



DINÁMICA DE UNA PARTÍCULA

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



ÍNDICE

INTERACCIONES BÁSICAS DE LA NATURALEZA

LEYES DE NEWTON

FUERZAS

INTERACCIÓN GRAVITATORIA

INTERACCIÓN ELECTROSTÁTICA

REACCIÓN EN APOYOS

ROZAMIENTO

MUELLE IDEAL: CASO ESTÁTICO; CASO DINÁMICO

RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN

FUERZA CONSTANTE

FUERZA FUNCIÓN DEL TIEMPO

FUERZA FUNCIÓN DE LA VELOCIDAD

FUERZA FUNCIÓN DE LA POSICIÓN

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval





ÍNDICE

LEY DE LA DINÁMICA EN SISTEMAS DE REFERENCIA NO INERCIALES (FUERZAS DE INERCIA)
 EJEMPLOS DE FUERZAS DE INERCIA
 TRIEDRO TERRESTRE
 PÉNDULO DE FOUCAULT
 IMPULSO MECÁNICO DE UNA FUERZA. PERCUSIÓN
 TEOREMA DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO
 MOMENTO ANGULAR O CINÉTICO EN UN PUNTO
 TEOREMA DEL MOMENTO CINÉTICO
 FUERZAS CENTRALES

F. Jiménez Lorenzo
 J.C. Jiménez Sáez
 S. Ramírez de la Piscina Millán
 U.D. Física I
 Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



ÍNDICE

TRABAJO DE UNA FUERZA
 POTENCIA MECÁNICA
 TEOREMA DE LA ENERGÍA CINÉTICA
 FUERZAS CONSERVATIVAS
 ENERGÍA POTENCIAL
 ENERGÍA POTENCIAL ELÁSTICA
 ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA
 ENERGÍA POTENCIAL ELECTROSTÁTICA
 ENERGÍA MECÁNICA
 TEOREMA DE LA ENERGÍA MECÁNICA
 TRABAJO DE LA FUERZA CENTRÍFUGA CON Ω CTE
 MOVIMIENTO BAJO FUERZAS CENTRALES
 LEYES DE KEPLER DEL MOVIMIENTO PLANETARIO

F. Jiménez Lorenzo
 J.C. Jiménez Sáez
 S. Ramírez de la Piscina Millán
 U.D. Física I
 Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval





ÍNDICE

EL OSCILADOR ARMÓNICO SIMPLE

ECUACIÓN

SOLUCIONES DE LA ECUACIÓN

NOMENCLATURA

CINEMÁTICA DEL MOVIMIENTO

GRÁFICAS

ESPACIO-TIEMPO

VELOCIDAD-TIEMPO

ACELERACIÓN-TIEMPO

ANÁLISIS DEL MOVIMIENTO

ENERGÍA

EL PÉNDULO SIMPLE

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



ÍNDICE

EL OSCILADOR ARMÓNICO AMORTIGUADO

ECUACIÓN

SOLUCIONES DE LA ECUACIÓN

GRÁFICAS

ENERGÍA

EL OSCILADOR ARMÓNICO FORZADO

ECUACIÓN

SOLUCIONES DE LA ECUACIÓN

RESONANCIA

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval





INTERACCIONES BÁSICAS DE LA NATURALEZA

Interacción	Intensidad (relativa)	Alcance	Sentido	Fuente
Fuerte	Fuerte (1)	Corto 10^{-15} m	Atractivo o repulsivo (a muy cortas distancias)	Estabilidad del núcleo
Electromagnética	Fuerte (10^{-2})	Largo	Atractivo o repulsivo	Carga eléctrica
Débil	Débil (10^{-12})	Corto $<10^{-17}$ m	No aplicable	Reacciones entre partículas
Gravitatoria	Débil (10^{-40})	Largo	Atractivo	Masa

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

7/159



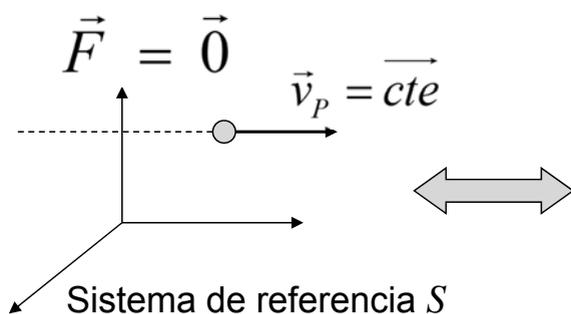
LEYES DE NEWTON

Dinámica: Estudia la relación entre el movimiento de un cuerpo y las causas del mismo.

1ª Ley: Principio de Inercia

Partícula libre:

Partícula que o bien no interacciona con el resto del Universo o bien todas sus interacciones se cancelan.



Si S es inercial (SRI), una partícula libre tiene aceleración nula

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

8/159



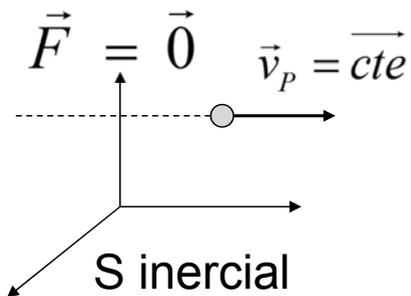


LEYES DE NEWTON

1ª Ley: Principio de Inercia

Todos los cuerpos perseveran en su estado de reposo o de movimiento rectilíneo y uniforme salvo que se vean forzados a cambiar ese estado por fuerzas impresas.

Toda partícula libre permanece en reposo o en movimiento rectilíneo y uniforme en un sistema inercial (*SRI*).



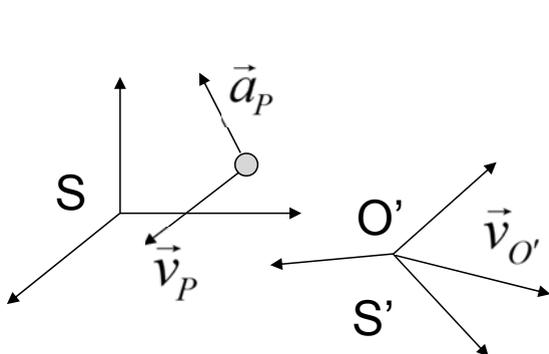
Ley de Inercia: $\vec{p} = m\vec{v}_P = \overline{cte}$

Cantidad de movimiento



LEYES DE NEWTON

1ª Ley: Principio de Inercia



$$\vec{a}_{O'} = \vec{0}; \quad \vec{\Omega}_{S'S} = \vec{0}; \quad \frac{d\vec{\Omega}_{S'S}}{dt} = \vec{0}$$



$$\vec{a}_P = \vec{a}'_P; \quad \vec{v}_P = \vec{v}_{O'} + \vec{v}'_P$$



S' es también inercial

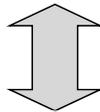




LEYES DE NEWTON

2ª Ley: Principio de Proporcionalidad

En un sistema inercial, el cambio de movimiento es proporcional a la fuerza impresa y se hace en la dirección de ésta.



$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \vec{a}$$

\vec{p} es la cantidad de movimiento o momento lineal

m es la masa inercial

\vec{a} es la aceleración

\vec{F} es la resultante de fuerzas y depende en el caso más general de la posición, velocidad de la partícula y del tiempo

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

11/159

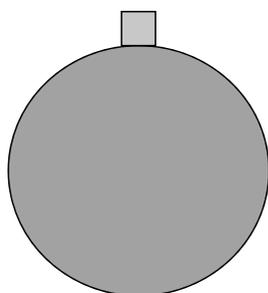


LEYES DE NEWTON

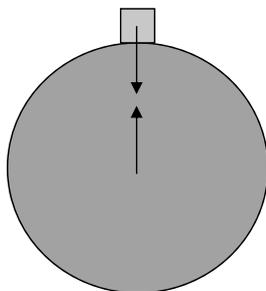
3ª Ley: Principio de Acción y Reacción

Para toda fuerza de acción ejercida sobre un cuerpo hay siempre una fuerza de reacción (ejercida sobre el cuerpo causante de la acción) igual pero de sentido opuesto.

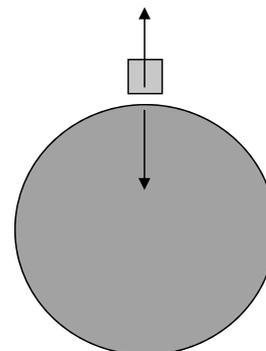
Ejemplo



Tierra



Fuerzas de Atracción
Gravitatoria



Fuerzas de Repulsión
en el apoyo de tipo
Electromagnético

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

12/159





LEYES DE NEWTON

3ª Ley: Principio de Acción y Reacción

Matemáticamente, para dos partículas i y j : $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$

$$\vec{F}_{ji} + \vec{F}_{ij} = m_i \vec{a}_i + m_j \vec{a}_j = \vec{0} \quad \text{Ley de Acción y Reacción}$$

$$m_i \vec{a}_i + m_j \vec{a}_j = \frac{d\vec{p}_i}{dt} + \frac{d\vec{p}_j}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0}$$

$$\vec{P} = \vec{p}_i + \vec{p}_j = \text{cte}$$

La cantidad de movimiento \vec{P} del sistema aislado formado por i y j se conserva.

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

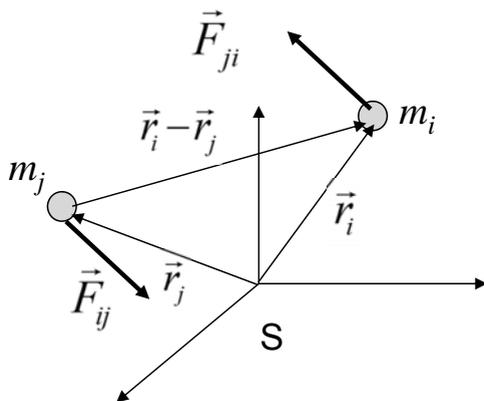
13/159



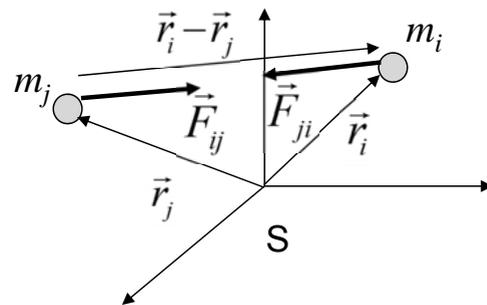
LEYES DE NEWTON

3ª Ley: Principio de Acción y Reacción

Las fuerzas de acción y reacción pueden ser colineales (principio fuerte) o no colineales (principio débil)



Principio débil: $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$



Principio fuerte: $(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ji} = \vec{0}$

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

14/159





FUERZAS

La fuerza es la cuantificación numérica que modela el concepto físico de interacción.

Ecuación Diferencial
$$\vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \quad \begin{matrix} \vec{v}(t_0) \\ \vec{r}(t_0) \end{matrix} \rightarrow \vec{r}(t)$$

Valores Iniciales

Ejemplos:

- Fuerzas centrales (centro de fuerzas): fuerza gravitatoria entre masas siendo una mucho mayor que la otra.
- Macroscópicas o de contacto: rozamiento, reacciones en los apoyos.
- Fuerzas de inercia: dependen del estado de movimiento del observador.



FUERZAS



INTERACCIÓN GRAVITATORIA

Ley de Gravitación Universal

Todos los cuerpos se atraen entre sí mediante fuerzas directamente proporcionales al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa.



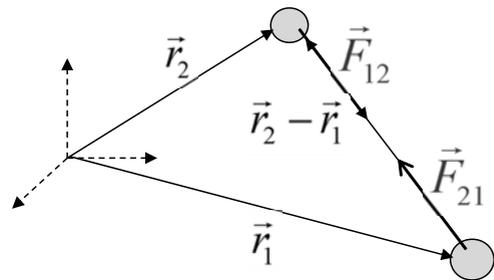
FUERZAS



INTERACCIÓN GRAVITATORIA

Ley de Gravitación Universal

$$G \approx 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}$$



$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = -G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2} \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} = -G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2} \vec{u}_{12}$$

Las masas m_1 y m_2 son masas gravitatorias.
Experimentalmente no se han encontrado diferencias respecto de las masas inerciales.

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

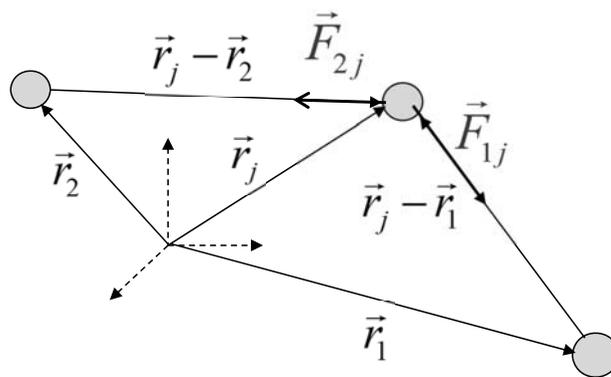
17/159



FUERZAS



INTERACCIÓN GRAVITATORIA



La fuerza resultante sobre una masa m_j debida a un conjunto de masas m_i donde $i=1, \dots, N$ es:

$$\vec{F}_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{ij} = \sum_{i=1}^N -G \frac{m_j m_i}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3} (\vec{r}_j - \vec{r}_i)$$

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

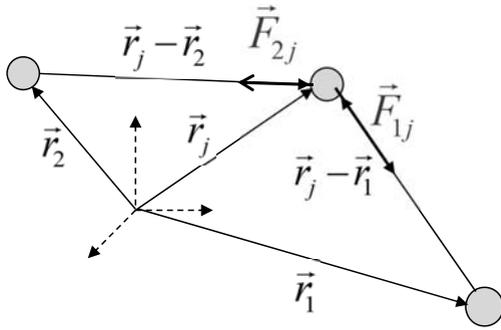
18/159



FUERZAS



INTERACCIÓN GRAVITATORIA



Campo gravitatorio:

Mide cómo el cuerpo modifica el espacio (fuerza sobre la unidad de masa)

Producido por 1 en \vec{r}_j :
$$\vec{g}_1(\vec{r}_j) = -G \frac{m_1}{|\vec{r}_j - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_j - \vec{r}_1)$$

Producido en \vec{r} :

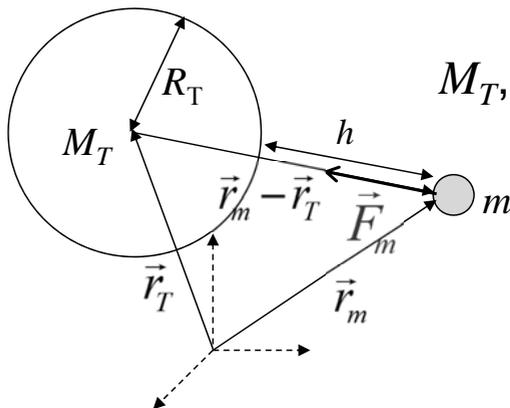
$$\vec{g}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \vec{g}_i(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N -G \frac{m_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i)$$



FUERZAS



INTERACCIÓN GRAVITATORIA



M_T, R_T : Masa y Radio de la Tierra

Campo gravitatorio terrestre:

Aproximación de partícula sobre la superficie

$$F_m = -G \frac{M_T m}{|\vec{r}_m - \vec{r}_T|^2}$$

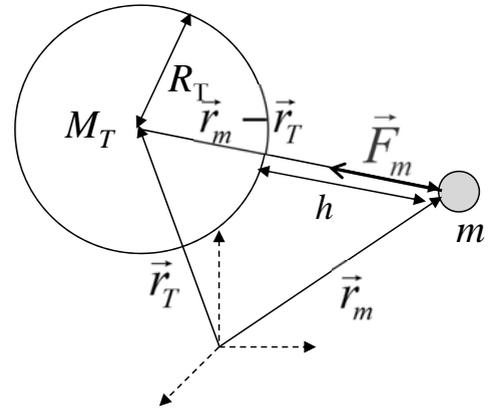


FUERZAS



INTERACCIÓN GRAVITATORIA

$$|\vec{r}_m - \vec{r}_T| = R_T + h = R_T \left(1 + \frac{h}{R_T}\right)$$



$$F_m = -G \frac{M_T m}{|\vec{r}_m - \vec{r}_T|^2} = -m G \frac{M_T}{R_T^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{R_T}\right)^2}$$

$$-m G \frac{M_T}{R_T^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{R_T}\right)^2} \approx -m G \frac{M_T}{R_T^2} \left(1 - 2 \frac{h}{R_T} + 3 \left(\frac{h}{R_T}\right)^2 + \dots\right) \approx -m G \frac{M_T}{R_T^2}$$

$$\frac{h}{R_T} \ll 1$$

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

21/159



FUERZAS



INTERACCIÓN GRAVITATORIA

$$F_m = -m \left(\underbrace{G \frac{M_T}{R_T^2}}_g \right) = -mg$$

$[g] = \text{L T}^{-2}$ (dimensiones de aceleración)

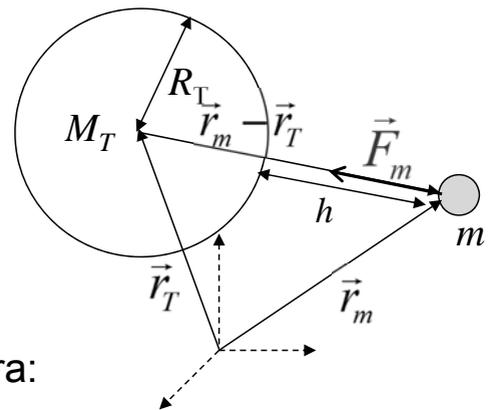
En las proximidades de la superficie de la Tierra:

$M_T = 5.98 \cdot 10^{24}$ kg es la masa de la tierra

$R_T = 6.37 \cdot 10^6$ m es el radio de la tierra

$g \equiv$ aceleración de la gravedad terrestre

$g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$



F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

22/159



FUERZAS



INTERACCIÓN ELECTROSTÁTICA

Todas las cargas se atraen ($q_1q_2 < 0$) o se repelen ($q_1q_2 > 0$) entre sí mediante fuerzas directamente proporcionales al producto de sus cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa.

