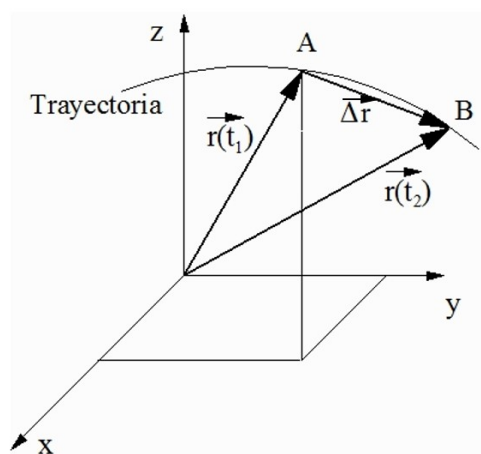


Figura 2.2: Trayectoria y vector desplazamiento $\Delta\vec{r}$.

Se llama trayectoria de una partícula material al lugar geométrico de las sucesivas posiciones que la partícula va ocupando en el espacio a lo largo de su movimiento, Fig. 2.2. Eliminando el tiempo entre las tres ecuaciones [2.1], se obtiene la ecuación analítica de la trayectoria

$$f_1(x, y, z) = 0$$

$$f_2(x, y, z) = 0$$

que será, en general, una curva alabeada en el espacio.

Se llama **vector desplazamiento** entre dos posiciones de la partícula, consecutivas en el tiempo, a un vector con origen en la primera posición y extremo en la segunda. En la Fig. 2.2 se indican las posiciones A y B de la partícula en los instantes de tiempo t_1 y t_2 , el vector desplazamiento entre tales posiciones es

$$\Delta \vec{r} = \overrightarrow{AB} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) \quad (2.3)$$

2.3.3. Velocidad media. Vector velocidad

Cuando se utiliza este tipo de representación, se puede definir la velocidad media de la partícula entre dos instantes t_1 y t_2 (equivalentemente, entre las posiciones A y B) como un vector que es el cociente entre el vector desplazamiento y el tiempo empleado por la partícula en pasar de una posición a otra y se escribe

$$\vec{v}_M = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} \quad (2.4)$$

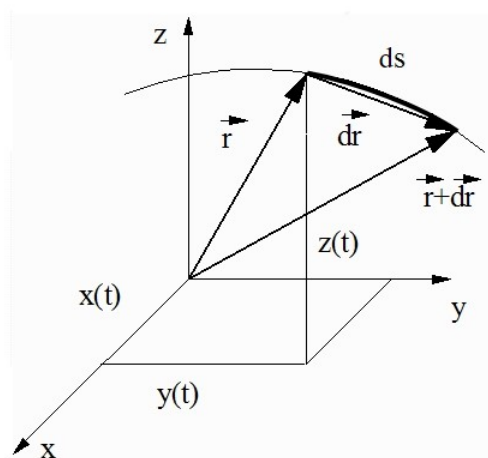


Figura 2.3: Trayectoria y diferencial de vector de posición $d\vec{r}$.

La velocidad instantánea de la partícula en el instante t_1 se define como el límite de la expresión [2.4] cuando t_2 está infinitamente próximo a t_1 , es decir

$$\vec{v} = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

y en un instante genérico t se escribe

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (2.5)$$

El vector velocidad instantánea es la derivada con respecto al tiempo del vector de posición (Fig. 2.3).

Derivando con respecto al tiempo la ecuación [2.2] y teniendo en cuenta que los versores del sistema de referencia no varían con el tiempo para un observador situado en el mismo sistema, el vector velocidad es

$$\vec{v}(t) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \quad (2.6)$$

o también $\vec{v}(t) = v_x(t)\vec{i} + v_y(t)\vec{j} + v_z(t)\vec{k}$ donde $v_x = \frac{dx}{dt}$, $v_y = \frac{dy}{dt}$ y $v_z = \frac{dz}{dt}$ son las **componentes del vector velocidad** en el sistema de referencia que estamos utilizando para referir el movimiento.

2.3.4. Vector aceleración

La aceleración instantánea de la partícula material se define como la derivada del vector velocidad con respecto al tiempo y su expresión es

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad (2.7)$$

y sus componentes a_x , a_y y a_z son

$$\vec{a}(t) = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} \quad (2.8)$$

donde se entiende que tanto x , y y z , como v_x , v_y y v_z son, en general, funciones del tiempo aunque no se escriba explícitamente.

2.3.5. Hodógrafa

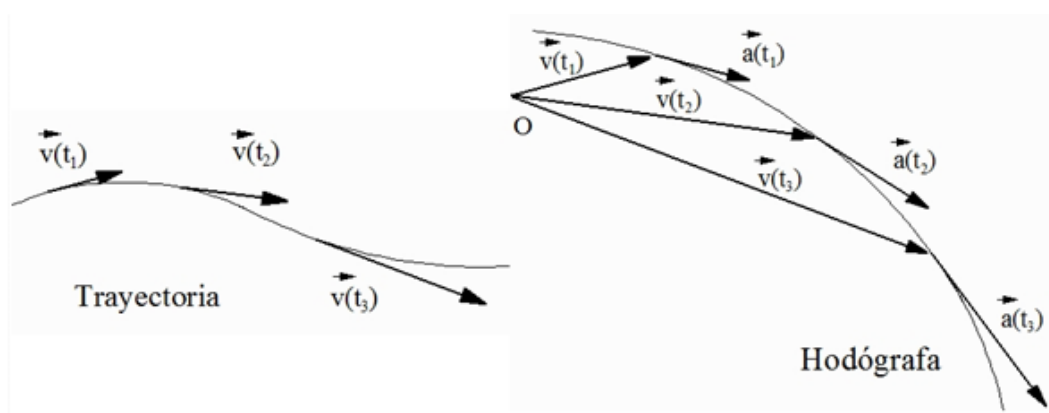


Figura 2.4: Trayectoria y hodógrafa.

Consideramos un punto fijo O y, con origen en él, trazamos vectores equipolentes a los sucesivos vectores velocidad de una partícula material (Fig. 2.4). La hodógrafa es el lugar geométrico de los extremos de esos vectores.

Como la aceleración es la derivada del vector velocidad, será tangente a la hodógrafa en cada punto. Esto nos permite dar una interpretación a la aceleración: “la aceleración es la velocidad con que el extremo del vector velocidad recorre la hodógrafa, si éste se genera a la vez que la partícula recorre la trayectoria”.

Si disponemos de la ecuación de la hodógrafa en un sistema de referencia determinado, disponemos entonces de una relación entre las componentes del vector velocidad en ese sistema de referencia. Insistiremos en este concepto cuando estudiemos con detalle ciertos tipos de movimiento.

2.4. Descripción del movimiento de una partícula en función de parámetros de la trayectoria

Ya hemos definido la trayectoria de una partícula material como el lugar geométrico de las sucesivas posiciones que la partícula va ocupando en el espacio a lo largo de su movimiento. Veremos ahora una forma alternativa de estudiar el movimiento de una partícula que resultará útil en muchos casos, especialmente cuando la trayectoria que sigue la partícula se conozca a priori.

2.4.1. Ley horaria

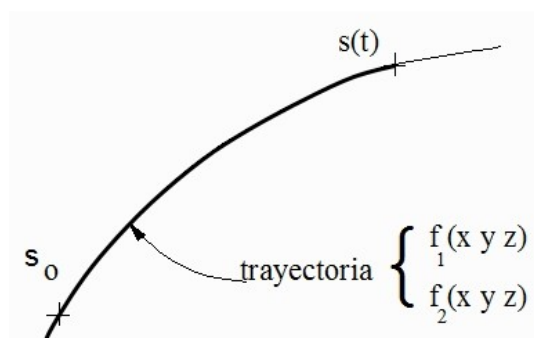


Figura 2.5: Trayectoria y camino recorrido s .

Conocida, pues, la ecuación de la trayectoria (que es, en general, una curva en el espacio), disponemos de dos ligaduras, y por tanto, el número de grados de libertad de una partícula material que se mueve a lo largo de ella es uno. Bastará pues con conocer un parámetro para tener perfectamente determinado el movimiento de la partícula. Este parámetro es el espacio recorrido sobre la trayectoria en función del tiempo (Fig. 2.5). Es decir,

$$s = s(t) \quad (2.9)$$

que se llama “**ley horaria**” del movimiento y nos proporciona el espacio recorrido por la partícula a lo largo de la trayectoria en función del tiempo tomando como espacio recorrido inicial s_0 en un instante inicial t_0 .

2.4.2. Velocidad

Para una descripción completa del movimiento no basta con conocer la ley horaria y la trayectoria. Hace falta una descripción cuantitativa de la rapidez con que la partícula material cambia de posición con el tiempo. Para ello se define la velocidad como el cociente entre el espacio recorrido sobre la trayectoria y el tiempo empleado en recorrerlo. Su ecuación de dimensiones es:

$$[v] = \frac{[s]}{[t]} = \text{LT}^{-1}$$

y las unidades en el SI son m/s o $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Si en un instante t_1 la partícula se encuentra en la posición determinada por el espacio recorrido $s_1=s(t_1)$ y en un instante posterior t_2 en la posición determinada por $s_2=s(t_2)$, se define la velocidad media $v_m(t_1, t_2)$ como el cociente

$$v_m(t_1, t_2) = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

siendo $\Delta s = s_2 - s_1$ y $\Delta t = t_2 - t_1$.

La información que proporciona esta velocidad media no es muy buena porque no es característica de un único punto sobre la trayectoria, sino de un intervalo. Nos interesa conocer la velocidad de la partícula en un instante. Para ello definimos la **velocidad instantánea** como un vector que tiene la dirección de la tangente a la trayectoria en el punto considerado, sentido el del recorrido de la partícula y módulo el cociente $\Delta s/\Delta t$ cuando Δt tiende a cero.

Es decir

$$|\vec{v}| = \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \right| = \left| \frac{ds}{dt} \right|$$

El vector velocidad instantánea será, en función de variables de camino,

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt} \vec{u}_t \quad (2.10)$$

donde $\vec{u}_t$ es un vector unitario tangente a la trayectoria en el punto considerado y dirigido en el sentido de los espacios crecientes. Al valor ds/dt se le llama **velocidad escalar** y coincide con la proyección de $\vec{v}$ en la dirección y sentido de $\vec{u}_t$, y se representa por v . Es decir:

$$\frac{ds}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{u}_t = v \quad (\geq 0) \quad (2.11)$$

2.4.3. Aceleración

Es evidente que el vector velocidad, en general, no será constante ni en módulo ni en dirección a lo largo del movimiento. Para tener un estudio completo del movimiento debemos conocer como cambia el vector velocidad en función del tiempo. El valor de este cambio nos lo proporciona la **aceleración**, que se define como la variación con el tiempo del vector velocidad:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (2.12)$$

cuya ecuación de dimensiones es:

$$[a] = \frac{[v]}{[t]} = \text{LT}^{-2}$$

y sus unidades en el SI son m/s^2 o $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

La fórmula [2.12] se puede desarrollar si recordamos la expresión de la velocidad en términos de variables de camino (espacio recorrido y versor tangente, fórmula [2.10]):

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \vec{u}_t \right) = \frac{d^2s}{dt^2} \vec{u}_t + \frac{ds}{dt} \frac{d\vec{u}_t}{dt} \quad (2.13)$$

El versor tangente es función de la variable s (su orientación depende del punto de la trayectoria donde nos encontremos), es decir, $\vec{u}_t = \vec{u}_t(s)$. Así:

$$\frac{d\vec{u}_t}{dt} = \frac{d\vec{u}_t}{ds} \frac{ds}{dt}$$

y sustituyendo en [2.13] queda

$$\vec{a} = \frac{d^2s}{dt^2} \vec{u}_t + \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \frac{d\vec{u}_t}{ds} \quad (2.14)$$

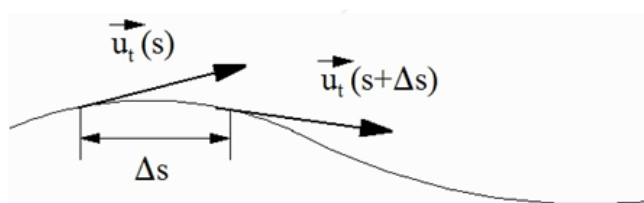


Figura 2.6: Vector unitario tangente en función del camino recorrido s .

Vamos a calcular ahora la derivada del versor tangente. Consideremos el versor tangente en dos posiciones sucesivas de la partícula material sobre la trayectoria separadas una distancia Δs , $\vec{u}_t(s)$ y $\vec{u}_t(s + \Delta s)$ (Fig. 2.6). Si las posiciones s y $s + \Delta s$ están infinitamente próximas (es decir, $\Delta s \rightarrow 0$) los dos versores tienden a cortarse y, en el límite, definen un plano que se conoce con el nombre de **plano osculador**. El plano osculador queda, por tanto, determinado por el

origen “común” (los dos vectores tienen sus orígenes tan próximos que, en el límite, coinciden) y los dos versores $\vec{u}_t(s)$ y $\vec{u}_t(s + \Delta s)$.

El plano osculador es, entonces, el plano definido por dos tangentes “consecutivas” infinitamente próximas y contendrá un elemento diferencial de trayectoria Δs tan pequeño que puede ser considerado plano (la trayectoria es “localmente” plana aunque, en general, será una curva alabeada cualquiera).

