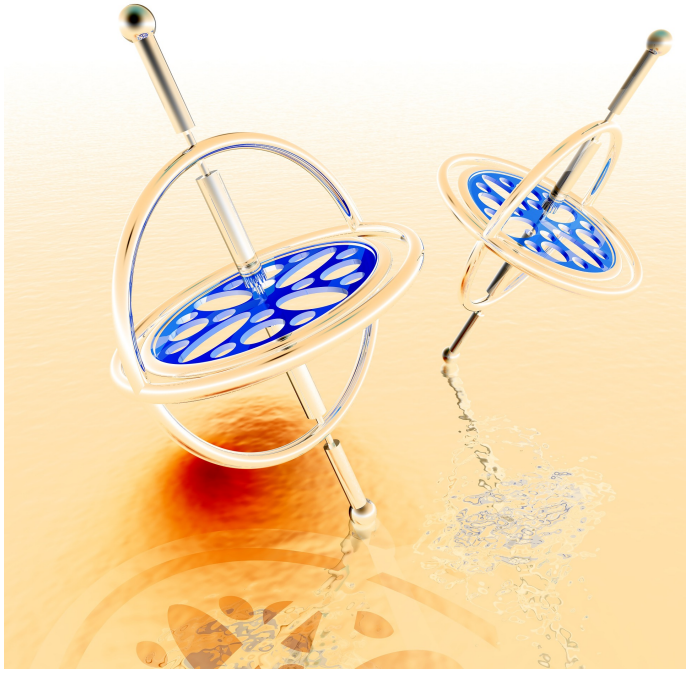
Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

POLITÉCNICA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO

FÍSICA I

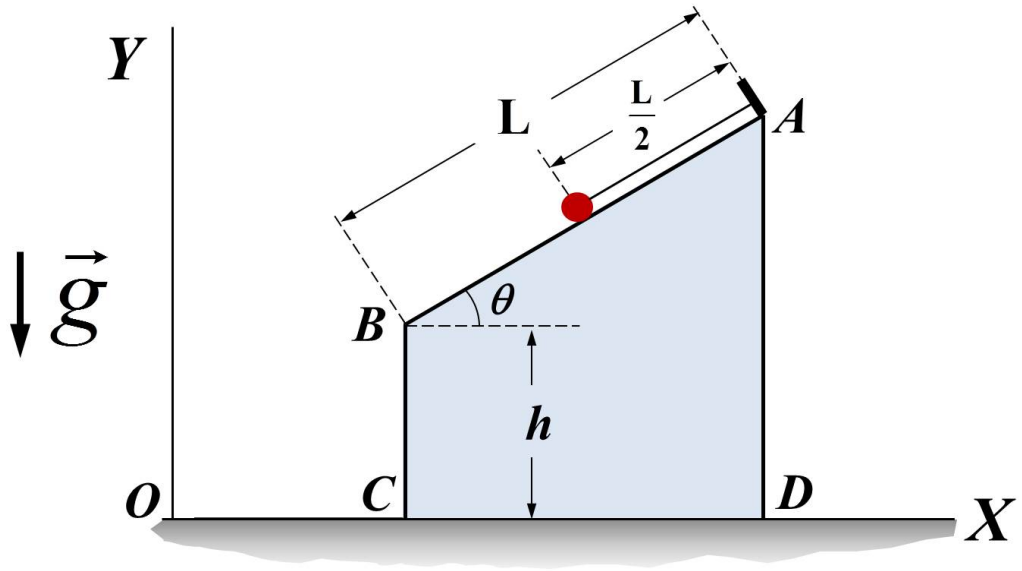
TEORÍA
Mecánica



Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

POLITÉCNICA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO



TEMA 4.- DINÁMICA DE LA PARTÍCULA

José Carlos JIMÉNEZ SÁEZ
Pablo PALACIOS CLEMENTE
Santiago RAMÍREZ DE LA PISCINA MILLÁN

ÍNDICE DINÁMICA DE LA PARTÍCULA

4. Dinámica de la partícula **1**

4.1. Introducción . . . 1
4.2. Enunciado y significado de las Leyes de Newton . . . 1
4.2.1. Ley Primera: Principio de Inercia . . . 1
4.2.2. Ley Segunda: Principio de Proporcionalidad . . . 3
4.2.3. Ley Tercera: Principio de Acción y Reacción . . . 7
4.2.4. Las Leyes de Newton y el principio de conservación de la cantidad de movimiento . . . 9
4.2.5. El principio de relatividad clásico . . . 12
4.3. Interacciones y fuerzas . . . 14
4.3.1. Interacciones básicas en la naturaleza . . . 14
4.3.2. Gravitación . . . 16
4.3.3. Electromagnetismo . . . 22
4.4. Fuerzas de reacción en apoyos. Rozamiento . . . 24
4.4.1. Ligaduras . . . 24
4.4.2. Fuerzas de reacción en apoyos . . . 25
4.4.3. Leyes del rozamiento . . . 27
4.5. Método de aplicación de las Leyes de la Dinámica . . . 31
4.5.1. El diagrama de fuerzas que actúan sobre una partícula material . . . 31
4.5.2. Ecuaciones de la dinámica de la partícula material . . . 33
4.5.3. Resolución de las ecuaciones de la dinámica de la partícula material . . . 34
4.5.4. Casos particulares de resolución de las ecuaciones de la dinámica . . . 36
4.5.5. Fuerza constante . . . 36
4.5.6. Fuerza función del tiempo . . . 37
4.5.7. Fuerza función de la velocidad . . . 38
4.5.8. Fuerza función de la posición . . . 38
4.5.9. Muelle ideal: Movimiento Armónico Simple . . . 39
4.6. Las Leyes de la dinámica en sistemas no inerciales . . . 42
4.6.1. Sistemas de referencia no inerciales. Fuerzas de inercia . . . 42
4.6.2. La ecuación fundamental de la dinámica en sistemas no inerciales . . . 44
4.6.3. Ejemplos de fuerzas de inercia . . . 46
4.6.4. ¿Es la Tierra un sistema de referencia inercial? . . . 51
4.7. Teoremas fundamentales de la mecánica . . . 54
4.7.1. Impulso mecánico y cantidad de movimiento . . . 55
4.7.2. Teorema de la cantidad de movimiento . . . 55
4.7.3. Conservación de la cantidad de movimiento . . . 56
4.7.4. El teorema de la cantidad de movimiento en sistemas no inerciales . . . 56
4.8. Momento cinético . . . 57
4.8.1. Definiciones básicas . . . 57

4.8.2. Teorema del momento cinético con respecto a un punto 58
4.8.3. Teorema del momento cinético respecto a un eje 59
4.8.4. Conservación del momento cinético 59
4.8.5. El teorema del momento cinético en sistemas no inerciales 60
4.8.6. Relación entre los momentos cinéticos calculados en dos puntos diferentes 61
4.8.7. Fuerzas centrales 62
4.9. Percusiones 66
4.9.1. Percusiones y cantidad de movimiento 66
4.9.2. Percusiones y momento cinético 68
4.10. Trabajo y energía mecánica 69
4.10.1. Trabajo de una fuerza 69
4.10.2. Potencia mecánica 73
4.10.3. Teorema de la energía cinética 74
4.10.4. Fuerzas conservativas. Energía potencial 75
4.10.5. Algunos ejemplos de fuerzas conservativas 78
4.10.6. El teorema de la energía mecánica 80
4.10.7. El teorema de la energía mecánica en sistemas no inerciales 82
4.10.8. Energía mecánica para una partícula en movimiento armónico simple . 83

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval
etsiae
Faian

4 Dinámica de la partícula

4.1. Introducción

La dinámica es la parte de la mecánica que estudia el movimiento y sus causas. En cinemática hemos visto cómo describir el movimiento. Las magnitudes capaces de producir o modificar el movimiento de los cuerpos son las fuerzas, que se definen y estudian en este capítulo, en el que se aplican las leyes de la dinámica al sistema más simple, la partícula material ya definida.

Del apartado 4.2.1 al 4.2.5 se enuncian las leyes de la dinámica y se analiza su alcance y validez. Los tres primeros se dedican a un análisis de las tres leyes de Newton, comenzando cada uno con el enunciado original de las leyes, traducidas del latín según la edición de los "Principios matemáticos de la Filosofía Natural" de Editora Nacional (Madrid 1982).

