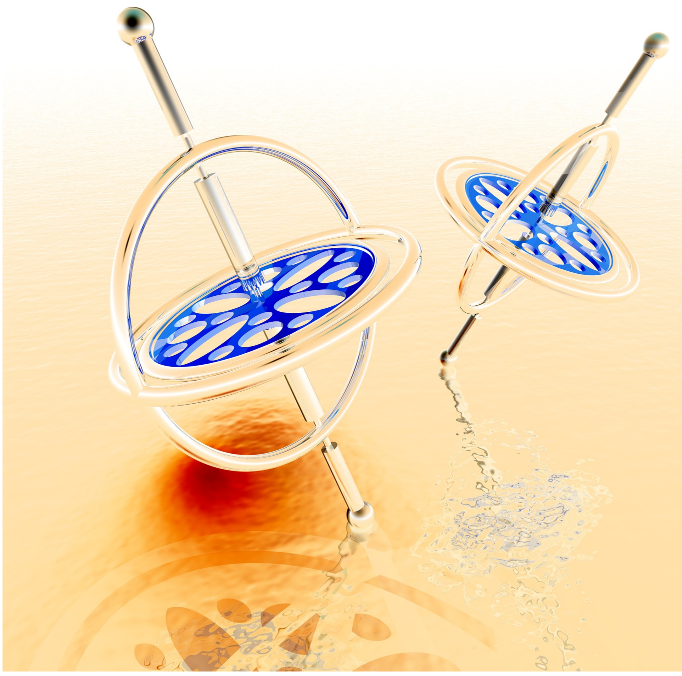
Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

POLITÉCNICA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA
AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO

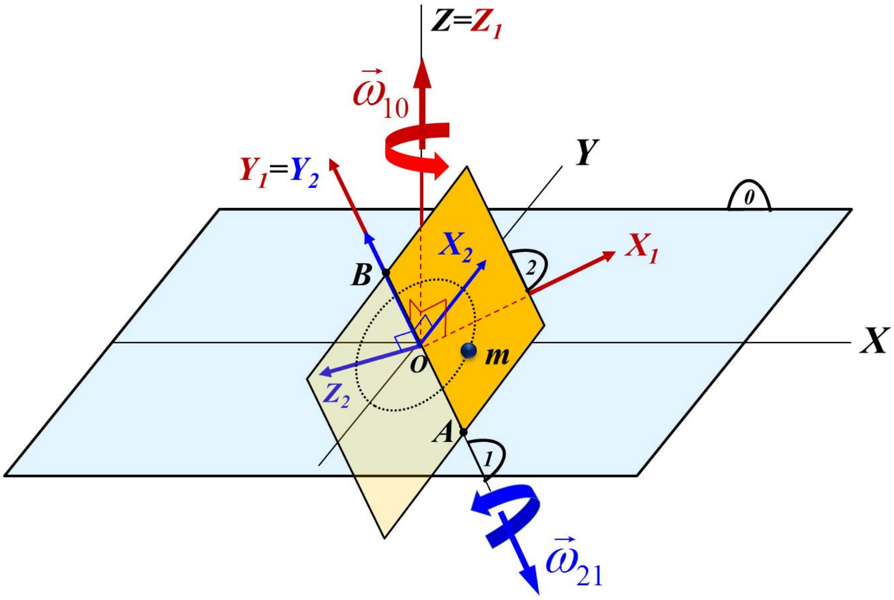
FÍSICA I

TEORÍA
Mecánica



Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO



TEMA 3.- MOVIMIENTO RELATIVO (COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS)

José Carlos JIMÉNEZ SÁEZ
Pablo PALACIOS CLEMENTE
Santiago RAMÍREZ DE LA PISCINA MILLÁN

ÍNDICE MOVIMIENTO RELATIVO

3 Movimiento relativo

3.1. Introducción

En el capítulo anterior hemos estudiado el movimiento de puntos con respecto a un único sistema de referencia. Trataremos ahora de generalizar lo estudiado para el caso de dos o más sistemas de referencia.

Suele ocurrir que la complejidad de un problema se reduce notablemente cuando somos capaces de elegir convenientemente los sistemas de referencia y descomponer el movimiento original en un conjunto de movimientos más sencillos. En numerosas ocasiones se conoce el movimiento de una partícula con respecto a un cuerpo, también con movimiento conocido (por ejemplo, un avión) y en el que podemos fijar un sistema de referencia que, al estar ligado al cuerpo, se moverá de forma conocida con respecto al sistema de referencia en el que queremos estudiar el movimiento (por ejemplo, la tierra). Es en estas condiciones en las que será aplicable lo estudiado en este capítulo.

También nos será de utilidad cuando estudiemos la cinemática de los sólidos rígidos, ya que identificaremos el movimiento de los sólidos con el movimiento de sistemas de referencia ligados solidariamente a ellos.

Aplicaremos por último los conceptos de movimiento relativo cuando tengamos necesidad de aplicar las leyes de la dinámica en sistemas de referencia no inerciales, que serán definidas convenientemente más adelante.

Utilizaremos en todo el capítulo la denominación sistema de referencia fijo y sistema de referencia móvil para referirnos al sistema de referencia con respecto al cual queremos estudiar el movimiento (fijo) y al sistema de referencia auxiliar que nos ayudará a que el estudio resulte más sencillo (móvil), pero no hay que olvidar que es una forma de hablar y que, en el estudio cinemático, no hay ninguna necesidad de que exista algún sistema de referencia realmente fijo (por otra parte cabría preguntarse ¿fijo respecto a qué?) y que basta con conocer el movimiento de un sistema de referencia respecto a otro.

3.2. Derivada de un vector en dos sistemas de referencia en movimiento relativo. Teorema de Coriolis.

Sean dos sistemas de referencia S y S', cartesianos, con orígenes O y O' y ejes X,Y,Z y X',Y',Z' respectivamente (Fig. 3.1).

El triedro *S'* se puede mover de forma cualquiera con respecto al S (es decir, O' puede desplazarse y los versores $\vec{i}'$, $\vec{j}'$ y $\vec{k}'$ pueden cambiar su orientación).

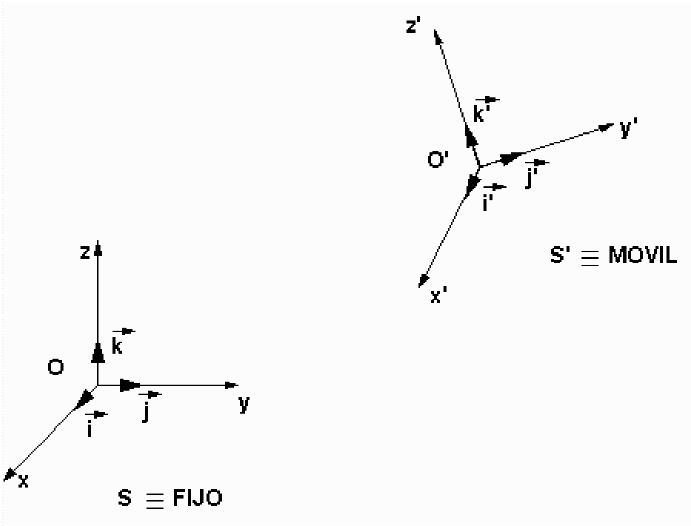


Figura 3.1: Sistemas de referencia fijo y móvil.

Ya sabemos que un vector es invariante independientemente del sistema de referencia. En un instante determinado un vector $\vec{a}(t)$ tendrá una representación en S

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \tag{3.1}$$

y otra en *S'*

$$\vec{a} = a'_x\vec{i}' + a'_y\vec{j}' + a'_z\vec{k}' \tag{3.2}$$

Estas expresiones, en general, serán función del tiempo y variarán de forma distinta en cada sistema de referencia. ¿Existe alguna relación entre estas variaciones con el tiempo del vector $\vec{a}$? Es lo que tratamos de determinar. El problema que hemos planteado es el de relacionar las derivadas temporales cuando éstas son realizadas (observadas) por dos observadores situados uno en cada sistema de referencia.