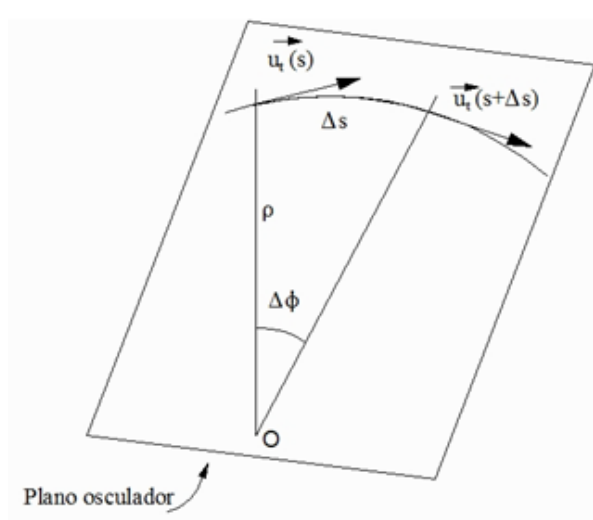


Figura 2.7: Plano osculador.

Consideremos ahora rectas perpendiculares a $\vec{u}_t(s)$ y $\vec{u}_t(s + \Delta s)$ contenidas en el plano osculador (Fig. 2.7). En el límite (cuando $\Delta s \rightarrow 0$) estas rectas se cortan en un punto O , llamado centro de curvatura. La distancia desde O al punto de la curva considerado se denomina radio de curvatura ρ . Tanto el centro como el radio de curvatura varían según el punto de la trayectoria en que nos encontremos. Es decir, $O = O(s)$ y $\rho = \rho(s)$. El centro de curvatura está contenido también en el plano osculador y la dirección definida por las rectas perpendiculares que hemos utilizado para determinarlo es la dirección de la denominada normal principal.

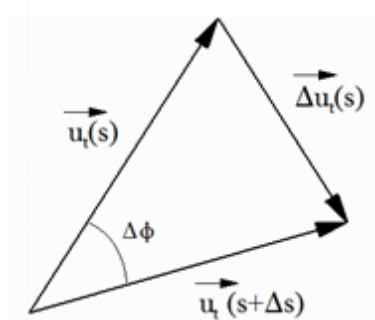


Figura 2.8: Variación del vector unitario tangente.

Nótese que, de entre las infinitas direcciones normales que se pueden trazar a la trayectoria en el punto considerado, esa dirección (la de la normal principal) es precisamente la contenida en el plano osculador.

Recordando la definición de derivada de un vector:

$$\frac{d\vec{u}_t}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\vec{u}_t(s + \Delta s) - \vec{u}_t(s)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{u}_t}{\Delta s} \quad (2.15)$$

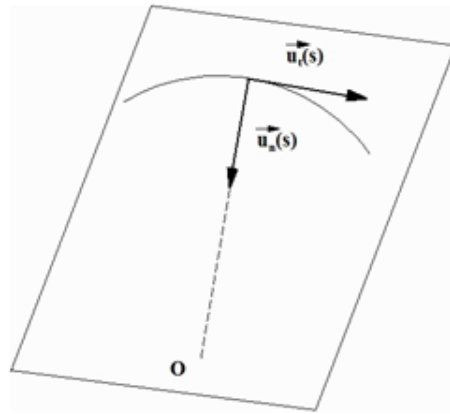


Figura 2.9: Vectores unitario tangente y unitario normal.

Determinemos cuánto vale en el límite la dirección y el módulo de $\Delta \vec{u}_t$.

- Dirección de $\Delta \vec{u}_t(s)$ cuando Δs tiende a cero o equivalentemente cuando el ángulo que forman dos unitarios tangentes consecutivos $\Delta \phi$ tiende a cero.

En la Fig. 2.8 se observa que si $\Delta \phi \rightarrow 0$, $\Delta \vec{u}_t(s)$ tiende a ser normal a $\vec{u}_t(s)$ y a estar contenido en el plano osculador. Es decir, tiene la dirección que hemos denominado normal principal. Llamamos $\vec{u}_n$ al versor normal principal (que nos sirve para definir esa dirección) y que es un vector de módulo unidad, dirección la de la normal principal y sentido apuntando siempre hacia el centro de curvatura de la trayectoria (Fig. 2.9).

Así,

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \Delta \vec{u}_t(s) = \left(\lim_{\Delta s \rightarrow 0} |\Delta \vec{u}_t(s)| \right) \vec{u}_n$$

- Módulo de $\Delta \vec{u}_t(s)$ cuando Δs tiende a cero.

En el triángulo vectorial de la Fig. 2.8, y aproximando la longitud de $\Delta \vec{u}_t(s)$ a un arco de circunferencia se tiene:

$$|\Delta \vec{u}_t(s)| \simeq |\vec{u}_t(s)| \Delta \phi \approx \Delta \phi$$

En la Fig. 2.7 vemos que

$$\Delta s \simeq \rho \Delta \phi \Rightarrow \Delta \phi \simeq \frac{\Delta s}{\rho}$$

Es decir, $|\Delta \vec{u}_t(s)| \simeq \Delta \phi \simeq \frac{\Delta s}{\rho}$. Sustituyendo ahora en [2.15], tenemos

$$\frac{d\vec{u}_t}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s} \frac{\Delta s}{\rho} \vec{u}_n = \frac{1}{\rho} \vec{u}_n \quad (2.16)$$

El vector aceleración se puede escribir en términos de parámetros de la trayectoria, sustituyendo [2.16] en [2.14], como

$$\vec{a}(s) = \frac{d^2 s}{dt^2} \vec{u}_t + \frac{1}{\rho} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \vec{u}_n \quad (2.17)$$

O también, recordando [2.11],

$$\vec{a}(s) = \frac{dv}{dt} \vec{u}_t + \frac{v^2}{\rho} \vec{u}_n \quad (2.18)$$

donde vemos que el vector aceleración en cada instante se puede representar mediante dos componentes: una en la dirección de la tangente, que se llama **aceleración tangencial** ($\vec{a}_t$) y otra en la dirección de la normal principal que se llama **aceleración normal** ($\vec{a}_n$).

Ambas componentes, para cada punto de la trayectoria (o, equivalentemente, para cada instante) están contenidas en el plano osculador y, por tanto, el vector aceleración de la partícula también lo está. De forma resumida se puede poner

$$\vec{a}(s) = \vec{a}_t(s) + \vec{a}_n(s)$$

y, utilizando las expresiones [2.17] y [2.18], las componentes de la aceleración son

$$\begin{aligned} \vec{a}_t &= \frac{d^2 s}{dt^2} \vec{u}_t = \frac{dv}{dt} \vec{u}_t \\ \vec{a}_n &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \vec{u}_n = \frac{v^2}{\rho} \vec{u}_n \end{aligned} \quad (2.19)$$

Atendiendo a la ecuación [1.14] podemos escribir el vector aceleración como:

$$\vec{a} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{v^2} \vec{v} - \frac{\vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{a})}{v^2}$$

de lo que se deducen inmediatamente dos expresiones para calcular las componentes del vector aceleración:

$$\begin{aligned} \vec{a}_t &= \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{v^2} \vec{v} \\ \vec{a}_n &= -\frac{\vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{a})}{v^2} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Las componentes tangencial y normal de la aceleración tienen una interpretación física que se puede observar claramente en las expresiones [2.19]. La componente tangencial aparece por la variación con el tiempo del módulo de la velocidad mientras que la componente normal lo hace por la variación con el tiempo de la dirección de la velocidad.

También podemos observar que mientras $a_t = dv/dt$ puede ser positiva o negativa (es decir, el sentido de $\vec{a}_t$ puede coincidir o ser opuesto al de $\vec{u}_t$) según que el valor escalar de la velocidad aumente o disminuya con el tiempo, $a_n = v^2/\rho$ siempre es positiva (es decir, el sentido de $\vec{a}_n$ coincide siempre con el de $\vec{u}_n$) y, por tanto, apunta siempre hacia el centro de curvatura de la trayectoria independientemente de como varíe la dirección del vector velocidad.

Resumiendo, el movimiento de una partícula que se mueve sobre una trayectoria definida queda perfectamente determinado si se conoce la ecuación de esa trayectoria (lo que nos permitirá conocer en cada posición los versores $\vec{u}_t$ y $\vec{u}_n$) y la ley horaria del movimiento (lo que nos permitirá relacionar la posición que ocupa la partícula sobre la trayectoria con el instante en que lo hace).

2.4.4. Triedro intrínseco o de Frenet

Hemos utilizado los versores $\vec{u}_t(s)$ y $\vec{u}_n(s)$ para representar los vectores velocidad y aceleración de una partícula material. Estos versores son función del punto de la trayectoria en que se encuentre la partícula y, por tanto, versores intrínsecos propios del camino que recorre. Se define el versor $\vec{u}_b$ (versor binormal) como $\vec{u}_b = \vec{u}_t \times \vec{u}_n$ de manera que $\vec{u}_t$, $\vec{u}_n$ y $\vec{u}_b$ forman un triedro a derechas. Este triedro de referencia se conoce con el nombre de triedro intrínseco y los planos que lo forman reciben también nombres especiales.

El plano definido por $\vec{u}_t$ y $\vec{u}_n$ se denomina **plano osculador**, como ya sabíamos. El determinado por $\vec{u}_n$ y $\vec{u}_b$ se denota por **plano normal** y el determinado por $\vec{u}_b$ y $\vec{u}_t$ recibe el nombre de **plano rectificante**, como se puede observar en la Fig. 2.10.

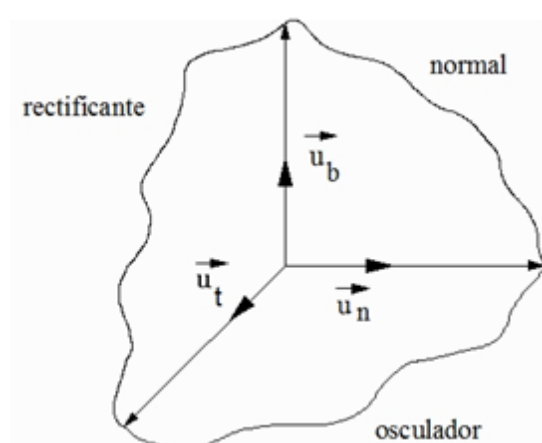


Figura 2.10: Plano normal, osculador y rectificante.

2.5. Relación entre la descripción del movimiento utilizando variables de camino y utilizando un sistema de referencia cartesiano

En algunas ocasiones es interesante (a veces necesario) obtener las expresiones cartesianas de los vectores que describen el movimiento de una partícula material cuando éstos son conocidos en sus componentes intrínsecas (o a la inversa). Por ello vamos a estudiar las expresiones que ligán los vectores unitarios del triedro intrínseco con los correspondientes a un sistema de referencia cartesiano. Analizaremos por separado los caso bidimensional (o plano) y tridimensional (o espacial).

También, comparando las ecuaciones [2.5], [2.6] y [2.10] y dado que el módulo de la velocidad es invariante con respecto a sistemas de coordenadas, obtenemos de forma inmediata la conocida relación

$$|d\vec{r}| = ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

entre el incremento infinitesimal del vector de posición y la longitud de un arco diferencial sobre la trayectoria.

2.5.1. Movimiento plano

En este tipo de problemas el plano osculador coincide con el plano del movimiento. Si elegimos este plano como plano xy del triedro cartesiano de referencia, la trayectoria será una función de la forma $f(x, y) = 0$ con $z = 0$ y además el versor binormal $\vec{u}_b$ coincidirá en todo instante (salvo sentido) con el versor $\vec{k}$. Así, bastará con determinar la expresión de $\vec{u}_t$ y $\vec{u}_n$ en función de x y de y .

Por geometría diferencial se conoce la expresión del radio de curvatura si está determinada la ecuación de la trayectoria $y = y(x)$, este es:

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|} \quad (2.21)$$

El vector $\vec{u}_t$, en un punto, se determina a partir de la pendiente de la trayectoria, dy/dx , en ese punto. El vector $\vec{u}_t$ en función del ángulo θ que forma la tangente a la trayectoria con el eje Ox es (Fig. 2.11):

$$\vec{u}_t = \pm(\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) = \pm \cos \theta (\vec{i} + \tan \theta \vec{j}) = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + (dy/dx)^2}} \left(\vec{i} + \frac{dy}{dx} \vec{j}\right)$$

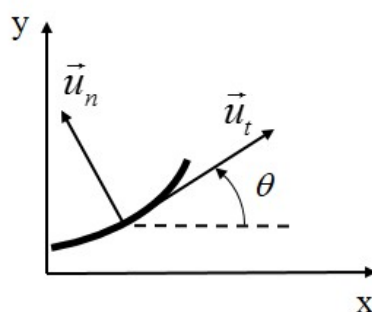


Figura 2.11: Vectores unitarios normal y tangente de una curva plana.

El doble signo se debe a que la partícula puede recorrer la curva en un sentido o en otro. Conocido $\vec{u}_t$, $\vec{u}_n$ es un vector perpendicular a él, de módulo unidad y dirigido hacia el centro de curvatura que se puede obtener fácilmente (salvo sentido) sin más que multiplicar vectorialmente $\vec{u}_b$, es decir $\vec{k}$, por $\vec{u}_t$. Un análisis de la trayectoria, y en concreto, de su curvatura permitiría determinar el sentido del versor unitario normal.

2.5.2. Movimiento espacial

Partimos de la trayectoria expresada en ecuaciones paramétricas:

$$\begin{aligned}x &= x(p) \\ y &= y(p) \\ z &= z(p)\end{aligned}$$

donde p es un parámetro cualquiera, aunque en la mayoría de los casos será el tiempo t .