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

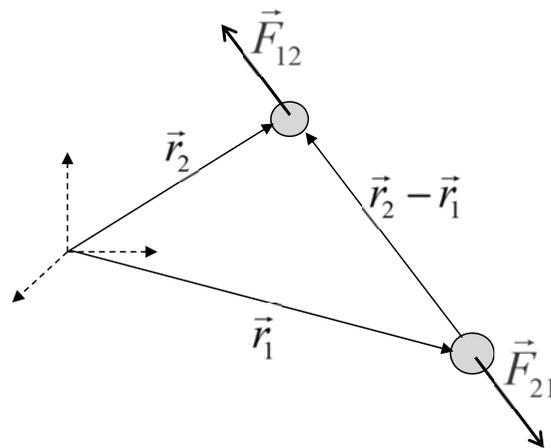
23/159



FUERZAS



INTERACCIÓN ELECTROSTÁTICA



$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2} \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2} \vec{u}_{12}$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2 \text{ C}^{-2}$$

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

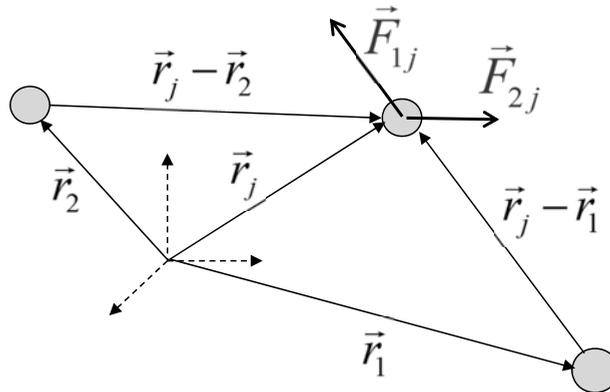
24/159



FUERZAS



INTERACCIÓN ELECTROSTÁTICA



La fuerza resultante sobre una carga q_j debida a un conjunto de cargas q_i donde $i=1, \dots, N$ es:

$$\vec{F}_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{ij} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j q_i}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3} (\vec{r}_j - \vec{r}_i)$$

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

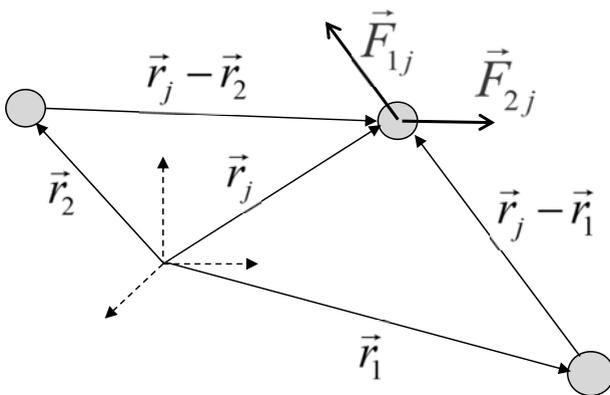
25/159



FUERZAS



INTERACCIÓN ELECTROSTÁTICA



Campo electrostático:
Mide cómo el cuerpo modifica el espacio (fuerza sobre la unidad de carga)

Producido por 1 en \vec{r}_j : $\vec{E}_1(\vec{r}_j) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\vec{r}_j - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_j - \vec{r}_1)$

Producido en \vec{r} : $\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i)$

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

26/159



FUERZAS

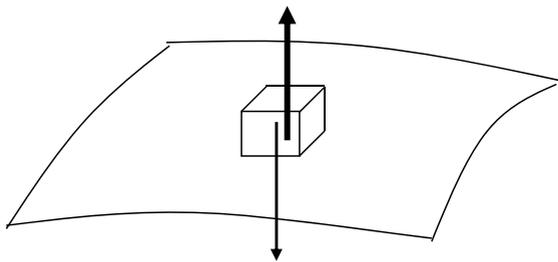


REACCIÓN EN APOYOS

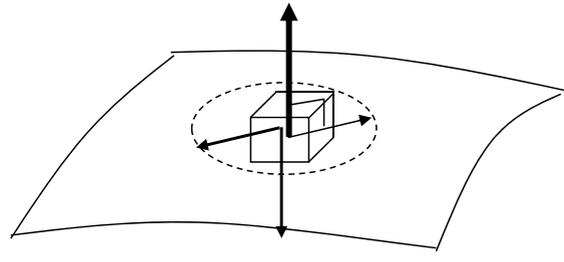
Fuerzas de contacto

Partícula sobre superficie:

Fuerzas de Acción y Reacción



Sin rozamiento



Con rozamiento

F. Jiménez Lorenzo
 J.C. Jiménez Sáez
 S. Ramírez de la Piscina Millán
 U.D. Física I
 Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

27/159



FUERZAS

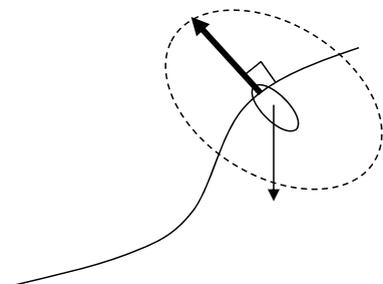


REACCIÓN EN APOYOS

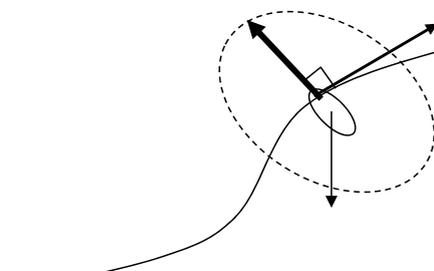
Fuerzas de contacto

Partícula sobre curva:

Fuerzas de Acción sobre la partícula



Sin rozamiento



Con rozamiento

F. Jiménez Lorenzo
 J.C. Jiménez Sáez
 S. Ramírez de la Piscina Millán
 U.D. Física I
 Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

28/159



FUERZAS

ROZAMIENTO (Modelo Coulomb-Morin)



Se opone al movimiento relativo de dos cuerpos en contacto. La fuerza se encuentra en el plano tangente.

Los coeficientes de rozamiento no dependen del área de la superficie de contacto

Los coeficientes de rozamiento dependen sensiblemente de la naturaleza de las superficies de contacto

La forma de las superficies de contacto, a escala microscópica, tiene gran importancia en el rozamiento



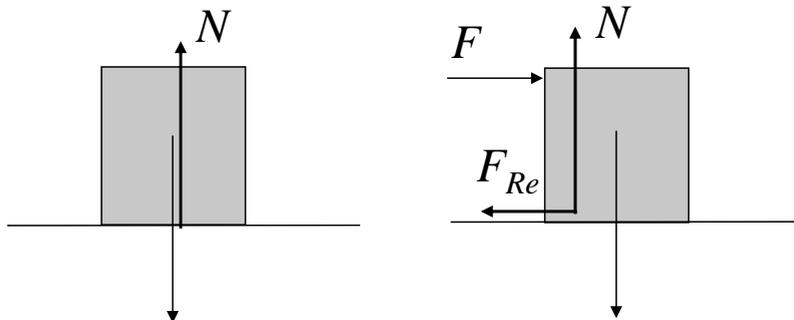
FUERZAS

ROZAMIENTO (Modelo Coulomb-Morin)



Rozamiento Estático:

No existe velocidad relativa entre los objetos en contacto

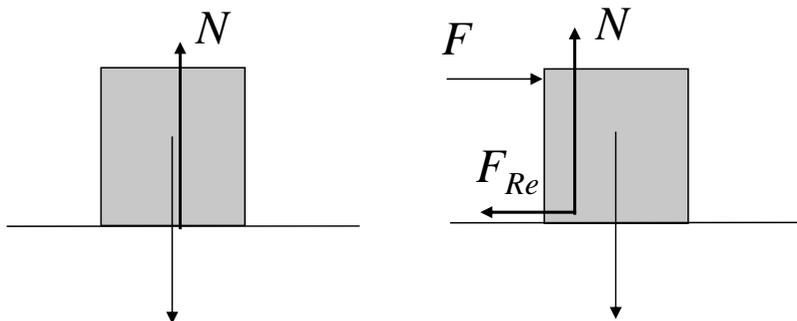


FUERZAS

ROZAMIENTO (Modelo Coulomb-Morin)



Rozamiento Estático



$$|F_{Re}| \leq \mu_e N, \quad \mu_e \equiv \text{coeficiente de rozamiento estático}$$

La dirección y sentido vienen determinados por el resto de fuerzas aplicadas

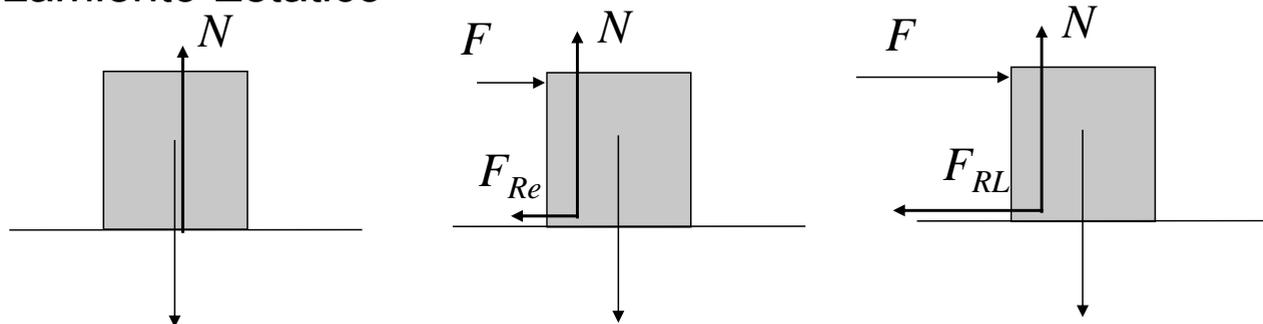


FUERZAS

ROZAMIENTO (Modelo Coulomb-Morin)



Rozamiento Estático



Sólo en el caso límite de inicio de movimiento se conoce el sentido de la fuerza, que es opuesto al posible sentido de movimiento

$$F_{RL} = \mu_e N$$

F_{RL} : fuerza de rozamiento límite que permite el reposo relativo, valores de F mayores inician el movimiento relativo



FUERZAS

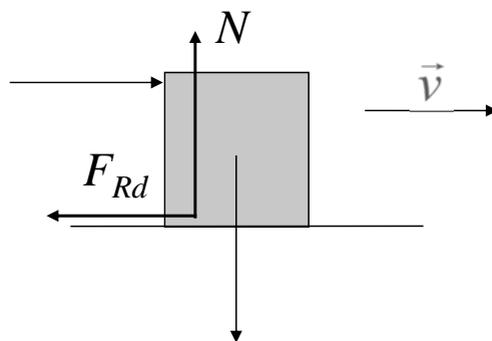
ROZAMIENTO (Modelo Coulomb-Morin)



Rozamiento Dinámico:

Existe velocidad relativa entre los objetos

$$F_{Rd} = \mu_d N, \quad \mu_d \leq \mu_e$$



Es proporcional a la reacción normal y el coeficiente de proporcionalidad es el coeficiente de rozamiento dinámico o cinético



FUERZAS

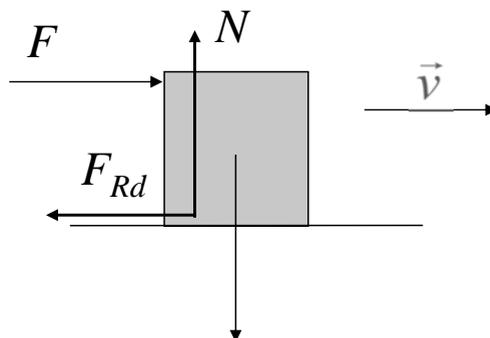
ROZAMIENTO (Modelo Coulomb-Morin)



Rozamiento Dinámico

La dirección y sentido es contraria a la de la velocidad relativa:

$$\vec{F}_{Rd} = -\mu_d N \frac{\vec{v}}{v}$$



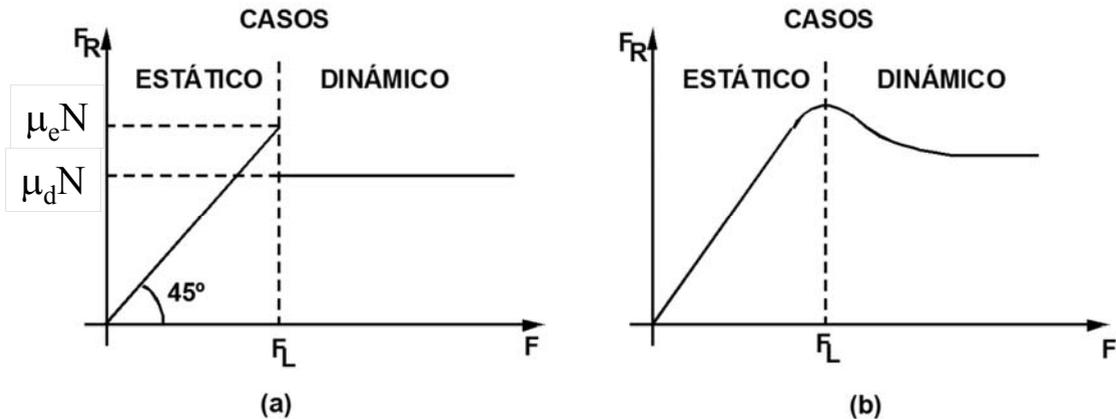
Los coeficientes de rozamiento no dependen del área en contacto sino de la naturaleza de las superficies en contacto.

En el movimiento en un fluido: $\vec{F}_R = -\gamma \vec{v}$



FUERZAS

ROZAMIENTO (Modelo Coulomb-Morin)



La dependencia de la fuerza de rozamiento con la fuerza aplicada F se ilustra en la figura.

Los coeficientes de rozamiento no tienen dimensiones.

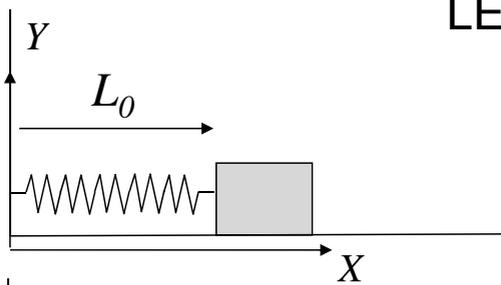
Se comprueba experimentalmente que $\mu_e \geq \mu_d$

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

35/159

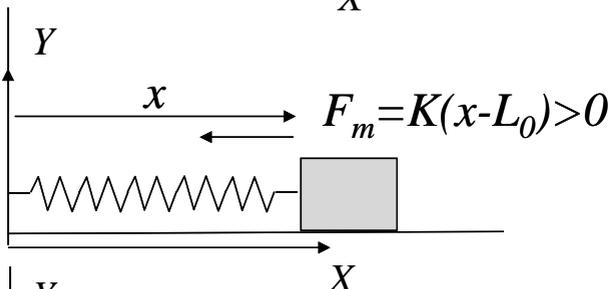


FUERZAS

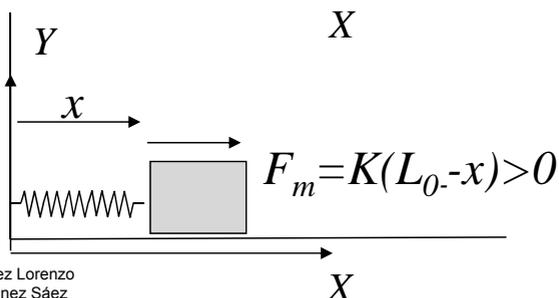
MUELLE IDEAL
LEY DE HOOKE

K =constante elástica

L_0 =Longitud natural



$$-K(x - L_0) = M \frac{d^2 x}{dt^2}$$



$$-K(x - L_0) = M \frac{d^2 x}{dt^2}$$

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

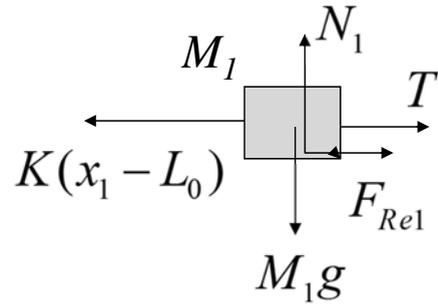
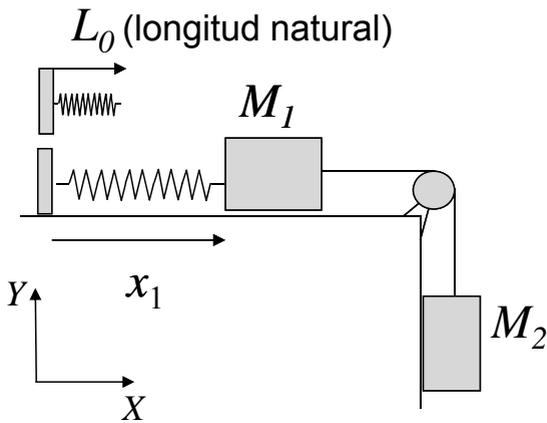
36/159