Para un observador situado en *S'*, derivar la expresión [3.2] resulta muy simple, pues solo varían con el tiempo los escalares a'_x, a'_y y a'_z, mientras que los versores $\vec{i}'$, $\vec{j}'$ y $\vec{k}'$ son constantes.

$$\left(\frac{d\vec{a}}{dt}\right)_{S'} = \frac{da'_x}{dt}\vec{i}' + \frac{da'_y}{dt}\vec{j}' + \frac{da'_z}{dt}\vec{k}' \tag{3.3}$$

Los subíndices utilizados en las derivadas $\left(\text{—}\right)_{S'}$ nos sirven para indicar el sistema de referencia en el cual se están realizando. En el caso de la variación con el tiempo de funciones escalares no existe ambigüedad en cuanto al sistema de referencia desde el que se realiza la derivada ya que ésta es la misma en cualquier sistema de referencia de acuerdo con el concepto newtoniano de tiempo absoluto.

Si el observador está situado en S, todo en la expresión [3.2] varía con el tiempo. Varían los escalares (de igual forma que para un observador en *S'*) y también varían los versores $\vec{i}'$, $\vec{j}'$ y $\vec{k}'$ (no en módulo pero sí en dirección).

$$\left(\frac{d\vec{a}}{dt}\right)_S = \frac{da'_x}{dt}\vec{i}' + \frac{da'_y}{dt}\vec{j}' + \frac{da'_z}{dt}\vec{k}' + a'_x\left(\frac{d\vec{i}'}{dt}\right)_S + a'_y\left(\frac{d\vec{j}'}{dt}\right)_S + a'_z\left(\frac{d\vec{k}'}{dt}\right)_S \tag{3.4}$$

Observemos que los tres primeros sumandos del segundo miembro de la expresión [3.4] coinciden con el segundo miembro de la ec. [3.3]. Así,

$$\left(\frac{d\vec{a}}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\vec{a}}{dt}\right)_{S'} + a'_x\left(\frac{d\vec{i}'}{dt}\right)_S + a'_y\left(\frac{d\vec{j}'}{dt}\right)_S + a'_z\left(\frac{d\vec{k}'}{dt}\right)_S \tag{3.5}$$

Se trata ahora de calcular las derivadas de los versores del sistema *S'* desde el sistema *S*. Hay que determinar las tres componentes de cada uno de los tres vectores derivada. Es decir, nueve incógnitas. Pero veremos enseguida que los vectores que estamos derivando tienen una serie de características (módulo constante y ángulo constante entre ellos) que restringen notablemente este número de incógnitas.

Imponemos primero la condición de módulo constante. Sabemos (apartado 1.19.3) que la derivada de un vector de módulo constante (en este caso unidad) es perpendicular al propio vector. Si $\left(\frac{d\vec{i}'}{dt}\right)_S$ es perpendicular a $\vec{i}'$ y recordando la definición de producto vectorial (apartado 1.13), necesariamente existirá un vector $\vec{p}$ que multiplicado vectorialmente por $\vec{i}'$ dé como resultado su derivada $\left(\frac{d\vec{i}'}{dt}\right)_S$. Y lo mismo ocurrirá para las derivadas de los otros versores, $\vec{j}'$ y $\vec{k}'$.

$$\left(\frac{d\vec{i}'}{dt}\right)_S \perp \vec{i}' \Rightarrow \exists \vec{p} = (p_1, p_2, p_3) \mid \left(\frac{d\vec{i}'}{dt}\right)_S = \vec{p} \times \vec{i}' \tag{3.6}$$

$$\left(\frac{d\vec{j}'}{dt}\right)_S \perp \vec{j}' \Rightarrow \exists \vec{q} = (q_1, q_2, q_3) \mid \left(\frac{d\vec{j}'}{dt}\right)_S = \vec{q} \times \vec{j}' \tag{3.7}$$

$$\left(\frac{d\vec{k}'}{dt}\right)_S \perp \vec{k}' \Rightarrow \exists \vec{r} = (r_1, r_2, r_3) \mid \left(\frac{d\vec{k}'}{dt}\right)_S = \vec{r} \times \vec{k}' \tag{3.8}$$

Al hacer estos tres productos vectoriales, nos damos cuenta de que en cada uno de ellos hay un valor arbitrario (precisamente el de la componente del vector correspondiente $\vec{p}$, $\vec{q}$ o $\vec{r}$, en la dirección del versor por el cual estamos multiplicando vectorialmente)

$$\left(\frac{d\vec{i}'}{dt}\right)_S = \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = p_3\vec{j}' - p_2\vec{k}' \tag{3.9}$$

$$\left(\frac{d\vec{j}'}{dt}\right)_S = \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -q_3\vec{i}' + q_1\vec{k}' \tag{3.10}$$

$$\left(\frac{d\vec{k}'}{dt}\right)_S = \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r_2\vec{i}' - r_1\vec{j}' \tag{3.11}$$

Las componentes que pueden tener cualquier valor son entonces p_1, q_2 y r_3. Apliquemos ahora la condición de que los versores $\vec{i}'$, $\vec{j}'$ y $\vec{k}'$ son ortogonales,

$$\vec{i}' \perp \vec{j}' \Rightarrow \vec{i}' \cdot \vec{j}' = 0$$

derivando esta expresión con respecto al tiempo desde el sistema S se tiene:

$$\left(\frac{d\vec{i}'}{dt}\right)_S \cdot \vec{j}' + \vec{i}' \cdot \left(\frac{d\vec{j}'}{dt}\right)_S = 0$$

recordando [3.9] y [3.10] y efectuando los productos escalares resulta

$$p_3 = q_3 \tag{3.12}$$

y haciendo lo mismo para $\vec{j}'$ y $\vec{k}'$ y para $\vec{i}'$ y $\vec{k}'$ llegamos a

$$q_1 = r_1 \tag{3.13}$$

$$p_2 = r_2 \tag{3.14}$$

Recordemos que p_1 puede tomar cualquier valor, en particular podemos asignarle el correspondiente a q_1 y r_1. También q_2 es arbitrario y le podemos asignar el mismo valor que p_2 y r_2, y lo mismo ocurre con r_3 al que podemos asignar el valor obtenido para p_3 y q_3. Es decir, llegamos a la conclusión de que de las nueve incógnitas iniciales, solo hay tres independientes y que los tres vectores $\vec{p}$, $\vec{q}$ y $\vec{r}$ utilizados en las expresiones [3.6], [3.7] y [3.8] pueden ser iguales, ya que

$$p_1 = q_1 = r_1 \; ; \; p_2 = q_2 = r_2 \; ; \; p_3 = q_3 = r_3$$

y por tanto,

$$\vec{p} = \vec{q} = \vec{r}$$

A este único vector, cuya interpretación física veremos más adelante, le denotaremos por $\vec{\Omega}$ y a sus componentes en S por Ω_1, Ω_2 y Ω_3, de modo que

$$\vec{\Omega} = \Omega_1\vec{i} + \Omega_2\vec{j} + \Omega_3\vec{k} \tag{3.15}$$

Sustituir las expresiones [3.6], [3.7] y [3.8] en [3.4] nos permite obtener la relación entre las derivadas de un mismo vector efectuadas desde dos sistemas de referencia diferentes, también llamado teorema de Coriolis, que es

$$\left(\frac{d\vec{a}}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\vec{a}}{dt}\right)_{S'} + \vec{\Omega} \times \vec{a} \tag{3.16}$$

Para un vector $\vec{b}$ de módulo constante y fijo en el sistema de referencia *S'* (caso de los versores $\vec{i}'$, $\vec{j}'$ y $\vec{k}'$) su derivada desde *S'* será nula y, por tanto, su derivada desde *S* es:

$$\left(\frac{d\vec{b}}{dt}\right)_S = \vec{\Omega} \times \vec{b} \tag{3.17}$$

Recordemos que, por ahora, el vector $\vec{\Omega}$ que aparece en la relación [3.16] ni es conocido ni tiene una interpretación física. Resolveremos estos interrogantes en el siguiente apartado.

3.3. Relación entre los vectores velocidad en dos sistemas de referencia en movimiento relativo. Composición de velocidades.