El camino recorrido se obtiene de:

$$ds = |d\vec{r}| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dp}\right)^2} dp = \left|\frac{d\vec{r}}{dp}\right| dp$$

$$s - s_0 = \int_{p_0}^p \left|\frac{d\vec{r}}{dp}\right| dp$$

Determinamos el versor $\vec{u}_t$ combinando las expresiones [2.5] y [2.10] del vector velocidad:

$$\vec{u}_t = \frac{dt}{ds} \vec{v} = \frac{dt}{ds} \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}$$

Si sustituimos $d\vec{r}$ por su valor en función de x , y y z , ec. [2.2], queda:

$$\vec{u}_t = \frac{dx}{ds} \vec{i} + \frac{dy}{ds} \vec{j} + \frac{dz}{ds} \vec{k}$$

Aplicamos la regla de la cadena de la derivación

$$\vec{u}_t = \frac{d\vec{r}}{dp} \frac{dp}{ds} = \left(\frac{dx}{dp} \vec{i} + \frac{dy}{dp} \vec{j} + \frac{dz}{dp} \vec{k} \right) \frac{dp}{ds}$$

y solo falta determinar $\frac{dp}{ds}$. Lo hacemos imponiendo la condición de que el módulo de $\vec{u}_t$ es uno. Así

$$\frac{dp}{ds} = \frac{1}{\left| \frac{d\vec{r}}{dp} \right|} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dp} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dp} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dp} \right)^2}}$$

y la expresión de $\vec{u}_t$ queda finalmente:

$$\vec{u}_t = \frac{d\vec{r}/dp}{|d\vec{r}/dp|} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dp} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dp} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dp} \right)^2}} \left(\frac{dx}{dp} \vec{i} + \frac{dy}{dp} \vec{j} + \frac{dz}{dp} \vec{k} \right)$$

El versor $\vec{u}_n$ lo despejamos directamente de [2.16]:

$$\vec{u}_n = \rho \frac{d\vec{u}_t}{ds} = \rho \frac{d\vec{u}_t}{dp} \frac{dp}{ds} = \rho \frac{d\vec{u}_t/dp}{|d\vec{r}/dp|} = \frac{\rho}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dp} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dp} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dp} \right)^2}} \frac{d\vec{u}_t}{dp}$$

Si imponemos la condición $|\vec{u}_n| = 1$ obtenemos $\rho(p)$ o $\rho(s)$:

$$\rho(p) = \frac{\left| \frac{d\vec{r}}{dp} \right|}{\left| \frac{d\vec{u}_t}{dp} \right|} = \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dp} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dp} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dp} \right)^2}}{\left| \frac{d\vec{u}_t}{dp} \right|} \quad \rho(s) = \frac{1}{\left| \frac{d\vec{u}_t}{ds} \right|}$$

y, por tanto,

$$\vec{u}_n = \frac{1}{\left| \frac{d\vec{u}_t}{dp} \right|} \frac{d\vec{u}_t}{dp} = \frac{1}{\left| \frac{d\vec{u}_t}{ds} \right|} \frac{d\vec{u}_t}{ds}$$

2.6. Otros sistemas de coordenadas

Hay problemas en los que la utilización de las coordenadas cartesianas resulta engorroso o conduce a resultados de muy difícil interpretación física. Por contra, la utilización en ellos de sistemas de coordenadas alternativos simplifica el planteamiento, resolución e interpretación del problema.

Veremos a continuación la formulación del movimiento de una partícula en tres sistemas de coordenadas ampliamente utilizados como son las coordenadas polares, las coordenadas cilíndricas y las coordenadas esféricas. La práctica en la resolución de problemas nos indicará en cada caso cual es el sistema más adecuado.

2.6.1. Coordenadas polares

En un plano, la posición P de una partícula queda perfectamente determinada si se conoce su distancia a un origen O , llamado **polo** y el ángulo que la recta OP forma con una semirrecta con origen en O y que recibe el nombre de **eje polar** (Fig. 2.12). En este sistema, el punto P tiene por coordenadas radial y angular (ρ, θ) respectivamente. Se utiliza la nomenclatura ρ para la distancia OP , en lugar de r , para que no se confunda con el módulo del vector de posición utilizado en coordenadas cartesianas cuando generalicemos las coordenadas polares a cilíndricas.

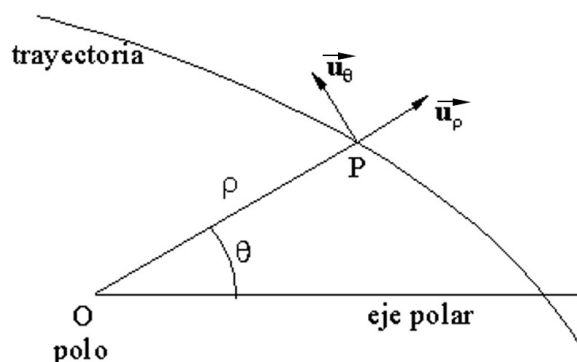


Figura 2.12: Coordenadas polares y sus vectores unitarios $\vec{u}_\rho$ y $\vec{u}_\theta$.

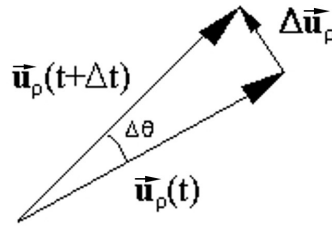
Junto con las coordenadas (ρ, θ) , se utilizan los siguientes versores ligados a la posición de la partícula y que son, por tanto, funciones del tiempo:

$\vec{u}_\rho$: Versor **radial**, en la dirección radial, es decir, en la dirección OP y sentido de O hacia P .

$\vec{u}_\theta$: Versor **transversal (o angular)**, en la dirección transversal. Se obtiene girando el versor radial 90° en sentido contrario a las agujas del reloj.

$\vec{u}_n$: Versor **normal** al plano polar. Se define mediante el producto vectorial $\vec{u}_n = \vec{u}_\rho \times \vec{u}_\theta$ y se utiliza como versor auxiliar para algunos cálculos.

Derivadas de los versores

**Figura 2.13:** Variación del vector radial entre dos instantes.

En la Fig. 2.13 se han representado dos posiciones del vector radial en dos instantes de tiempo próximos, t y $t + \Delta t$, en ella se observa como la longitud del vector incremento $\Delta \vec{u}_\rho$ es igual al ángulo $\Delta \theta$ aproximando la longitud de dicho vector al arco de una circunferencia de radio $|\vec{u}_\rho(t)| = 1$. Aplicando un razonamiento análogo para $\Delta \vec{u}_\theta$ se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{u}_\rho}{\Delta t} = \vec{u}_\theta \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta \\ \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{u}_\theta}{\Delta t} = -\vec{u}_\rho \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = -\frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\rho\end{aligned}$$

En resumen, las derivadas con respecto al tiempo de los versores radial y transversal, son:

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta ; \quad \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\rho \quad (2.22)$$

A este resultado también se puede llegar usando la expresión de estos vectores en coordenadas cartesianas (suponemos que el eje polar coincide con el eje OX) y derivando:

$$\begin{aligned}\vec{u}_\rho(t) &= \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} \\ \vec{u}_\theta(t) &= -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}\end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{u}_\rho(t)}{dt} &= (-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}) \frac{d\theta}{dt} = \vec{u}_\theta \frac{d\theta}{dt} \\ \frac{d\vec{u}_\theta(t)}{dt} &= (-\cos \theta \vec{i} - \sin \theta \vec{j}) \frac{d\theta}{dt} = -\vec{u}_\rho \frac{d\theta}{dt}\end{aligned} \quad (2.24)$$

Estudio del movimiento

Conocidas las coordenadas polares como funciones del tiempo, las ecuaciones paramétricas en función del tiempo son:

$$\begin{aligned}\rho &= \rho(t) \\ \theta &= \theta(t)\end{aligned} \quad (2.25)$$

y, con esta notación, el vector de posición se puede escribir como

$$\vec{r}(t) = \rho(t) \vec{u}_\rho(t) \quad (2.26)$$

Derivando esta expresión con respecto al tiempo, obtenemos el vector velocidad expresado en coordenadas polares:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} [\rho(t)\vec{u}_\rho(t)] = \frac{d\rho(t)}{dt}\vec{u}_\rho(t) + \rho(t)\frac{d\vec{u}_\rho(t)}{dt}$$

y sustituyendo [2.22] en la ecuación anterior se obtiene, finalmente:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\rho}{dt}\vec{u}_\rho + \rho\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta \quad (2.27)$$

donde se ha omitido la referencia explícita a que tanto las funciones como sus derivadas dependen del tiempo.

El primer sumando del segundo miembro de [2.27] se denomina **velocidad radial** y el segundo sumando se denomina **velocidad transversal** o angular.

La aceleración se obtiene derivando con respecto al tiempo la expresión de la velocidad:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\rho}{dt^2}\vec{u}_\rho + \frac{d\rho}{dt}\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + \frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + \rho\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{u}_\theta + \rho\frac{d\theta}{dt}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}$$

y sustituyendo las derivadas de los versores, la expresión de la aceleración queda:

$$\vec{a} = \left[\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \right] \vec{u}_\rho + \left[2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \rho\frac{d^2\theta}{dt^2} \right] \vec{u}_\theta \quad (2.28)$$

Otras relaciones

La relación entre coordenadas polares y coordenadas cartesianas cuyo eje OX coincide con el eje polar (véase Fig. 2.12) es:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \theta & \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ y &= \rho \sin \theta & \theta &= \arctan \frac{y}{x} \end{aligned} \quad (2.29)$$

El diferencial del vector de posición se escribe como:

$$d\vec{r} = d\rho\vec{u}_\rho + \rho d\theta\vec{u}_\theta$$

Un diferencial de arco de trayectoria, ds , se puede expresar como:

$$(ds)^2 = (d\rho)^2 + (\rho d\theta)^2$$

de donde se obtiene el módulo de la velocidad:

$$v = \sqrt{\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \left(\rho \frac{d\theta}{dt}\right)^2}$$

2.6.2. Coordenadas cilíndricas

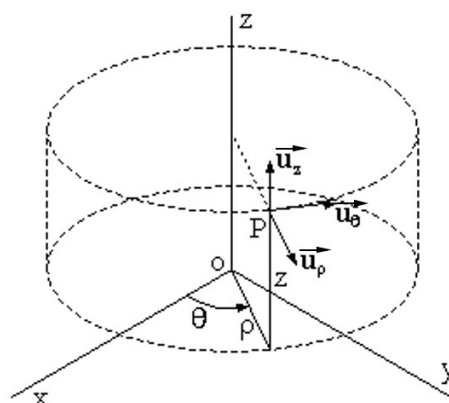


Figura 2.14: Coordenadas cilíndricas y unitarios.

Si a las coordenadas polares le añadimos un tercer versor $\vec{u}_z$, llamado versor **axial**, de dirección fija perpendicular al plano definido por $\vec{u}_\rho$ y $\vec{u}_\theta$ (en este caso llamados unitarios radial y azimutal, respectivamente) de forma que $\vec{u}_z = \vec{u}_\rho \times \vec{u}_\theta$, se obtiene el sistema de coordenadas cilíndricas.

El motivo de llamar $\vec{u}_z$ a este versor es porque, normalmente, lo haremos coincidir con el versor $\vec{k}$ de un sistema cartesiano cuando hagamos cambios de coordenadas.

Este tipo de sistema es útil, por ejemplo, en el estudio de la cinemática y dinámica de la maquinaria rotativa, donde las fuerzas radiales, transversales (o azimutales) y axiales tienen un significado físico concreto.

En la Fig. 2.14 se indica, sobre un sistema cartesiano, la posición de un punto P , sus coordenadas cilíndricas radial, azimutal y vertical (ρ , θ , z) y los tres versores ligados a la posición del punto en cada instante. Estos versores se relacionan con los $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ por:

$$\begin{aligned}\vec{u}_\rho(t) &= \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} \\ \vec{u}_\theta(t) &= -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j} \\ \vec{u}_z &= \vec{k}\end{aligned}\tag{2.30}$$

Derivadas de los versores

Por procedimiento semejante al realizado en el apartado 2.6.1, se pueden obtener las derivadas de los versores en coordenadas cilíndricas, que son:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\vec{u}_\rho}{dt} &= \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta \\
 \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} &= -\frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\rho \\
 \frac{d\vec{u}_z}{dt} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2.31}$$

Estudio del movimiento

Conocidas las coordenadas cilíndricas como funciones del tiempo, las ecuaciones paramétricas en función del tiempo son:

$$\begin{aligned}
 \rho &= \rho(t) \\
 \theta &= \theta(t) \\
 z &= z(t)
 \end{aligned}
 \tag{2.32}$$

y, con esta notación, el vector de posición se puede escribir como

$$\vec{r}(t) = \rho(t)\vec{u}_\rho(t) + z(t)\vec{u}_z
 \tag{2.33}$$

Derivando esta expresión con respecto al tiempo y utilizando las relaciones [2.31], obtenemos el vector velocidad expresado en coordenadas cilíndricas, que resulta ser:

$$\vec{v} = \frac{d\rho}{dt} \vec{u}_\rho + \rho \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta + \frac{dz}{dt} \vec{u}_z
 \tag{2.34}$$

El primer sumando del segundo miembro de [2.34] se denomina **velocidad radial**, el segundo se denomina **velocidad transversal (o azimutal)** y el tercero **velocidad axial**.