FUERZAS

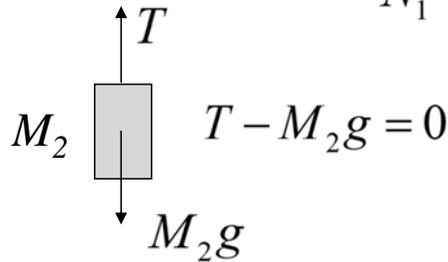


MUELLE IDEAL CASO ESTÁTICO



$$T + F_{Rel} - K(x_1 - L_0) = 0$$

$$N_1 - M_1 g = 0$$



$$T - M_2 g = 0$$

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

37/159



FUERZAS



MUELLE IDEAL CASO ESTÁTICO

La fuerza de rozamiento estático debe verificar: $|F_{Rel}| \leq \mu_{e1} N_1$

Si el sistema está a punto de moverse: $F_{Rel} = \pm \mu_{e1} N_1$

El signo lo determina el sentido de movimiento

El valor mínimo del coeficiente de rozamiento estático para la situación de equilibrio es, entonces:

$$\mu_{e1} = \frac{|F_{Rel}|}{N_1}$$

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

38/159

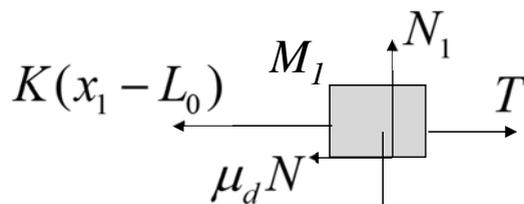
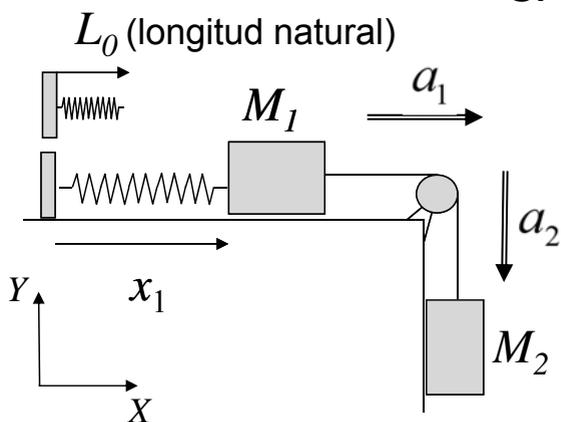


FUERZAS



MUELLE IDEAL

CASO DINÁMICO



$$N_1 - M_1 g = 0$$

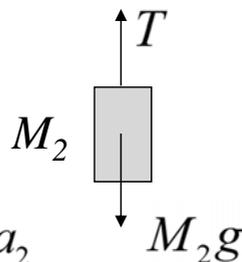
$$T - \mu_d N_1 - K(x_1 - L_0) = M_1 a_1$$

Condiciones iniciales:

$$x_1(0) = x_0 \quad v_1(0) = V > 0$$

$$y_2(0) = y_0 \quad v_1(0) = -v_2(0)$$

Ligadura: $a_1 = -a_2$



$$T - M_2 g = M_2 a_2$$

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

39/159

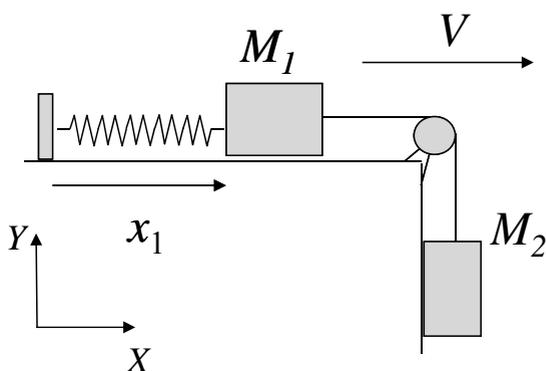


FUERZAS



MUELLE IDEAL

CASO DINÁMICO



El sentido del rozamiento se opone al sentido de la velocidad inicial V .

En el caso de $V = 0$ (y que el sistema se halle estático) se debe suponer un sentido para el rozamiento y probar que la aceleración resultante se opone a éste.

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

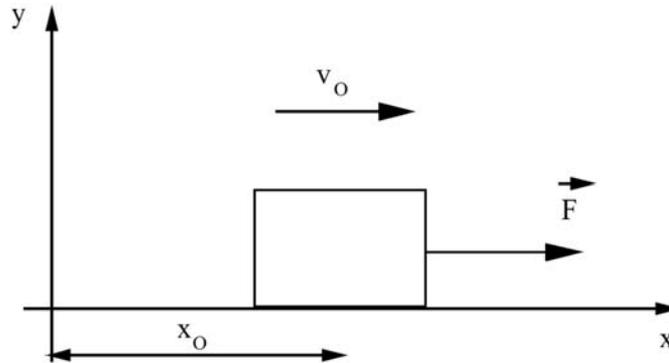
40/159





RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN UN GRADO DE LIBERTAD

$$F(x, v, t) = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$



F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

41/159



RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN

FUERZA CONSTANTE



$$a = \frac{F}{m} = cte \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{F}{m}$$

Por integraciones sucesivas:

$$\int d\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{F}{m} \int dt \Rightarrow v = \frac{dx}{dt} = \frac{F}{m}t + C_1$$

$$\int dx = \int \left(\frac{F}{m}t + C_1\right) dt \Rightarrow x = \frac{F}{2m}t^2 + C_1t + C_2$$

Condiciones iniciales: $v_0 = v(t=0) = C_1$; $x_0 = x(t=0) = C_2$

$$v = v_0 + \frac{F}{m}t \quad x = x_0 + v_0t + \frac{F}{2m}t^2$$

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

42/159



RESOLUCIÓN DE
LA ECUACIÓN

FUERZA FUNCIÓN DEL TIEMPO

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{m}F(t)$$

Por integraciones sucesivas:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{m} \int F(t) dt + C_1$$

$$x = \int v dt = \int \left(\frac{1}{m} \int F(t) dt + C_1 \right) dt + C_2$$

Conocida la función $F(t)$, quedan determinadas las soluciones $x(t, C_1, C_2)$ y $v(t, C_1)$

Aplicando las condiciones iniciales x_0, v_0 , se obtienen C_1, C_2 y queda determinada la solución $x(t), v(t)$

RESOLUCIÓN DE
LA ECUACIÓN

FUERZA FUNCIÓN DE LA VELOCIDAD

$$F(v) = m \frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{F(v)} = \frac{1}{m} dt \Rightarrow \int \frac{dv}{F(v)} = \frac{1}{m} t + C_1$$

Realizada la integración se obtiene $v = f(t, C_1)$

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow x = \int f(t, C_1) dt + C_2$$

De nuevo las condiciones iniciales nos permitirán determinar C_1, C_2



RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN



FUERZA FUNCIÓN DE LA POSICIÓN

$$F(x) = m \frac{dv}{dt} \quad \text{y con} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx} \quad \text{queda} \quad F(x) dx = m v dv$$

Integrando

$$\frac{1}{2} m v^2 = \int F(x) dx + C_1 \quad \Rightarrow \quad v = \frac{dx}{dt} = \pm \left[\frac{2}{m} \left(\int F(x) dx + C_1 \right) \right]^{1/2}$$

$$\pm t = \int \frac{dx}{\left[\frac{2}{m} \left(\int F(x) dx + C_1 \right) \right]^{1/2}} + C_2$$

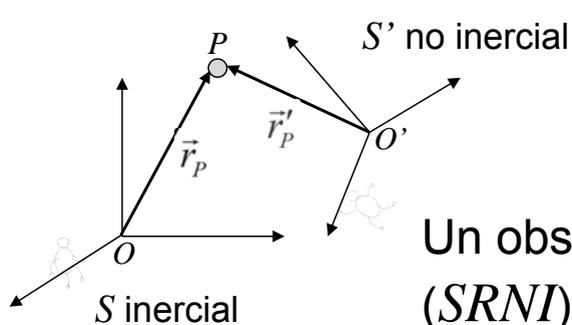
Las constantes de integración se obtienen como de costumbre

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

45/159



LEY DE LA DINÁMICA EN SISTEMAS DE REFERENCIA NO INERCIALES (SRNI)



En el sistema inercial (S):

$$\vec{F} = m \vec{a}_P$$

Un observador en el sistema no inercial S' (SRNI) mide la aceleración relativa \vec{a}'_P .

La relación entre aceleraciones es:

$$\vec{a}_P = \vec{a}'_P + \vec{a}_{O'} + \alpha \times \vec{r}'_P + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}'_P) + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}'_P$$

$$\text{Con } \vec{\Omega} = \vec{\Omega}_{S'S} \quad \text{y} \quad \vec{\alpha} = \frac{d\vec{\Omega}_{S'S}}{dt}$$

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

46/159





LEY DE LA DINÁMICA EN *SRNI*

FUERZAS DE INERCIA

Es decir:

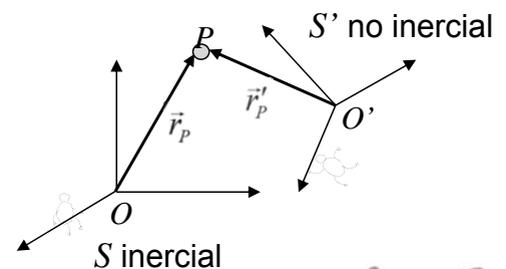
$$\vec{F} - m\vec{a}_O - m\vec{\alpha} \times \vec{r}'_P - m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}'_P) - 2m\vec{\Omega} \times \vec{v}'_P = m\vec{a}'_P$$

Y llamando:

$$\vec{F}_{inercia} = -m\vec{a}_O - m\vec{\alpha} \times \vec{r}'_P - m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}'_P) - 2m\vec{\Omega} \times \vec{v}'_P$$

Queda:

$$\vec{F} + \vec{F}_{inercia} = m \vec{a}'_P$$



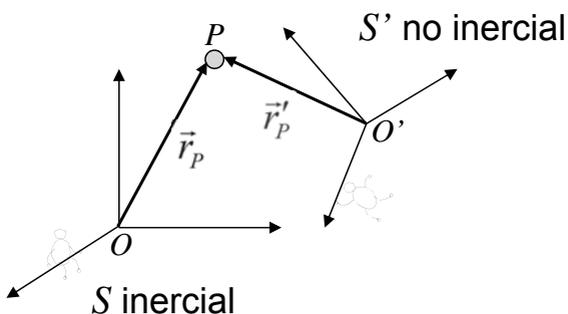
F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

47/159



LEY DE LA DINÁMICA EN *SRNI*

FUERZAS DE INERCIA



La ecuación de la dinámica en un sistema no inercial se plantea con la aceleración relativa. Y a las fuerzas reales aplicadas hay que añadir las fuerzas de inercia.

$$\vec{F} + \vec{F}_{inercia} = m \vec{a}'_P$$

La fuerza de inercia no es una fuerza real pero influye en el movimiento como si lo fuera.

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

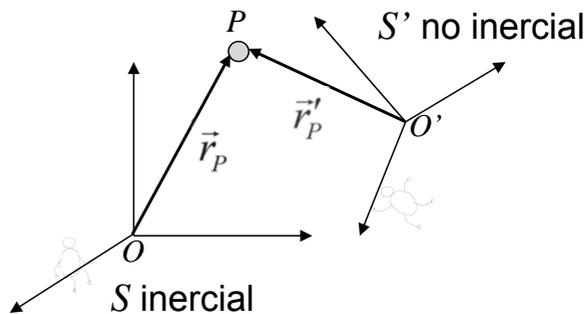
48/159





LEY DE LA DINÁMICA EN *SRNI*

FUERZAS DE INERCIA



$$\vec{F} + \vec{F}_I = m \vec{a}'_P$$

Coriolis o complementaria

$$\vec{F}_I = -m\vec{a}_O - m\vec{\alpha} \times \vec{r}'_P - m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}'_P) - 2m\vec{\Omega} \times \vec{v}'_P$$



LEY DE LA DINÁMICA EN *SRNI*

FUERZAS DE INERCIA



Fuerza debida al arrastre del movimiento del sistema móvil

$$\vec{F}_{\text{arrastre}} = -m\vec{a}_O - m\vec{\alpha} \times \vec{r}'_P - m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}'_P)$$

traslación
no uniforme
del origen

transversal o azimutal

centrífuga

giro no uniforme del sistema móvil

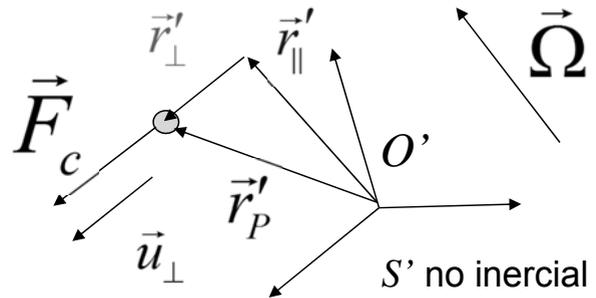




LEY DE LA DINÁMICA EN SRNI

FUERZAS DE INERCIA

$$\vec{r}'_P = \vec{r}'_{\perp} + \vec{r}'_{\parallel}$$



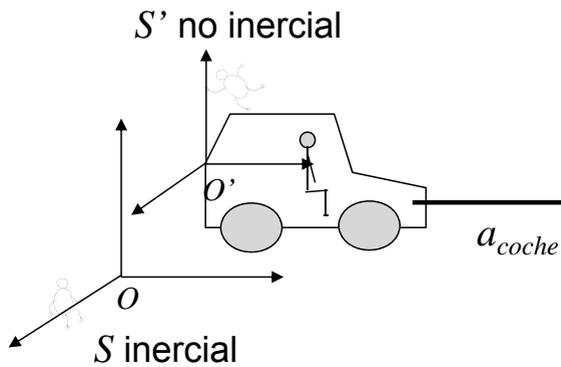
$$\vec{F}_{centrifuga} = -m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}'_{\perp}) = m\Omega^2 r'_{\perp} \vec{u}'_{\perp}, \quad \vec{u}'_{\perp} = \frac{1}{r'_{\perp}} \vec{r}'_{\perp}$$



EJEMPLOS DE FUERZAS DE INERCIA

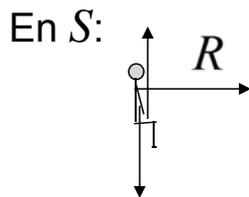


Coche en movimiento rectilíneo de traslación con aceleración a_{coche}



Sistema no inercial S' ligado al coche, $a_{O'} = a_{coche}$

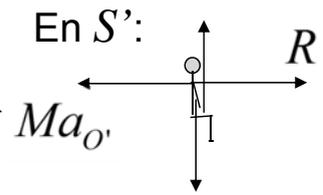
$$N - Mg = 0$$



$$R = Ma_{coche}$$

$$N - Mg = 0$$

Fuerza de inercia $\vec{F}' = -M\vec{a}_{O'}$

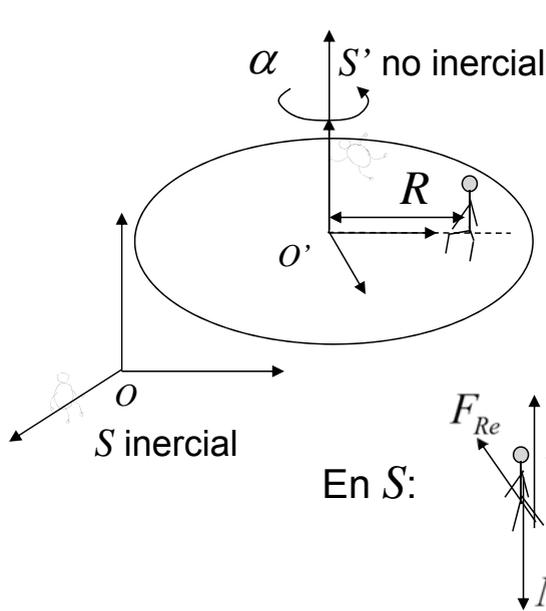


$$R - Ma_{O'} = 0$$



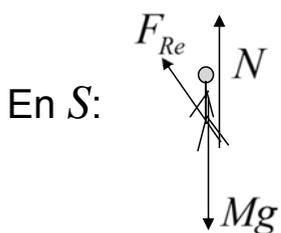


EJEMPLOS DE FUERZAS DE INERCIA



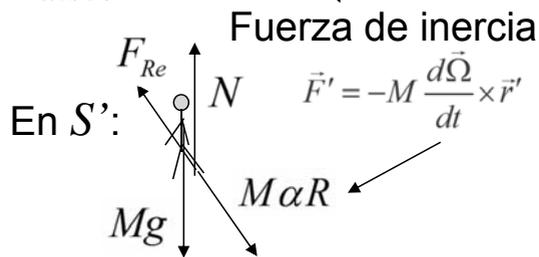
Individuo (partícula) en reposo sobre un disco que gira en ese instante con aceleración angular α_{disco} y sin Ω

Sistema no inercial S' ligado al disco, $\alpha = \alpha_{disco}$



$$-F_{Re} = Ma_{transversal}$$

$$N - Mg = 0$$



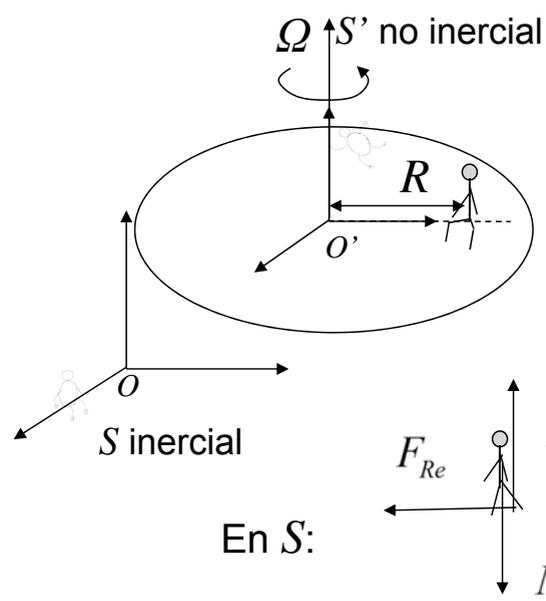
$$-F_{Re} + M\alpha R = 0$$

$$N - Mg = 0$$

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

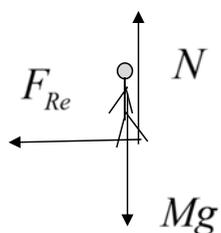


EJEMPLOS DE FUERZAS DE INERCIA



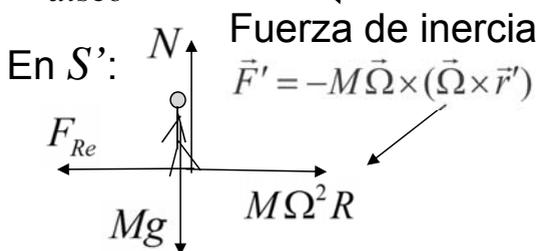
Individuo (partícula) en reposo sobre un disco que gira con velocidad angular constante ω_{disco}