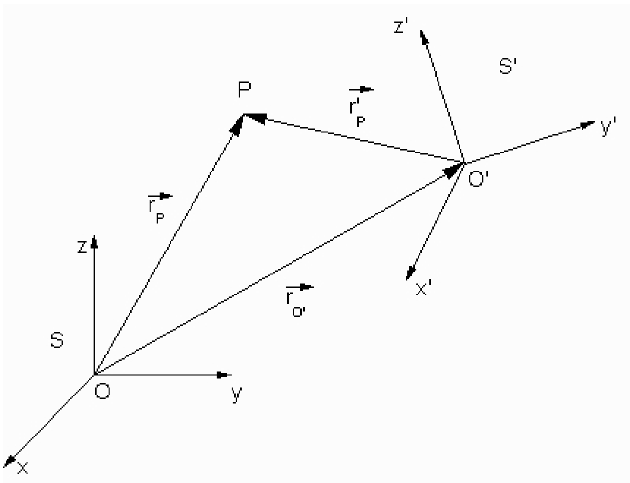


Figura 3.2: Vectores de posición de una partícula *P* en los sistemas de referencia fijo *S* y móvil *S'*.

Utilicemos dos sistemas de referencia como los descritos en el apartado anterior. Sean el sistema *S'* -que consideramos "móvil"- que se mueve con respecto al sistema de referencia *S* -que consideramos "fijo"- y una partícula material que tiene un movimiento cualquiera con respecto a ambos (Fig. 3.2), y sean $\vec{r}_P$ el vector de posición de la partícula material *P* en el sistema de referencia *S*, $\vec{r}\,'_P$ el vector de posición de la partícula material en el sistema de referencia *S'* y $\vec{r}_{O'}$ el vector de posición del origen *O'* del sistema de referencia *S'* con respecto al sistema *S*.

Recordando la definición de velocidad instantánea, la partícula material tendrá velocidades $\vec{v}_P$ y $\vec{v}'_P$, medidas en *S* y *S'* respectivamente, dadas por

$$\vec{v}_P = \left(\frac{d\vec{r}_P}{dt}\right)_S \tag{3.18}$$

$$\vec{v}'_P = \left(\frac{d\vec{r}'_P}{dt}\right)_{S'} \tag{3.19}$$

A la velocidad $\vec{v}_P$ de la partícula material medida en *S* la llamamos "velocidad absoluta". A la velocidad $\vec{v}'_P$ de la partícula material medida en *S'* la llamamos "velocidad relativa". En general, utilizaremos el término "absoluto" para referirnos a cantidades medidas por el observador en el sistema de referencia *S* y emplearemos el término "relativo" para referirnos a cantidades medidas por el observador en *S'*.

Conviene insistir en que el término "absoluto" es puramente de nomenclatura, sin que $\vec{v}_P$ sea una velocidad absoluta en el sentido de la mecánica newtoniana, ya que no conocemos el movimiento del sistema *S*. Solamente cuando el sistema *S* fuese un sistema fijo en el espacio absoluto podríamos utilizar dicho término con propiedad.

Se puede encontrar una relación entre estas velocidades derivando, desde el sistema *S*, la ecuación que relaciona los vectores de posición de la partícula material en cada uno de los dos sistemas con el vector de posición del origen de coordenadas de *S'* respecto de *S*, que es

$$\vec{r}_P = \vec{r}_{O'} + \vec{r}'_P$$

y resulta

$$\left(\frac{d\vec{r}_P}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\vec{r}_{O'}}{dt}\right)_S + \left(\frac{d\vec{r}'_P}{dt}\right)_S$$

Aplicando la ecuación [3.16] queda:

$$\left(\frac{d\vec{r}_P}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\vec{r}_{O'}}{dt}\right)_S + \left(\frac{d\vec{r}'_P}{dt}\right)_{S'} + \vec{\Omega} \times \vec{r}'_P \tag{3.20}$$

Teniendo en cuenta [3.18] y [3.19] y designando $\left(\frac{d\vec{r}_{O'}}{dt}\right)_S$ por $\vec{v}_{O'}$ (que es la velocidad con que se mueve *O'* en el sistema *S*) resulta:

$$\vec{v}_P = \vec{v}'_P + \vec{v}_{O'} + \vec{\Omega} \times \vec{r}'_P \tag{3.21}$$

El término $\left(\frac{d\vec{r}'_P}{dt}\right)_S$ se obtiene entonces de sumar dos vectores. Uno de ellos $\left(\frac{d\vec{r}'_P}{dt}\right)_{S'}$ que es nulo si el punto *P* está fijo al sistema *S'*, es decir, si un observador ligado al sistema *S'* ve el punto P en reposo. Eso significa que este término, al que hemos llamado $\vec{v}'_P$ mide realmente la velocidad del punto P con respecto al sistema de referencia *S'* y que en esta velocidad no influye para nada en el movimiento de *S'*. El otro sumando, $\vec{\Omega} \times \vec{r}'_P$, se obtiene de derivar los vectores unitarios ($\vec{i}'$, $\vec{j}'$, $\vec{k}'$) que definen en cada instante las direcciones de los ejes del sistema *S'*. Si estas direcciones no variaran en el tiempo, es decir, si el sistema *S'* no girara con respecto al S, este término sería nulo. Si recordamos la expresión [3.52] vemos que para que este sumando sea una velocidad, $\vec{\Omega}$ debe ser una velocidad angular de rotación. $\vec{\Omega}$ mide los cambios de dirección de los versores de *S'* con respecto a direcciones fijas cualesquiera (en este caso las $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ de S).

Podemos interpretar ya todos los términos de la fórmula [3.21]:

$\vec{v}_P \equiv$ velocidad absoluta (medida en el sistema S)

$\vec{v}'_P \equiv$ velocidad relativa (medida en el sistema *S'*)

$\vec{v}_{O'} + \vec{\Omega} \times \vec{r}'_P \equiv$ velocidad de arrastre.

¿Qué significa físicamente la velocidad de arrastre? Volvamos al caso particular de un punto Q fijo al sistema "móvil" *S'* (Fig. 3.3). La velocidad relativa de Q ($\vec{v}'_Q$) será nula.

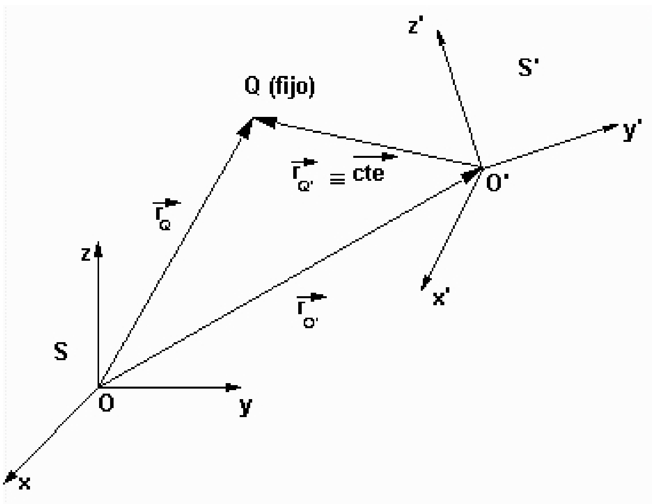


Figura 3.3: Vectores de posición de una partícula Q fija en el sistema móvil.

$\vec{v}_{O'}$ es la velocidad con la que se desplaza el punto *O'* (origen del sistema de referencia móvil *S'*). Es decir, está midiendo la velocidad de "traslación" del sistema móvil con respecto al fijo. $\vec{\Omega} \times \vec{r}'_Q$ mide la rotación de Q alrededor de un eje que pase por el punto *O'*. Como Q está fijo al sistema móvil *S'*, este sistema gira alrededor de ese eje con esa velocidad angular. Nuevamente nos damos cuenta de que el vector $\vec{\Omega}$ es físicamente una velocidad angular de rotación instantánea del sistema móvil con respecto al fijo.

La suma de estos dos términos se llama velocidad de arrastre porque es la velocidad de un punto con el movimiento del sistema móvil y, por tanto, como si estuviera ligado a éste. Hemos descompuesto el movimiento completo (**absoluto**) de un punto P en dos: uno que llamamos **relativo** y que es el movimiento que tiene el punto P con respecto al sistema de referencia móvil *S'* y otro que llamamos de **arrastre** que es debido al movimiento del sistema de referencia móvil *S'* con respecto al fijo S y que se puede obtener considerando el punto P fijo al sistema *S'*.