En los apartados siguientes se trata el concepto de interacción, las reacciones en apoyos, el método de aplicación de las leyes de la dinámica, la dinámica en sistemas no inerciales y los teoremas fundamentales de la dinámica. Como el resto de los sistemas que se estudian más adelante se pueden reducir a un conjunto de partículas materiales, no resulta excesivamente complicado, en principio, aplicarles las leyes de la dinámica si éstas han quedado bien asentadas para el caso de una única partícula.

4.2. Enunciado y significado de las Leyes de Newton

4.2.1. Ley Primera: Principio de Inercia

Según el enunciado original de la primera ley de Newton:

> ***"Todos los cuerpos perseveran en su estado de reposo o de movimiento uniforme en línea recta, salvo que se vean forzados a cambiar ese estado por fuerzas impresas".***

Como se observa, la primera ley define el estado dinámico de un objeto sobre el que no actúa ninguna fuerza. No obstante, aún no hemos definido con precisión en qué consiste una fuerza, ni tampoco es necesario hacerlo para una interpretación de la primera ley. En definitiva, de lo que se trata es de establecer cuál es el estado de un cuerpo sobre el que no actúa ninguna acción exterior, es decir, absolutamente nada. Podemos idealizar un cuerpo en estas condiciones mediante el concepto de partícula libre, que representa a un objeto situado en el vacío a una distancia infinita de cualquier otro objeto del tipo que sea. Nada perturba a una partícula libre.

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

A partir de esto, un enunciado equivalente de la primera ley es: **Toda partícula libre permanece en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme.**

Esta tendencia de los cuerpos libres a permanecer en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme se denomina inercia. Hay que constatar que mientras el reposo sí es conforme con nuestra experiencia diaria como estado natural de un objeto libre no sucede así con el movimiento rectilíneo y uniforme. De hecho fue Galileo el primero en darse cuenta de ello, a pesar de que el estudio del movimiento es uno de los temas que más preocuparon a los pensadores de épocas anteriores.

El problema que se plantea para interpretar de forma completa la ley es el siguiente: ¿respecto a qué permanece en reposo o en movimiento rectilíneo y uniforme una partícula libre? En efecto, en la práctica no somos capaces de definir el movimiento si no es respecto a algún objeto de referencia.

Para solucionarlo, definimos un sistema de referencia inercial de la siguiente forma: **un sistema de referencia inercial es aquel en el que se cumple la primera ley de Newton.** Es más, las tres leyes de Newton solo se cumplirán en sistemas de referencia inerciales.

Para saber si un sistema de referencia es o no inercial observaremos una partícula libre. Si permanece en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme respecto a él entonces es inercial, en caso de que su movimiento sea acelerado, del tipo que sea, respecto a tal sistema entonces no es inercial.

Es fácil darse cuenta de que sigue planteándose un problema de tipo práctico para la determinación de sistemas inerciales y es el de la observación de una partícula libre. Si imaginamos una partícula a una distancia infinita de cualquier otro objeto es claro que no podremos estar presentes ni llevar instrumentos de medida a sus inmediaciones, porque entonces no podríamos estar seguros de no perturbarla, es decir, de que fuera libre.

En el método que vamos a utilizar para el estudio de la dinámica representaremos la interacción que actúa sobre una partícula procedente de otros sistemas mediante magnitudes vectoriales que llamaremos fuerzas. Así, una partícula libre es aquella sobre la que no actúa ninguna fuerza ($\vec{F} = \vec{0}$). Hemos dicho que es prácticamente imposible observar una partícula sobre la que no actúa ninguna fuerza, pero sí que es posible observar partículas sobre las que actúan diferentes fuerzas cuyo efecto conjunto es nulo, de forma que en estas circunstancias podamos afirmar que la fuerza neta es igual a cero. Para ello es necesario estar seguros de que podemos sumar fuerzas, pero esto es un hecho experimentalmente comprobado: **el efecto dinámico que producen varias fuerzas actuando sobre un cuerpo es el mismo que el que produce su suma vectorial resultante**. No es suficiente definir una magnitud vectorial para estar en condiciones de sumar tales magnitudes mediante la ley del paralelogramo. Hace falta tener suficiente evidencia experimental como para entender el significado físico y la validez de la operación suma vectorial.

Ahora sí que estamos en condiciones de dar una definición de sistema inercial equivalente a la anterior, pero más aplicable a situaciones prácticas: **Un sistema de referencia es inercial si al observar una partícula sometida a una fuerza resultante nula su estado es de reposo o de movimiento rectilíneo y uniforme respecto a tal sistema**. En caso contrario diremos que el sistema es no inercial. La ventaja de esta última definición es que sí es

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

posible, al menos con muy buena aproximación, preparar en el laboratorio partículas sometidas a fuerza resultante nula.

Si tenemos en cuenta la hipótesis de espacio absoluto, inmóvil, homogéneo e isótropo e imaginamos una partícula libre en una cierta región del Universo, entonces tal partícula solo podrá estar en movimiento rectilíneo y uniforme en una dirección cualquiera (o en reposo como caso particular). En consecuencia, el espacio absoluto es el sistema inercial por excelencia. Cualquier sistema fijo en el espacio absoluto es un sistema inercial. Además, como el principio de inercia hace equivalente las situaciones de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme, también podemos afirmar que todo sistema de referencia con movimiento rectilíneo y uniforme de traslación respecto al espacio absoluto es inercial. No obstante, hay que insistir en que la hipótesis de espacio absoluto plantea problemas de coherencia y, en cualquier caso, no es estrictamente necesaria para el estudio de la mecánica desde un punto de vista aplicado. Para ello lo que sí es necesario es disponer de alguna definición suficientemente precisa de sistema inercial como la que hemos dado sin referencia al espacio absoluto.

4.2.2. Ley Segunda: Principio de Proporcionalidad

Con la primera ley hemos visto lo que sucede cuando sobre una partícula no actúan fuerzas y se observa desde un sistema de referencia inercial. La segunda ley nos permitirá saber cuál es el efecto que produce una fuerza al actuar sobre una partícula, también desde un sistema inercial (en otro tipo de sistemas no sabemos lo que ocurre ni siquiera en el caso de que no actúen fuerzas).

El enunciado original de la segunda ley es:

> ***"El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motriz impresa, y se hace en la dirección de la línea recta en la que se imprime esa fuerza"***.

Para actualizar tal enunciado es necesario hacer algunas consideraciones. Por movimiento entendemos la velocidad $\vec{v}$ de la partícula en el instante t y en la posición $\vec{r}$ que ocupa, estando referidos $\vec{r}$ y $\vec{v}$ a un cierto sistema inercial. Por cambio de movimiento entendemos la variación instantánea de la velocidad con el tiempo, es decir, la aceleración $\vec{a}$ de la partícula. La segunda ley nos dice que solo existe una aceleración $\vec{a}$ en tal sistema de referencia para una partícula material si actúa sobre ella una fuerza total $\vec{F}$ y que fuerza y aceleración son vectores paralelos, es decir, proporcionales.

Para poder expresar matemáticamente la ley es necesario determinar e interpretar el factor de proporcionalidad entre $\vec{F}$ y $\vec{a}$. Experimentalmente se encuentra que cuando distintas fuerzas $\vec{F}$, $\vec{F}'$,... actúan sobre una misma partícula en las mismas condiciones, las aceleraciones con que responde la partícula son diferentes, $\vec{a}$, $\vec{a}'$,..., estando relacionados sus módulos por

$$\frac{F}{a} = \frac{F'}{a'} = ... = \text{cte}$$

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

mientras que si una misma fuerza $\vec{F}$ actúa sobre distintas partículas 1, 2,..., entonces las aceleraciones de respuesta son diferentes, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$,..., y sus módulos cumplen

$$\frac{F}{a_1} \neq \frac{F}{a_2} \neq ...$$

De ambas expresiones se deduce que el factor de proporcionalidad entre $\vec{F}$ y $\vec{a}$ es característico de cada partícula, es decir, toma el mismo valor para una partícula determinada independientemente de las fuerzas que apliquemos y toma distintos valores para partículas diferentes a pesar de que apliquemos la misma fuerza. A tal factor se le denomina **masa inercial** y es una propiedad interna de cada partícula material.