Sistema no inercial S' ligado al disco, $\Omega = \omega_{disco}$



$$-F_{Re} = Ma_{radial}$$

$$N - Mg = 0$$



$$-F_{Re} + M\Omega^2 R = 0$$

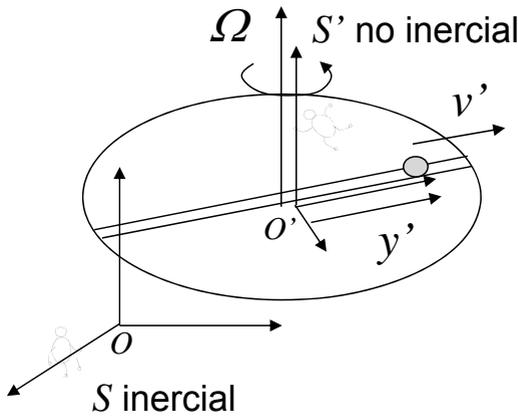
$$N - Mg = 0$$

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval





EJEMPLOS DE FUERZAS DE INERCIA



Partícula sobre un disco que gira con velocidad angular constante ω_{disco} y que se aleja del centro con velocidad constante v' siguiendo un diámetro

Sistema no inercial S' ligado al disco, $\Omega = \omega_{disco}$ Fuerzas de inercia

En S' :

$$-\mu_d N + M\Omega^2 y' = Ma'$$

$$-R + 2M\Omega v' = 0$$

$$N - Mg = 0$$

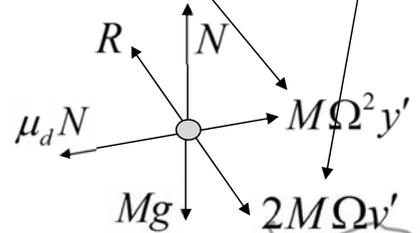
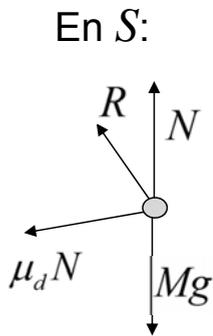
$$\vec{F}' = -M\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}')$$

$$\vec{F}' = -2M\vec{\Omega} \times \vec{v}'$$

$$-\mu_d N = Ma_{radial}$$

$$-R = Ma_{transversal}$$

$$N - Mg = 0$$



F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



TRIEDRO TERRESTRE

$$\Omega_{año} = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{365 \text{ d} \times 24 \text{ h} / 1 \text{ d} \times 3600 \text{ s/h}}$$

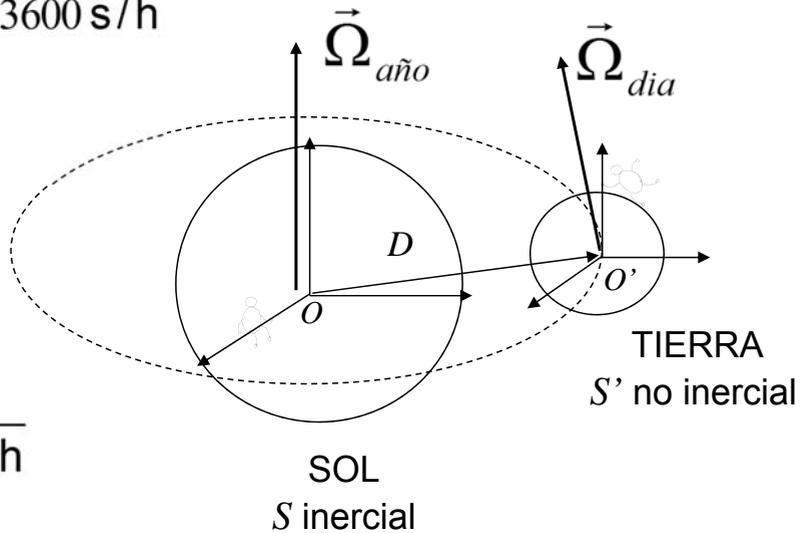
$$\Omega_{año} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ rad s}^{-1}$$

$$D = 1.5 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

$$\Omega_{dia} = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24 \text{ h} \times 3600 \text{ s/h}}$$

$$\Omega_{dia} = 7.3 \cdot 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$$

$$R_T = 6.4 \cdot 10^6 \text{ m}$$

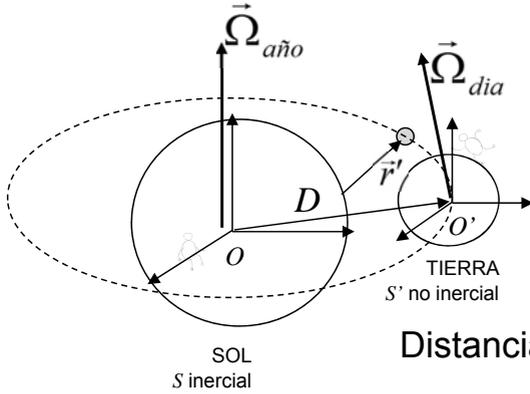


F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval





TRIEDRO TERRESTRE



$$|-m \vec{a}_{O'}| \approx m \Omega_{año}^2 D = m 6 \cdot 10^{-3} \text{ m s}^{-2}$$

Distancia al eje de rotación, partícula sobre la superficie

$$|-m \vec{\Omega}_{dia} \times (\vec{\Omega}_{dia} \times \vec{r}'_{\perp})| = m \Omega_{dia}^2 r'_{\perp} \leq m \Omega_{dia}^2 R_T = m 3.6 \cdot 10^{-2} \text{ m s}^{-2}$$

$$|-2m (\vec{\Omega}_{dia} \times \vec{v}'_P)| \leq m 5 \cdot 10^{-2} \text{ m s}^{-2} \quad \text{con} \quad v'_P = 340 \text{ m s}^{-1}$$

Partícula a la velocidad del sonido

Todos los términos son pequeños comparados con g

F. Jiménez Lorenzo
 J.C. Jiménez Sáez
 S. Ramírez de la Piscina Millán
 U.D. Física I
 Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

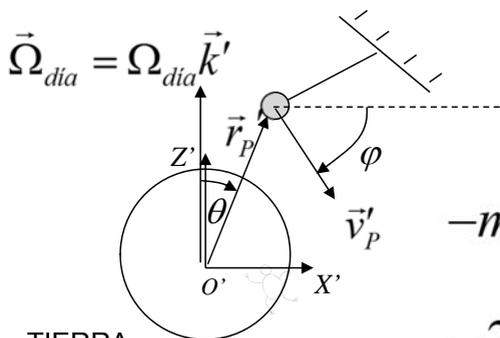
57/159



PÉNDULO DE FOCAULT

$$\vec{r}'_P = (R_T + h) \vec{u}_r = (R_T + h) (\sin \theta \vec{i}' + \cos \theta \vec{k}')$$

$$\vec{v}'_P = v'_P (\cos \varphi \vec{i}' + \sin \varphi \vec{k}')$$



Fuerzas aplicadas y de inercia:

$$-m g \vec{u}_r$$

$$-m \vec{\Omega}_{dia} \times (\vec{\Omega}_{dia} \times \vec{r}'_P) = m (R_T + h) \Omega_{dia}^2 \sin \theta \vec{i}'$$

$$-2m \vec{\Omega}_{dia} \times \vec{v}'_P = -2m \Omega_{dia} v'_P \cos \varphi \vec{j}'$$

TIERRA
 S' no inercial

S inercial con origen en el centro de la tierra

Coriolis le impide mantener el plano de movimiento X'Z'

F. Jiménez Lorenzo
 J.C. Jiménez Sáez
 S. Ramírez de la Piscina Millán
 U.D. Física I
 Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

58/159





IMPULSO MECÁNICO DE UNA FUERZA

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$$

PERCUSIÓN

Impulso mecánico producido por una fuerza instantánea

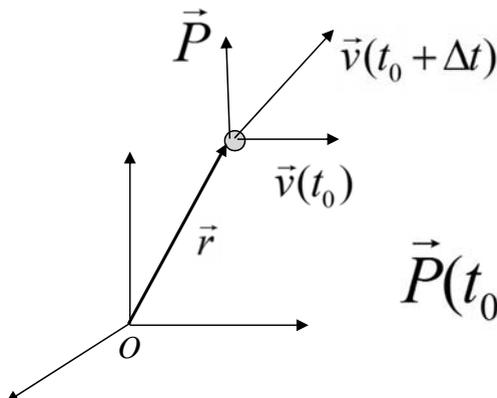
$$\vec{P} = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \vec{F} dt \quad \text{con} \quad \Delta t \rightarrow 0$$



IMPULSO MECÁNICO DE UNA FUERZA

PERCUSIÓN

Una percusión supone una discontinuidad en el momento lineal, pero no en la posición.



$$\vec{P}(t_0) = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \vec{F} dt = \vec{p}(t_0 + \Delta t) - \vec{p}(t_0)$$

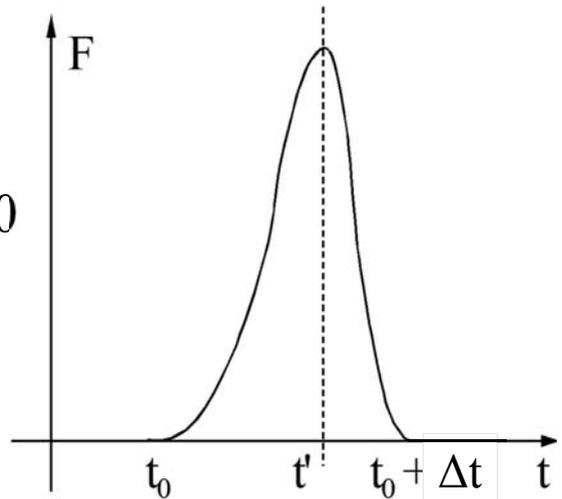




IMPULSO MECÁNICO DE UNA FUERZA PERCUSIÓN

Cuando una percusión actúa sobre una partícula se debe cumplir con buena aproximación que:

- La duración sea casi nula, $\Delta t \approx 0$ ($\Delta t = 0$ en el caso límite ideal).
- El cambio de velocidad de la partícula sea casi instantáneo.
- La posición de la partícula no cambie apreciablemente en Δt



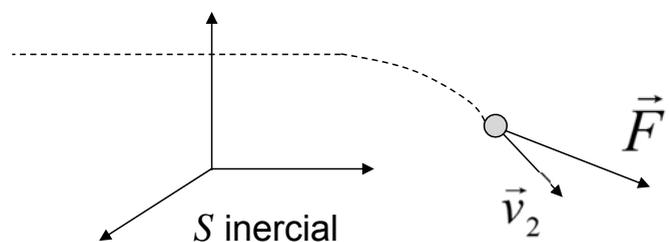
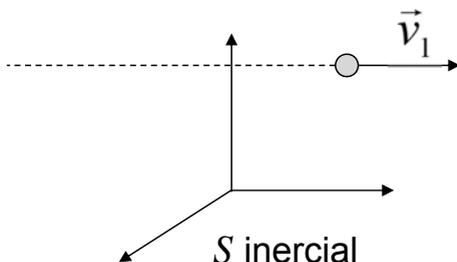
F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

61/159



TEOREMA DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$$



F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

62/159



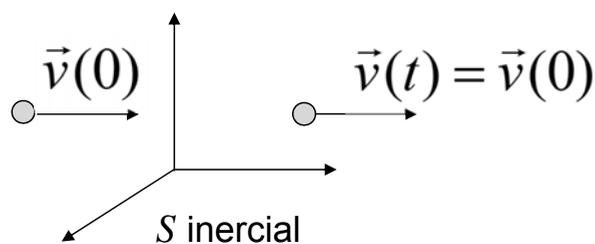


TEOREMA DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN

La cantidad de movimiento de una partícula en un *SRI* se mantiene constante si el impulso mecánico de las fuerzas es nulo

$$\text{Si } \vec{I} = 0 \Rightarrow \vec{p}(t) = \vec{p}(0) = \overrightarrow{cte}$$



F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

63/159



TEOREMA DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO EN UN *SRNI*

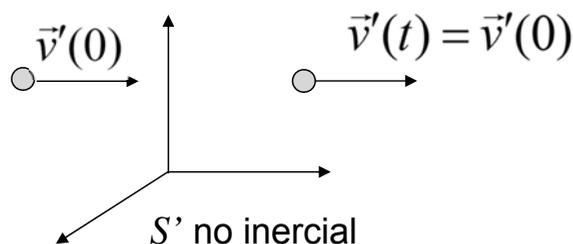
En un sistema no inercial:

$$\vec{I}' = \vec{I} + \vec{I}_I = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt + \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_I dt = \vec{p}'_2 - \vec{p}'_1 = m\vec{v}'_2 - m\vec{v}'_1$$

PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN

La cantidad de movimiento de una partícula se mantiene constante si el impulso mecánico de las fuerzas (reales y de inercia) es nulo:

$$\text{Si } \vec{I}' = 0 \Rightarrow \vec{p}'(t) = \vec{p}'(0) = \overrightarrow{cte}$$



F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

64/159





MOMENTO ANGULAR O CINÉTICO EN UN PUNTO

Se define el momento cinético (o momento angular) de una partícula material respecto a un punto A como el momento respecto a A de su vector cantidad de movimiento.

Consideraremos un $SRNI$, si el sistema es inercial basta anular los términos asociados a las fuerzas de inercia.

$$\vec{L}'_A = A\vec{P} \times \vec{p}' = (\vec{r}'_P - \vec{r}'_A) \times m\vec{v}'$$

$$\vec{L}'_A \perp \vec{v}' \quad \text{y} \quad \vec{L}'_A \perp (\vec{r}'_P - \vec{r}'_A)$$



TEOREMA DEL MOMENTO CINÉTICO

$$\vec{L}'_A = (\vec{r}'_P - \vec{r}'_A) \times m \vec{v}'$$

Derivando respecto del tiempo en S' :

$$\frac{d\vec{L}'_A}{dt} = \frac{d(\vec{r}'_P - \vec{r}'_A)}{dt} \times m \vec{v}' + (\vec{r}'_P - \vec{r}'_A) \times \frac{d\vec{p}'}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L}'_A}{dt} = -\vec{v}'_A \times m \vec{v}' + (\vec{r}'_P - \vec{r}'_A) \times \frac{d\vec{p}'}{dt}$$





TEOREMA DEL MOMENTO CINÉTICO

Si el punto A esté en reposo en el $SRNI$: $\vec{v}'_A = \vec{0}$

$$\frac{d\vec{L}'_A}{dt} = (\vec{r}'_P - \vec{r}'_A) \times \frac{d\vec{p}'}{dt} = (\vec{r}'_P - \vec{r}'_A) \times (\vec{F} + \vec{F}_I) = \vec{M}'_A$$

Momento de la fuerza $(\vec{F} + \vec{F}_I)$ respecto del punto A .



TEOREMA DEL MOMENTO CINÉTICO

Es decir, con respecto de un punto en reposo A :

$$\frac{d\vec{L}'_A}{dt} = \vec{M}'_A$$

Momento de fuerzas reales y de inercia

PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN

Si \vec{M}'_A es cero, el momento cinético \vec{L}'_A se conserva.