Así, la expresión [3.21] también se puede escribir como

$$\vec{v}_{absoluta} = \vec{v}_{relativa} + \vec{v}_{arrastre}$$

donde, recordando la nomenclatura utilizada se tiene que:

$$\vec{v}_{absoluta} \equiv \vec{v}_P = \left(\frac{d\vec{r}_P}{dt}\right)_S$$

$$\vec{v}_{relativa} \equiv \vec{v}'_P = \left(\frac{d\vec{r}_P}{dt}\right)_{S'}$$

$$\vec{v}_{arrastre} = \vec{v}_{O'} + \vec{\Omega} \times \vec{r}'_P = \left(\frac{d\vec{r}_{O'}}{dt}\right)_S + \vec{\Omega} \times \vec{r}'_P$$

3.4. Relación entre los vectores aceleración en dos sistemas de referencia en movimiento relativo. Composición de aceleraciones.

Manteniendo los mismos criterios que en el apartado anterior, llamaremos aceleración absoluta del punto P (y la designaremos por $\vec{a}_P$) a la variación medida por un observador ligado al sistema de referencia S del vector velocidad absoluta. Es decir, $\vec{a}_P = \left(\frac{d\vec{v}_P}{dt}\right)_S$. Llamaremos aceleración relativa (y la designaremos por $\vec{a}'_P$) a la variación medida por un observador ligado al sistema de referencia S' del vector velocidad relativa. Es decir, $\vec{a}'_P = \left(\frac{d\vec{v}'_P}{dt}\right)_{S'}$.

Para encontrar la relación entre ambas derivaremos con respecto al tiempo la expresión [3.21] desde el sistema S

$$\vec{a}_P = \left(\frac{d\vec{v}_P}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\vec{v}'_P}{dt}\right)_S + \left(\frac{d\vec{v}_{O'}}{dt}\right)_S + \left(\frac{d}{dt}(\vec{\Omega} \times \vec{r}'_P)\right)_S \tag{3.22}$$

Aplicamos la relación [3.16] entre las derivadas en dos sistemas de referencia y tenemos

$$\left(\frac{d\vec{v}'_P}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\vec{v}'_P}{dt}\right)_{S'} + \overrightarrow{\Omega} \times \vec{v}'_P \tag{3.23}$$

y también se verifica:

$$\left(\frac{d}{dt}(\vec{\Omega}\times\vec{r}'_P)\right)_S=\left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right)_S\times\vec{r}'_P+\vec{\Omega}\times\left(\frac{d\vec{r}'_P}{dt}\right)_S=\left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right)_S\times\vec{r}'_P+\vec{\Omega}\times\left[\left(\frac{d\vec{r}'_P}{dt}\right)_{S'}+\vec{\Omega}\times\vec{r}'_P\right]=$$
$$=\left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right)_S\times\vec{r}'_P+\vec{\Omega}\times\left(\frac{d\vec{r}'_P}{dt}\right)_{S'}+\vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}'_P\right) \tag{3.24}$$

Hagamos algunas observaciones sobre los términos que aparecen en [3.24]. Se define la aceleración angular del sistema *S'* respecto al sistema *S* como:

$$\vec{\alpha}=\left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right)_S=\left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right)_{S'}=\frac{d\vec{\Omega}}{dt}$$

Las derivadas en S y *S'* son idénticas en este caso, ya que al cambiar de sistema de referencia nos aparece el término $\vec{\Omega}\times\vec{\Omega}$ que es nulo. Esto significa que la aceleración angular $\vec{\alpha}$ del sistema de referencia *S'* con respecto al S es la misma medida en un sistema que en otro.

Hay también un término ya conocido: $\left(\frac{d\vec{r}'_P}{dt}\right)_{S'}$ es la velocidad relativa de P. Así, la expresión [3.24] queda:

$$\left(\frac{d}{dt}(\vec{\Omega}\times\vec{r}'_P)\right)_S=\left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right)_S\times\vec{r}'_P+\vec{\Omega}\times\vec{v}'_P+\vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}'_P\right) \tag{3.25}$$

Sustituyendo [3.23] y [3.25] en [3.22] y llamando $\vec{a}_{O'}=\left(\frac{d\vec{v}_{O'}}{dt}\right)_S$ a la aceleración de *O'* medida por un observador ligado al sistema S tenemos

$$\vec{a}_P=\vec{a}'_P+\vec{a}_{O'}+\vec{\alpha}\times\vec{r}'_P+\vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}'_P\right)+2\vec{\Omega}\times\vec{v}'_P \tag{3.26}$$

Identificamos el término correspondiente a la aceleración relativa (aunque ya sabemos que es, por definición, $\vec{a}'_P$) haciendo nulos aquellos términos en los que intervengan movimientos del sistema móvil. Es decir, suponiendo nulos los términos correspondientes a la traslación del origen ($\vec{a}_{O'}$) y a la rotación de los ejes (todos aquéllos en los que aparezca $\vec{\Omega}$ o su derivada). Así, vemos que el único término no nulo es

$$\vec{a}'_P=\left(\frac{d\vec{v}'_P}{dt}\right)_{S'}$$

Tratamos ahora de identificar cada uno de los sumandos correspondientes a la aceleración de arrastre. Recordamos que el concepto de arrastre va ligado únicamente al movimiento del sistema de referencia móvil (traslación del origen y rotación de los ejes). Para ello supongamos que la partícula material no se mueve con respecto a *S'*. Así, serán nulos aquéllos términos en los que aparezcan velocidades o aceleraciones relativas ($\vec{v}'_P$ o $\vec{a}'_P$). La aceleración de arrastre será entonces

$$\vec{a}_{O'} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{r}'_P + \vec{\Omega} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{r}'_P\right)$$

donde claramente identificamos el término correspondiente a la traslación del origen ($\vec{a}_{O'}$) y las dos componentes, transversal y normal de la aceleración debida al giro de los ejes móviles, $\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{r}'_P$ y $\vec{\Omega} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{r}'_P\right)$ respectivamente.

El último término que no queda englobado en ninguno de los anteriores es $2\vec{\Omega} \times \vec{v}'_P$ y recibe el nombre de aceleración complementaria o de Coriolis. Aparece por el efecto combinado del giro de los ejes móviles y del movimiento relativo de la partícula material con respecto a ellos.

Resumiendo, la expresión [3.26] se puede escribir también como

$$\vec{a}_{absoluta} = \vec{a}_{relativa} + \vec{a}_{arrastre} + \vec{a}_{coriolis}$$

donde, recordando la nomenclatura utilizada

$$\vec{a}_{absoluta} \equiv \vec{a}_P = \left(\frac{d\vec{v}_P}{dt}\right)_S$$

$$\vec{a}_{relativa} = \vec{a}'_P = \left(\frac{d\vec{v}'_P}{dt}\right)_{S'}$$

$$\vec{a}_{arrastre} = \vec{a}_{O'} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{r}'_P + \vec{\Omega} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{r}'_P\right)$$

$$\vec{a}_{coriolis} = 2\vec{\Omega} \times \vec{v}'_P$$

Existe un caso particular interesante que será estudiado con detalle en dinámica que es aquel en el cual observadores situados en dos sistemas distintos que estén en movimiento relativo uno con respecto a otro observan para una partícula material la misma aceleración. Es decir, cuando $\vec{a}_P = \vec{a}'_P$. De la ecuación [3.26] deducimos que esto solo ocurre cuando el sistema móvil *S'* no gira con respecto a S ($\vec{\Omega}$ y su derivada son nulas) y además el origen *O'* se desplaza con velocidad constante ($\vec{a}_{O'} = 0$). Es decir, cuando el movimiento de *S'* con respecto a S es de traslación rectilínea y uniforme.