La aceleración se obtiene derivando con respecto al tiempo la expresión de la velocidad. El resultado es la siguiente expresión:

$$\vec{a} = \left[\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \vec{u}_\rho + \left[2 \frac{d\rho}{dt} \frac{d\theta}{dt} + \rho \frac{d^2\theta}{dt^2} \right] \vec{u}_\theta + \frac{d^2z}{dt^2} \vec{u}_z
 \tag{2.35}$$

Otras relaciones

La relación entre coordenadas cilíndricas y coordenadas cartesianas según se muestra en la Fig. 2.14 es:

$$\begin{aligned}
 x &= \rho \cos \theta & \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\
 y &= \rho \sin \theta & \theta &= \arctan \frac{y}{x} \\
 z &= z & z &= z
 \end{aligned}
 \tag{2.36}$$

El diferencial del vector de posición se escribe como:

$$d\vec{r} = d\rho\vec{u}_\rho + \rho d\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{u}_z$$

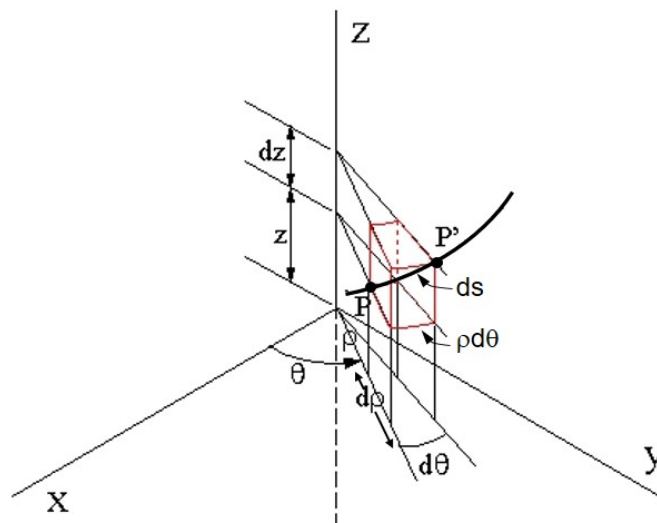


Figura 2.15: Diferenciales de longitud en coordenadas cilíndricas.

Un diferencial de arco de trayectoria, ds , se puede expresar como (Fig. 2.15):

$$(ds)^2 = (d\rho)^2 + (\rho d\theta)^2 + (dz)^2$$

de donde se obtiene el módulo de la velocidad:

$$v = \sqrt{\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \left(\rho \frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

2.6.3. Coordenadas esféricas

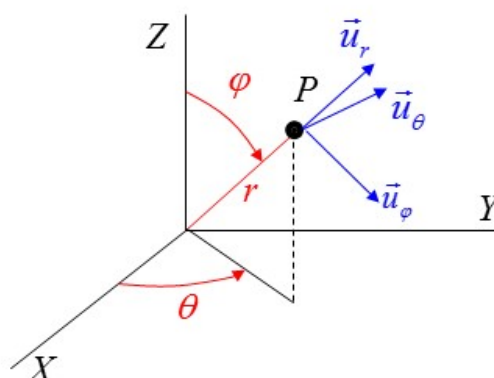


Figura 2.16: Coordenadas esféricas (r, φ, θ) y unitarios $(\vec{u}_r, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_\theta)$.

En coordenadas esféricas, la posición de un punto viene dada por una coordenada radial de distancia al origen de valor r y dos coordenadas angulares: la colatitud o ángulo polar φ y el ángulo azimutal θ . En la Fig. 2.16 se indica, sobre un sistema cartesiano, la posición de un punto P , sus coordenadas esféricas (r, φ, θ) y los tres versores ligados a la posición del punto en cada instante. Estos versores se relacionan con los $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ por:

$$\begin{aligned}\vec{u}_r(t) &= (\sin \varphi \cos \theta) \vec{i} + (\sin \varphi \sin \theta) \vec{j} + \cos \varphi \vec{k} \\ \vec{u}_\varphi(t) &= (\cos \varphi \cos \theta) \vec{i} + (\cos \varphi \sin \theta) \vec{j} - \sin \varphi \vec{k} \\ \vec{u}_\theta(t) &= -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}\end{aligned}\quad (2.37)$$

Derivadas de los versores

Por procedimiento semejante al realizado en apartados anteriores, aunque el desarrollo es más laborioso y no creemos que sea interesante reproducirlo aquí, se pueden obtener las derivadas temporales de los versores en coordenadas esféricas que son:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{u}_r}{dt} &= \frac{d\varphi}{dt} \vec{u}_\varphi + \frac{d\theta}{dt} \sin \varphi \vec{u}_\theta \\ \frac{d\vec{u}_\varphi}{dt} &= -\frac{d\varphi}{dt} \vec{u}_r + \frac{d\theta}{dt} \cos \varphi \vec{u}_\theta \\ \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} &= -\frac{d\theta}{dt} \sin \varphi \vec{u}_r - \frac{d\theta}{dt} \cos \varphi \vec{u}_\varphi\end{aligned}\quad (2.38)$$

Estudio del movimiento

Conocidas las coordenadas esféricas como funciones del tiempo, las ecuaciones paramétricas en función del tiempo son:

$$\begin{aligned}r &= r(t) \\ \varphi &= \varphi(t) \\ \theta &= \theta(t)\end{aligned}\quad (2.39)$$

y, con esta notación, el vector de posición se puede escribir como

$$\vec{r}(t) = r(t) \vec{u}_r(t) \quad (2.40)$$

La dependencia de la posición con los ángulos está implícita en el versor $\vec{u}_r$.

Derivando esta expresión con respecto al tiempo y utilizando las relaciones [2.38], obtenemos el vector velocidad expresado en coordenadas esféricas, que resulta ser:

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + \left(r \frac{d\varphi}{dt} \right) \vec{u}_\varphi + \left(r \frac{d\theta}{dt} \sin \varphi \right) \vec{u}_\theta \quad (2.41)$$

La aceleración se obtiene derivando con respecto al tiempo la expresión de la velocidad y resulta la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\vec{a} = & \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \sin^2 \varphi \right] \vec{u}_r + \\ & + \left[2 \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + r \frac{d^2 \varphi}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \sin \varphi \cos \varphi \right] \vec{u}_\varphi + \\ & + \left[2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \sin \varphi + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \sin \varphi + 2r \frac{d\theta}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \cos \varphi \right] \vec{u}_\theta\end{aligned}\quad (2.42)$$

Otras relaciones

La relación entre las coordenadas esféricas y las coordenadas cartesianas según se muestra en la Fig. 2.16 es:

$$\begin{aligned}x &= r \sin \varphi \cos \theta & r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ y &= r \sin \varphi \sin \theta & \theta &= \arctan \frac{y}{x} \\ z &= r \cos \varphi & \varphi &= \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\end{aligned}\quad (2.43)$$

El diferencial del vector de posición se escribe como:

$$d\vec{r} = dr\vec{u}_r + r d\varphi \vec{u}_\varphi + r \sin \varphi d\theta \vec{u}_\theta$$

Un diferencial de arco de trayectoria, ds , se puede expresar como:

$$(ds)^2 = (dr)^2 + (rd\varphi)^2 + (r d\theta \sin \varphi)^2$$

de donde se obtiene el módulo de la velocidad:

$$v = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \left(r \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \left(r \sin \varphi \frac{d\theta}{dt} \right)^2}$$

2.7. Estudio de algunos movimientos particulares

2.7.1. Movimiento rectilíneo

Diremos que el movimiento de una partícula material en un sistema de referencia es rectilíneo cuando su trayectoria en ese sistema es una recta. Esto supone que tanto su velocidad como su aceleración también deben ser, en todo instante, paralelos a esa recta.

Eligiendo adecuadamente el sistema de referencia, se puede hacer coincidir uno de los ejes (supondremos que es el OX) con la recta que constituye la trayectoria de la partícula material. El vector de posición, la velocidad y la aceleración tendrán, en ese sistema de referencia, una única componente.

Es muy normal, en estos casos, obviar el carácter vectorial de estas magnitudes y manejar solo los valores escalares (x , v o a), que coinciden con las componentes de los vectores, es decir, $\vec{r} = x\vec{i}$, $\vec{v} = v\vec{i}$, $\vec{a} = a\vec{i}$. Conocidas las condiciones iniciales y alguno de los vectores citados se pueden determinar los restantes por integración o derivación.

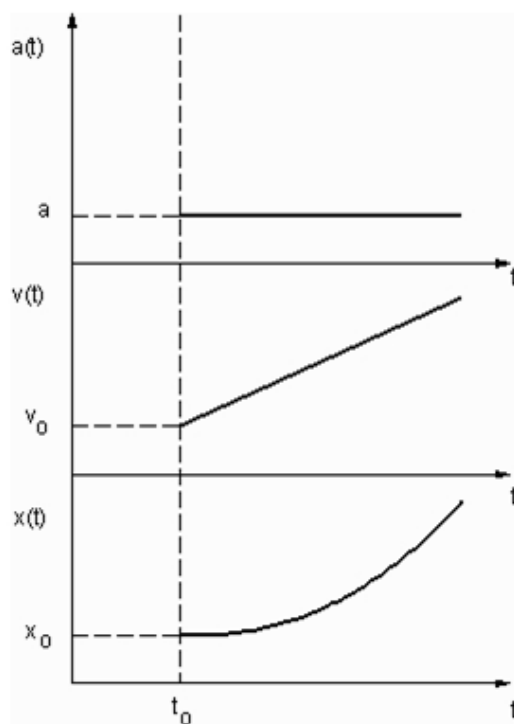


Figura 2.17: Aceleración, velocidad y posición en función del tiempo en el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

Un caso muy común es el de movimiento rectilíneo con aceleración constante. Suponemos una partícula material que sigue una trayectoria rectilínea con aceleración constante $\vec{a}$. Eligiendo como eje x del triedro de referencia uno coincidente con la recta trayectoria de la partícula, se puede escribir $\vec{a} = a\vec{i}$ y suponiendo que en $t=t_0$, $\vec{v}(t_0) = v_0\vec{i}$ y $\vec{r}(t_0) = x_0\vec{i}$, de [2.7] se obtiene

$$d\vec{v} = \vec{a}dt, \quad dv = a dt$$

Integrando y teniendo en cuenta las condiciones iniciales

$$\int_{v_0}^v dv = \int_{t_0}^t a dt = a \int_{t_0}^t dt \quad \text{es decir} \quad v(t) = v_0 + a(t - t_0) \quad (2.44)$$

De [2.5] se tiene,

$$d\vec{r} = \vec{v}dt \quad \rightarrow \quad dx = v dt$$

Sustituyendo [2.44] e integrando teniendo en cuenta las condiciones iniciales, queda

$$\int_{x_0}^x dx = \int_{t_0}^t v dt \quad \text{es decir} \quad x(t) = x_0 + v(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 \quad (2.45)$$

En numerosas ocasiones se suele elegir el instante inicial, $t_0 = 0$, cuando la partícula está en el origen de coordenadas, $x_0 = 0$, con una cierta velocidad $v_0 \neq 0$. Así, las ecuaciones [2.44] y [2.45] quedan:

$$\begin{aligned} v(t) &= v_0 + at \\ x(t) &= x_0 + vt + \frac{1}{2}at^2 \end{aligned} \quad (2.46)$$

Se puede tener una idea clara de los movimientos haciendo representaciones gráficas de las funciones $a(t)$, $v(t)$ y $x(t)$. La representación correspondiente será la de la Fig. 2.17.

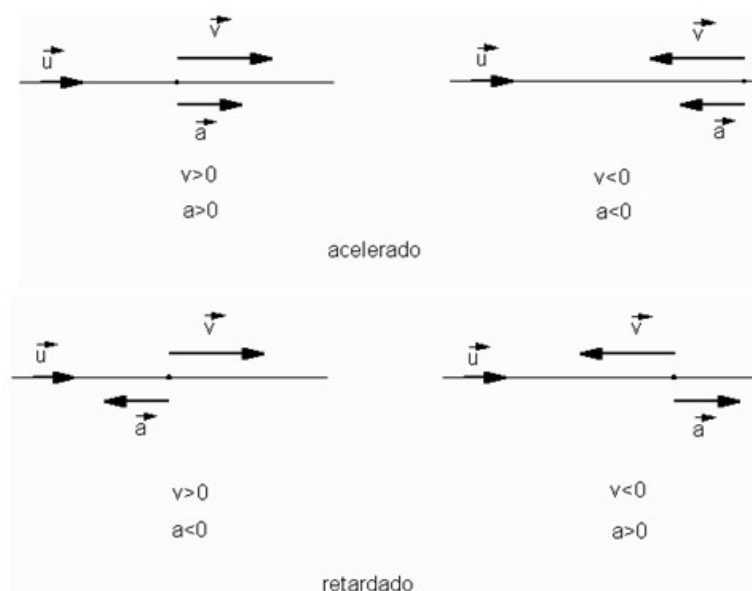


Figura 2.18: Vectores aceleración y velocidad en el movimiento acelerado y retardado, siendo $\vec{u} = \vec{i}$.

Un caso particular interesante es el de aceleración nula. Es el movimiento rectilíneo con velocidad constante,

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ v &= v_0 \\ x &= v_0 t \end{aligned}$$

Hay que recordar el carácter vectorial de las magnitudes que se manejan en cinemática y la simplificación que utilizamos por el hecho de estar estudiando un movimiento rectilíneo.

Los vectores $\vec{v}$ y $\vec{a}$ tienen la misma dirección (en nuestro caso la elegida como eje x) pero pueden tener igual o distinto sentido dependiendo de los signos de las derivadas con respecto al tiempo de v y de x . Si aumenta el módulo de la velocidad de la partícula material, diremos que

ésta tiene un movimiento **acelerado**, mientras que si disminuye diremos que su movimiento es **retardado**. Esto no depende en exclusiva del sentido de la aceleración. Hay que comparar ese sentido con el de la velocidad (Fig. 2.18).

El movimiento será acelerado si los sentidos de $\vec{v}$ y $\vec{a}$ coinciden y será retardado si son opuestos. Recordamos que las expresiones [2.44] y [2.45] están deducidas con el sentido positivo implícito, es decir, x , v y a son las componentes escalares de $\vec{r}$, $\vec{v}$ y $\vec{a}$, y si son positivas su sentido es el del versor $\hat{i}$.