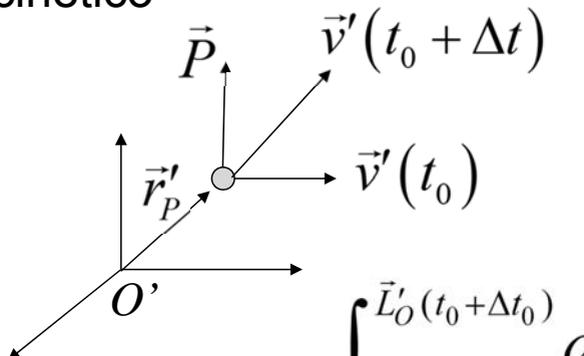




TEOREMA DEL MOMENTO CINÉTICO

PERCUSIÓN

Una percusión supone una discontinuidad en el momento cinético



$$\frac{d\vec{L}'_O}{dt} = \vec{r}'_P \times (\vec{F} + \vec{F}_I)$$

$$\int_{\vec{L}'_O(t_0)}^{\vec{L}'_O(t_0 + \Delta t_0)} d\vec{L}'_O = \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \vec{r}'_P \times (\vec{F} + \vec{F}_I) dt$$

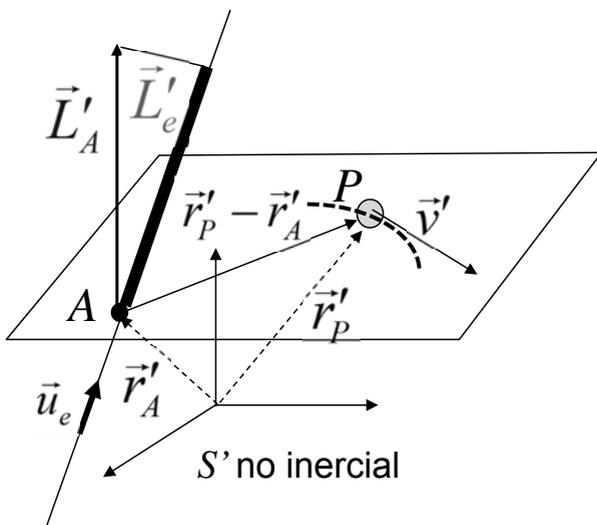
$$\vec{L}'_O(t_0 + \Delta t) - \vec{L}'_O(t_0) = \vec{r}'_P \times \vec{P}$$

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

69/159



MOMENTO CINÉTICO RESPECTO DE UN EJE FIJO



$$\vec{L}'_A = \overrightarrow{AP} \times \vec{p}' = (\vec{r}'_P - \vec{r}'_A) \times m\vec{v}'$$

$$L'_e = \vec{L}'_A \cdot \vec{u}_e = (\overrightarrow{AP} \times \vec{p}') \cdot \vec{u}_e$$

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

70/159





TEOREMA DEL MOMENTO CINÉTICO RESPECTO A UN EJE FIJO

Derivando respecto del tiempo:

$$\frac{dL'_e}{dt} = \frac{d(\vec{u}_e \cdot \vec{L}'_A)}{dt} = \frac{d\vec{u}_e}{dt} \cdot \vec{L}'_A + \frac{d\vec{L}'_A}{dt} \cdot \vec{u}_e$$

Como el eje está en reposo en el *SRNI*: $\frac{d\vec{u}_e}{dt} = \vec{0}$

$$\text{Y: } \frac{d\vec{L}'_A}{dt} \cdot \vec{u}_e = \left[(\vec{r}'_P - \vec{r}'_A) \times (\vec{F} + \vec{F}_I) \right] \cdot \vec{u}_e = \vec{M}'_A \cdot \vec{u}_e$$



TEOREMA DEL MOMENTO CINÉTICO RESPECTO A UN EJE FIJO

El cambio en el momento cinético respecto a un eje en reposo en un *SRNI* es igual al momento dinámico de las fuerzas reales y de inercia respecto a ese eje

$$\frac{dL'_e}{dt} = M'_e$$

PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN

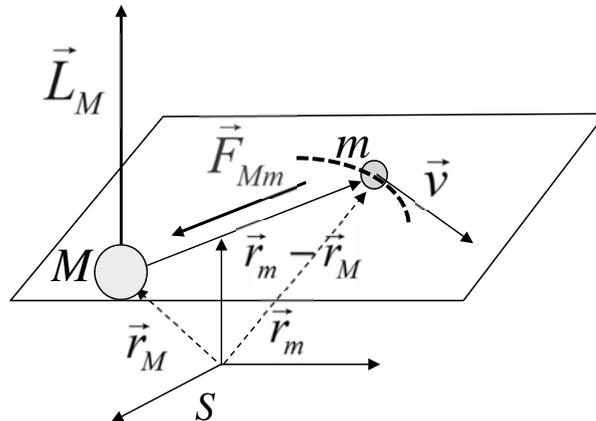
$$\text{Si } M'_e = 0 \Rightarrow L'_e(t) = L'_e(t=0) = cte$$





FUERZAS CENTRALES

Una masa m (o una carga q) conservan su momento cinético en un campo creado por otra masa M (u otra carga Q) de masa muy grande comparada con la primera:



F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

73/159



FUERZAS CENTRALES

La recta soporte de la fuerza pasa por un punto fijo \vec{r}_M llamado centro del campo.

$$\vec{F}_{Mm} = -G \frac{Mm}{|\vec{r}_m - \vec{r}_M|^2} \frac{(\vec{r}_m - \vec{r}_M)}{|\vec{r}_m - \vec{r}_M|}$$

M puede considerarse fija (punto fijo):

$$\frac{d\vec{L}_M}{dt} = (\vec{r}_m - \vec{r}_M) \times \vec{F}_{Mm} = \vec{0} \rightarrow \vec{L}_M = \overline{cte}$$

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

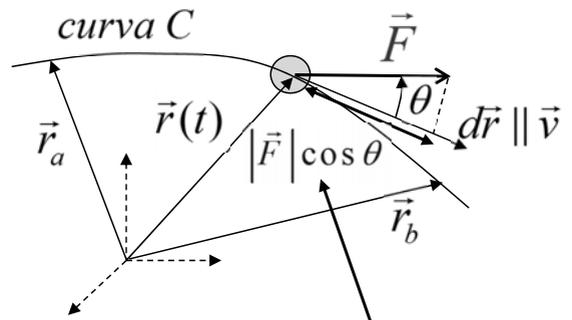
74/159





TRABAJO DE UNA FUERZA

$$W_{ab}^C = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



Integral de línea de la fuerza:

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r} = |\vec{F}| |d\vec{r}| \cos \theta \longrightarrow \delta W = \vec{F} \cdot \vec{v} dt$$

Proyección de la fuerza en la dirección de $d\vec{r} \longrightarrow |\vec{F}| \cos \theta$



TRABAJO DE UNA FUERZA PROPIEDADES

$$W_{ab}^C = -W_{ba}^C$$

En general, para dos caminos distintos:

$$W_{ab}^{C_1} \neq W_{ab}^{C_2}$$

Para una curva cerrada: $\oint \delta W \neq 0$





TRABAJO DE UNA FUERZA

La ecuación de dimensiones SI del trabajo es

$$[W] = [F] [r] = (\text{LMT}^{-2}) (\text{L}) = \text{L}^2 \text{M T}^{-2}$$

y la unidad correspondiente se denomina Julio (J)

$$1 \text{ J} = 1 \text{ N}\cdot\text{m} = 1 \text{ m}^2\cdot\text{kg}\cdot\text{s}^{-2}$$



POTENCIA MECÁNICA

La potencia mecánica es una magnitud escalar que tiene en cuenta simultáneamente el trabajo realizado por una fuerza o sistema de fuerzas y el tiempo empleado en realizarlo

Potencia instantánea:
$$P_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\delta W}{dt}$$

Para una única fuerza:
$$P_m = \frac{\delta W}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$





POTENCIA MECÁNICA

La ecuación de dimensiones SI de la potencia es

$$[P] = [W] [t]^{-1} = (L^2 M T^{-2}) (T)^{-1} = L^2 M T^{-3}$$

Su unidad se denomina vatio y es igual a

$$1 W = 1 J \cdot s^{-1} = 1 m^2 \cdot kg \cdot s^{-3}$$

Otras unidades de potencia son

$$1 kgm \cdot s^{-1} = 9.8 W$$

$$1 CV = 75 kgm \cdot s^{-1} = 736 W = 0.736 kW$$

$$1 HP = 746 W$$



TEOREMA DE LA ENERGÍA CINÉTICA

Para una partícula material de masa m

$$W_{ab}^C = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} m d\vec{v} \cdot \vec{v} = \int_{v_a}^{v_b} m d \left(\frac{v^2}{2} \right)$$

Se define la magnitud física energía cinética como

$$E_C = \frac{1}{2} m v^2$$

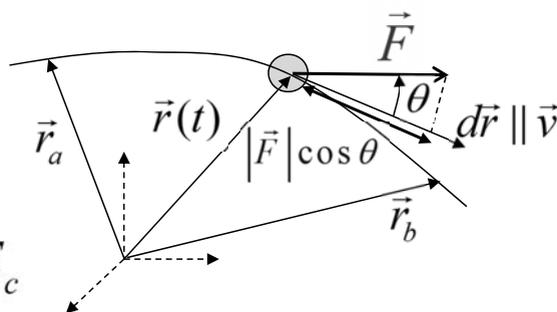




TEOREMA DE LA ENERGÍA CINÉTICA

Es decir,

$$W_{ab}^C = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2 = \Delta E_c$$



“El trabajo realizado por la resultante de las fuerzas que actúan sobre una partícula material, en un sistema de referencia inercial y entre dos instantes t_a y t_b , es igual a la variación de la energía cinética de la partícula en ese intervalo”



CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA CINÉTICA

Si el trabajo realizado por la resultante de las fuerzas que actúan sobre una partícula es nulo entre dos instantes t_a y t_b , entonces su energía cinética es la misma al principio y al final del intervalo, pero puede variar a lo largo de él.

Si la resultante de las fuerzas que actúan sobre una partícula es nula entre dos instantes t_a y t_b , entonces su energía cinética se conserva

Si el trabajo realizado por la resultante de las fuerzas que actúan sobre una partícula es nulo en todo instante entre dos tiempos t_a y t_b , entonces su energía cinética se conserva





TEOREMA DE LA ENERGÍA CINÉTICA EN *SRNI*

Si el sistema de referencia en el que se mide la energía cinética es no inercial (*SRNI*), en la resultante de las fuerzas hay que incluir las fuerzas de inercia y calcular su trabajo:

$$W + W_I = \frac{1}{2} m v_b'^2 - \frac{1}{2} m v_a'^2 = \Delta E'_c$$

Trabajo de las fuerzas de inercia



TEOREMA DE LA ENERGÍA CINÉTICA EN *SRNI*

$$W + W_I = \frac{1}{2} m v_b'^2 - \frac{1}{2} m v_a'^2 = \Delta E'_c$$

“El trabajo realizado por la resultante de las fuerzas (tanto reales como de inercia) que actúan sobre una partícula material, en un sistema de referencia no inercial y entre dos instantes t_a y t_b , es igual a la variación de la energía cinética de la partícula en ese intervalo”

Nótese que el trabajo de la fuerza de Coriolis siempre es nulo:

$$\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} -2m(\vec{\Omega} \times \vec{v}') \cdot d\vec{r}' = \int_{\vec{v}_a}^{\vec{v}_b} -2m(\vec{\Omega} \times \vec{v}') \cdot \vec{v}' dt = 0$$





CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA CINÉTICA EN SRNI

Si el trabajo realizado por la resultante de las fuerzas (reales y de inercia) que actúan sobre una partícula es nulo entre dos instantes t_a y t_b , entonces su energía cinética es la misma al principio y al final del intervalo, pero puede variar a lo largo de él.

Si la resultante de las fuerzas (reales y de inercia) que actúan sobre una partícula es nula entre dos instantes t_a y t_b , entonces su energía cinética se conserva

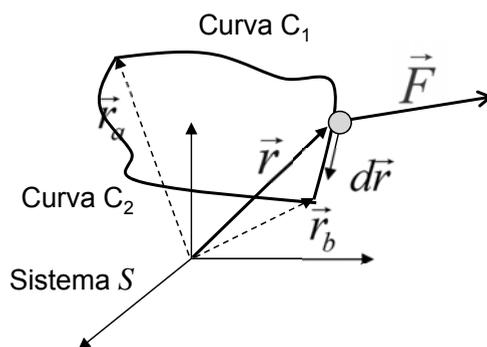
Si el trabajo realizado por la resultante de las fuerzas (reales y de inercia) que actúan sobre una partícula es nulo en todo instante entre dos tiempos t_a y t_b , entonces su energía cinética se conserva

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

85/159



FUERZAS CONSERVATIVAS



Existen fuerzas para las que el trabajo entre dos puntos a y b es el mismo para cualquier trayectoria que conecte esos dos puntos (el trabajo NO depende del camino).

A tales fuerzas se les llama fuerzas conservativas y verifican que:

$$W_{ab}^{C_1} = W_{ab}^{C_2} \quad \forall \text{ curvas } C_1 \text{ y } C_2 \text{ entre } \vec{r}_a \text{ y } \vec{r}_b$$

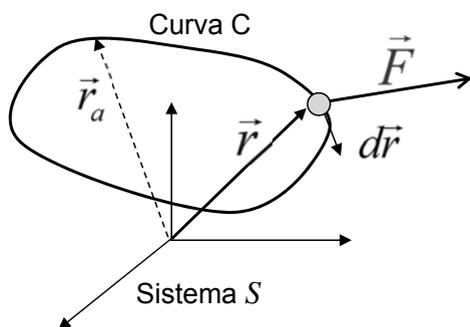
F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

86/159





FUERZAS CONSERVATIVAS



$$W_{aa}^C = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_a} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Una fuerza es conservativa si el trabajo a lo largo de cualquier curva cerrada C es nulo.

Por tanto, se cumple:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \forall C$$



ENERGÍA POTENCIAL

En este caso, se puede definir una función de la posición $E_p(\vec{r})$ llamada Energía Potencial tal que:

$$W_{ab}^C = -(E_p(\vec{r}_b) - E_p(\vec{r}_a))$$

La energía potencial está definida salvo una constante arbitraria.

En los campos electrostático y gravitatorio de fuentes finitas se suele tomar energía potencial cero en el ∞ .





ENERGÍA POTENCIAL

Como consecuencia, una fuerza es conservativa si existe una función energía potencial $E_p(\vec{r})$ tal que la fuerza es el gradiente de la energía potencial:

$$dE_p = -\vec{F} \cdot d\vec{r} \Leftrightarrow \vec{F} = -\nabla E_p \quad (\text{gradiente de } E_p)$$

$$W_{ab}^C = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} -\nabla E_p \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} -dE_p$$

$$W_{ab}^C = -(E_p(\vec{r}_b) - E_p(\vec{r}_a)) = -\Delta E_p$$

Cálculo de la energía potencial:

$$E_p(\vec{r}) = E_p(\vec{r}_0) - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

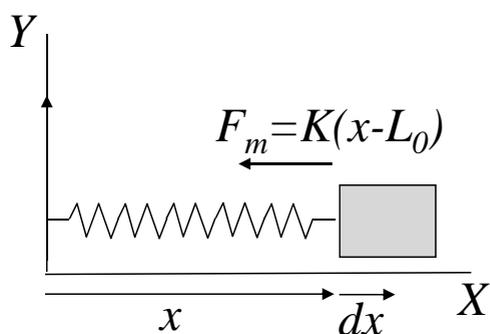
F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

89/159



ENERGÍA POTENCIAL

ENERGÍA POTENCIAL ELÁSTICA



$$E_p(\vec{r}) = E_p(\vec{r}_0) - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$E_p(\vec{r}) = E_p(L_0) - \int_{L_0}^x -K(x-L_0) \cdot dx$$

$$E_p(\vec{r}) = E_p(x) = \frac{1}{2} K(x - L_0)^2$$

Energía de la masa m :
$$E = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} K(x - L_0)^2$$

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

90/159

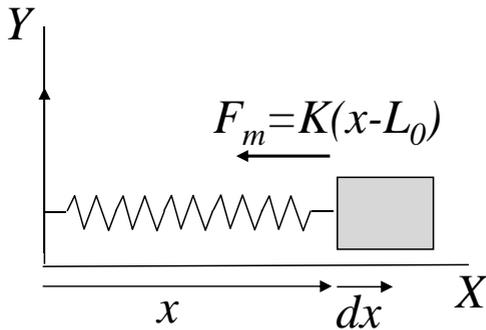


ENERGÍA
POTENCIAL

ENERGÍA POTENCIAL ELÁSTICA



Integrando la ecuación del movimiento



$$-K(x - L_0) = m \frac{dv}{dt}$$

$$-K(x - L_0) dx = m \frac{dv}{dt} dx = m \frac{dv}{dt} v dt = m v dv$$

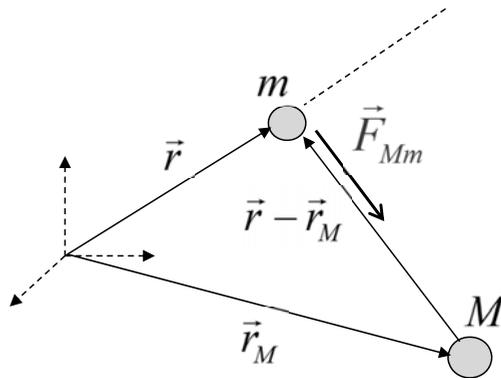
$$-\frac{1}{2} K (x - L_0)^2 + Cte = \frac{1}{2} m v^2$$

F. Jiménez Lorenzo
 J.C. Jiménez Sáez
 S. Ramírez de la Piscina Millán
 U.D. Física I
 Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

91/159

ENERGÍA
POTENCIAL

ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA



$$E_p(\vec{r}) = E_p(\vec{r}_0) - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \overbrace{E_p(\infty)}^0 - \int_{\infty}^{\vec{r}} -G \frac{Mm}{|\vec{r} - \vec{r}_M|^2} \frac{(\vec{r} - \vec{r}_M)}{|\vec{r} - \vec{r}_M|} \cdot d\vec{r}$$

F. Jiménez Lorenzo
 J.C. Jiménez Sáez
 S. Ramírez de la Piscina Millán
 U.D. Física I
 Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

92/159



ENERGÍA
POTENCIAL



ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA

$$\begin{aligned}
 (\vec{r} - \vec{r}_M) \cdot d\vec{r} &= (\vec{r} - \vec{r}_M) \cdot d(\vec{r} - \vec{r}_M) = \\
 &= \frac{1}{2} d((\vec{r} - \vec{r}_M) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_M)) = \frac{1}{2} d(|\vec{r} - \vec{r}_M|^2) = |\vec{r} - \vec{r}_M| d(|\vec{r} - \vec{r}_M|)
 \end{aligned}$$

$$E_p(\vec{r}) = GMm \int_{\infty}^{\vec{r}-\vec{r}_M} \frac{d(|\vec{r}-\vec{r}_M|)}{|\vec{r}-\vec{r}_M|^2}$$

$$E_p(\vec{r}) = -\frac{GMm}{|\vec{r}-\vec{r}_M|}$$



ENERGÍA
POTENCIAL



ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA

La fuerza se obtiene usando el gradiente: $\vec{F} = -\nabla E_p(\vec{r})$

$$\text{Potencial Gravitatorio: } V(\vec{r}) = -G \frac{M}{|\vec{r}-\vec{r}_M|} = \frac{E_p(\vec{r})}{m}$$

$$W = -m\Delta V$$

El campo gravitatorio es un campo radial:
Sólo depende de la distancia a la masa.
Evidentemente es conservativo.