3.5. Composición de rotaciones

Como hemos visto, el movimiento general de un sistema *S'* de referencia respecto a otro S viene representado por una traslación de conjunto definida mediante los vectores velocidad y aceleración $\vec{v}_{O'}$ y $\vec{a}_{O'}$ del origen de *S'*, referidos a S, y por una rotación instantánea, determinada por el vector velocidad angular de rotación $\vec{\Omega}$ y por el vector aceleración angular $\vec{\alpha}$ del sistema *S'* respecto al sistema S (Fig. 3.4(a)).

Los valores de $\vec{\Omega}$ y $\vec{\alpha}$ (con $\vec{\Omega}$ no paralelo a $\vec{\alpha}$ en general) son únicos para un único sistema de referencia *S'* en cada instante de tiempo. Como un sistema de referencia suele estar ligado a un sólido rígido, lo anterior es aplicable a sólidos rígidos de la misma manera: un sólido rígido solo puede tener una única rotación instantánea respecto a un sistema de referencia S.

La situación anterior es simétrica. Un observador ligado a *S'* verá que el sistema S se mueve respecto a él con una rotación instantánea con velocidad y aceleración angular dadas por:

$$\vec{\Omega}' = -\vec{\Omega} \qquad \vec{\alpha}' = -\vec{\alpha}$$

como se indica en la Fig. 3.4(b).

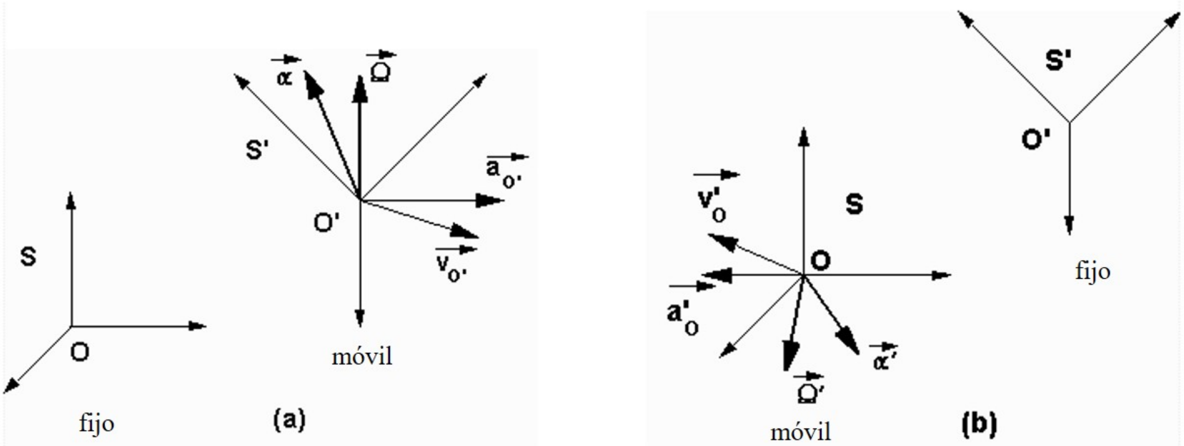


Figura 3.4: Propiedades cinemáticas relativas recíprocas entre dos sistemas de referencia.

Sin embargo, esto no es cierto para la velocidad y aceleración del origen. Es decir, no se verifican las igualdades entre las siguientes magnitudes:

$$\vec{v}'_O \neq -\vec{v}_{O'} \qquad \vec{a}'_O \neq -\vec{a}_{O'}$$

La razón es debida al teorema de Coriolis, así por ejemplo, para la velocidad:

$$\vec{v}'_O = \left(\frac{d\overrightarrow{O'O}}{dt}\right)_{S'}$$

$$\vec{v}_{O'} = \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)_{S'} + \vec{\Omega} \times \overrightarrow{OO'} = -\left(\frac{d\overrightarrow{O'O}}{dt}\right)_{S'} + \vec{\Omega} \times \overrightarrow{OO'} = -\vec{v}'_O - \vec{\Omega} \times \overrightarrow{O'O}$$

Y para la aceleración, teniendo en cuenta la expresión anterior queda:

$$\vec{a}'_O = \left(\frac{d\vec{v}'_O}{dt}\right)_{S'}$$

$$\vec{a}_{O'} = \left(\frac{d\vec{v}_{O'}}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\vec{v}_{O'}}{dt}\right)_{S'} + \vec{\Omega}\times\vec{v}_{O'} = -\left(\frac{d\vec{v}'_O}{dt}\right)_{S'} + \left(\frac{d\left(\vec{\Omega}\times\overrightarrow{OO'}\right)}{dt}\right)_{S'} + \vec{\Omega}\times\vec{v}_{O'}$$

$$\vec{a}_{O'} = -\vec{a}'_O + \vec{\alpha}\times\overrightarrow{OO'} - \vec{\Omega}\times\left(\frac{d\overrightarrow{O'O}}{dt}\right)_{S'} + \vec{\Omega}\times\vec{v}_{O'} = -\vec{a}'_O - \vec{\alpha}\times\overrightarrow{O'O} - 2\vec{\Omega}\times\vec{v}'_O - \vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times\overrightarrow{O'O}\right)$$

En ocasiones, y por simplicidad, se suelen representar los vectores característicos de la rotación de un sistema *S'* (o de un sólido rígido) respecto a otro *S* en componentes mediante

$$\vec{\Omega} = \Omega_x\vec{i} + \Omega_y\vec{j} + \Omega_z\vec{k}$$
$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \alpha_x\vec{i} + \alpha_y\vec{j} + \alpha_z\vec{k}$$

donde hay que interpretar Ω_x, Ω_y y Ω_z como las componentes del vector velocidad angular instantánea de rotación, único, de *S'* respecto a *S* y nunca como rotaciones independientes aplicadas sobre el mismo sistema de referencia o sobre el mismo sólido rígido, según sea el caso. Las mismas consideraciones son aplicables para el vector aceleración angular $\vec{\alpha}$.

No obstante, es posible definir sistemas de referencia móviles que incluyan los movimientos diferentes de dos o más sólidos rígidos y, en este caso, la rotación del sistema vendrá dada por la composición de las rotaciones de los sólidos cuyos movimientos incluye.

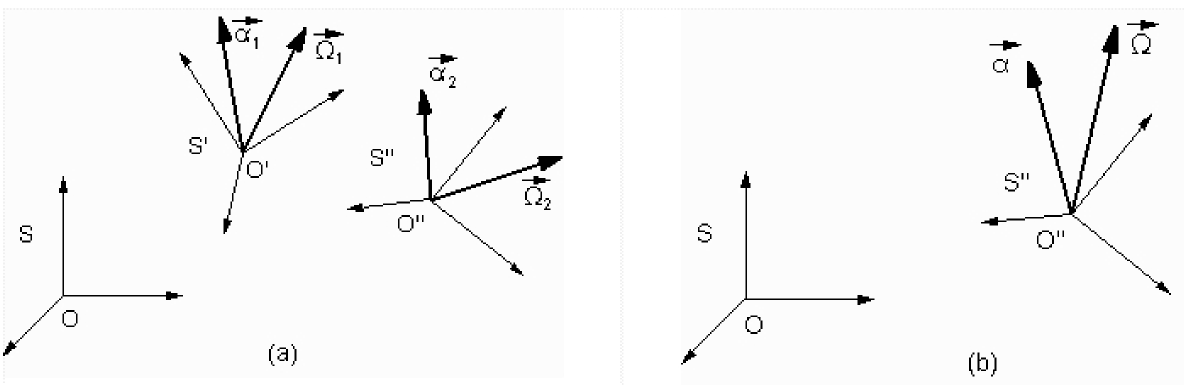


Figura 3.5: Composición de rotaciones.

Considérense tres sistemas de referencia *S*, *S'* y *S"*, cada uno de ellos ligado a un único sólido. Sean $\vec{\Omega}_1$ y $\vec{\alpha}_1$ la velocidad angular y aceleración angular de *S'* respecto de *S* y $\vec{\Omega}_2$ y $\vec{\alpha}_2$ las correspondientes de *S"* respecto a *S'* (Fig. 3.5(a)). Obtenemos a continuación la expresión de la velocidad angular $\vec{\Omega}$ y de la aceleración angular $\vec{\alpha}$ de rotación de S" respecto de S (Fig. 3.5(b)).