2.7.2. Movimiento circular

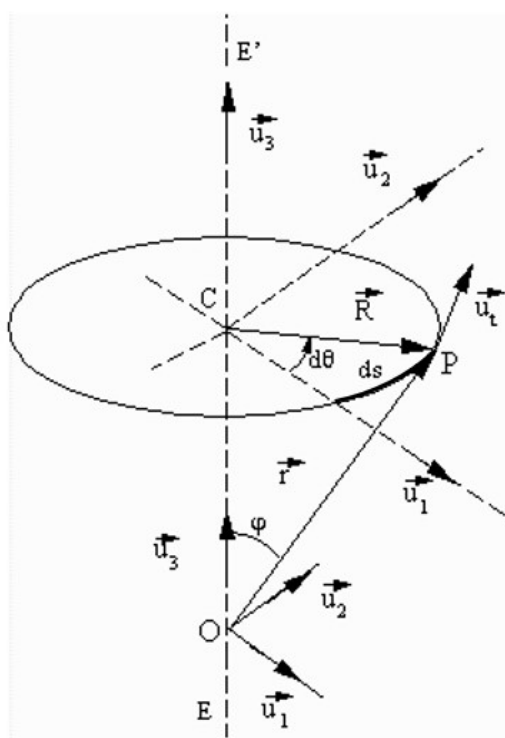


Figura 2.19: Movimiento circular.

Cuando una partícula material P gira alrededor de un eje EE' , fijo a un determinado sistema de referencia, realiza un movimiento cuya trayectoria es una circunferencia contenida en un plano normal al eje y con centro en él. En la Fig. 2.19 se indican el eje EE' , la partícula P y la trayectoria que describe, con centro en C . Este tipo de movimiento se denomina **movimiento circular**.

Para estudiar el movimiento, es conveniente utilizar un sistema de referencia cartesiano como el indicado en la Fig. 2.19, cuyos versores $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ estén contenidos en el plano del movimiento (o en un plano paralelo a él) y el versor $\vec{u}_3$ contenido en el eje de giro.

En este sistema de referencia, el vector de posición de la partícula, tomando como origen un punto cualquiera O del eje, es

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP}$$

y si tomásemos el origen del sistema en el centro C de la trayectoria, el vector de posición sería:

$$\vec{r} = \vec{R} = \overrightarrow{CP}$$

que es el caso particular que se estudia en cursos elementales.

En uno u otro caso, el estudio de este movimiento se puede realizar aplicando los conceptos ya expuestos en este mismo capítulo, pero por la importancia y peculiaridades del mismo, se hará a continuación un tratamiento específico que aporte nuevos conceptos y prepare las fórmulas para una utilización más cómoda y sencilla.

Vector velocidad. Velocidad angular

La velocidad de la partícula, utilizando la expresión [2.10], es un vector tangente a la trayectoria dado por

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt} \vec{u}_t \quad (2.47)$$

Observando la Fig. 2.19 vemos que el camino diferencial recorrido por la partícula se puede poner como

$$ds = R d\theta = r \sin \varphi d\theta \quad (2.48)$$

donde $d\theta$ es el ángulo girado por el radiovector $\vec{R}$ mientras la partícula recorre el arco ds .

Por otra parte, el versor tangente $\vec{u}_t$ se puede expresar en función del vector de posición de la partícula y de los versores del sistema de referencia. Como $\vec{u}_t$ es perpendicular a $\vec{r}$ y a $\vec{u}_3$, se puede poner

$$\vec{u}_t = \frac{\vec{u}_3 \times \vec{r}}{|\vec{u}_3 \times \vec{r}|} = \frac{1}{r \sin \varphi} \vec{u}_3 \times \vec{r} \quad (2.49)$$

La expresión anterior es equivalente a $\vec{u}_t = \frac{1}{R}(\vec{u}_3 \times \vec{R})$ si tenemos en cuenta que $\vec{u}_3$ y $\vec{r}$ definen el mismo plano que $\vec{u}_3$ y $\vec{R}$ y además que $R = r \sin \varphi$.

Sustituyendo ahora [2.48] y [2.49] en [2.47], la velocidad queda

$$\vec{v} = \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_3 \times \vec{r} \quad (2.50)$$

En esta ecuación, $\frac{d\theta}{dt}$ es una magnitud escalar que expresa el ángulo girado, por unidad de tiempo, por el vector de posición $\vec{R}$ de la partícula relativo al centro de la trayectoria. Por este motivo se denomina velocidad angular de rotación de la partícula, y se designa por ω ,

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

Es conveniente dotar a ω de un carácter vectorial, lo que facilitará su utilización en los cálculos. Como los giros alrededor de un eje se pueden representar por vectores paralelos al eje, se define el vector **velocidad angular de rotación** de la partícula, mediante la expresión

$$\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_3 \quad (2.51)$$

El vector velocidad angular es una característica del movimiento de rotación ya que si consideramos varias partículas, solidariamente unidas, que giren alrededor del mismo eje, todas tienen la misma velocidad angular $\vec{\omega}$, aunque puede que no tengan la misma velocidad $\vec{v}$. Por ejemplo, si en la Fig. 2.19 consideramos partículas siempre contenidas en el triángulo OCP que giran a la vez que lo hace la partícula P , todas tendrían la misma velocidad angular.

Sustituyendo [2.51] en [2.50], obtenemos una expresión para la velocidad de la partícula, en función de la velocidad angular y del vector de posición

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (2.52)$$

Naturalmente, también se puede escribir $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}$.

La ecuación de dimensiones para $\vec{\omega}$ será:

$$[\omega] = \frac{[v]}{[r]} = T^{-1}$$

y sus unidades en el SI: rad/s o s^{-1} .

Si la componente de la velocidad angular en el eje de giro es positiva ($d\theta/dt > 0$), la partícula material describe la trayectoria recorriéndola en sentido contrario a las agujas del reloj vista desde el semiespacio hacia el que apunta el versor $\vec{u}_3$. Si es negativa, ($d\theta/dt < 0$), la recorrerá al revés.

Vector aceleración. Aceleración angular

Para calcular la aceleración de la partícula material, derivamos la expresión [2.52] con respecto al tiempo

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (2.53)$$

y teniendo en cuenta que $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega \vec{u}_3) = \frac{d\omega}{dt} \vec{u}_3$ porque $\vec{u}_3$ es un vector constante, de [2.53] se obtiene,

$$\vec{a} = \frac{d\omega}{dt} \vec{u}_3 \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} \quad (2.54)$$

Definimos ahora el vector aceleración angular instantánea de rotación, y lo designamos por $\vec{\alpha}$, como la variación con el tiempo de la velocidad angular $\vec{\omega}$, es decir,

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \vec{u}_3 = \frac{d^2\theta}{dt^2} \vec{u}_3 \quad (2.55)$$

Como podemos observar $\vec{\alpha}$ es un vector paralelo a $\vec{\omega}$ y cuya componente en el eje coincide con la variación en el tiempo de la componente de $\vec{\omega}$.

Teniendo en cuenta [2.55] y [2.52] y sustituyéndolas en [2.54], queda

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (2.56)$$

que es la expresión de la aceleración instantánea de una partícula material que gira alrededor de un eje fijo en el sistema de referencia definido anteriormente.

La ecuación de dimensiones para $\vec{\alpha}$ será: $[\alpha] = \frac{[\omega]}{[t]} = T^{-2}$ y sus unidades en el SI: rad/s² o s⁻².

El primer sumando de [2.56] es paralelo a $\vec{u}_t$ como se comprueba fácilmente en la Fig. 2.19. El segundo sumando es perpendicular al plano definido por $\vec{u}_t$ y $\vec{\omega}$ y tiene, entonces, la dirección que habíamos denominado normal principal.

Cada uno de ellos se corresponde por tanto con una de las componentes intrínsecas, ec. [2.18], de la aceleración. El primero es la aceleración tangencial y el segundo la aceleración normal.

$$\begin{aligned} \vec{a}_t &= \vec{\alpha} \times \vec{r} = \vec{\alpha} \times \vec{R} \\ \vec{a}_n &= \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}) \end{aligned}$$

Así, el módulo de $\vec{a}_t$ es

$$a_t = \alpha r \sin \varphi = \alpha R$$

y el de $\vec{a}_n$,

$$a_n = \omega^2 r \sin \varphi = \omega^2 R$$

Movimiento circular uniforme

Se llama así al caso particular en el que la velocidad angular $\vec{\omega}$, además de ser constante en dirección, también es constante en módulo. La aceleración angular será nula ($\vec{\alpha} = 0$) según su definición [2.55].

Integrando en [2.51], si se conocen unas condiciones iniciales tales como, por ejemplo, que en $t=t_0$, el ángulo girado es $\theta=\theta_0$, podremos determinar la expresión del ángulo girado en función del tiempo,

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^t \omega dt \quad \text{es decir} \quad \theta(t) = \theta_0 + \omega(t - t_0)$$

Movimiento circular uniformemente acelerado

Otro caso particular interesante es aquél en el que la aceleración angular $\vec{\alpha}$, además de ser constante en dirección, también es constante en módulo (a veces, erróneamente, se utiliza la palabra módulo para indicar la componente en una dirección, sin tener en cuenta que ésta puede ser positiva o negativa). A este tipo de movimiento se le llama circular uniformemente acelerado.

Integrando en [2.55] a partir de condiciones iniciales conocidas ($t=t_0$, $\omega=\omega_0$), podremos determinar la expresión de la velocidad angular en función del tiempo,

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_{t_0}^t \alpha dt \quad \text{es decir} \quad \omega(t) = \omega_0 + \alpha(t - t_0)$$

Integrando ahora la ec. [2.51] usando condiciones iniciales conocidas ($t=t_0$, $\theta=\theta_0$), podremos determinar el ángulo girado en función del tiempo,

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^t \omega dt \quad \text{es decir} \quad \theta(t) = \theta_0 + \omega(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2$$

2.7.3. Combinación de dos movimientos rectilíneos. Movimiento parabólico

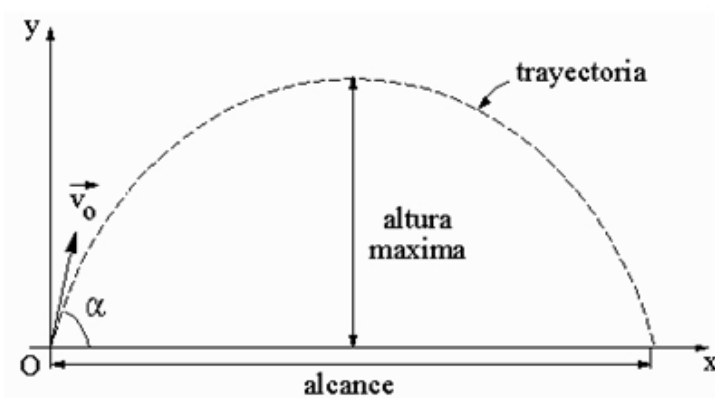


Figura 2.20: Movimiento parabólico.

Un movimiento particularmente interesante es el de un objeto lanzado en las proximidades de la superficie terrestre y sometido únicamente a la acción de la gravedad. Ya Galileo demostró que la trayectoria que sigue una partícula material en estas circunstancias se puede estudiar como la combinación de dos movimientos independientes que ocurren simultáneamente. Veremos que el estudio de la cinemática del movimiento mediante vectores conduce, de forma natural, a tal combinación. Si elegimos un sistema de referencia de forma que un eje sea vertical y otro horizontal, las expresiones de las componentes de los vectores posición, velocidad y aceleración confirman la deducción de Galileo.

El problema que se plantea es, pues, estudiar el movimiento que realiza un objeto lanzado desde un punto determinado, con una velocidad inicial $\vec{v}_0$ conocida (Fig. 2.20).

Para ello elegimos un sistema de referencia OXY con el eje OX horizontal, el eje OY vertical (paralelo a la dirección de la aceleración de la gravedad) y origen en el punto del espacio desde el que realizamos el lanzamiento. Se supone que la resistencia que ofrece el aire al movimiento del objeto en su seno es despreciable -por eso se utiliza el término de movimiento de graves (cuerpos sometidos a la aceleración de la gravedad) en el vacío- y que mientras dura el movimiento, la influencia de la rotación de la tierra es también despreciable.

Los datos de que disponemos para abordar la resolución del problema son:

- Condiciones iniciales, para $t=0$:

$$\begin{aligned}\vec{r}(t=0) &= 0 \\ \vec{v}(t=0) &= \vec{v}_0 = v_{0x}\vec{i} + v_{0y}\vec{j} = v_0(\cos\alpha\vec{i} + \sin\alpha\vec{j})\end{aligned}$$

- Aceleración constante:

$$\vec{a} = -g\vec{j}$$

donde g es el módulo de la aceleración de la gravedad.

Con estas condiciones e integrando la expresión general de la aceleración, $d\vec{v} = \vec{a}dt$, se tiene:

$$\begin{aligned}\int_{v_0}^v d\vec{v} &= \left(\int_{v_{0x}}^{v_x} dv_x\right)\vec{i} + \left(\int_{v_{0y}}^{v_y} dv_y\right)\vec{j} + \left(\int_{v_{0z}}^{v_z} dv_z\right)\vec{k} = -\left(g\int_0^t dt\right)\vec{j} \\ \vec{v} &= \vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} = v_0\cos\alpha\vec{i} + (v_0\sin\alpha - gt)\vec{j} \\ \left. \begin{aligned} v_x(t) &= v_0\cos\alpha = v_{0x} = cte \\ v_y(t) &= v_0\sin\alpha - gt \\ v_z(t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.57)\end{aligned}$$

A partir de aquí, integrando la expresión $d\vec{r} = \vec{v}dt$, se tiene

$$\begin{aligned}\int_{r_0}^r d\vec{r} &= \left(\int_0^x dx\right)\vec{i} + \left(\int_0^y dy\right)\vec{j} + \left(\int_0^z dz\right)\vec{k} = \left(v_0\cos\alpha\int_0^t dt\right)\vec{i} + \int_0^t (v_0\sin\alpha - gt) dt\vec{j} \\ \vec{r} &= v_0t\cos\alpha\vec{i} + \left(v_0t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2\right)\vec{j}\end{aligned}$$

Las ecuaciones paramétricas del movimiento son

$$\left. \begin{aligned} x &= v_0t\cos\alpha \\ y &= v_0t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2 \\ z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.58)$$

que ponen de manifiesto la combinación de movimientos citada al principio de este apartado. Se comprueba fácilmente, ya que $z = 0$, que el movimiento es un movimiento plano contenido en el plano XY (plano vertical local).