ENERGÍA POTENCIAL

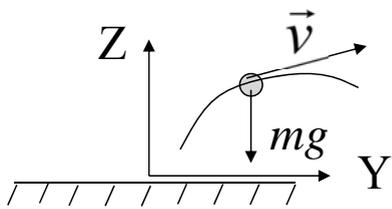


ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA

Aproximación de partícula sobre la superficie terrestre:

$$E_p(\vec{r}) = E_p(\vec{r}_0) - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \overbrace{E_p(z_0)}^0 - \int_{z_0}^z mg(-\vec{k}) \cdot dz\vec{k} = mgz - mgz_0$$

La energía aumenta si nos alejamos de la tierra.



La fuerza se obtiene usando el gradiente:

$$\vec{F} = -\nabla E_p(\vec{r}) = -\frac{\partial E_p}{\partial z} \vec{k} = -mg\vec{k}$$

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

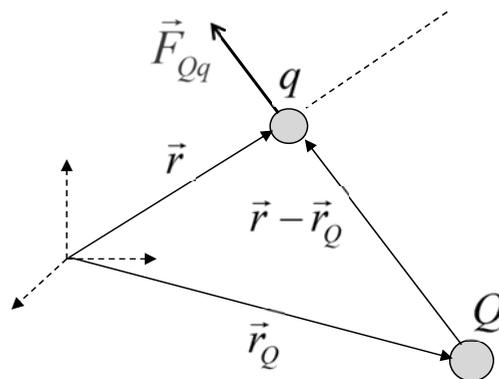
95/159



ENERGÍA POTENCIAL



ENERGÍA POTENCIAL ELECTROSTÁTICA



$$E_p(\vec{r}) = E_p(\vec{r}_0) - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \overbrace{E_p(\infty)}^0 - \int_{\infty}^{\vec{r}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{|\vec{r}-\vec{r}_Q|^2} \frac{(\vec{r}-\vec{r}_Q)}{|\vec{r}-\vec{r}_Q|} \cdot d\vec{r}$$

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

96/159



ENERGÍA
POTENCIAL



ENERGÍA POTENCIAL ELECTROSTÁTICA

$$\begin{aligned}
 (\vec{r} - \vec{r}_Q) \cdot d\vec{r} &= (\vec{r} - \vec{r}_Q) \cdot d(\vec{r} - \vec{r}_Q) = \\
 &= \frac{1}{2} d((\vec{r} - \vec{r}_Q) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_Q)) = \frac{1}{2} d(|\vec{r} - \vec{r}_Q|^2) = |\vec{r} - \vec{r}_Q| d(|\vec{r} - \vec{r}_Q|)
 \end{aligned}$$

$$E_p(\vec{r}) = -\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^{\vec{r}-\vec{r}_Q} \frac{d(|\vec{r}-\vec{r}_Q|)}{|\vec{r}-\vec{r}_Q|^2}$$

$$E_p(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{|\vec{r}-\vec{r}_Q|}$$

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

97/159



ENERGÍA
POTENCIAL



ENERGÍA POTENCIAL ELECTROSTÁTICA

La fuerza se obtiene usando el gradiente: $\vec{F} = -\nabla E_p(\vec{r})$

Potencial Electrostático:
$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\vec{r}-\vec{r}_Q|} = \frac{E_p(\vec{r})}{q}$$

$$W = -q\Delta V$$

El campo electrostático es un campo radial:
Sólo depende de la distancia a la masa.
Evidentemente es conservativo.

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

98/159





ENERGÍA MECÁNICA

Sobre una partícula material pueden actuar fuerzas conservativas (\vec{F}_C) y fuerzas disipativas (\vec{F}_D).

$$\vec{F} = \vec{F}_C + \vec{F}_D$$

Aplicando el teorema de la energía cinética:

$$W_{ab} = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \Delta E_c$$

$$W_{ab} = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{F}_C \cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{F}_D \cdot d\vec{r} = -\Delta E_p + \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{F}_D \cdot d\vec{r} = \Delta E_c$$



ENERGÍA MECÁNICA

$$(W_{ab})_D = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{F}_D \cdot d\vec{r}$$

$$(W_{ab})_D = \Delta E_c + \Delta E_p = E_m(\vec{r}_b) - E_m(\vec{r}_a) = \Delta E_m$$

Energía mecánica

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 + E_p$$





TEOREMA DE LA ENERGÍA MECÁNICA

El trabajo de la resultante de las fuerzas disipativas que actúan sobre una partícula material, en un sistema inercial y en un intervalo de tiempo (t_a, t_b) entre dos posiciones es igual a la variación de la energía mecánica de la partícula en tal intervalo

CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA

Si sobre una partícula no actúan fuerzas disipativas, $\vec{F}_D = \vec{0}$, entonces $W_D = 0$, y la energía mecánica se conserva



TEOREMA DE LA ENERGÍA MECÁNICA EN SRNI

En un Sistema de Referencia no Inercial:

$$W_D + W_I = \Delta E'_c + \Delta E'_p = E'_m(\vec{r}_b) - E'_m(\vec{r}_a) = \Delta E'_m$$

El trabajo realizado por la resultante de fuerzas disipativas más las de inercia es igual a la variación de energía mecánica del sistema.

Principio de Conservación:

Si el trabajo de fuerzas disipativas y de inercia es cero se conserva la energía mecánica.





TRABAJO DE LA FUERZA CENTRÍFUGA CON $\vec{\Omega}$ CONSTANTE

Caso $\vec{\Omega}$ constante:

$$\vec{F}_c = -m(\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}'))$$

$$\vec{u} = \vec{\Omega} \times \vec{r}'; \quad d\vec{u} = \vec{\Omega} \times d\vec{r}'$$

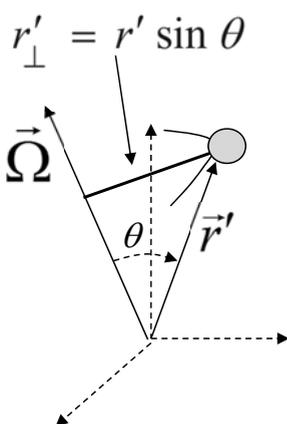
$$\vec{F}_c \cdot d\vec{r}' = -m(\vec{\Omega} \times \vec{u}) \cdot d\vec{r}' = -m(d\vec{r}' \times \vec{\Omega}) \cdot \vec{u} = m(\vec{\Omega} \times d\vec{r}') \cdot \vec{u}$$

$$\vec{F}_c \cdot d\vec{r}' = m\vec{u} \cdot d\vec{u}$$



TRABAJO DE LA FUERZA CENTRÍFUGA CON $\vec{\Omega}$ CONSTANTE

$$W = \int_{\vec{u}_0}^{\vec{u}} m\vec{u} \cdot d\vec{u} = \int_{u_0}^u \frac{1}{2} md(\vec{u} \cdot \vec{u}) = \frac{1}{2} m \int_{u_0}^u d(u^2) = \frac{m}{2} u^2 - \frac{m}{2} u_0^2$$



En este caso, se podría considerar que el trabajo deriva de una energía potencial:

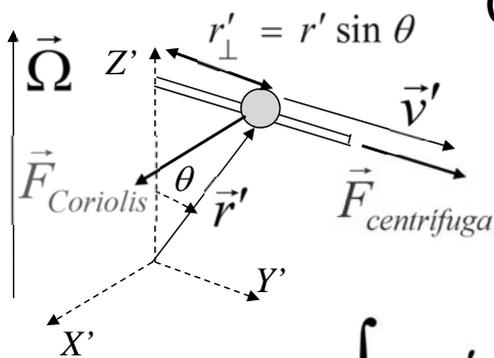
Energía potencial centrífuga:

$$E_p(\vec{r}) = -\frac{m}{2} |\vec{\Omega} \times \vec{r}'|^2 = -\frac{m}{2} \Omega^2 r_{\perp}^2$$





TRABAJO DE LA FUERZA CENTRÍFUGA CON $\vec{\Omega}$ CONSTANTE



Integrando la ecuación de movimiento de una partícula en una guía:

$$m \frac{dv'_{\perp}}{dt} = m \Omega^2 r'_{\perp}$$

$$\int m v'_{\perp} dv'_{\perp} = \int m \Omega^2 r'_{\perp} v'_{\perp} dt = \int m \Omega^2 r'_{\perp} dr'_{\perp}$$

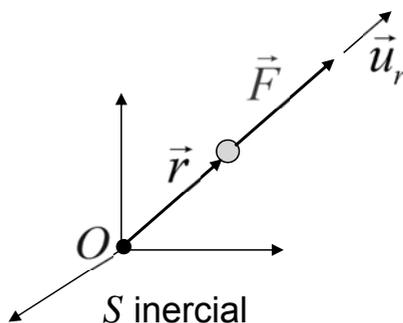
$$\frac{1}{2} m v'_{\perp}{}^2 = \frac{1}{2} m \Omega^2 r'_{\perp}{}^2 + Cte$$

La fuerza de Coriolis y la reacción normal a la guía no realizan trabajo. Ambas son perpendiculares al $d\vec{r}'$



MOVIMIENTO BAJO FUERZAS CENTRALES

La recta soporte de la fuerza pasa por un punto fijo llamado centro del campo o de fuerzas.



$$\vec{F} = F(\vec{r}) \vec{u}_r$$

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_O = \vec{cte}$$





MOVIMIENTO BAJO FUERZAS CENTRALES

FUERZA RADIAL CENTRAL

Si la fuerza depende sólo de la distancia a un punto la fuerza se denomina radial.

$$\vec{F} = F(r) \vec{u}_r$$

Ejemplos:

Campo gravitatorio y electrostático entre dos o más masas siendo una de ellas mucho mayor que el resto. El centro de masas coincide aproximadamente con la posición de la masa grande.

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

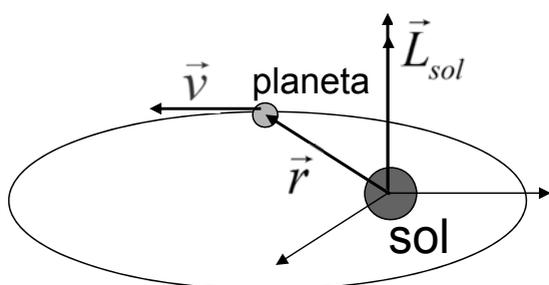
107/159



LEYES DE KEPLER

En el sistema solar, donde la masa del sol es mucho mayor que la masa de cualquiera de los planetas, el sol constituye el centro de un campo de fuerzas central al que están sometidos los planetas.

El momento cinético de cada planeta con respecto al sol se conserva



$$\vec{L}_{sol} = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{cte}$$

En polares: $r^2 \frac{d\theta}{dt} = cte$

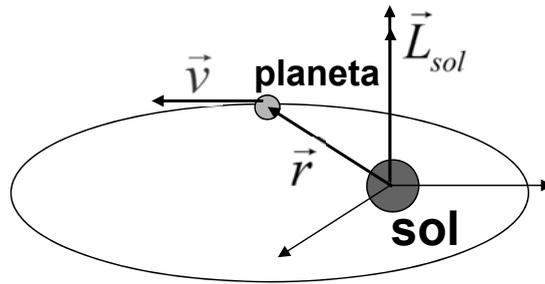
F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

108/159





LEYES DE KEPLER



Es decir, \vec{r} y \vec{v} definen un plano perpendicular a \vec{L}_{sol} que contiene a la órbita del planeta lo que implica que la trayectoria del planeta es plana

1ª ley

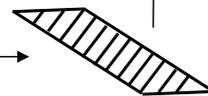
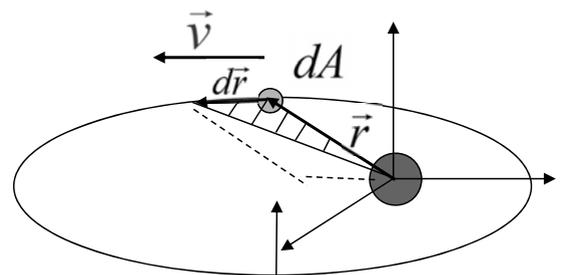
"Las órbitas de los planetas son elipses, en uno de cuyos focos está situado el sol"



LEYES DE KEPLER

Velocidad areolar

$$v_{areolar} = \frac{dA}{dt}$$



El módulo del producto vectorial es el área del paralelogramo

$$dA = \frac{1}{2} |\vec{r} \times d\vec{r}| \rightarrow dA = \frac{1}{2} \left| \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} dt \right| = \frac{1}{2} dt \left| \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right|$$





LEYES DE KEPLER

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}| = \frac{|\vec{L}_{sol}|}{2m} = cte$$

La velocidad areolar de los planetas es constante

Área de la elipse

$$\frac{dA}{dt} = \frac{|\vec{L}_{sol}|}{2m} = cte \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{A}{T} = \frac{\pi ab}{T} \Rightarrow |\vec{L}_o| = \frac{2m\pi ab}{T}$$

2ª ley

"El vector de posición de cualquier planeta con respecto al sol barre áreas iguales en tiempos iguales"
(la velocidad areolar es constante)

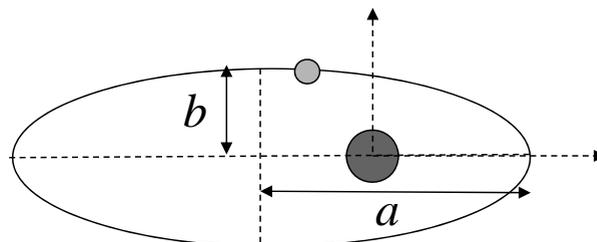


LEYES DE KEPLER

3ª ley

"Los cuadrados de los periodos de revolución son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de las elipses que describen los planetas"

$$\frac{T^2}{a^3} = cte$$



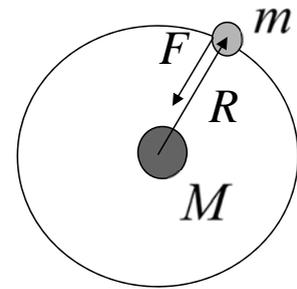


LEYES DE KEPLER

Para una órbita circular se demuestra fácilmente:

$$F = m a_{normal} \quad F = G \frac{M m}{R^2}$$

$$a_{normal} = \omega^2 R \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$



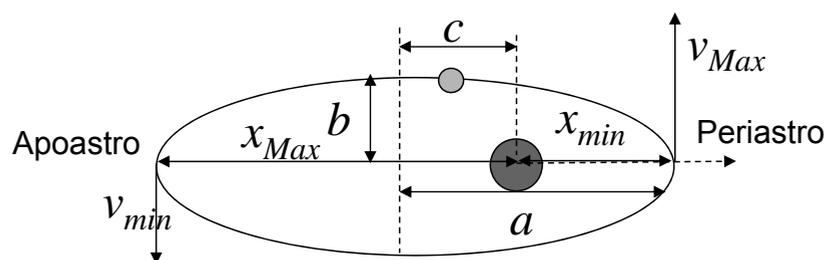
$$G \frac{M m}{R^2} = m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 R \quad \rightarrow \quad \frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = cte$$

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

113/159



LEYES DE KEPLER



x_{min} : Distancia mínima entre los cuerpos

x_{Max} : Distancia máxima entre los cuerpos

v_{Max} : Velocidad de traslación máxima (en el periastro)

v_{min} : Velocidad de traslación mínima (en el apoastro)

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

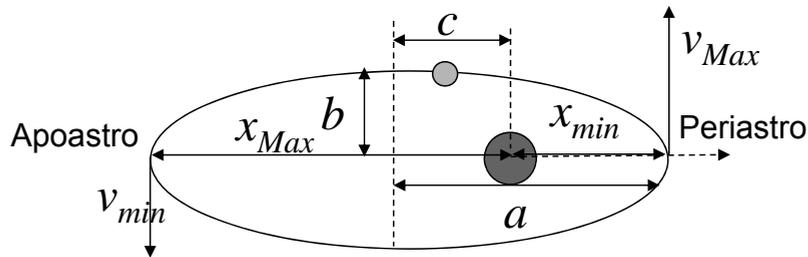
114/159





LEYES DE KEPLER

Una demostración más general de la 3ª ley:



Como ya sabemos: $\vec{L}_{sol} = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{cte}$



LEYES DE KEPLER

En particular, calculándolo en el apoastro y en el periaastro:

$$\left| \vec{L}_{sol} \right| = m v_{min} x_{Max} = m v_{Max} x_{min}$$

Con el teorema de la energía mecánica, encontramos una relación entre las velocidades:

$$m \frac{v_{min}^2}{2} - G \frac{Mm}{x_{Max}} = m \frac{v_{Max}^2}{2} - G \frac{Mm}{x_{min}} \quad \Downarrow$$

$$v_{Max}^2 - v_{min}^2 = (2GM) \left(\frac{1}{x_{min}} - \frac{1}{x_{Max}} \right)$$





LEYES DE KEPLER

Es decir: $(v_{min} x_{Max})^2 = (2GM) \left(\frac{x_{Max} x_{min}}{x_{Max} + x_{min}} \right)$

Para el cálculo de $\frac{x_{Max} x_{min}}{x_{Max} + x_{min}}$ recordamos algunas características geométricas de la elipse:

$$x_{min} = a - c$$

$$x_{Max} = a + c$$

$$b^2 = a^2 - c^2$$

$$\longrightarrow \frac{x_{Max} x_{min}}{x_{Max} + x_{min}} = \frac{(a-c)(a+c)}{(a+c) + (a-c)} = \frac{b^2}{2a}$$



LEYES DE KEPLER

Es decir: $(v_{min} x_{Max})^2 = 2GM \frac{b^2}{2a} \longrightarrow |\vec{L}_{sol}| = m \sqrt{2GM \frac{b^2}{2a}}$