La masa inercial es una magnitud escalar característica de cada objeto. Admite los criterios de igualdad -dos partículas con la misma masa responden con idéntica aceleración a la misma fuerza aplicada- y de suma (a masa doble necesitamos fuerza doble para producir la misma aceleración). Además la masa inercial es una magnitud positiva, ya que la aceleración de respuesta a una fuerza $\vec{F}$ tiene siempre el mismo sentido que la fuerza aplicada como se comprueba experimentalmente.

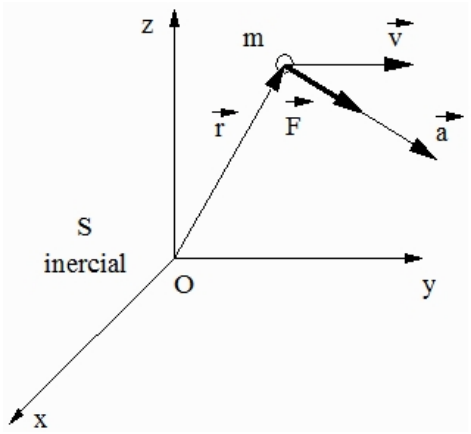


Figura 4.1: Fuerza y aceleración sobre una partícula.

Podemos expresar la segunda ley de Newton como sigue. Sea un sistema inercial S (Fig. 4.1) y una partícula material cuya posición en un instante t viene dada por $\vec{r}$ y su velocidad por $\vec{v}$. Si en tal instante actúa sobre ella una fuerza neta $\vec{F}$ (suma vectorial de todas las fuerzas aplicadas) entonces aparece sobre la partícula una aceleración $\vec{a}$ dada por

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{4.1}$$

donde m es una propiedad característica de la partícula, su masa inercial.

La ecuación fundamental de la dinámica [4.1] plantea un problema, y es que parece definir simultáneamente dos magnitudes, la fuerza $\vec{F}$ y la masa inercial m. Según el tratamiento que hemos seguido puede dar la impresión de que ya sabemos lo que es una fuerza y de que a partir de ello (ec. [4.1]) se define la masa inercial. Sin embargo el concepto de fuerza que estamos utilizando no es en absoluto preciso (solo hemos dicho que la fuerza es el modelo que utilizaremos para representar la interacción entre sistemas dinámicos suficientemente definidos,

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

lo que está lejos de constituir una definición operativa de la magnitud fuerza). El problema no es sencillo de resolver con la formulación tradicional de las leyes de Newton que estamos siguiendo, pero procuraremos aclararlo más adelante. Por el momento nos basta con tener una idea aproximada de qué son la fuerza y la masa, o al menos una de ellas. Si sabemos qué es la masa, la ecuación [4.1] define la fuerza en función del efecto que produce sobre una partícula dada y, viceversa, si sabemos qué es una fuerza, la misma ecuación sirve para definir la masa inercial de una partícula.

Otra forma de expresar la ecuación fundamental de la dinámica consiste en definir la cantidad de movimiento $\vec{p}$, también conocida como momento lineal, de una partícula como:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

La cantidad de movimiento $\vec{p}$ es una magnitud vectorial que caracteriza dinámicamente el movimiento de una partícula (la velocidad $\vec{v}$ solo lo hace cinemáticamente) y nos permite obtener una expresión más general que la [4.1]. Sea un sistema de referencia inercial S y una partícula cuya cantidad de movimiento es $\vec{p}$ y sobre la que actúa una fuerza resultante $\vec{F}$. Se cumple que

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{4.2}$$

Esto nos permite enunciar de forma más general la segunda ley de Newton: **La fuerza total que actúa sobre una partícula material es igual a la variación en el tiempo de su cantidad de movimiento, medida en un sistema inercial. En particular, para una partícula de masa constante es igual al producto de la masa por la aceleración**.

La ecuación [4.2] se reduce a la [4.1] para una partícula de masa constante, pero se puede aplicar a sistemas de masa variable mediante:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}\vec{v} \tag{4.3}$$

siempre que se conozca la ley de variación de la masa, $m(t)$, con el tiempo y se pueda calcular su derivada.

Además, mientras que la expresión [4.1] no se cumple en general en relatividad, la expresión [4.2] sí lo hace, si bien con una definición diferente de momento lineal y con un concepto diferente de masa en relatividad.

La ecuación [4.1] expresa, para una partícula de masa constante, la dependencia obligada de la fuerza con la aceleración, pero ¿de qué variables puede depender la fuerza? En el caso más general, las fuerzas que vamos a utilizar pueden depender de la posición, de la velocidad de la partícula sobre la que actúan y del tiempo, es decir:

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t)$$

lo que representaremos en forma más resumida mediante:

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$$

Las fuerzas $\vec{F}$ no dependen de las segundas derivadas de la posición respecto del tiempo, más que lineal y trivialmente a través de la ec. [4.1], ni de derivadas de orden superior.

Consideraremos además que la masa inercial es invariante ante cambios de sistemas de referencia en movimiento entre sí, sean o no inerciales. Es decir, la masa no depende de la posición, ni de la velocidad ni de la aceleración. Esta condición impuesta por la mecánica clásica sabemos que no es cierta desde la aparición de la teoría especial de la relatividad. En efecto, la masa no es un invariante relativista. Dados dos sistemas de referencia inerciales S y S' tales que S' se mueve en movimiento rectilíneo y uniforme de traslación respecto de S, con velocidad v, si consideramos una partícula material en reposo respecto a S' todo observador fijo en este sistema asignará a tal partícula una masa m_0 que denominaremos **masa en reposo**. La teoría especial de la relatividad nos garantiza que todo observador en reposo en el sistema S asignará para la misma partícula una masa dada por

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

Como vemos, la masa varía según la velocidad relativa al observador que la mida, si bien este hecho no es apreciable más que a velocidades muy altas, ya que el término c que aparece en la ecuación anterior representa la velocidad de la luz en el vacío cuyo valor es $3{\cdot}10^8$ m·s^{-1}. Hasta épocas recientes no había posibilidad de medir con precisión, sobre sistemas que se mueven a velocidades tan altas, las diferencias que existen entre masa en reposo y en movimiento de un objeto. En la actualidad la existencia de tal variación de la masa con la velocidad ha sido contrastada experimentalmente innumerables veces. No obstante, en la inmensa mayoría de las aplicaciones de la mecánica clásica no existe ningún inconveniente en considerar la masa independiente de la velocidad ya que el error que se comete con ello es despreciable y así lo haremos.

En cuanto a las dimensiones y unidades en el SI de las tres magnitudes que hemos introducido en este apartado, la masa es magnitud fundamental, M, y su unidad es el kilogramo que ya hemos definido. La ecuación de dimensiones de la fuerza viene dada por

$$[F] = [m]\ [a] = (\mathrm{M})\ (\ \mathrm{LT}^{-2}\ ) = \mathrm{L\ M\ T}^{-2}$$

y su unidad en el SI es el Newton (símbolo N), igual a 1 m·kg·s^{-2}.

La ecuación de dimensiones de la cantidad de movimiento es:

$$[p] = [m]\ [v] = (\mathrm{M})\ (\ \mathrm{LT}^{-1}\ ) = \mathrm{L\ M\ T}^{-1}$$

y su unidad en el SI no recibe ningún nombre particular y es igual a 1 m·kg·s^{-1}.

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

4.2.3. Ley Tercera: Principio de Acción y Reacción

Como en los apartados anteriores, comenzaremos enunciando la tercera ley de Newton en su forma original:

> ***"Para toda acción hay siempre una reacción opuesta e igual. Las acciones recíprocas de dos cuerpos entre sí son siempre iguales y dirigidas hacia partes contrarias".***

Esta ley nos permitirá profundizar en el concepto de fuerza. En el enunciado se identifican acción y reacción con fuerzas ejercidas por un cuerpo sobre otro. Hemos visto que cuando un cuerpo está aislado de la influencia de cualquier otro no actúa ninguna fuerza sobre él. De hecho, la magnitud vectorial fuerza representa la interacción que actúa sobre un cuerpo procedente de otro (acción). La tercera ley nos garantiza que sobre el segundo actúa una fuerza idéntica salvo en el sentido que es opuesto (reacción). La situación es simétrica y planteada al revés tendríamos que intercambiar acción por reacción.