La ecuación de la trayectoria se determina eliminando el tiempo en las ecuaciones paramétricas [2.58], y se obtiene:

$$y = x(\tan \alpha) - \frac{g(1 + \tan^2 \alpha)}{2v_0} x^2 \quad (2.59)$$

que es la ecuación de una parábola (Fig. 2.20).

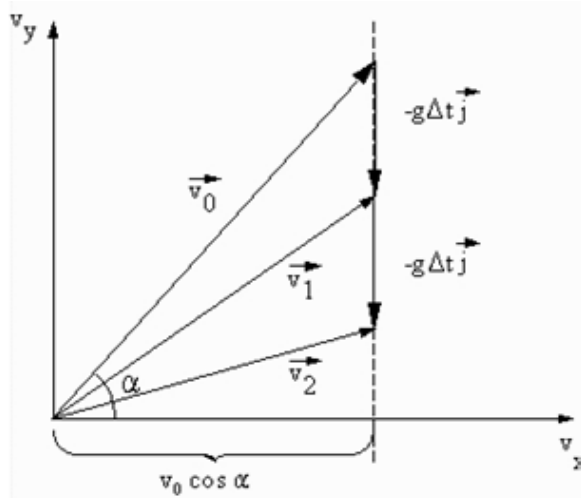


Figura 2.21: Hodógrafa del movimiento parabólico.

Para dibujar la hodógrafa del movimiento (Fig. 2.21), estudiamos cómo varía el vector velocidad con el tiempo. Observamos en las ecs. [2.57] que la componente horizontal v_x es constante y que la componente vertical v_y disminuye como $g\Delta t$. En la Fig. 2.21 suponemos que la velocidad inicial es el vector $\vec{v}_0$. Un tiempo Δt después, el vector velocidad $\vec{v}_1$ se obtiene sumando al vector $\vec{v}_0$ el vector $(-g\Delta t \vec{j})$; y así sucesivamente. Se puede observar que la hodógrafa es una recta de ecuación $v_x = v_{0x}$ (cte) en el plano hodógrafo. Más precisamente, si el movimiento se considera limitado entre los instantes inicial (lanzamiento o disparo) y final (llegada del objeto al suelo), la hodógrafa es un segmento de recta.

Este tipo de movimiento es el que siguen los proyectiles y, tradicionalmente, se definen una serie de parámetros característicos: **altura máxima, alcance y parábola de seguridad**. La partícula material alcanzará su máxima altura ($y_{m\acute{a}x}$) cuando la componente vertical de su velocidad (v_y) sea nula. Así, anulando la componente y en las ecuaciones [2.57], obtenemos el tiempo t_1 en que esto sucede:

$$t_1 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \quad (2.60)$$

Sustituyendo [2.60] en la componente y de la ec. [2.58], queda que la altura máxima es:

$$y_{\text{máx}} = y(t_1) = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

Se comprueba fácilmente que aumentando el módulo de la velocidad inicial (v_0) se logra aumentar la altura máxima. También se puede observar que para v_0 dada, la máxima altura dentro de las máximas se obtiene para $\sin \alpha = 1$, es decir, $\alpha = \pi/2$ lo que se corresponde con el lanzamiento vertical.

El alcance es la distancia horizontal recorrida hasta una posición determinada, generalmente el suelo. Así, en el problema planteado, el alcance será el valor de la coordenada x cuando la y sea cero. Anulando la componente y de las ecuaciones [2.58] obtenemos el instante t_2 en que esto ocurre:

$$0 = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2$$

que tiene dos soluciones, una de ellas trivial ($t=0$) y otra,

$$t_2 = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$$

Sustituyendo t_2 en la componente x de las ecuaciones [2.58], queda que el alcance es:

$$\text{alcance} = x(t_2) = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

donde observamos que aumentando el módulo de $\vec{v}_0$ se consigue un mayor alcance y que para un valor fijo de v_0 , el alcance máximo se obtiene cuando $\alpha = \pi/4$.

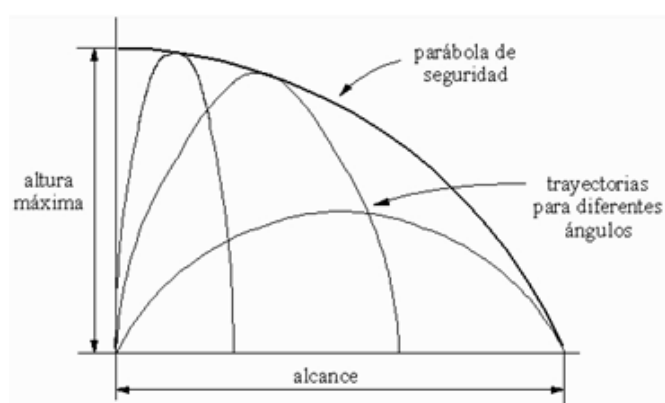


Figura 2.22: Parábola de seguridad del movimiento parabólico.

Para obtener la parábola de seguridad, calculamos la envolvente de todas las posibles trayectorias que se pueden conseguir para una v_0 dada, variando el ángulo de inclinación α de la velocidad inicial (obsérvese que el módulo de la velocidad de salida suele ser una característica en el lanzamiento de un proyectil, siendo el ángulo de inclinación de la lanzadera el parámetro que se puede variar con mayor facilidad).

Esta envolvente (Fig. 2.22) dividirá el espacio (en nuestro caso el primer cuadrante) en dos zonas. Una de ellas es la que todos los puntos pueden pertenecer a las posibles trayectorias de la partícula material y otra en la que no. De aquí su nombre de parábola de seguridad. Resumiendo, la parábola de seguridad separa los puntos del plano que pertenecen a posibles trayectorias de aquellos que la partícula no podrá alcanzar nunca variando únicamente α y para un valor dado de v_0 .

Matemáticamente la envolvente de una familia de curvas $f(x, y, \alpha) = 0$ dependiente de un parámetro α se obtiene eliminando el parámetro entre la ecuación de la familia de curvas y su derivada con respecto al parámetro.

Es decir,

$$\left. \begin{aligned} f(x, y, \alpha) &= 0 \\ \frac{df(x, y, \alpha)}{d\alpha} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow e(x, y) = 0 \quad (\text{envolvente})$$

Como tenemos la ecuación de la trayectoria [2.59], derivando con respecto a α e igualando a cero, se obtiene

$$\tan \alpha = \frac{v_0^2}{gx}$$

y sustituyendo en [2.59], queda

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2} \quad (2.61)$$

que es la ecuación de la parábola de seguridad, que se indica en la Fig. 2.22.

Dado un punto (x_P, y_P) del espacio y una velocidad de salida de módulo fijo v_0 , podremos, con ayuda de la ecuación [2.61] de la parábola de seguridad, saber si el punto en cuestión está o no dentro de la zona de posibles trayectorias.

Si $y_P \leq \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx_P^2}{2v_0^2}$, el punto estará dentro de la zona delimitada por la parábola de seguridad y si es mayor estará fuera. En definitiva, podremos saber si el punto podrá ser o no alcanzado por el proyectil; y para un punto alcanzable, con v_0 fijada, en la ecuación de la trayectoria [2.59] se encuentran dos posibles valores del ángulo α (excepto cuando $\alpha = \pi/4$ que solo hay uno) para los cuales el proyectil pasa por ese punto.

2.7.4. Movimiento helicoidal

Introducción geométrica

Consideremos una superficie cilíndrica recta cualquiera, cuya sección recta sea una curva cerrada C (no necesariamente una circunferencia, Fig. 2.23).

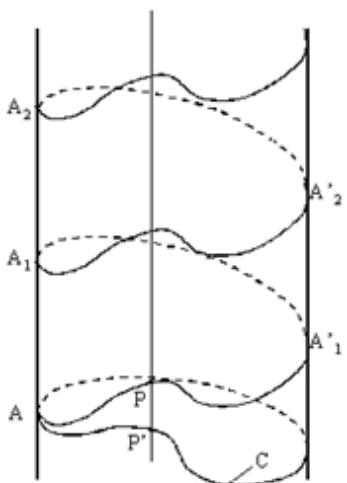


Figura 2.23: Movimiento helicoidal: determinado por el giro en una curva de sección plana C y el ascenso vertical sobre la generatriz de una superficie cilíndrica recta.

La posición de un punto P sobre la superficie se puede determinar perfectamente tomando un sistema de coordenadas que sean:

-El recorrido AP' sobre el contorno de la sección recta C o longitud de arco, a partir de un punto arbitrario A que se toma como origen.

-El avance $|\overrightarrow{P'P}|$ a lo largo de una generatriz de la superficie al girar sobre la curva.

Si existe proporcionalidad entre estas dos coordenadas, es decir, si se cumple que:

$$|\overrightarrow{P'P}| = k \cdot \text{longitud arco}(AP') \quad (k \text{ constante}) \quad (2.62)$$

entonces el lugar geométrico de las posibles posiciones del punto P sobre la superficie cilíndrica es una curva $AA_1A_2...$ “arrollada” sobre el cilindro, que recibe el nombre de **hélice**.

Mientras no se indique lo contrario, nos referiremos siempre a hélices apoyadas sobre superficies cilíndricas de revolución (Fig. 2.24), en cuyo caso la sección recta C es una circunferencia.

Utilizando coordenadas cilíndricas, con origen en O para z y en A para θ , la proporcionalidad [2.62] se puede poner de la forma

$$z = k \cdot R\theta \quad (2.63)$$

El ángulo θ es continuamente creciente, de modo que dos posiciones consecutivas, P y P_1 , sobre la misma generatriz corresponden a ángulos θ y $\theta + 2\pi$.

La distancia H entre dos puntos contiguos de intersección de una generatriz con la hélice, se llama **paso de la hélice**. Entre el paso de la hélice y el radio del cilindro existe la relación

$$k = \frac{H}{2\pi R} \quad (2.64)$$

y la constante k se llama **pendiente de la hélice**. El valor $H' = \frac{H}{2\pi}$ se llama **paso reducido** y las porciones de curva $AA_1A_1A_2A_2...$ etc., que se van repitiendo a lo largo del cilindro, se denominan **espiras** de la hélice. Indiquemos que el desarrollo de la hélice según un plano tangente al cilindro (proyección sobre este plano) es una línea recta, cuya pendiente, en relación al desarrollo de la sección recta, también vale k .

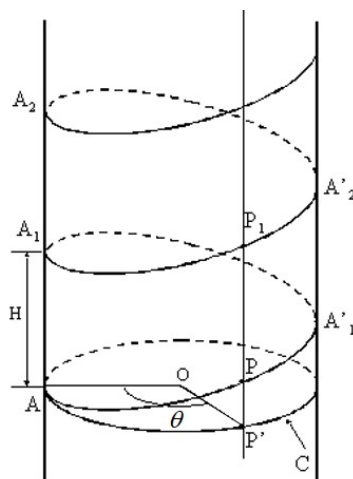


Figura 2.24: Movimiento helicoidal sobre un cilindro de revolución.

Cinemática del movimiento

Para estudiar el movimiento de una partícula que se mueve a lo largo de una trayectoria helicoidal, de radio R y pendiente k conocidos, resulta adecuada la utilización de coordenadas cilíndricas.

Las ecuaciones paramétricas del movimiento son:

$$\begin{aligned} \rho &= R \\ \theta &= \theta(t) \\ z &= z(t) \end{aligned} \quad (2.65)$$

El vector de posición se puede poner:

$$\vec{r}(t) = R\vec{u}_\rho(t) + z(t)\vec{u}_z \quad (2.66)$$

Derivando la expresión anterior y recordando la ecuación [2.27] de la velocidad en coordenadas cilíndricas, se obtiene para el vector velocidad

$$\vec{v}(t) = R\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + \frac{dz}{dt}\vec{u}_z \quad (2.67)$$

Se puede relacionar la coordenada vertical con el ángulo girado:

$$\left. \begin{aligned} z &= kR\theta \\ k &= \frac{H'}{R} \end{aligned} \right\} \Rightarrow z = H'\theta$$

Y derivando esta expresión y llamando ω a $\frac{d\theta}{dt}$, resulta

$$\frac{dz}{dt} = H'\omega \quad (2.68)$$

con lo que la ecuación [2.67] se puede escribir de la forma

$$\vec{v}(t) = \omega(R\vec{u}_\theta + H'\vec{u}_z) \quad (2.69)$$

El término $\omega R\vec{u}_\theta$ es la **velocidad tangencial** o **velocidad de circulación** y el término $\omega H'\vec{u}_z$ se llama **velocidad de deslizamiento**.

El módulo de la velocidad es

$$v = \omega\sqrt{R^2 + H'^2} \quad (2.70)$$

Para obtener la aceleración no hay más que particularizar la ecuación [2.35] para el caso que nos ocupa y queda

$$\vec{a} = -\omega^2 R\vec{u}_\rho + R\frac{d\omega}{dt}\vec{u}_\theta + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{u}_z \quad (2.71)$$

Derivando [2.68] con respecto al tiempo, se tiene

$$\frac{d^2z}{dt^2} = H'\frac{d\omega}{dt}$$

sustituyendo en la ecuación [2.71] y agrupando términos, se obtiene para la aceleración

$$\vec{a}(t) = -\omega^2 R\vec{u}_\rho + \frac{d\omega}{dt}(R\vec{u}_\theta + H'\vec{u}_z) \quad (2.72)$$

El término $-\omega^2 R\vec{u}_\rho$ es la **aceleración normal**, el término $\frac{d\omega}{dt}(R\vec{u}_\theta + H'\vec{u}_z) = \frac{1}{\omega}\frac{d\omega}{dt}\vec{v}$ es la **aceleración tangencial**, ya que tiene la dirección del vector velocidad.