Como ya sabemos por la 2ª ley: $|\vec{L}_{sol}| = \frac{2m\pi ab}{T}$

Igualando estas dos expresiones del módulo del momento cinético:

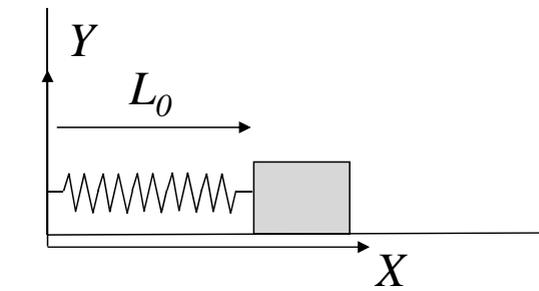
$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$



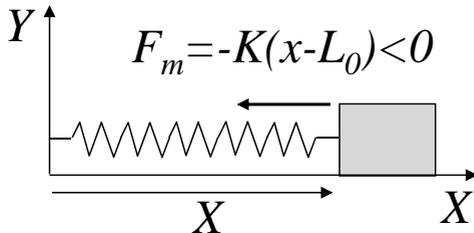
EL OSCILADOR ARMÓNICO SIMPLE



ECUACIÓN



$K =$ constante elástica
 $L_0 =$ Longitud natural



$$-K(x - L_0) = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

Cambio de variable: $s(t) = x(t) - L_0 \longrightarrow -Ks = m \frac{d^2 s}{dt^2}$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{K}{m} s = 0$$

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

119/159



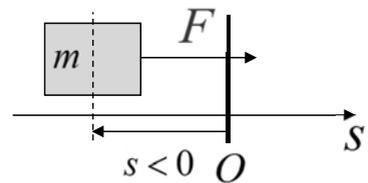
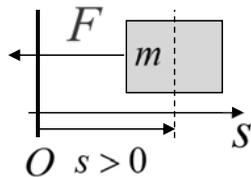
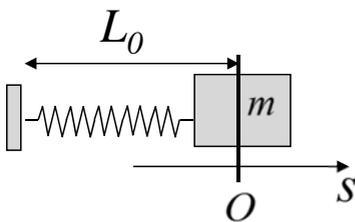
EL OSCILADOR ARMÓNICO SIMPLE

MUELLE IDEAL

(MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE)



(longitud natural)



Si no hay rozamiento, el origen de la elongación está en la posición de equilibrio

$$F = -Ks \Rightarrow \frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{K}{m} s = 0 \longrightarrow s = A \cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}} t - \varphi\right)$$

A y φ se determinan imponiendo las condiciones iniciales

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

120/159



EL OSCILADOR ARMÓNICO SIMPLE



ECUACIÓN

Con: $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} = \frac{2\pi}{T_0}$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{K}{m} s = 0 \rightarrow \frac{d^2 s}{dt^2} + \omega_0^2 s = 0$$

Ecuación del oscilador armónico $\frac{d^2 s}{dt^2} + \omega_0^2 s = 0$



EL OSCILADOR ARMÓNICO SIMPLE



SOLUCIONES DE LA ECUACIÓN

La solución general es de la forma:

$$s(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

Otras posibles soluciones:

Recordando que: $\sin \alpha = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$

$$s(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi')$$

Recordando que: $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

$$s(t) = A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t)$$



EL OSCILADOR ARMÓNICO SIMPLE



NOMENCLATURA

$$s(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$x(t) = L_0 + A \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$x(t)$ → Elongación

L_0 → Longitud natural

A → Amplitud

ω_0 → Pulsación o Frecuencia angular

φ → Fase inicial

$\omega_0 t + \varphi$ → Fase



EL OSCILADOR ARMÓNICO SIMPLE



CINEMÁTICA DEL MOVIMIENTO

$$x(t) = L_0 + A \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

La amplitud A y la fase inicial φ vienen determinadas por las condiciones iniciales del movimiento: x_0 y v_0

$$x_0 = L_0 + A \sin(\varphi); \quad v_0 = \omega_0 A \cos(\varphi)$$

Resolviendo:

$$A^2 = (x_0 - L_0)^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}; \quad \tan(\varphi) = (x_0 - L_0) \frac{\omega_0}{v_0}$$



EL OSCILADOR ARMÓNICO SIMPLE



CINEMÁTICA DEL MOVIMIENTO

Al ser un movimiento rectilíneo, velocidad y aceleración serán tratados como escalares con signo.

$$x(t) = L_0 + A \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

Derivando la ecuación horaria obtenemos la velocidad:

$$\dot{x}(t) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

y derivando de nuevo, la aceleración

$$\ddot{x}(t) = -A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$



EL OSCILADOR ARMÓNICO SIMPLE



CINEMÁTICA DEL MOVIMIENTO

Movimientos periódicos

Diremos que el movimiento de una partícula material es periódico cuando su estado cinemático (posición, velocidad y aceleración) se repite a intervalos regulares de tiempo.

Desde el punto de vista matemático, una función f de una variable escalar t es periódica si existe un valor particular y único T de la variable que verifica $f(t+T)=f(t)$ para cualquier valor de t dentro del intervalo en que está definida la función f .

Físicamente el movimiento de una partícula material será periódico cuando lo sea su ecuación paramétrica temporal.

Es decir, la función $x(t)$ debe ser tal que $x(t) = x(t+T)$.



EL OSCILADOR ARMÓNICO SIMPLE



CINEMÁTICA DEL MOVIMIENTO

Se puede comprobar fácilmente la periodicidad del movimiento y obtener que:

$$x(t) = x(t + T)$$

$$L_0 + A \sin(\omega_0 t + \varphi) = L_0 + A \sin(\omega_0 t + \omega_0 T + \varphi)$$

$$\omega_0 T = 2\pi \leftrightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$\omega_0 = 2\pi f$$

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

127/159



EL OSCILADOR ARMÓNICO SIMPLE



CINEMÁTICA DEL MOVIMIENTO

$$\text{PERIODO : } T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Tiempo que debe transcurrir para que se repita el estado cinemático del movimiento.

$$\text{FRECUENCIA : } f = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

Número de veces que se repite el estado cinemático por unidad de tiempo. Es la inversa del período.

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

128/159



EL OSCILADOR ARMÓNICO SIMPLE

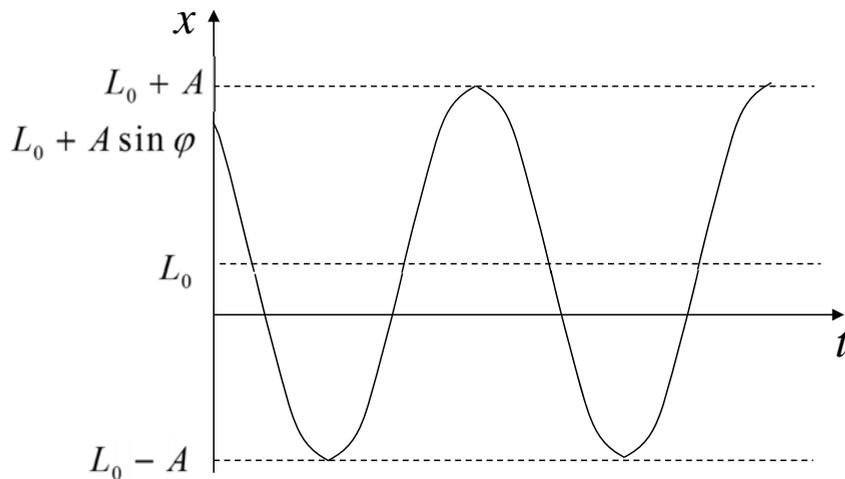


GRÁFICAS

Espacio - Tiempo: $x(t) = L_0 + A \sin(\omega_0 t + \varphi)$

Máximos y mínimos: $x_{Max} = L_0 \pm A$ en $t = \frac{(2K-1)T}{4} - \frac{\varphi}{\omega_0}$

Ordenada en el origen: $x(t=0) = L_0 + A \sin \varphi$



F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

129/159



EL OSCILADOR ARMÓNICO SIMPLE

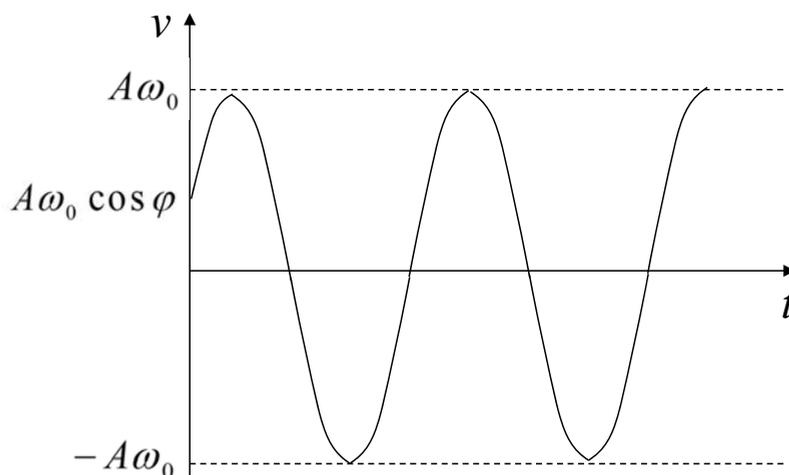


GRÁFICAS

Velocidad – Tiempo: $\dot{x}(t) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$

Máximos y mínimos: $\dot{x}_{Max} = \pm A\omega_0$ en $t = \frac{(K-1)T}{2} - \frac{\varphi}{\omega_0}$

Ordenada en el origen: $\dot{x}(t=0) = A\omega_0 \cos \varphi$



F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

130/159



EL OSCILADOR ARMÓNICO SIMPLE

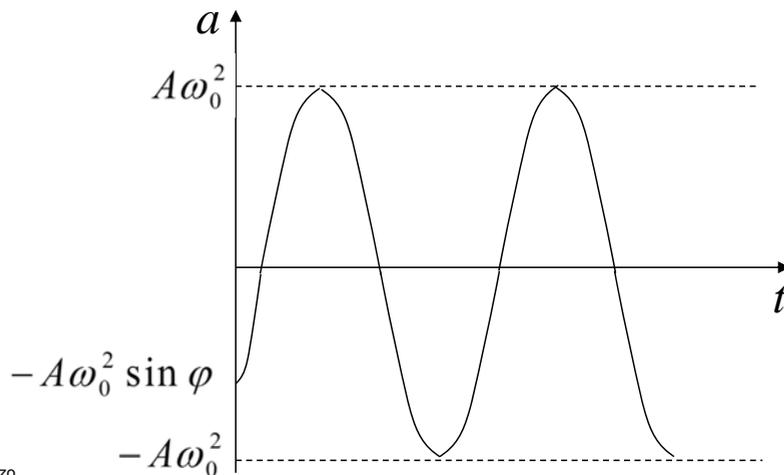


GRÁFICAS

Aceleración – Tiempo: $\ddot{x}(t) = -A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi)$

Máximos y mínimos: $\ddot{x}_{Max} = \mp A\omega_0^2$ en $t = \frac{(2K-1)T}{4} - \frac{\varphi}{\omega_0}$

Ordenada en el origen: $\ddot{x}(t=0) = -A\omega_0^2 \sin \varphi$



F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

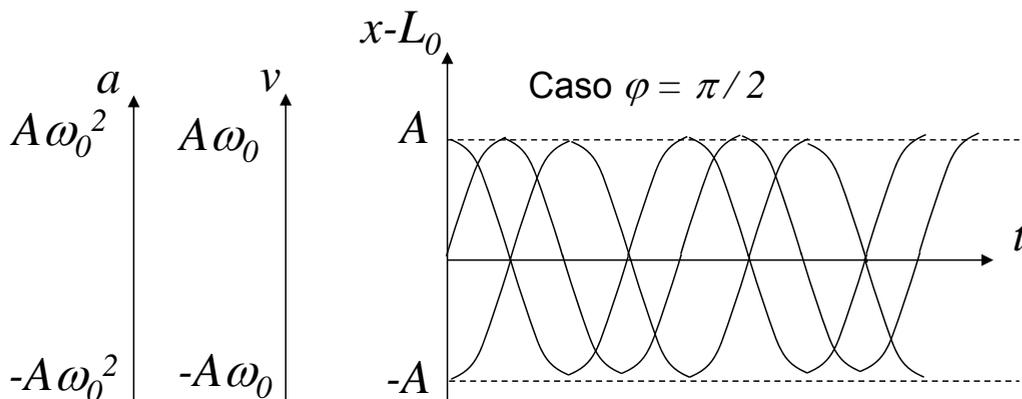
131/159



EL OSCILADOR ARMÓNICO SIMPLE



GRÁFICAS



$$x(t) = L_0 + A \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\dot{x}(t) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\ddot{x}(t) = -A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

132/159



EL OSCILADOR ARMÓNICO SIMPLE



ANÁLISIS DEL MOVIMIENTO

Podemos analizar los diagramas de movimiento para ver cuál es el comportamiento de la partícula material en cada parte del movimiento, dividiéndolo en cuartos de período

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

133/159

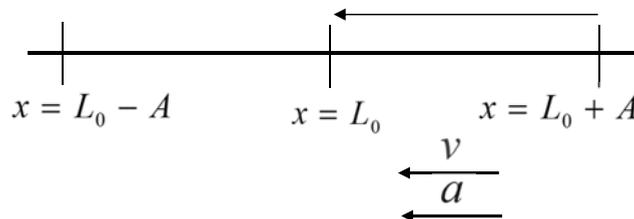


EL OSCILADOR ARMÓNICO SIMPLE



ANÁLISIS DEL MOVIMIENTO

Primer cuarto de periodo



$x = L_0 + A$ velocidad nula
módulo de la aceleración máxima (negativa)

$L_0 + A > x > L_0$ módulo de la velocidad creciente (negativa)
módulo de la aceleración decreciente (negativa)

$x = L_0$ módulo de la velocidad máxima (negativa)
aceleración nula

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

134/159

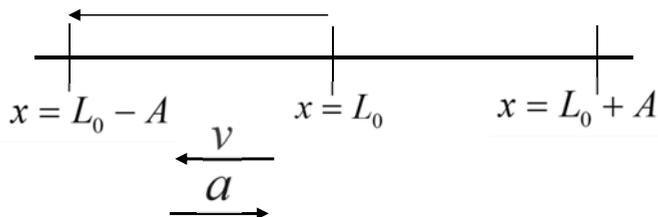


EL OSCILADOR ARMÓNICO SIMPLE



ANÁLISIS DEL MOVIMIENTO

Segundo cuarto de periodo



$x = L_0$ módulo de la velocidad máximo (negativa)
 aceleración nula

$L_0 - A < x < L_0$ módulo de la velocidad decreciente (negativa)
 módulo de la aceleración creciente (positiva)

$x = L_0 - A$ velocidad nula
 módulo de la aceleración máximo (positiva)

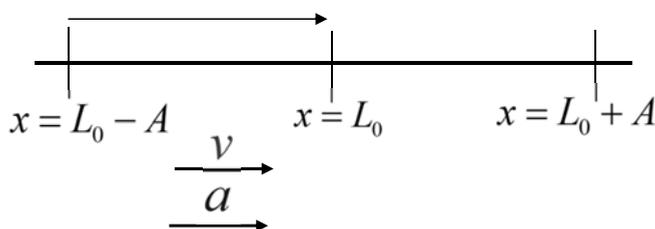


EL OSCILADOR ARMÓNICO SIMPLE



ANÁLISIS DEL MOVIMIENTO

Tercer cuarto de periodo



$x = L_0 - A$ velocidad nula
 módulo de la aceleración máximo (positiva)

$L_0 - A < x < L_0$ módulo de la velocidad creciente (positiva)
 módulo de la aceleración decreciente (positiva)

$x = L_0$ módulo de la velocidad máximo (positiva)
 aceleración nula

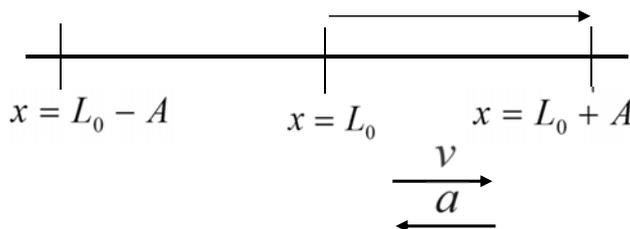


EL OSCILADOR ARMÓNICO SIMPLE



ANÁLISIS DEL MOVIMIENTO

Cuarto cuarto de periodo



$x = L_0$ módulo de la velocidad máximo (positiva)
 aceleración nula

$L_0 + A > x > L_0$ módulo de la velocidad decreciente (positiva)
 módulo de la aceleración creciente (negativa)

$x = L_0 + A$ velocidad nula
 módulo de la aceleración máximo (negativa)

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

137/159



EL OSCILADOR ARMÓNICO SIMPLE



ANÁLISIS DEL MOVIMIENTO

La velocidad es nula en los puntos extremos del movimiento ($x=L_0\pm A$).

El módulo de la velocidad es máximo en el origen ($x=0$).

El módulo de la aceleración es máximo en los puntos extremos del movimiento ($x=L_0\pm A$).

La aceleración es nula en el origen.

La aceleración siempre apunta hacia el origen del movimiento.