De hecho lo que nos interesa es constatar que no existen interacciones capaces de producir únicamente una fuerza, sino que producen fuerzas por pares de acción y reacción. Siempre que una fuerza actúa sobre un cuerpo es conveniente que nos planteemos de qué otro cuerpo procede y, con la tercera ley, podremos afirmar que sobre este último actúa una fuerza igual en módulo y opuesta en sentido. Además, sobre un cuerpo dado actuarán tantas fuerzas como sistemas con los que interacciona.

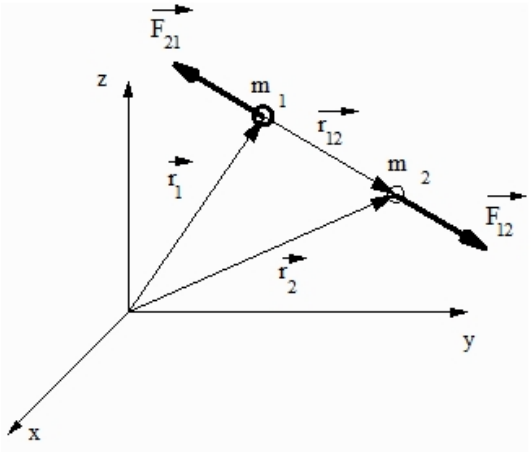


Figura 4.2: Principio de acción y reacción entre partículas.

Para disponer de un enunciado adecuado del principio de acción y reacción, consideremos dos partículas materiales de masas m_1 y m_2 aisladas, por simplicidad, de cualquier otro sistema y en interacción mutua, cuyos vectores de posición viene dados por $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ respectivamente (Fig. 4.2) respecto a un sistema de referencia inercial.

Sea $\vec{F}_{21}$ la fuerza que actúa sobre m_1 debida a su interacción con m_2. Sobre la partícula m_2 actúa una fuerza $\vec{F}_{12}$ igual y opuesta a $\vec{F}_{21}$, es decir

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \tag{4.4}$$

A las dos fuerzas $\vec{F}_{12}$ y $\vec{F}_{21}$ que representan la interacción entre m_1 y m_2 se las denomina par de acción y reacción.

La interacción entre dos cuerpos se puede producir de distintas formas. En nuestra experiencia cotidiana son habituales los casos en los que se produce con contacto, como sucede cuando dos bolas de billar colisionan entre sí o cuando un objeto pesado apoya sobre una superficie rígida. Hay otras situaciones en que la interacción se produce a distancia, como cuando el campo de gravedad que crea la Tierra hace moverse a un objeto en caída libre o cuando dos cargas eléctricas en movimiento desvían sus trayectorias como consecuencia de las fuerzas electromagnéticas que se ejercen mutuamente. En los casos en los que la interacción se produce a distancia se considera en mecánica clásica que la fuerza se transmite de forma instantánea entre las dos partículas lo que, según sabemos actualmente, es incorrecto: no existe ninguna interacción capaz de propagarse más rápidamente que la velocidad de la luz en el vacío (nada se transmite con velocidad infinita).

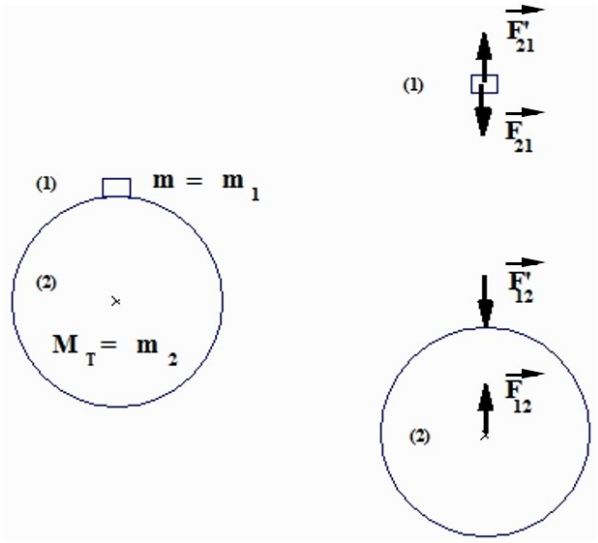


Figura 4.3: Principio de acción y reacción para una masa apoyada en la superficie de la Tierra.

No obstante, en la práctica no vamos a encontrarnos casi nunca con problemas que requieran considerar la propagación de las interacciones con velocidad finita y actuaremos, en consecuencia, como si lo hicieran de forma instantánea.

Para aclarar los conceptos, vamos a analizar el ejemplo de un objeto de masa m que apoya en reposo sobre la superficie de la tierra (Fig. 4.3).

Se trata de dos sistemas en interacción, el cuerpo en reposo relativo a la tierra, que denotaremos por (1), y la tierra, que denotaremos por (2), pero también hay dos interacciones diferentes. Por una parte está la interacción gravitatoria (a distancia), debida al hecho de que tanto la tierra como el cuerpo (1) tienen masa, que se traduce en el par de acción y reacción representado por $\vec{F}_{21}$, aplicada en el centro de masas del cuerpo (1) y $\vec{F}_{12}$ aplicada en el centro

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

de masas de la tierra. Por otra, hay una interacción por contacto, de origen electromagnético, entre el cuerpo (1) y la superficie de la tierra que lo soporta y que es debida a la rigidez de los materiales que constituyen el cuerpo y la superficie de apoyo (tal rigidez se debe a algún tipo de enlace entre las moléculas de ambos cuerpos, que tiene su origen en la interacción electromagnética). Esta segunda interacción se traduce en el par de acción y reacción dado por $\vec{F}'_{21}$ y $\vec{F}'_{12}$, ambas iguales en módulo, colineales, opuestas y cuya recta soporte coincide con la de $\vec{F}_{21}$ (esto último es necesario para explicar el equilibrio de m_1 en el caso ideal que estamos analizando). Como se ve, $\vec{F}_{21}$ y $\vec{F}'_{21}$ **no** constituyen un par de acción y reacción, ya que representan el efecto sobre m_1 de dos interacciones diferentes.

Por último es conveniente matizar el principio de acción y reacción restringiendo su validez en algunos casos.

Distinguiremos entre **principio fuerte de acción y reacción**, según el cual las fuerzas entre dos objetos en interacción son iguales en módulo, opuestas y colineales, y el **principio débil de acción y reacción**, según el cual las fuerzas de interacción serán iguales y opuestas, pero no colineales (con rectas soporte paralelas). Conviene esta distinción, dado que mientras que las interacciones gravitatorias cumplen siempre el principio fuerte de acción y reacción, las electromagnéticas cumplen a veces el fuerte, otras solo el débil y en ocasiones no cumplen ni uno ni otro.

4.2.4. Las Leyes de Newton y el principio de conservación de la cantidad de movimiento

En los apartados anteriores hemos seguido el planteamiento habitual, que consiste en fundamentar la dinámica en las tres leyes de Newton y en algunas hipótesis necesarias. No obstante, éste no es el único camino ni el más conveniente en algunos aspectos, ya que existen principios equivalentes e incluso más generales. El enfoque a elegir depende en gran medida del objetivo que se persiga, en particular de si deseamos estudiar la dinámica desde un planteamiento teórico o aplicado. Para ilustrar esto, vamos a ver que es posible deducir razonadamente las tres leyes de Newton a partir de un único principio, el de conservación de la cantidad de movimiento para sistemas aislados. Para ello utilizaremos algunos de los conceptos que se han definido y razonado en apartados anteriores.