La velocidad angular de la rotación compuesta de S" respecto de S viene dada por

$$\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_1 + \vec{\Omega}_2$$

por la definición de vector velocidad angular.

La aceleración angular la obtenemos derivando la expresión anterior respecto al tiempo en S:

$$\left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right)_S = \left(\frac{d}{dt}(\vec{\Omega}_1 + \vec{\Omega}_2)\right) = \left(\frac{d\vec{\Omega}_1}{dt}\right)_S + \left(\frac{d\vec{\Omega}_2}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\vec{\Omega}_1}{dt}\right)_S + \left(\frac{d\vec{\Omega}_2}{dt}\right)_{S'} + \vec{\Omega}_1 \times \vec{\Omega}_2$$

y como, por definición

$$\vec{\alpha} = \left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right)_S \qquad \vec{\alpha}_1 = \left(\frac{d\vec{\Omega}_1}{dt}\right)_S \qquad \vec{\alpha}_2 = \left(\frac{d\vec{\Omega}_2}{dt}\right)_{S'}$$

resulta

$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 + \vec{\Omega}_1 \times \vec{\Omega}_2$$

El término $\vec{\Omega}_1 \times \vec{\Omega}_2$ representa la aceleración angular de arrastre, que explica el cambio en dirección de $\vec{\Omega}_2$ debido al hecho de que es arrastrada por la rotación $\vec{\Omega}_1$. No puede hacer variar el módulo de $\vec{\Omega}_2$ ya que es perpendicular a ella. Siempre tiene la forma "(velocidad angular que arrastra) × (velocidad angular arrastrada)".

El procedimiento anterior se puede aplicar a un número cualquiera de rotaciones independientes (es decir, que actúan sobre sólidos con movimientos diferentes entre sí pero sometidos a ligaduras mutuas) en las condiciones especificadas.

3.6. Notación numérica y notación con primas

A continuación se explica una notación numérica más sistemática a la hora de resolver los problemas de movimiento relativo. Esta notación es útil especialmente cuando se necesitan usar varios triedros de referencia para descomponer el movimiento tanto en el caso de la cinemática de la partícula como en el caso de la cinemática de sólidos, que estudiaremos más adelante, y donde se tienen varios sólidos en movimiento relativo unos respecto de otros, por ejemplo, en engranajes.

En la Fig. 3.6 se muestra el sistema equivalente al de la Fig. 3.2 y las variables que usa. En la Fig. 3.6 se representan tres triedros de referencia S_2, S_1 y S_0. Además, para visualizar mejor su movimiento, estos triedros se consideran ligados cada uno de ellos a un sólido, sólido que suele ser real en estos problemas. En el caso de la cinemática de la partícula, el triedro ligado a ésta (triedro S_2, y cuyo equivalente no aparece en la Fig. 3.2) queda indeterminado, ya que, la condición de que la partícula esté fija en este triedro no lo determina unívocamente. No obstante, las variables cinemáticas de giro y de movimiento del origen de este sistema S_2 no serán necesarias para resolver el problema. En el caso de la cinemática de sólidos, la partícula cuyo movimiento se considera es un punto del último sólido y que, por tanto, es fijo en el sistema S_2.

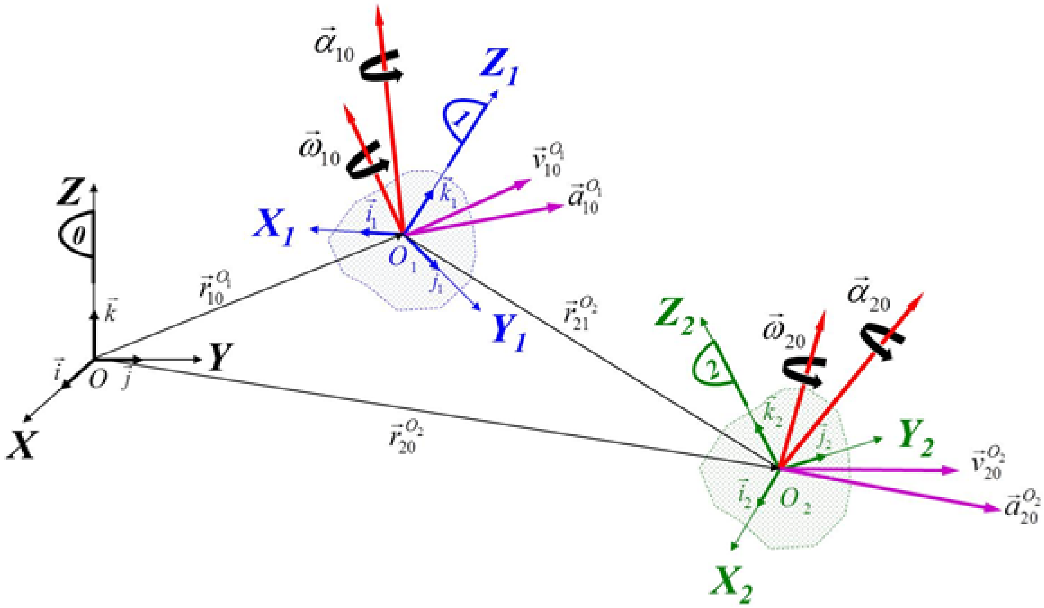


Figura 3.6: Notación numérica con tres sistemas $S_2(O_2; X_2, Y_2, Z_2)$, $S_1(O_1; X_1, Y_1, Z_1)$ y $S_0(O; X, Y, Z)$.

Detallemos mejor la notación numérica. En primer lugar se consideran unos ejes fijos $S_0(O; X, Y, Z)$ con origen en O (sistema equivalente al S de la Fig. 3.2). Tenemos a continuación un triedro en movimiento relativo respecto a S_0 que será el $S_1(O_1; X_1, Y_1, Z_1)$ con origen en O_1 (sistema equivalente al *S'* de la Fig. 3.2). Respecto a este triedro tenemos un segundo triedro en movimiento, el $S_2(O_2; X_2, Y_2, Z_2)$ con origen en O_2. Este último triedro no tiene equivalente en la Fig. 3.2, ya que, en el caso de la cinemática de la partícula, la condición de que ésta sea fija en este triedro lo deja indeterminado.

En esta notación definimos:

- $\vec{r}_{ij}^{P}$ como el vector de posición del punto P fijo al sistema o sólido S_i relativo al sistema de referencia S_j, por tanto, con origen en el punto O_j.
- $\vec{v}_{ij}^{P}$ o $\vec{a}_{ij}^{P}$ como la velocidad o aceleración, respectivamente, del punto P fijo al sistema o sólido S_i medido por el sistema de referencia S_j.
- $\vec{\omega}_{ij}$ o $\vec{\alpha}_{ij}$ como la velocidad o aceleración angular, respectivamente, del sistema o sólido S_i medido por el sistema de referencia S_j.

Para ver la equivalencia con la notación con primas utilizada en los apartados 3.3 y 3.4 volvamos al caso de la Fig. 3.6. La partícula P, que es fija en el sistema S_2, se mueve de manera relativa respecto al triedro S_1 (sistema S'), y de manera absoluta respecto al sistema S_0 (sistema S). En la notación con primas la velocidad absoluta de P es la velocidad relativa de P respecto al sistema de referencia móvil S'(S_1) más la velocidad de arrastre debida al movimiento de S'(S_1) con respecto al sistema absoluto $S(S_0)$ considerando la partícula P fija al sistema S'(S_1), y por tanto, con su movimiento. De este modo la ecuación resultante es:

$$\vec{v}_P = \vec{v}'_P + \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}'_P \tag{3.27}$$

siendo $\vec{\omega}$ la velocidad angular de rotación de S'(S_1) respecto de $S(S_0)$, $\vec{r}'_P$ el vector de posición de la partícula P relativo al sistema de referencia S'(S_1) (el vector va del origen de S'(S_1) a la posición de la partícula P) y $\vec{v}_{O'}$ la velocidad del origen del sistema S'(S_1), $O' = O_1$, respecto al sistema $S(S_0)$.