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

138/159



EL OSCILADOR
ARMÓNICO SIMPLE



ENERGÍA MECÁNICA

En función del tiempo:

$$E_c(t) = m \frac{v^2}{2} = \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$E_p(t) = \frac{K}{2} (x(t) - L_0)^2 = \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$E = E_c + E_p \quad E(t) = \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 = cte$$



EL OSCILADOR
ARMÓNICO SIMPLE



ENERGÍA MECÁNICA

También:

$$E_0 = m \frac{v_0^2}{2} + \frac{1}{2} K (x_0 - L_0)^2$$

$$E = cte = E_0$$

$$E(t) = \frac{p(t)^2}{2m} + \frac{K}{2} (x(t) - L_0)^2$$

$$m \frac{v_0^2}{2} + \frac{1}{2} K (x_0 - L_0)^2 = \frac{p(t)^2}{2m} + \frac{K}{2} (x(t) - L_0)^2$$



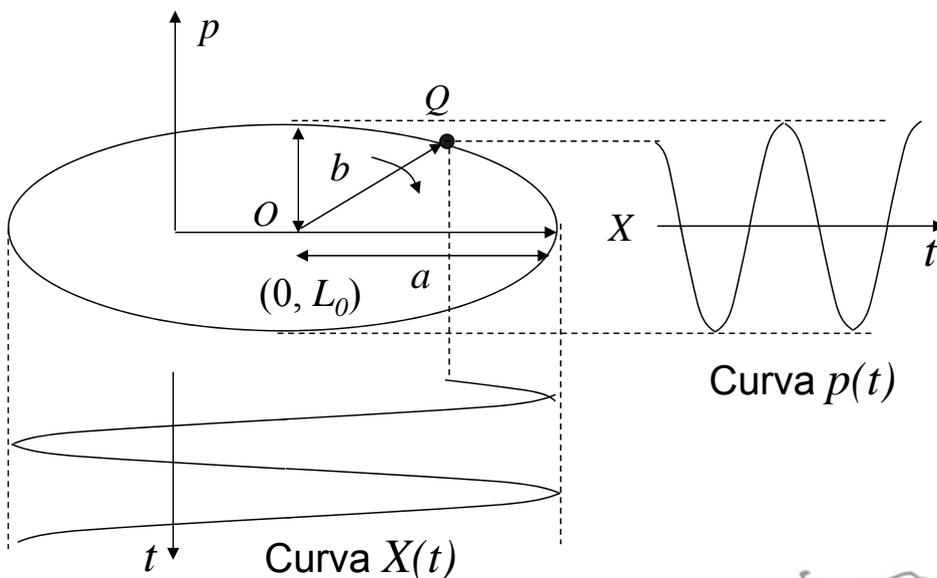
EL OSCILADOR ARMÓNICO SIMPLE



ENERGÍA MECÁNICA

$$\underbrace{\frac{p^2}{2mE_0}}_{b^2} + \underbrace{\frac{(x - L_0)^2}{2E_0 / K}}_{a^2} = 1 \quad \text{Elipse}$$

Elipse de energía
constante E_0



F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

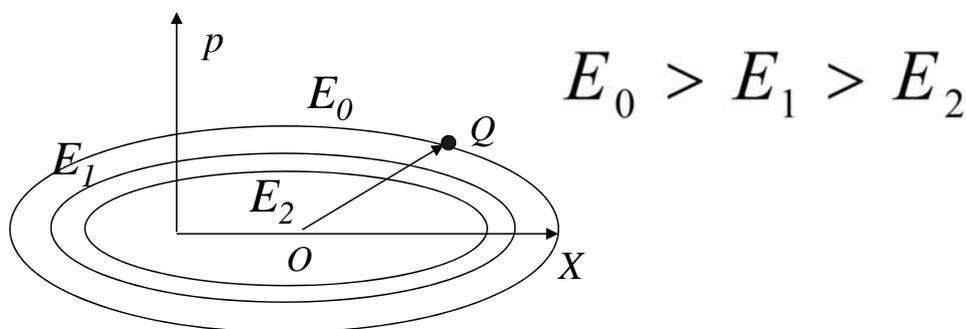
141/159



EL OSCILADOR ARMÓNICO SIMPLE



ENERGÍA MECÁNICA



El tiempo que tarda la recta OQ en recorrer las elipses es el mismo:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$$

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

142/159



EL OSCILADOR ARMÓNICO SIMPLE



ENERGÍA MECÁNICA

Se comprueba sustituyendo las funciones solución que el promedio temporal de energía cinética y potencial son iguales en un semiperiodo, como ya sabíamos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_0/2} \int_{t_0}^{t_0+T_0/2} m \frac{v^2}{2} dt &= \frac{1}{T_0/2} \int_{t_0}^{t_0+T_0/2} \frac{1}{2} K (x - L_0)^2 dt = \\ &= \frac{m}{4} \omega_0^2 A^2 = \frac{1}{2} E_{p,\max} \end{aligned}$$

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

143/159

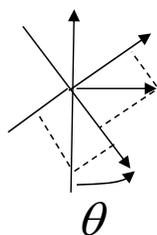
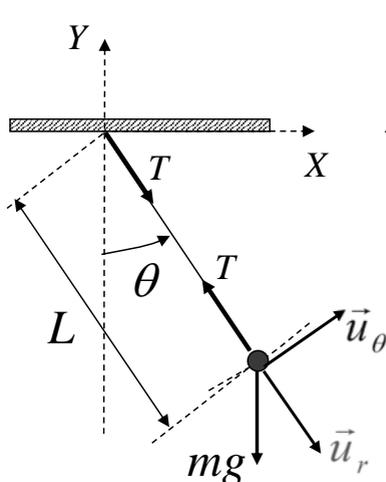


EL OSCILADOR ARMÓNICO SIMPLE



PÉNDULO SIMPLE

$$\vec{r}(t) = L\vec{u}_r \quad \vec{v}(t) = L\dot{\theta}\vec{u}_\theta \quad \vec{a}(t) = L\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - L\dot{\theta}^2\vec{u}_r$$



$$\vec{j} = -\cos\theta\vec{u}_r + \sin\theta\vec{u}_\theta$$

$$\vec{i} = \sin\theta\vec{u}_r + \cos\theta\vec{u}_\theta$$

2ª ley de Newton:

$$mL\ddot{\theta} = -mg \sin\theta$$

$$mL\dot{\theta}^2 = T(\theta) - mg \cos\theta$$

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

144/159



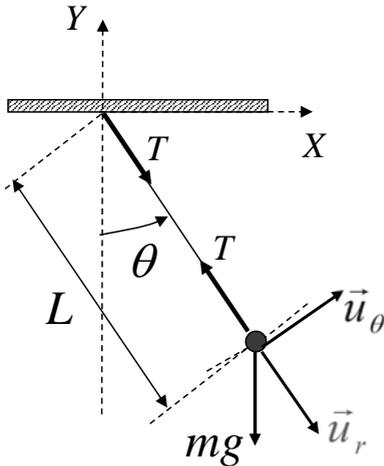
EL OSCILADOR ARMÓNICO SIMPLE



PÉNDULO SIMPLE

Si las oscilaciones son pequeñas: ↖ Ángulo máximo

$$L \text{ (longitud hilo)} \gg L\theta_m \text{ (amplitud) o } \theta_m \ll 1$$



Haciendo el desarrollo en serie:

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots \approx \theta$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \dots \approx 1 - \frac{\theta^2}{2!}$$

$$mL\ddot{\theta} = -mg\theta$$

$$mL\dot{\theta}^2 = T(\theta) - mg\left(1 - \frac{\theta^2}{2!}\right)$$

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

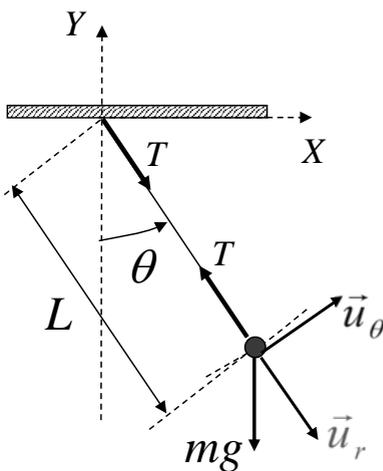
145/159



EL OSCILADOR ARMÓNICO SIMPLE



PÉNDULO SIMPLE



$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

Y recordando las ecuaciones del movimiento armónico simple:

$$\theta = \theta_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Se obtienen de las condiciones iniciales

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

146/159



EL OSCILADOR ARMÓNICO SIMPLE



PÉNDULO SIMPLE

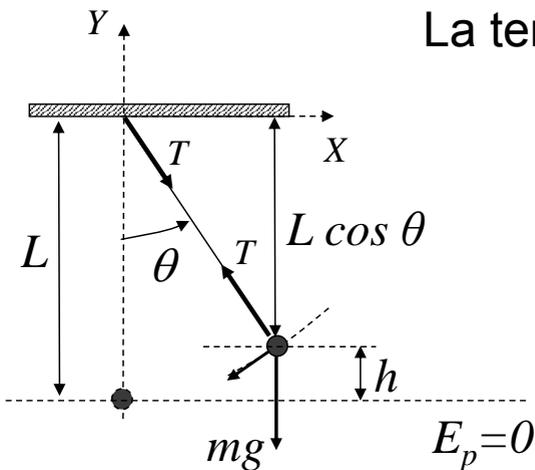
La tensión no hace trabajo puesto que:

$$\vec{T} \cdot d\vec{r} = 0$$

$$\Delta E = \Delta E_c + \Delta E_p = 0$$

$$E = \frac{1}{2} mL^2 \dot{\theta}^2 + mgh$$

$$E = \frac{1}{2} mL^2 \dot{\theta}^2 + mgL(1 - \cos \theta) = cte$$



F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

147/159



EL OSCILADOR ARMÓNICO SIMPLE



PÉNDULO SIMPLE

Y como: $\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \dots \approx 1 - \frac{\theta^2}{2!}$

$$E = \frac{m}{2} v^2 + \frac{K}{2} x^2$$

$$E = \frac{m}{2} L^2 \dot{\theta}^2 + \frac{m}{2} gL \theta^2 = \frac{m}{2} L^2 \dot{\theta}^2 + \frac{mg}{2L} (L\theta)^2$$

Energía de un oscilador armónico de constante $K=mg/L$ y longitud natural nula

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

148/159



EL OSCILADOR ARMÓNICO AMORTIGUADO



ECUACIÓN

En el oscilador armónico simple se suponía que no existían fuerzas de rozamiento y que, por tanto, la oscilación se mantenía de forma indefinida.

En realidad la amplitud de la oscilación va disminuyendo gradualmente hasta que se anula.

Una buena aproximación, en la mayoría de los casos, es suponer que la fuerza de rozamiento es proporcional a la velocidad.

$$\vec{F} = -2m\beta \vec{v}$$

β = Coeficiente de amortiguamiento



EL OSCILADOR ARMÓNICO AMORTIGUADO



ECUACIÓN

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + 2m\beta \frac{dx}{dt} + K(x - L_0) = 0$$

Cambio de variable: $s(t) = x(t) - L_0$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2\beta \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0$$

Frecuencia propia del oscilador $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$



EL OSCILADOR ARMÓNICO AMORTIGUADO



SOLUCIONES DE LA ECUACIÓN

SOBREAMORTIGUADO

$$\omega_0^2 < \beta^2 : \text{ No hay oscilaciones}$$

AMORTIGUAMIENTO CRÍTICO

$$\omega_0^2 = \beta^2 : s(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-\beta t}$$

INFRAAMORTIGUADO

$$\omega_0^2 > \beta^2 : s(t) = A_0 e^{-\beta t} \sin(\Omega t + \varphi)$$

$$\Omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$$

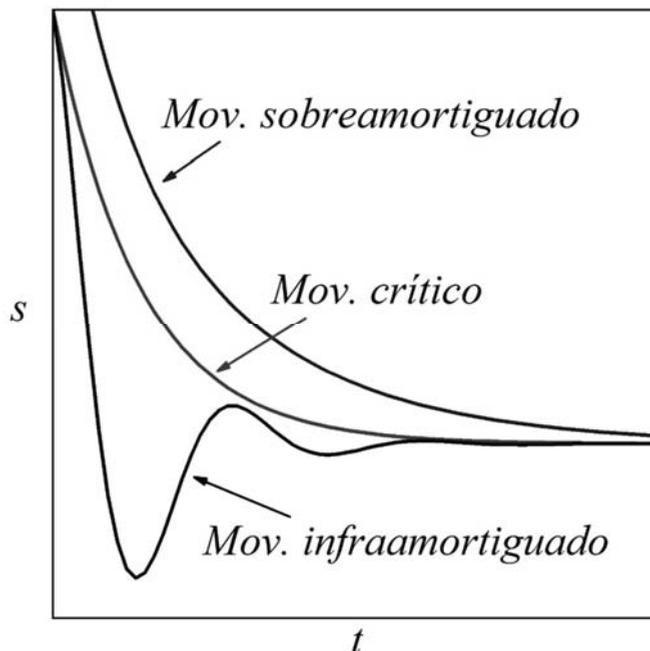
Hay oscilaciones de menor frecuencia que ω_0 y amplitud decreciente



EL OSCILADOR ARMÓNICO AMORTIGUADO



GRÁFICAS

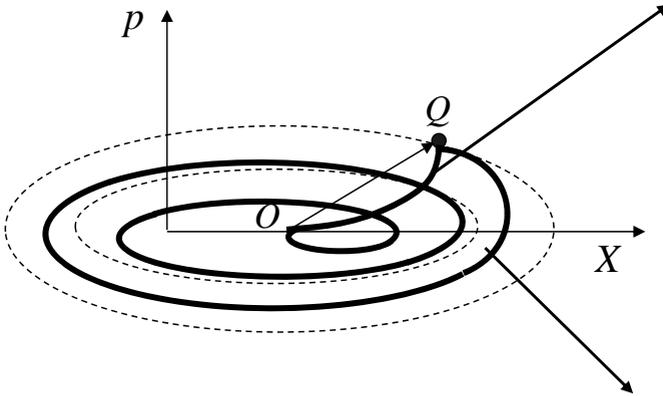


EL OSCILADOR ARMÓNICO AMORTIGUADO



ENERGÍA

Pérdida de energía rápida
El bloque se detiene sin oscilar



$$\Delta E = W_{roz} < 0$$

Fuerza de rozamiento comparable a la del muelle
El bloque realiza oscilaciones

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

153/159



EL OSCILADOR ARMÓNICO FORZADO



ECUACIÓN

El oscilador armónico amortiguado sometido a una fuerza periódica externa de frecuencia ω_f y amplitud F_0 se conoce como oscilador armónico forzado

$$F(t) = F_0 \cos(\omega_f t)$$



$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2\beta \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = \frac{F_0}{m} \cos(\omega_f t)$$

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

154/159



EL OSCILADOR ARMÓNICO FORZADO



SOLUCIONES DE LA ECUACIÓN

Solución particular de la ecuación válida para tiempos
 $t \gg 1 / \beta$

$$s(t) = f(t) + A \sin(\omega_f t + \varphi) \quad f(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

Sustituimos en la ecuación para calcular A y φ

$$s(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} A \sin(\omega_f t + \varphi)$$



EL OSCILADOR ARMÓNICO FORZADO



SOLUCIONES DE LA ECUACIÓN

$$A(\omega_0^2 - \omega_f^2) \sin(\omega_f t + \varphi) + 2\beta\omega_f \cos(\omega_f t + \varphi) = \frac{F_0}{m} \cos(\omega_f t)$$



$$A(\omega_0^2 - \omega_f^2) \cos(\varphi) - 2A\beta\omega_f \sin(\varphi) = 0$$

$$A(\omega_0^2 - \omega_f^2) \sin(\varphi) - 2A\beta\omega_f \cos(\varphi) = \frac{F_0}{m}$$

$$mA(\omega_0^2 - \omega_f^2) = F_0 \sin(\varphi)$$

$$2A\beta\omega_f = F_0 \cos(\varphi)$$



EL OSCILADOR ARMÓNICO FORZADO



SOLUCIONES DE LA ECUACIÓN

Es decir:

$$\tan \varphi = \frac{(\omega_0^2 - \omega_f^2)}{2\beta\omega_f}$$

$$A = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + 4\beta^2\omega_f^2}}$$



EL OSCILADOR ARMÓNICO FORZADO



SOLUCIONES DE LA ECUACIÓN

Introduciendo el cambio de variable: $z = \frac{\omega_f}{\omega_0}$ $q = \frac{\beta}{\omega_0}$

$$\tan \varphi = \frac{1}{2q} \left(\frac{1 - z^2}{z} \right)$$

$$A = \frac{F_0}{\omega_0^2 m} h(z) = \frac{F_0}{\omega_0^2 m} \left(\frac{1}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + 4q^2 z^2}} \right)$$



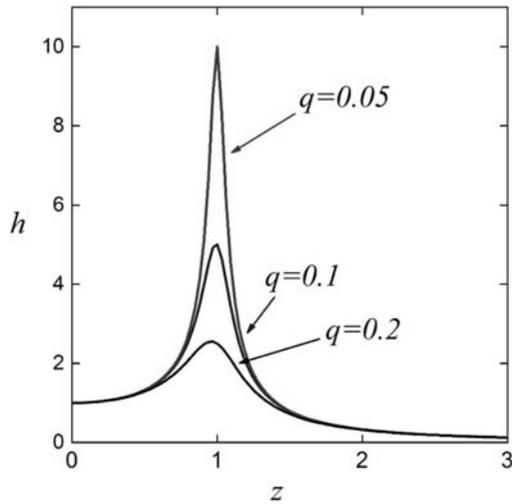
EL OSCILADOR ARMÓNICO FORZADO



RESONANCIA

Crecimiento cuando $\omega_f \rightarrow \omega_0$ ($z \rightarrow 1$)

El crecimiento es mayor a medida que $\omega_0 > \beta$ ($q \ll 1$)



La transferencia de energía es óptima en resonancia cuando la frecuencia de la fuerza aplicada es próxima a la frecuencia propia del oscilador y es máxima para un rozamiento mínimo.

F. Jiménez Lorenzo
 J.C. Jiménez Sáez
 S. Ramírez de la Piscina Millán
 U.D. Física I
 Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

159/159