Consideremos un sistema aislado constituido por dos partículas idénticas 1 y 2. Que forman un sistema aislado quiere decir que solo pueden interaccionar entre sí. Exigir que sean idénticas implica aceptar la hipótesis de que tal cosa es posible, pero esto es suficientemente razonable. Quizá baste con suponer que tienen la misma forma y que están hechas del mismo material, por ejemplo dos esferas idénticas. Supongamos que sus velocidades en cierto instante t son $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ y que las velocidades en un instante posterior t' son $\vec{v}'_1$ y $\vec{v}'_2$, diferentes, dado que en el intervalo de tiempo entre t y t' ambas partículas han interaccionado. Experimentalmente se comprueba que

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}'_1 + \vec{v}'_2$$

Consideremos ahora otro sistema aislado constituido por dos partículas diferentes entre sí, 1 y 2. En las mismas condiciones que en el caso anterior podemos aceptar como hecho experimental que existe un escalar λ tal que

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

$$\vec{v}_1 + \lambda\vec{v}_2 = \vec{v}_1' + \lambda\vec{v}_2' \tag{4.5}$$

Evidentemente la situación es simétrica respecto al intercambio de las partículas 1 y 2. En efecto, podemos afirmar que existirá un escalar μ tal que

$$\mu\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \mu\vec{v}_1' + \vec{v}_2'$$

que es una ecuación totalmente equivalente a la anterior, donde está claro que λ=1/μ. Tal simetría permite afirmar que λ (o μ) depende simultáneamente de las características de las partículas 1 y 2 y que debe ser posible representarla mediante una función de alguna propiedad intrínseca de ambas, simétrica en el sentido indicado. La forma más simple de hacerlo es definiendo una magnitud característica de cada partícula, que llamaremos su masa inercial, y que ha de cumplir que:

$$\lambda = \frac{m_2}{m_1} = \frac{1}{\mu}$$

Sustituyendo λ en la ecuación [4.5] obtenemos

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' \tag{4.6}$$

Definiendo la cantidad de movimiento $\vec{p}$ total de un sistema de partículas como la suma vectorial de las cantidades de movimiento de cada una de las partículas que lo componen, es decir,

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

la ecuación [4.6] se transforma en

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' = \vec{p}' \Rightarrow \vec{p} = \overrightarrow{cte} \tag{4.7}$$

es decir, **la cantidad de movimiento total de un sistema aislado se mantiene constante respecto a sistemas inerciales**. La afirmación anterior se conoce como **principio de conservación de la cantidad de movimiento en sistemas aislados** y se puede considerar como un hecho experimental comprobado.

La ecuación [4.6] puede utilizarse para definir la masa inercial sin ambigüedad. En efecto, elijamos una partícula material como referencia de la unidad de masa patrón, de valor m_1. Si queremos determinar la masa m_2 de cualquier otra partícula solo tenemos que formar un sistema aislado con ambas, medir sus velocidades en un instante dado t (sean $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$) y volver a medirlas en cualquier instante posterior t' después de que hayan interaccionado (sean $\vec{v}_1'$ y $\vec{v}_2'$). El cociente entre ambas masas verifica

$$\frac{m_2}{m_1}(\vec{v}_2' - \vec{v}_2) = (\vec{v}_1 - \vec{v}_1')$$

La expresión anterior indica que los vectores $(\vec{v}_2' - \vec{v}_2)$ y $\vec{v}_1 - \vec{v}_1'$ son paralelos (incluso exigimos que estrictamente paralelos, para que así m_2/m_1 sea positivo) con lo cual se puede escribir como

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{|\vec{v}_1 - \vec{v}_1'|}{|\vec{v}_2' - \vec{v}_2|}$$

y la masa inercial m_2 está definida por

$$m_2 = \frac{|\vec{v}_1 - \vec{v}_1'|}{|\vec{v}_2' - \vec{v}_2|} \text{ (en unidades } m_1)$$

De esta forma hemos conseguido disponer de una definición de masa inercial menos ambigua que la que obteníamos a partir de la segunda ley de Newton (siempre que aceptemos que no plantea dificultad medir módulos de diferencias de velocidades para partículas que forman parte de sistemas aislados).

Además, el principio de conservación de la cantidad de movimiento [4.7] nos permite deducir las tres leyes de Newton y definir la magnitud fuerza, como vamos a ver a continuación.

a) **Primera ley**. Supongamos un sistema aislado constituido por una única partícula de masa m. Entonces, para un sistema de referencia inercial cualquiera, se cumple (ec. [4.7]) que:

$$\vec{p} = m\vec{v} = \overrightarrow{cte} \Rightarrow \vec{v} = \overrightarrow{cte}$$

es decir, que la partícula solo puede seguir un movimiento rectilíneo uniforme respecto a tal sistema, lo que constituye el enunciado de la primera ley de Newton.

b) **Segunda ley**. Sea un sistema aislado constituido por dos partículas de masas m_1 y m_2. Si no interaccionan entre sí, cada una de ellas mantendrá constante su vector cantidad de movimiento. Supongamos que interaccionan y analicemos cómo experimenta la interacción la partícula m_1, por ejemplo.

En cualquier instante la interacción se traduce en un cambio de la cantidad de movimiento (ya que si no se produjese aquella, ésta se mantendría constante). Representamos la interacción, tal como la experimenta m_1, mediante la fuerza $\vec{F}_{21}$ que la definimos de la siguiente forma,

$$\vec{F}_{21} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} \tag{4.8}$$

que es idéntica a la ecuación [4.2]. La diferencia estriba en que antes tal ecuación representaba una ley y ahora consiste en la definición de fuerza que actúa sobre m_1 debida a la interacción con m_2, sin ambigüedad, ya que hemos definido anteriormente masa inercial y cantidad de movimiento.

c) **Tercera ley**. La situación analizada en el apartado anterior y que representa la ecuación [4.8] es simétrica respecto al intercambio de las partículas m_1 y m_2 que constituyen nuestro sistema aislado.

En efecto, apliquemos el principio de conservación de la cantidad de movimiento a este sistema aislado

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval
etsiae
Faian

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \overrightarrow{cte}$$

y derivemos respecto al tiempo, obtenemos

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = 0 \tag{4.9}$$

Pero, por simetría, se verifica que

$$\vec{F}_{21} = \frac{d\vec{p}_1}{dt}; \quad \vec{F}_{12} = \frac{d\vec{p}_2}{dt}$$

Luego la ecuación [4.9] equivale a

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

que es idéntica a la ecuación [4.4] y constituye el principio de acción y reacción.

Como se ve, basándonos únicamente en la verificación del principio de conservación de la cantidad de movimiento en sistemas aislados y respecto a sistemas de referencia inerciales, somos capaces de deducir las leyes de Newton e incluso de definir con mayor claridad algunas de las magnitudes dinámicas que aparecen en ellas.

4.2.5. El principio de relatividad clásico

Un aspecto esencial para evaluar el alcance y significado de una teoría científica consiste en estudiar bajo qué transformaciones se mantiene invariante. Esto se debe a que una de las características más importantes de la ciencia es su universalidad, lo que se traduce, por ejemplo, en que si dos científicos realizan experimentos idénticos en distintos sistemas de referencia deben estar seguros sobre qué condiciones les permitirán afirmar que los resultados que ambos obtengan son igualmente válidos y aceptables.

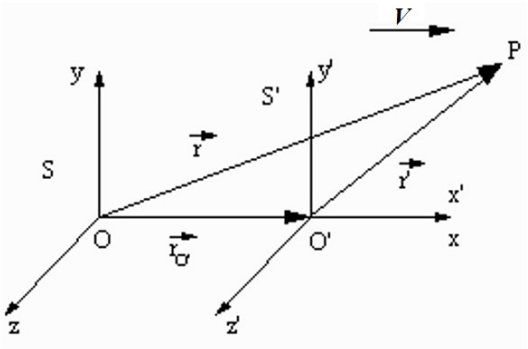


Figura 4.4: Sistemas en movimiento rectilíneo y uniforme.

La invariancia de la mecánica clásica ante cambios de sistemas de referencia está ligada a las hipótesis básicas sobre el espacio y el tiempo y se condensa en el **principio de relatividad clásico** (o de Galileo) que dice: **Las leyes de la mecánica deben ser las mismas en dos sistemas de referencia cuyo movimiento relativo sea de traslación uniforme.**

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

Matemáticamente el principio se traduce en la **transformación de Galileo** que vamos a exponer en forma simplificada.

Sean dos sistemas de referencia S y S' tales que S' sigue un movimiento rectilíneo de traslación con velocidad constante V en la dirección del eje OX y que ambos sistemas mantienen sus respectivos ejes coordenados paralelos en todo instante, según se indica en la Fig. 4.4. Podríamos haber tomado los ejes de S' rotados de una forma cualquiera respecto a los de S y la dirección del movimiento de O' respecto al sistema S según una recta cualquiera, pero ello complicaría matemáticamente el desarrollo sin añadir conceptualmente nada esencial.

La transformación de las coordenadas espaciales de un mismo punto P respecto a los sistemas S y S' viene dada por

$$\vec{r} = \vec{r'} + \vec{r}_{O'}$$

donde según se ve en la figura $\vec{r}_{O'} = Vt\vec{i}$ siempre que hayamos tomado el origen de tiempos del observador S en el instante en que O' coincidía con O y siendo t el tiempo que mide un observador ligado al sistema S. En componentes la ecuación anterior toma la forma

$$\begin{aligned} x &= x' + Vt \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned} \tag{4.10}$$

que indica cómo cambian las coordenadas espaciales bajo la transformación de Galileo.