En la nueva notación, la *velocidad absoluta* del punto P ($\vec{v}_P$) es la velocidad de ese punto (fijo al sistema S_2) medido por el sistema de referencia S_0, y se denota por $\vec{v}^{\,P}_{20}$, y su valor se obtiene por la ecuación:

$$\vec{v}^{\,P}_{20} = \vec{v}^{\,P}_{21} + \vec{v}^{\,O_1}_{10} + \vec{\omega}_{10} \times \vec{r}^{\,P}_{21} \tag{3.28}$$

donde:

- $\vec{\omega}_{10} = \vec{\omega}$ es la velocidad angular del sistema $S_1(S$'$)$ medido por el sistema de referencia $S_0(S)$.
- $\vec{r}^{\,P}_{21} = \vec{r}'_P$ es el vector de posición del punto P fijo al sistema S_2 relativo al sistema de referencia $S_1(S$'$)$, y por tanto, con origen en el punto $O_1 = O'$.
- $\vec{v}^{\,P}_{21} = \vec{v}'_P$ es la *velocidad relativa* del punto P fijo al sistema S_2 relativo al sistema de referencia $S_1(S$'$)$.
- $\vec{v}^{\,O_1}_{10} = \vec{v}_{O'}$ es la velocidad del origen de coordenadas O_1 ($O_1 = O'$), fijo al sistema o sólido $S_1(S$'$)$, medido por el sistema de referencia $S_0(S)$.

En esta notación es fácil comprobar que la *velocidad de arrastre* del punto P, o velocidad de este punto como si estuviera ligado al sistema o sólido S_1 (es decir, no su velocidad real), se puede escribir como:

$$\vec{v}^{\,P}_{10} = \vec{v}^{\,O_1}_{10} + \vec{\omega}_{10} \times \vec{r}^{\,P}_{21} \tag{3.29}$$

con lo que la ecuación [3.28] se puede escribir de forma más compacta como:

$$\vec{v}^{\,P}_{20} = \vec{v}^{\,P}_{21} + \vec{v}^{\,P}_{10} \tag{3.30}$$

Aquí se observa por tanto una de las ventajas de este método y es que permite configurar simbólicamente mejor las ecuaciones, eso sí, a costa de complicar su escritura.

De modo análogo se puede encontrar una equivalencia para la *aceleración absoluta* de P ($\vec{a}_P$), es decir, la aceleración del punto P medida por el sistema de referencia $S(S_0)$ (sistema absoluto). En la nueva notación esta aceleración se puede escribir como $\vec{a}^P_{20}$ $(\equiv \vec{a}_P)$. La expresión para la composición de aceleraciones en la notación con primas vista previamente (ec. [3.26]) es:

$$\vec{a}_P = \vec{a}'_P + \vec{a}_{O'} + \vec{\alpha} \times \vec{r}'_P + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_P) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}'_P \tag{3.31}$$

mientras que en la notación numérica que estamos estudiando en este apartado es:

$$\vec{a}^P_{20} = \vec{a}^P_{21} + \vec{a}^{O_1}_{10} + \vec{\alpha}_{10} \times \vec{r}^P_{21} + \vec{\omega}_{10} \times \left(\vec{\omega}_{10} \times \vec{r}^P_{21}\right) + 2\vec{\omega}_{10} \times \vec{v}^P_{21} \tag{3.32}$$

de donde:

- $\vec{a}^P_{21} = \vec{a}'_P$ es la *aceleración relativa* del punto P, fijo al sistema o sólido S_2, medido por el sistema de referencia $S_1(S')$.
- $\vec{a}^{O_1}_{10} = \vec{a}_{O'}$ es la aceleración del punto $O_1(O')$, origen de coordenadas del sistema $S_1(S')$, fijo al sistema o sólido $S_1(S')$, medido por el sistema de referencia $S_0(S)$.
- $\vec{\alpha}_{10} = \vec{\alpha}$ es la aceleración angular del sistema $S_1(S')$ medido por el sistema de referencia $S_0(S)$.

Y los demás términos ya han sido explicados en la expresión de la velocidad.

Nuevamente, en esta notación la *aceleración de arrastre*, o aceleración del punto P no en su movimiento sino como si siguiera uno en el que estuviera ligado al sistema S_1, se puede escribir como:

$$\vec{a}^P_{10} = \vec{a}^{O_1}_{10} + \vec{\alpha}_{10} \times \vec{r}^P_{21} + \vec{\omega}_{10} \times \left(\vec{\omega}_{10} \times \vec{r}^P_{21}\right) \tag{3.33}$$

con lo que la ecuación [3.32] queda:

$$\vec{a}^P_{20} = \vec{a}^P_{21} + \vec{a}^P_{10} + 2\vec{\omega}_{10} \times \vec{v}^P_{21} \tag{3.34}$$

Por tanto, aunque en esta notación la ecuación se escriba más laboriosamente, permite trabajar con ecuaciones más compactas y ordenadas simbólicamente.

En la notación numérica, el movimiento absoluto será el movimiento de S_2 respecto a S_1, movimiento al que llamaremos de forma abreviada movimiento S_2/S_1, o simplemente 2/1. Por su parte, el movimiento relativo será el movimiento S_2/S_1 (o 2/1) y el de arrastre el movimiento S_1/S_0 (o 1/0).

Ejemplo:

Un ejemplo de resolución de un problema de movimiento relativo utilizando estas notaciones se muestra a continuación. Consideremos el sistema articulado de la Fig. 3.7. En esta figura se muestra un brazo en forma de L (BDC) que gira en el instante mostrado alrededor de un eje OY con una velocidad angular $\vec{\omega} = \omega\vec{j}$ ($\omega > 0$), y con aceleración angular $\vec{\alpha} = \alpha\vec{j}$ ($\alpha > 0$). En el extremo B del brazo hay una varilla BA articulada que gira libremente respecto del eje DB del brazo con velocidad angular $\vec{\omega}' = \omega'\vec{k}$ ($\omega' > 0$), y aceleración angular $\vec{\alpha}' = \alpha'\vec{k}$ ($\alpha' > 0$). Vamos a mostrar como calcular la velocidad y aceleración del extremo A de la varilla en el instante dibujado respecto al sistema de ejes fijos $OXYZ$ también dibujado.

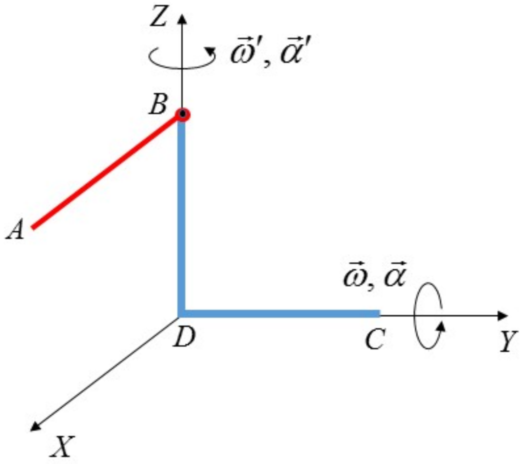


Figura 3.7: Brazo (BDC) en rotación respecto a un eje fijo OY, con una varilla BA fija y articulada en el extremo B del brazo girando respecto a éste en torno a su eje DB. En la figura se dibuja el sistema fijo y la posición de brazo y varilla en el instante de interés del movimiento.

Podemos definir dos triedros más, además del fijo, cada uno de ellos ligado a un sólido y, cuyo origen se encuentre preferiblemente en el eje de giro del mismo. En la ***notación numérica***, el triedro fijo o absoluto lo etiquetamos como $S_0(O = D; X, Y, Z)$. Los ejes móviles son: el $S_1(O_1 = D; X_1, Y_1, Z_1)$, con origen también en el punto D, ligado al brazo y por tanto con velocidad angular $\vec{\omega}_{10} = \vec{\omega}$ y aceleración angular $\vec{\alpha}_{10} = \vec{\alpha}$ relativa al sistema S_0, y el $S_2(O_2 = B; X_2, Y_2, Z_2)$, con origen en B, cuyo movimiento se puede relacionar más fácilmente con el sistema S_1 utilizando los datos de velocidad y aceleración angular $\vec{\omega}'$ y $\vec{\alpha}'$ del enunciado. Teniendo en cuenta la rotación de la varilla respecto del brazo, se tiene que la velocidad y aceleración angular del sistema S_2 relativo al sistema S_1 es: $\vec{\omega}_{21} = \vec{\omega}'$ y $\vec{\alpha}_{21} = \vec{\alpha}'$. Tal y como hemos dispuesto el sistema S_1, su origen $O_1 = D$ carece de velocidad o aceleración respecto del sistema S_0, es decir: $\vec{v}_{10}^{O_1} = 0$ y $\vec{a}_{10}^{O_1} = 0$. Además, si necesitáramos fijar espacialmente los triedros podemos suponer que en el instante en el que se pide resolver el problema, instante de interés, los unitarios de los tres triedros coinciden.