El radio de curvatura tiene por expresión

$$\rho = \frac{R^2 + H'^2}{R}$$

y pasa por el centro de la sección recta del cilindro en la que está la partícula.

Adelantándonos un poco al concepto de sólido rígido, podemos afirmar que todos los puntos de un cuerpo sólido, que gira alrededor de un eje y simultáneamente desliza a lo largo de

él, describen trayectorias helicoidales, siempre y cuando se cumpla la condición [2.62] de proporcionalidad.

2.8. Movimiento armónico simple (m.a.s.)

2.8.1. Introducción

En la naturaleza hay ciertos movimientos que se producen con asiduidad. Entre ellos destacan los movimientos oscilatorios. Este tipo de movimientos tienen una característica en común: son movimientos periódicos. Y de todos ellos el más simple de abordar desde el punto de vista matemático es el movimiento armónico simple (m.a.s.). Comenzaremos por definir lo que entendemos por movimientos periódicos y después realizaremos un estudio cinemático del movimiento armónico simple.

2.8.2. Movimientos periódicos

Diremos que el movimiento de una partícula material es periódico cuando su estado cinemático (posición, velocidad y aceleración) se repite a intervalos regulares de tiempo.

Desde el punto de vista matemático, una función f de una variable escalar t es periódica si existe un valor particular y único T de la variable que verifica $f(t+T)=f(t)$ para cualquier valor de t dentro del intervalo en que está definida la función f . Físicamente el movimiento de una partícula material será periódico cuando lo sean sus ecuaciones paramétricas. Es decir, el vector de posición debe verificar: $\vec{r}(t) = \vec{r}(t+T)$. Es fácil comprobar que si $\vec{r}(t)$ es periódico, también lo son la velocidad y la aceleración.

El tiempo (T) que debe transcurrir para que se repita el estado cinemático es algo característico de cada movimiento y se denomina **PERIODO**. Otra característica de los movimientos periódicos es la **FRECUENCIA** (f) que se define como la inversa del período y físicamente representa el número de veces que se repite el estado cinemático por unidad de tiempo.

Las ecuaciones de dimensiones de período y frecuencia son:

$$[T] = T$$

$$[f] = \frac{1}{[T]} = T^{-1}$$

y sus unidades en el SI son s y s^{-1} respectivamente.

2.8.3. Posición, velocidad y aceleración

Cinemáticamente (es decir, haciendo abstracción de las causas que lo producen, que serán estudiadas en dinámica de la partícula material), diremos que una partícula material ejecuta un

movimiento armónico simple cuando sigue un movimiento rectilíneo con una ecuación horaria que es una función armónica del tiempo,

$$x(t) = a \cos(\omega t - \varphi) \quad (2.73)$$

donde ω es una constante característica del movimiento y a y φ son constantes que dependen de las condiciones iniciales.

En los movimientos armónicos simples se suele utilizar la siguiente nomenclatura:

x ELONGACIÓN

a AMPLITUD

ω PULSACIÓN (o FRECUENCIA ANGULAR)

$\omega t - \varphi$ FASE

φ FASE INICIAL (o DESFASE)

La ley horaria de los movimientos armónicos simples también puede encontrarse escrita con otras expresiones equivalentes. Una de ellas es

$$x(t) = a \sin(\omega t - \varphi') \quad (2.74)$$

que coincide con [2.73] sin más que cambiar la constante φ por $\varphi' + \pi/2$, como se puede comprobar fácilmente recordando que $\sin \alpha = \cos(\alpha - \pi/2)$. Otra es

$$x(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad (2.75)$$

con $A = a \sin \varphi$ y $B = a \cos \varphi$ que se obtiene sin más que desarrollar el coseno de una diferencia en [2.73]. A la vez que comprobamos que efectivamente la función que define la posición es periódica, podemos calcular cuanto vale el período. Si $x(t)$ es periódica, verificará $x(t) = x(t + T)$,

$$a \cos(\omega t + \varphi) = a \cos[\omega(t + T) + \varphi]$$

o lo que es lo mismo,

$$[\omega(t + T) + \varphi] - (\omega t + \varphi) = 2\pi$$

$$\omega T = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Efectivamente, existe periodo T y vale $\frac{2\pi}{\omega}$. Luego la pulsación (ω) es $\frac{2\pi}{T}$ y tiene dimensiones y unidades de velocidad angular.

Al ser un movimiento rectilíneo, velocidad y aceleración serán tratados como escalares con signo como ya vimos en el apartado 2.7.1 (es decir, sus componentes en la dirección del movimiento).

El cálculo de velocidad y aceleración es inmediato sin más que derivar la expresión [2.73].

$$v(t) = -a\omega \sin(\omega t - \varphi) \quad (2.76)$$

$$a(t) = -a\omega^2 \cos(\omega t - \varphi) = -\omega^2 x(t) \quad (2.77)$$

Se puede observar que tanto la velocidad como la aceleración son también funciones periódicas del tiempo (y además, del mismo período).

Hay que resaltar algo que nos será de gran utilidad a la hora de estudiar dinámicamente los movimientos. En [2.77] se observa que la aceleración es proporcional al desplazamiento. Este detalle conviene recordarlo para su posterior aplicación en dinámica de la partícula.

2.8.4. Ecuación diferencial

La ecuación [2.77] se puede escribir de la forma $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ que es una ecuación diferencial ordinaria, homogénea, de coeficientes constantes, de segundo orden sin término en la primera derivada. Siempre que encontremos una ecuación formalmente análoga a ésta, su solución se puede escribir directamente como la ecuación de un m.a.s., con dos constantes a determinar aplicando las condiciones iniciales.

Podemos ahora representar gráficamente las funciones $x(t)$, $v(t)$ y $a(t)$.

Espacio-tiempo

$$x(t) = a \cos(\omega t - \varphi)$$

$$x_{\text{máx}} = \pm a \quad \text{en} \quad t = \frac{\varphi}{\omega} + \frac{kT}{2} \quad \text{con } k \text{ entero}$$

$$t = 0 \Rightarrow x(0) = a \cos \varphi$$

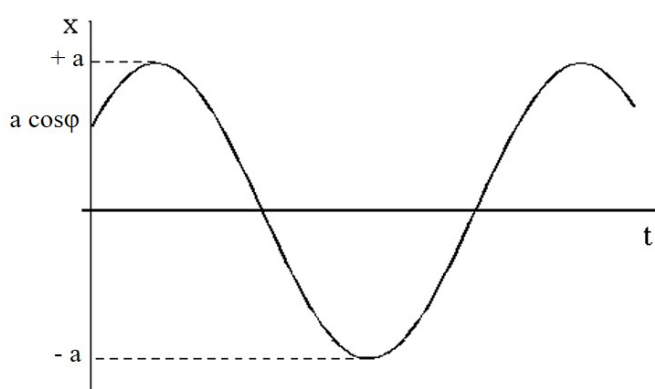


Figura 2.25: Gráfica espacio-tiempo de un m.a.s.

Velocidad-tiempo

$$v(t) = -a\omega \sin(\omega t - \varphi)$$

$$v_{\text{máx}} = \pm a\omega \text{ en } t = \frac{\varphi}{\omega} + \frac{T(2k+1)}{4} \text{ con } k \text{ entero}$$

$$t = 0 \Rightarrow v(0) = a\omega \sin \varphi$$

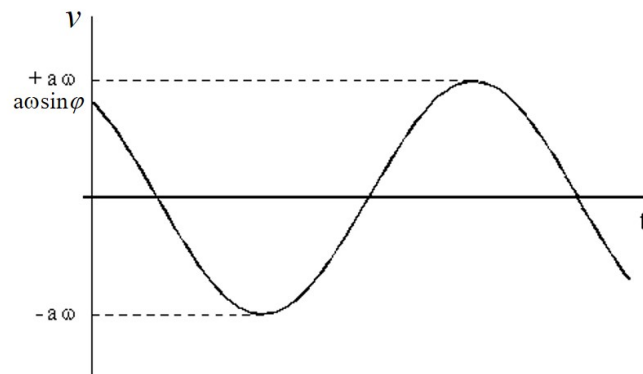


Figura 2.26: Gráfica velocidad-tiempo de un m.a.s.

Aceleración-tiempo

$$a(t) = -a\omega^2 \cos(\omega t - \varphi)$$

$$a_{\text{máx}} = -a\omega^2 \text{ en } t = \frac{\varphi}{\omega} + \frac{kT}{2} \text{ con } k \text{ entero}$$

$$t = 0 \Rightarrow a(0) = -a\omega^2 \cos \varphi = -\omega^2 x(0)$$

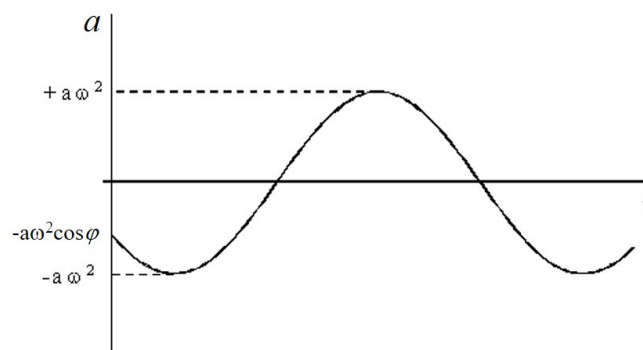
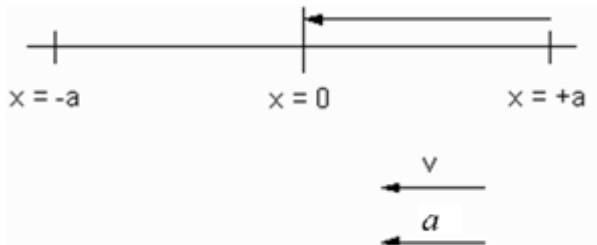


Figura 2.27: Gráfica aceleración-tiempo de un m.a.s.

Podemos analizar los diagramas de movimiento para ver cuál es el comportamiento de la partícula material en cada parte del movimiento, dividiéndolo en cuartos de período.

Primer cuarto de período:

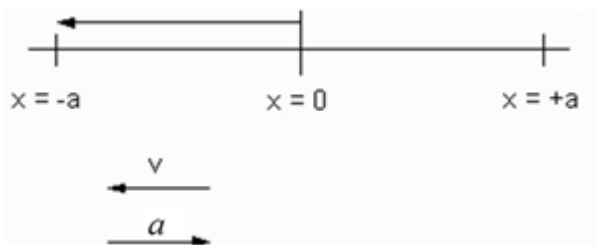


$x = a \Rightarrow v$ nula, $|a|$ máxima y a negativa

$0 < x < a \Rightarrow |v|$ crece, $|a|$ disminuye, v y a negativas

$x = 0 \Rightarrow |v|$ máxima, v negativa y a nula

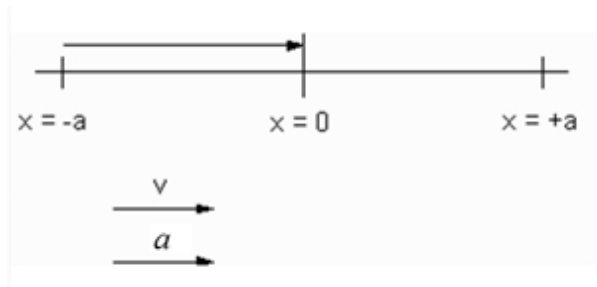
Segundo cuarto de período:



$-a < x < 0 \Rightarrow |v|$ decrece, v negativa, $|a|$ aumenta y a positiva

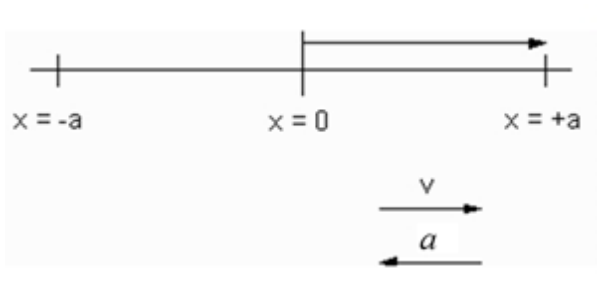
$x = -a \Rightarrow v$ nula, $|a|$ máxima y a positiva

Tercer cuarto de período:



$-a < x < 0 \Rightarrow |v|$ crece, $|a|$ disminuye, v y a positivas

Cuarto cuarto de período:



$0 < x < a \Rightarrow |v|$ disminuye, v positiva, $|a|$ aumenta y a negativa

Podemos observar que la velocidad es nula en los puntos extremos del movimiento ($x=\pm a$) y máxima en módulo en el origen ($x=0$). La aceleración en módulo es máxima en los extremos y nula en el origen. Hay que hacer notar que la aceleración siempre apunta hacia el origen del movimiento.

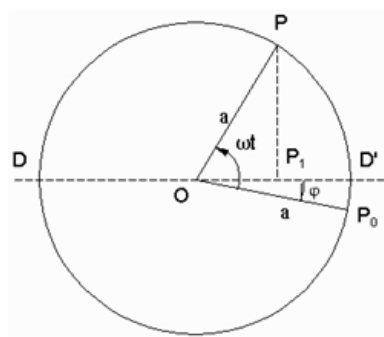


Figura 2.28: Movimiento circular uniforme.

Existe una analogía entre el movimiento armónico y el movimiento circular uniforme. Supongamos una partícula material P que, partiendo de una posición inicial P_0 , recorre una circunferencia de radio a con velocidad angular ω constante. Cuando ha transcurrido un tiempo t la partícula habrá recorrido sobre la circunferencia un arco $a\omega t$ a partir de P_0 y el ángulo central correspondiente será ωt (Fig. 2.28).