La forma en que cambia el tiempo medido desde ambos sistemas está dada por la hipótesis de tiempo universal e independiente del espacio. En principio, un observador ligado a S medirá un tiempo local t, mientras que otro ligado a S' medirá un tiempo τ. Si aceptamos la hipótesis anterior se deberá cumplir que

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} = 0$$

es decir, que la transformación de tiempos más general viene dada por

$$t = \alpha\tau + \beta \tag{4.11}$$

con α y β constantes. La constante α representa la posibilidad de medir el tiempo en diferentes unidades, con lo cual siempre es posible hacer α=1 . La constante β indica la posibilidad de adoptar distintos orígenes para medir tiempos. También es posible en general hacer β=0. De esta forma, la ecuación más simple para la transformación de tiempos entre dos sistemas S y S' viene dada por

$$t = \tau \tag{4.12}$$

La forma simplificada de la transformación de Galileo está representada por las ecuaciones [4.10] y [4.12]. En función de ellas, el principio de relatividad se puede enunciar también como: **Las leyes de la mecánica han de ser invariantes bajo transformaciones de Galileo**.

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

La comprobación es inmediata. Supongamos que sobre una partícula de masa m situada en el punto P actúa una fuerza total $\vec{F}$ medida desde S inercial. Las ecuaciones fundamentales de la dinámica tal como las escriben los observadores situados en S y en S' son

$$\vec{F} = m\vec{a}\,(\text{para } S)\,; \quad \vec{F}' = m\vec{a}'\,(\text{para } S') \tag{4.13}$$

pero como $t = \tau$ las aceleraciones cumplen

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(\vec{r}' + \vec{r}_{O'}) = \frac{d^2}{dt^2}(\vec{r}' + V\vec{ti}) = \frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}'}{d\tau^2} = \vec{a}'$$

Es decir, $\vec{a} = \vec{a}'$ y como en mecánica clásica consideramos la masa independiente de su estado de movimiento, entonces $\vec{F} = \vec{F}'$ y las dos ecuaciones que aparecen en [4.13] son exactamente la misma, como queríamos demostrar.

Si el sistema S es inercial entonces S' es también inercial, pero el principio de relatividad afirma incluso que si S no es inercial, las leyes de la dinámica, que aún no sabemos cómo son en un sistema no inercial, deben ser las mismas en S y en S'.

Un aspecto esencial de la transformación de Galileo es que pone de manifiesto la asimetría que existe en mecánica entre el espacio y el tiempo. En efecto, las ecuaciones de transformación de coordenadas [4.10] dependen del tiempo mientras que el tiempo es independiente del espacio (ec. [4.11]). No ocurre así con la transformación de Lorentz frente a la que las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo permanecen invariantes, pero en ella desaparece la hipótesis de tiempo universal e independiente del espacio.

Otra consecuencia del principio de relatividad clásico es que los intervalos espaciales y temporales son absolutos, es decir, valen lo mismo para todos los observadores inerciales, lo que no se cumple en la teoría especial de la relatividad.

Las leyes de la mecánica clásica son aplicables únicamente, como ya sabemos, a sistemas macroscópicos -es decir, de dimensiones muy superiores a las distancias intermoleculares y constituidos por un gran número de moléculas- que se muevan a velocidades mucho menores que la velocidad de la luz. Pero, prácticamente siempre, los sistemas que se estudian en física aplicada cumplen esas dos condiciones.

4.3. Interacciones y fuerzas

4.3.1. Interacciones básicas en la naturaleza

En los apartados anteriores hemos introducido y analizado, en las leyes segunda y tercera de la dinámica, el concepto y significado de la fuerza como magnitud representativa de la interacción entre sistemas. Ahora vamos a profundizar más en ello preguntándonos de dónde proceden las fuerzas o, lo que es equivalente, cuántos tipos de interacción existen y qué propiedades tienen.

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

Según el estado de conocimientos actual sobre el tema, en la naturaleza solo existen cuatro formas básicas de manifestarse las **interacciones**: **fuerte, electromagnética, débil y gravitatoria**. En la Tabla 4.1 se resumen algunas de sus propiedades más importantes.

INTERACCIÓN	INTENSIDAD RELATIVA	ALCANCE	SIGNO
Fuerte	1	10^{-15} m	atractiva (con zona repulsiva a muy cortas distancias)
Electromagnética	10^{-2}	largo ($\rightarrow \infty$)	atractiva o repulsiva
Débil	10^{-12}	$< 10^{-17}$ m	no aplicable
Gravitatoria	10^{-40}	largo ($\rightarrow \infty$)	siempre atractiva

Tabla 4.1: Órdenes de magnitud y alcance de las interacciones básicas.

Las interacciones electromagnética y débil representan manifestaciones diferentes de un único tipo de interacción, la electrodébil, según se ha comprobado recientemente. Existen teorías que unifican las interacciones fuerte y electrodébil en una sola. La Física teórica se plantea incluso la posibilidad de unificar las cuatro interacciones en una.

La interacción fuerte o nuclear es responsable de la estabilidad del núcleo atómico. En el interior del núcleo los protones y neutrones se atraen mutuamente debido a ella, al mismo tiempo que los protones se repelen entre sí electromagnéticamente, debido a su carga. La repulsión es del orden de 100 veces menos intensa que la atracción dentro de las distancias de 10^{-15} m en las que actúa la interacción fuerte. Si por alguna razón excitamos un núcleo y conseguimos separar los protones y neutrones entre sí más allá de la distancia indicada, entonces la interacción fuerte deja de actuar (está fuera de su alcance) y se manifiesta únicamente la "explosión" debida a la repulsión electromagnética entre protones, que es de largo alcance.

La interacción electromagnética explica todos los fenómenos relacionados con las interacciones entre cargas eléctricas, así como la emisión, absorción y propagación de radiación electromagnética.

La interacción débil es responsable, por ejemplo, de la desintegración del neutrón en un protón, un electrón y un neutrino, que es a su vez el mecanismo que explica la emisión β (emisión de electrones por un núcleo).

La interacción gravitatoria explica las interacciones mutuas entre cuerpos con masa.

Si observamos la columna que especifica los alcances en la Tabla 4.1 se aprecia que solo las interacciones electromagnética y gravitatoria son de largo alcance, mientras que la fuerte y la débil actúan únicamente a distancia muy cortas (menores que el diámetro de un núcleo). En consecuencia, para estudiar física a escala macroscópica podemos olvidarnos, en general, de

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

las interacciones fuerte y débil. Para nuestros fines solo van a existir dos interacciones básicas: la electromagnética y la gravitatoria. En consecuencia, toda fuerza $\vec{F}$ que utilicemos tendrá necesariamente su origen en una de ellas.

Es importante plantearse cuál es el mecanismo según el que se producen y transmiten las interacciones. El problema es complejo y cae fuera de nuestros objetivos, pero simplificadamente podemos explicar las interacciones mediante un proceso de emisión, propagación y absorción de partículas de intercambio responsables de transmitir la interacción. Así, dos partículas capaces de interaccionar fuertemente, como los protones o los neutrones, lo hacen mediante el intercambio de un pion, que es la partícula transmisora para la interacción fuerte, con masa en reposo no nula y carga cero.

La interacción electromagnética se produce mediante el intercambio de fotones (partículas de masa nula pero con energía y momento lineal no nulos). La interacción débil se transmite mediante los bosones intermediarios W^+, W^- y Z^0, de masa no nula, dos de ellos cargados y uno neutro.

Piones, fotones y bosones han sido detectados experimentalmente. Teóricamente se postula la existencia de partículas sin masa para explicar la interacción gravitatoria, los gravitones. El largo alcance de las interacciones electromagnética y gravitatoria está relacionado con el hecho de que sus partículas de intercambio no tengan masa.

Las partículas de intercambio que explican las interacciones básicas se mueven con velocidad finita, igual a la velocidad de la luz en el vacío. En consecuencia, las interacciones (o nuestro modelo de ellas, las fuerzas) no pueden propagarse instantáneamente. Insistimos aquí en que su velocidad de propagación es igual a la de la luz en el vacío. No obstante, dado el alto valor de c no necesitaremos tener en cuenta este hecho.