Teniendo en cuenta lo anterior, las velocidades y aceleraciones absolutas de A (respecto al sistema fijo, movimiento 2/0), en ese instante, son, ecs. [3.28] y [3.32]:

$$\vec{v}_{20}^{A} = \vec{v}_{21}^{A} + \vec{v}_{10}^{O_1} + \vec{\omega}_{10} \times \vec{r}_{10}^{A} = \vec{v}_{21}^{A} + \omega\vec{j} \times \overrightarrow{DA}$$

$$\vec{a}_{20}^{A} = \vec{a}_{21}^{A} + \vec{a}_{10}^{O_1} + \vec{\alpha}_{10} \times \vec{r}_{10}^{A} + \vec{\omega}_{10} \times \left(\vec{\omega}_{10} \times \vec{r}_{10}^{A}\right) + 2\vec{\omega}_{10} \times \vec{v}_{21}^{A} = \vec{a}_{21}^{A} + \alpha\vec{j} \times \overrightarrow{DA} + \omega\vec{j} \times \left(\omega\vec{j} \times \overrightarrow{DA}\right) + 2\omega\vec{j} \times \vec{v}_{21}^{A}$$

Para calcular las magnitudes relativas: $\vec{v}_{21}^{A}$ y $\vec{a}_{21}^{P}$ a partir de datos del enunciado debemos tener en cuenta que:

-O bien que el movimiento de A respecto del brazo es un movimiento circular con velocidad y aceleración angulares $\vec{\omega}'$ y $\vec{\alpha}'$ respectivamente, es decir, que (ecs. [3.52] y [3.53]):

$$\vec{v}_{21}^{A} = \vec{\omega}' \times \overrightarrow{BA} = \omega'\vec{k} \times \overrightarrow{BA}$$

$$\vec{a}_{21}^{A} = \vec{\alpha}' \times \overrightarrow{BA} + \vec{\omega}' \times \left(\vec{\omega}' \times \overrightarrow{BA}\right) = \alpha'\vec{k} \times \overrightarrow{BA} + \omega'\vec{k} \times \left(\omega'\vec{k} \times \overrightarrow{BA}\right)$$

-O bien que el punto A es un punto fijo al sistema 2, y por tanto, cuya velocidad y aceleración es la de arrastre de dicho sistema. Además debemos considerar que la colocación del sistema S_2 es tal que su origen $O_2 = B$ carece de velocidad y aceleración respecto del sistema S_1, es decir: $\vec{v}_{21}^{O_2} = 0$ y $\vec{a}_{21}^{O_2} = 0$. En este supuesto, aplicando las ecs. [3.29] y [3.33], se tiene:

$$\vec{v}_{21}^{A} = \vec{v}_{21}^{O_2} + \vec{\omega}_{21} \times \vec{r}_{32}^{A} = \vec{\omega}_{21} \times \vec{r}_{32}^{A} = \omega'\vec{k} \times \overrightarrow{BA}$$

$$\vec{a}_{21}^{A} = \vec{a}_{21}^{O_2} + \vec{\alpha}_{21} \times \vec{r}_{32}^{A} + \vec{\omega}_{21} \times \left(\vec{\omega}_{21} \times \vec{r}_{32}^{A}\right) = \alpha'\vec{k} \times \overrightarrow{BA} + \omega'\vec{k} \times \left(\omega'\vec{k} \times \overrightarrow{BA}\right)$$

que son idénticas a las anteriores. En este último supuesto, el sistema S_3 en el que la partícula se encuentra fija, y que no ha sido definido previamente, queda indeterminado.

El resultado final es por tanto:

$$\vec{v}_{20}^{A} = \omega'\vec{k} \times \overrightarrow{BA} + \omega\vec{j} \times \overrightarrow{DA}$$

$$\vec{a}_{20}^{A} = \alpha'\vec{k} \times \overrightarrow{BA} + \omega'\vec{k} \times \left(\omega'\vec{k} \times \overrightarrow{BA}\right) + \alpha\vec{j} \times \overrightarrow{DA} + \omega\vec{j} \times \left(\omega\vec{j} \times \overrightarrow{DA}\right) + 2\omega\vec{j} \times \left(\omega'\vec{k} \times \overrightarrow{BA}\right)$$

La ***notación con primas*** permite resolver el problema sin hacer uso de una notación tan recargada. Consideremos los mismos sistemas de referencia anteriores, el fijo $S = S_0$ (con origen $O = O_0 = D$), el $S' = S_1$ (con origen $O' = O_1 = D$) y el $S'' = S_2$ (con origen $O'' = O_2 = B$). El sistema *S'* tiene una velocidad angular $\vec{\omega}$ y una aceleración angular $\vec{\alpha}$ relativa a S, y el sistema *S"* tiene una velocidad angular $\vec{\omega}'$ y una aceleración angular $\vec{\alpha}'$ respecto de *S'*.

Las velocidades y aceleraciones absolutas de A, en ese instante, son, ecs. [3.27] y [3.31]:

$$\vec{v}_A = \vec{v}'_A + \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}'_A = \vec{v}'_A + \omega\vec{j} \times \overrightarrow{DA} \tag{3.35}$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}'_A + \vec{a}_{O'} + \vec{\alpha} \times \vec{r}'_A + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_A) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}'_A = \vec{a}'_A + \alpha\vec{j} \times \overrightarrow{DA} + \omega\vec{j} \times \left(\omega\vec{j} \times \overrightarrow{DA}\right) + 2\omega\vec{j} \times \vec{v}'_A \tag{3.36}$$

Aunque ya lo hemos indicado previamente, el lector debe notar que al colocar el origen de los sistemas de referencia en los ejes de giro de los sólidos, conseguimos que estos orígenes no tengan velocidad o aceleración respecto al sistema absoluto anterior, es decir, el origen de *S'*, *O'*, respecto del sistema S ($\vec{v}_{O'} = 0$ y $\vec{a}_{O'} = 0$), y el origen de *S"*, *O"*, respecto del sistema *S'* ($\vec{v}'_{O''} = 0$ y $\vec{a}'_{O''} = 0$). Al igual que en la resolución con notación numérica faltaría por calcular los términos relativos. Podemos igualmente recurrir al hecho de que el movimiento de A es circular, o podemos hacer uso de la ecuación de transformación de velocidades del sistema *S"* (relativo) al sistema *S'* (absoluto), es decir:

$$\vec{v}'_A = \vec{v}''_A + \vec{v}'_{O''} + \vec{\omega}' \times \vec{r}''_A = \omega' \vec{k} \times \overrightarrow{BA}$$

$$\vec{a}'_A = \vec{a}''_A + \vec{a}'_{O''} + \vec{\alpha}' \times \vec{r}''_A + \vec{\omega}' \times (\vec{\omega}' \times \vec{r}''_A) + 2\vec{\omega}' \times \vec{v}''_A = \alpha' \vec{k} \times \overrightarrow{BA} + \omega' \vec{k} \times \left(\omega' \vec{k} \times \overrightarrow{BA}\right)$$

donde hemos tenido en cuenta que el punto A es fijo en el sistema *S"* ($\vec{v}''_A = 0$ y $\vec{a}''_A = 0$). Sustituyendo en las ecuaciones [3.35] y [3.36] se llega a idéntico resultado que por el método de notación numérica.

Obsérvese que en el método que usa primas las variables simplemente van incrementando el número de estas conforme se van introduciendo sistemas de referencia. Este hecho le hace más simple de aplicar aunque dichas variables no recojan toda la información que tienen las variables del método numérico, información que queda en manos del buen entender del estudiante y no del papel.