¿Cuál es el movimiento de un punto P_1 que sea en todo instante la proyección sobre un diámetro DD' del punto P que está recorriendo la circunferencia? Elegimos el centro O de la circunferencia como origen de un sistema de referencia cartesiano y el diámetro DD' como eje Ox . Así el movimiento de P_1 será rectilíneo y contenido en el eje Ox . La posición de P_1 al cabo de un tiempo t vendrá dada por (Fig. 2.28).

$$OP_1 = x_1(t) = a \cos(\omega t - \varphi)$$

siendo φ el ángulo que inicialmente formaba el radio que define la posición de la partícula material sobre la circunferencia con el eje Ox .

Es decir, mientras el punto P recorre la circunferencia de radio a con velocidad angular ω constante a partir de una posición inicial definida por el ángulo φ , su proyección P_1 recorre el diámetro que inicialmente servía para definir el ángulo φ con un movimiento armónico de pulsación ω , amplitud a y fase inicial φ .

Se propone como ejercicio la comprobación de que la velocidad y la aceleración de P_1 (correspondientes al movimiento armónico) coinciden, en todo instante, con las proyecciones sobre el diámetro DD' de la velocidad y la aceleración del punto P .

2.8.5. Superposición de dos movimientos armónicos de la misma dirección y la misma frecuencia

Son interesantes los casos de superposición de dos movimientos armónicos simples. Empezaremos por el caso más simple, aquel en el cual los desplazamientos de la partícula

material debidos a cada uno de los movimientos por separado tienen la misma dirección (suponemos que la del eje Ox) y además, los dos son de la misma frecuencia.

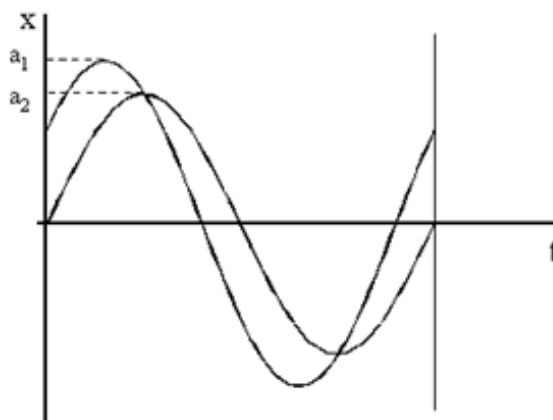


Figura 2.29: Movimientos armónicos de la misma frecuencia.

En la Fig. 2.29 se representa este caso para un periodo del movimiento.

$$\begin{aligned}x_1(t) &= a_1 \cos(\omega t - \varphi_1) \\x_2(t) &= a_2 \cos(\omega t - \varphi_2)\end{aligned}$$

El movimiento resultante será la suma algebraica de los desplazamientos x_1 y x_2 :

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

Desarrollando los cosenos y llamando

$$\begin{aligned}A &= a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2 \\B &= a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2\end{aligned}$$

que son constantes que dependen de las condiciones iniciales de cada movimiento, obtenemos

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) = C \cos(\omega t - \phi)$$

siendo $C = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$ y $\phi = \arctan \frac{B}{A}$. Es decir, el movimiento resultante es también un movimiento armónico de la misma frecuencia, con la amplitud C y fase inicial ϕ calculadas previamente.

Hay algunos casos particulares de interés.

Si $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$, el cociente B/A es igual a $\tan \varphi$ y, por tanto, $\phi = \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$, y la amplitud es $C = a_1 + a_2$. En este caso se habla de dos movimientos armónicos simples en fase (Fig. 2.30).

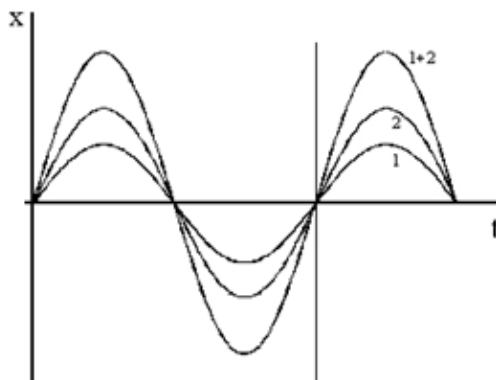


Figura 2.30: Movimientos armónicos en fase y su superposición.

Si $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$ (y suponiendo $a_1 > a_2$), $C = a_1 - a_2$, los dos movimientos se dicen en oposición de fase (Fig. 2.31) y pueden llegar a cancelarse (esto sucederá cuando $a_1 = a_2$).

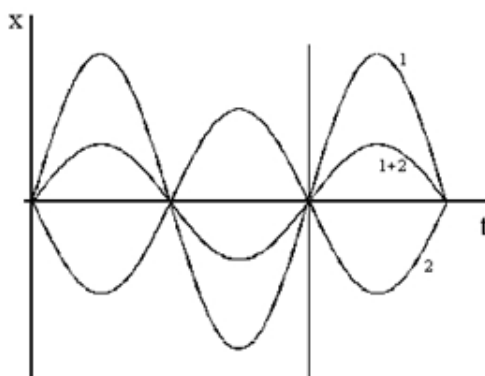


Figura 2.31: Movimientos armónicos en oposición de fase y su superposición.

2.8.6. Superposición de dos movimientos armónicos de la misma frecuencia y direcciones perpendiculares

Se trata ahora de estudiar el movimiento plano de una partícula material que se mueve de forma que sus dos coordenadas, x e y , respondan a unas ecuaciones paramétricas del tipo movimiento armónico:

$$\begin{aligned} x(t) &= a \cos(\omega t - \varphi) \\ y(t) &= b \cos(\omega t - \psi) \end{aligned} \quad (2.78)$$

Para encontrar la ecuación implícita de la trayectoria habrá que eliminar el tiempo entre las dos ecuaciones paramétricas [2.78]. Desarrollando los cosenos:

$$\frac{x}{a} = \cos(\omega t) \cos \varphi + \sin(\omega t) \sin \varphi$$

$$\frac{y}{b} = \cos(\omega t) \cos \psi + \sin(\omega t) \sin \psi$$

Eliminamos el $\sin \omega t$ multiplicando la primera ecuación por $\sin \psi$, la segunda por $\sin \varphi$ y restando,

$$\frac{x}{a} \sin \psi - \frac{y}{b} \sin \varphi = \cos(\omega t) \sin(\psi - \varphi)$$

Eliminamos ahora el $\cos \omega t$ multiplicando la primera ecuación por $\cos \psi$ y la segunda por $\cos \varphi$ y restando,

$$\frac{x}{a} \cos \psi - \frac{y}{b} \cos \varphi = \sin(\omega t) \sin(\varphi - \psi) = -\sin(\omega t) \sin(\psi - \varphi)$$

Elevando las dos al cuadrado y sumando,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2\frac{xy}{ab} \cos(\psi - \varphi) = \sin^2(\psi - \varphi)$$

Y llamando δ a la diferencia de fases iniciales, $\delta = \psi - \varphi$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2\frac{xy}{ab} \cos \delta = \sin^2 \delta \quad (2.79)$$

De las ecuaciones [2.78] deducimos que la trayectoria de la partícula material está limitada en el plano xy por las rectas $x=\pm a$ e $y=\pm b$. La trayectoria es una curva cuya forma depende del valor de la diferencia de fases iniciales (δ). Examinemos estas posibles trayectorias.

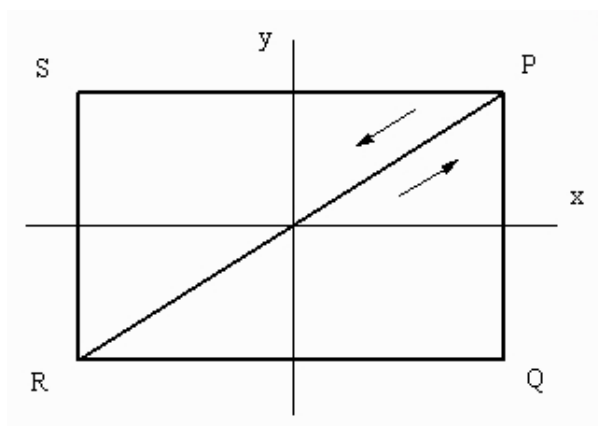


Figura 2.32: Superposición de dos MAS perpendiculares con $\delta=0$.

Si $\delta=0$ (los dos movimientos están en fase), la ecuación [2.79] se puede escribir como

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 = 0 \Rightarrow y = \frac{b}{a}x$$

que es la recta PR de la Fig. 2.32. La posición sobre la recta será

$$p = \pm\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\omega t - \varphi)$$

que como vemos es el valor absoluto de un movimiento armónico de la misma frecuencia y amplitud

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

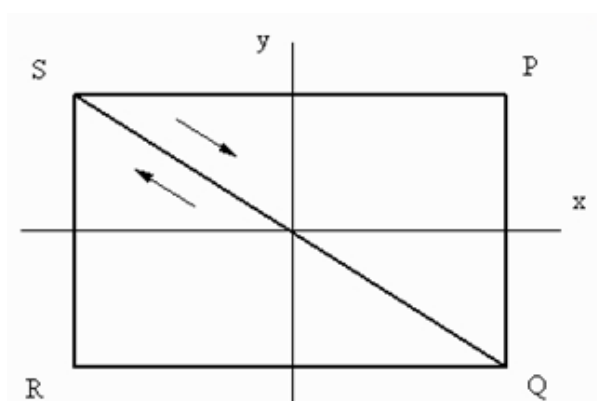


Figura 2.33: Superposición de dos MAS perpendiculares con $\delta=\pi$.

Si $\delta=\pi$ (los dos movimientos están en oposición) y siguiendo el proceso anterior, la trayectoria es $y = -\frac{b}{a}x$ que coincide con la recta SQ de la Fig. 2.33. El movimiento es nuevamente un movimiento armónico de la misma frecuencia y amplitud que el del caso $\delta=0$.

Si $\delta=\pi/2$, se tiene

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

que es la elipse dibujada en la Fig. 2.34. Para saber el sentido en que es recorrida la elipse, bastará con encontrar la velocidad en un punto, por ejemplo el $(x=0, y=+b)$ (donde evidentemente, la velocidad tiene que ser horizontal, y $\omega t = \varphi + 3\pi/2 + k2\pi$, con k entero, ya que $\delta=\pi/2$ y $\psi=\varphi+\delta$). Esta velocidad es,

$$v_x = -a\omega \sin(\omega t - \varphi) = -a\omega \sin(3\pi/2 + 2k\pi) = a\omega$$

que es un valor positivo. Es decir, la elipse es recorrida en sentido horario (Fig. 2.34).

Siguiendo el mismo razonamiento es fácil comprobar que la trayectoria para $\delta=3\pi/2$ es la misma elipse que para el caso $\delta=\pi/2$ pero recorrida en sentido contrario (Fig. 2.35).

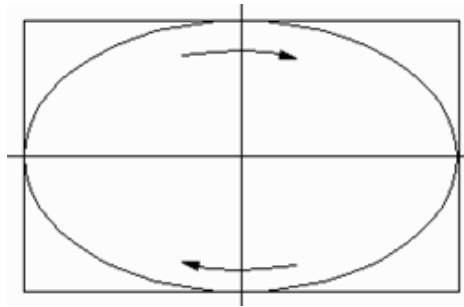


Figura 2.34: Superposición de dos MAS perpendiculares con $\delta=\pi/2$.

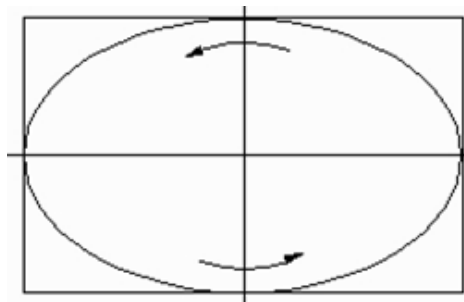


Figura 2.35: Superposición de dos MAS perpendiculares con $\delta=3\pi/2$.

Se incluye un resumen de las trayectorias para valores intermedios de δ en la Fig. 2.36.

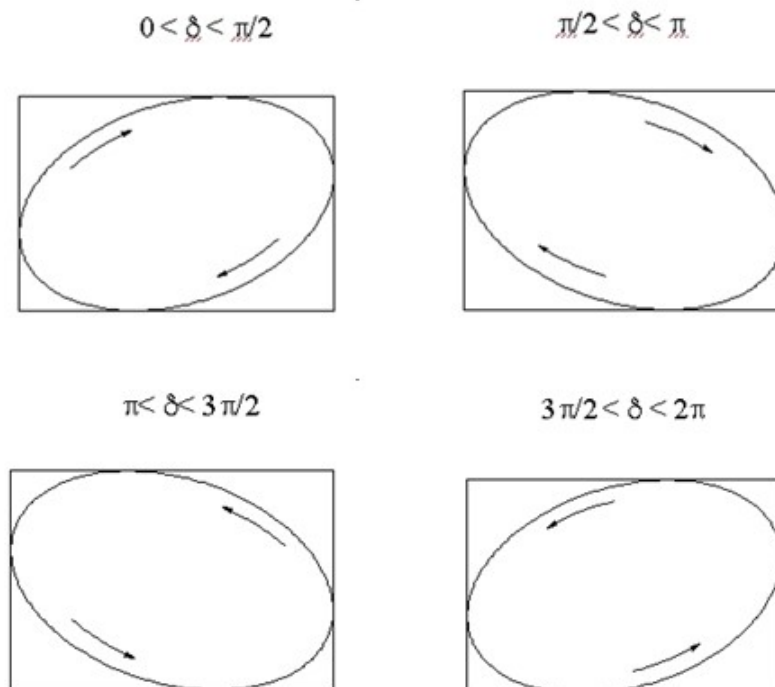


Figura 2.36: Superposición de dos MAS perpendiculares con δ intermedios.