4.3.2. Gravitación

La ley de gravitación, cuyo enunciado apareció por primera vez en los "Principia" de Newton en 1687, constituye el ejemplo por excelencia de ley de alcance universal, en el sentido de que cualquier objeto con masa se ve sometido a ella.

De forma resumida se puede enunciar como sigue: **Todos los cuerpos se atraen entre sí mediante fuerzas directamente proporcionales al producto de sus masas e inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia que separa sus centros**.

Mientras que el enunciado anterior expresa con una gran simplicidad la ley de atracción que siguen todos los cuerpos con masa, no nos dice nada acerca de las causas ni de la forma en que se produce y manifiesta la atracción gravitatoria. Sobre ello se ha especulado mucho antes y después de la aparición de la ley, pero en la actualidad continúa siendo la única interacción fundamental sobre la que no disponemos de una teoría completa demostrada experimentalmente (las partículas de intercambio, los gravitones, aún no han sido detectadas). La teoría general de la relatividad interpreta la gravitación como una propiedad intrínseca del espacio-tiempo, su curvatura. Allá donde existen campos gravitatorios intensos el espacio-tiempo adquiere una gran curvatura, mientras que ésta es nula en el espacio libre, a grandes distancias de cualquier masa.

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

Matemáticamente, el módulo de la fuerza que actúa sobre una masa m debido a la atracción que ejerce sobre ella una masa M viene dada por

$$F = G\frac{Mm}{r^2} \tag{4.14}$$

siendo r la distancia entre ambas masas y G la constante de gravitación universal, de idéntico valor para cualesquiera dos masas que se atraigan, cuyo valor es

$$G = (6.674 \pm 0.001)\cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3{\cdot}kg^{-1}{\cdot}s^{-2}}$$

La medida de la constante de gravitación planteó muchos problemas. Los experimentos que podemos realizar en el laboratorio, con masas pequeñas, van a producir fuerzas de atracción entre ellas mucho menores que las que ejerce la tierra sobre cada una. En efecto, si colocamos dos esferas de 50 kg a una distancia de 10 cm entre sus centros, la fuerza de atracción entre ellas es del orden de

$$F = 1.6{\cdot}10^{-5}\ \mathrm{N}$$

como se puede comprobar fácilmente aplicando [4.14]. La fuerza que ejerce la tierra sobre cada esfera, esto es, su peso es

$$F' = 4.9{\cdot}10^{2}\ \mathrm{N}$$

es decir, siete órdenes de magnitud superior ($F'/F \approx 10^7$). Si queremos realizar un experimento en el laboratorio con objeto de medir G, tendrá que ser muy preciso, ya que si no la medida de F, que es la que nos interesa, quedará apantallada por F'.

El primero en realizar un experimento de este tipo con éxito fue el inglés G. Cavendish, en 1789 (100 años después de la publicación de la ley). Para ello utilizó una balanza de torsión extremadamente sensible, similar a la empleada por Ch. Coulomb en 1784 para verificar la ley de fuerzas entre cargas eléctricas en reposo.

La Fig. 4.5 muestra el esquema del experimento. Dos bolas de plomo, de masa m cada una, se colocan en los extremos de una balanza de torsión. Se acercan dos esferas grandes de plomo, de masa M, como se indica en la figura. La varilla que une las dos masas m gira un ángulo por efecto del par de fuerzas aplicado. La medida del ángulo de torsión sirve para determinar el par y la fuerza F. Conocidos F, M, m y la distancia entre las masas M y m, mediante la ecuación [4.14] se puede determinar G. El valor de la constante de gravitación obtenido por Cavendish en este experimento fue

$$G = (6.60 \pm 0.04)\cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3{\cdot}kg^{-1}{\cdot}s^{-2}}$$

que, como se ve, es una muy buena aproximación del valor de G que se citó antes, obtenido recientemente con experimentos más precisos. Los ensayos de Cavendish sirvieron para medir el valor de G, pero también demostraron experimentalmente la universalidad de la ley de gravitación.

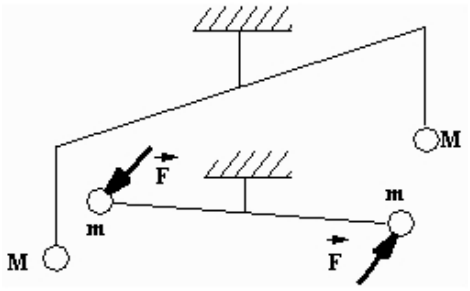


Figura 4.5: Balanza de torsión de Cavendish.

La ecuación [4.14] proporciona el módulo de la fuerza gravitatoria. Para obtener una expresión más completa, consideremos dos masas m_1 y m_2 separadas entre sí por una distancia $r_{12} = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$, según se indica en la Fig. 4.6 en la que no se dibuja el vector de posición relativa de la masa m_2 respecto a la m_1, $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, para que se pueda apreciar más claramente el par de acción y reacción: $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$, que representa la interacción gravitatoria a distancia entre ambas masas.

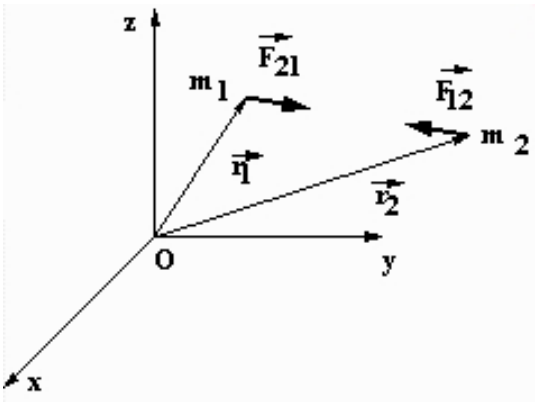


Figura 4.6: Interacción gravitatoria entre dos masas.

La expresión matemática completa de tal interacción viene dada por

$$\vec{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^3}\vec{r}_{12} = -\vec{F}_{21} \tag{4.15}$$

que cumple todas las propiedades exigidas a la interacción gravitatoria entre dos masas en una única ecuación.

Podemos utilizar un enfoque diferente al de la ecuación [4.15] para representar la interacción gravitatoria, que consiste en definir el campo gravitatorio. Toda masa perturba de alguna forma el espacio que la rodea. Las propiedades del espacio son diferentes en las inmediaciones de una masa, ya que en este caso aparecen fuerzas de atracción sobre otras masas presentes, que no existen en el espacio vacío lejos de cualquier masa (en este caso el espacio es "neutro" y no aparece ninguna acción sobre una masa que coloquemos en un punto cualquiera). Para definir una magnitud, el campo gravitatorio, que mida tal perturbación, consideremos una masa M situada en reposo en algún punto del espacio. Situemos un sistema de referencia inercial con

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

origen O en el punto que ocupa M (esta imposición la hacemos para simplificar la definición). Imaginemos una masa "prueba" m, pequeña, situada en un punto P a una distancia r de O (Fig. 4.7).

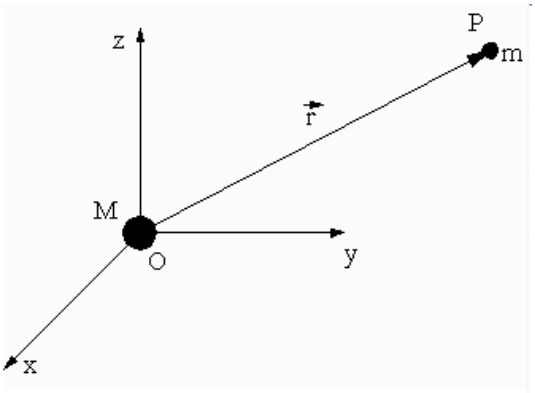


Figura 4.7: Masa m en el campo gravitatorio de otra masa M.

La fuerza gravitatoria que actúa sobre m viene dada por

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^3}\vec{r}$$

y definimos el campo gravitatorio creado por la masa M en el punto P como:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -G\frac{M}{r^3}\vec{r} \tag{4.16}$$

que representa la fuerza que aparecería sobre una masa unidad situada en el punto P debida a la atracción que ejercería sobre ella la masa M.

La definición anterior se puede generalizar al caso del campo gravitatorio creado por un número cualquiera de masas, mediante el principio de superposición. Sea un sistema de referencia $OXYZ$ y un conjunto N de masas $\{m_i\}_N$ cuyos vectores de posición respectivos denotaremos por $\vec{r}_i$. El campo gravitatorio total en el punto P de vector de posición $\vec{r}_P$ viene dado por:

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + ... + \vec{g}_N = \sum_{i=1}^{N} -G\frac{m_i}{r_{Pi}^3}\vec{r}_{Pi} \tag{4.17}$$

siendo $\vec{r}_{Pi} = \vec{r}_i - \vec{r}_P$ el vector de posición relativa de m_i respecto al punto P y r_{Pi} su módulo.

El campo gravitatorio creado por una masa M es un campo vectorial central, radial y potencial (o conservativo). Además, si consideramos la masa en reposo respecto a un sistema de referencia inercial el campo es estacionario (no depende del tiempo).

Que el campo es central quiere decir que las líneas de acción de todos los vectores campo pasan por el punto O que ocupa la masa M (centro del campo, Fig. 4.7) y que es radial significa que el módulo del campo toma el mismo valor en cualquier punto de una superficie esférica de radio r y centro O, es decir, que el módulo del campo solo depende de la coordenada radial r.

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

Ambas cosas se pueden expresar escribiendo la ecuación [4.16] como:

$$\vec{g} = -G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r \quad \text{con} \quad \vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{r} \quad \text{y} \quad |\vec{g}| = G\frac{M}{r^2}$$

El campo gravitatorio es conservativo. Este tipo de campos se caracterizan porque verifican que su rotacional es cero, es decir,

$$\text{rot } \vec{g} = 0$$

como se puede comprobar calculando dicho operador sobre el campo dado por [4.16] escrito en la forma:

$$\vec{g} = g_x\vec{i} + g_y\vec{j} + g_z\vec{k} = -G\frac{M}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$$

y siendo la expresión del operador rotacional en coordenadas cartesianas la siguiente:

$$\text{rot } \vec{g} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ g_x & g_y & g_z \end{vmatrix}.$$

En consecuencia, para un campo conservativo existe un potencial gravitatorio V_g relacionado con el campo por la expresión:

$$\vec{g} = -\text{grad } V_g$$

que, dado que el campo es radial, se puede escribir como

$$\vec{g} = -\frac{\partial V_g}{\partial x}\,\vec{i} - \frac{\partial V_g}{\partial y}\,\vec{j} - \frac{\partial V_g}{\partial z}\,\vec{k} = -\frac{dV_g}{dr}\,\vec{u}_r$$

y conduce de forma inmediata a

$$V_g = -G\frac{M}{r}$$

con la referencia de $V_g\ (r \to\ \infty) = 0$. La energía potencial asociada a una masa m situada en este campo gravitatorio viene dada por $E_p = m\ V_g$. Sobre este tema insistiremos más adelante en el apartado 4.10.4.

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

Masa inercial y masa gravitatoria

Hasta ahora hemos estado utilizando dos conceptos diferentes de masa que no tienen por qué coincidir en principio. Por una parte está la masa inercial, que llamaremos m_i en este apartado, que representa el coeficiente de la aceleración de respuesta de una partícula a una fuerza aplicada (ecuación [4.1]). Por otra, la masa gravitatoria, m_g, que representa la propiedad básica de todos los cuerpos capaces de interaccionar gravitatoriamente, lo que se traduce en el campo gravitatorio que crean (ecuación [4.16]).

Se ha demostrado experimentalmente que, con un grado alto de precisión, ambas masas son proporcionales. Para un mismo objeto, capaz de reaccionar con una masa inercial m_i ante una fuerza cualquiera aplicada y de interaccionar gravitatoriamente siendo su masa gravitatoria m_g, existe un escalar k tal que

$$k = \frac{m_g}{m_i}$$

y que vale lo mismo para todos los cuerpos. Dado el carácter universal de las leyes que hemos empleado en el planteamiento, es sencillo hacer k=1 sin más que elegir adecuadamente las unidades en que expresemos m_g. De hecho, esto va implícito en el valor de G que dimos y, en consecuencia, podemos afirmar que la masa inercial y la masa gravitatoria son equivalentes ($m_i = m_g = m$). En lo sucesivo consideraremos que existe únicamente un tipo de masa.

La igualdad entre masas inercial y gravitatoria nos permite, por ejemplo, medir masas mediante la balanza (la balanza no mide masas directamente, sino que compara pesos).

Campo gravitatorio terrestre

Denotaremos el campo gravitatorio creado por la tierra como $\vec{g}_T$. Está dado por

$$\vec{g}_T = -G\frac{M_T}{r^3}\vec{r} \tag{4.18}$$

y su módulo vale

$$g_T = G\frac{M_T}{r^2} \tag{4.19}$$

donde $M_T = 5.98{\cdot}10^{24}$ kg es la masa de la tierra y r representa la distancia a su centro de masas.

El campo gravitatorio, en particular $\vec{g}_T$, tiene dimensiones de aceleración

$$[g] = \mathrm{L\ T^{-2}}$$

En las proximidades de la superficie de la tierra y siempre que consideremos una región de dimensiones no demasiado grandes, podemos aceptar que la dirección de $\vec{g}_T$ es perpendicular a la superficie de la tierra y constituye un campo vectorial uniforme en tal región y que su valor está dado por

$$g_0 = G\frac{M_T}{R_T^2} = 9.81\ ms^{-2}$$

donde $R_T = 6.37{\cdot}10^6$ m es el radio medio de la tierra (se recomienda hacer el cálculo anterior con los datos indicados y comprobar si el resultado está expresado con una aproximación correcta). En realidad, g_0 varía con diversos factores, como la latitud o la altura a la que nos encontremos con respecto a la superficie del mar, pero en muchas ocasiones tales variaciones son despreciables. Cuando no existe problema de confusión a este valor se le denomina simplemente g.

Cualquier objeto situado en las proximidades de la superficie de la tierra es atraído por ella con una fuerza que denominaremos peso $\vec{P}$, de valor

$$\vec{P} = m\vec{g}_0 = m\vec{g} \tag{4.20}$$

La expresión anterior permite definir la unidad de fuerza del sistema técnico, el kilogramo fuerza (kgf) como la fuerza con que la tierra atrae a una masa de 1 kg, al nivel del mar y a 45º de latitud. Como es fácil ver, en tal definición está implícita la identidad entre masa inercial y masa gravitatoria.

El valor del campo de gravedad terrestre varía con el inverso del cuadrado de la distancia. En la luna, situada a una distancia $r = 60\ R_T$, la aceleración de la gravedad debida a la tierra vale

$$g_L = G\frac{M_T}{r^2} = G\frac{M_T}{(60R_T)^2} = \frac{g_0}{60^2} = 0.0027\ \mathrm{ms}^{-2}$$

Podemos utilizar este valor para comprobar la forma de la ley de gravitación universal con argumentos similares en algunos aspectos a los empleados por Newton.

Supongamos que la órbita de la luna es circular, con periodo $T = 27.3$ días y de radio r. Para seguir esta órbita, debe de estar sometida a una aceleración centrípeta:

$$a_L = \omega^2 r = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r = 0.0027\ \mathrm{ms}^{-2}$$

que es igual al valor de g_L obtenido bajo la suposición de que la fuerza de atracción gravitatoria varía con el inverso del cuadrado de la distancia, luego tal ley se cumple para la luna. La genialidad de Newton consistió en darse cuenta de que es una ley universal: se cumple para cualesquiera dos objetos con masa.

4.3.3. Electromagnetismo

De las dos interacciones fundamentales que se manifiestan a escala macroscópica una de ellas, la gravitatoria, admite ser expresada mediante una ley matemática simple, como hemos visto. No ocurre lo mismo con el electromagnetismo. La interacción electromagnética, cuyo origen se basa en la carga eléctrica, se manifiesta de formas diferentes según sea la situación de

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

movimiento relativo de las cargas que la crean. En general no existe una ley única tan sencilla como la ley de gravitación universal para expresar las fuerzas electromagnéticas. Algunos de los aspectos más simples de esta interacción se estudiarán en electrostática y magnetostática.

Normalmente estudiaremos el movimiento de una partícula material en las proximidades de la tierra. En estas condiciones actúa sobre ella una única fuerza gravitatoria importante, el peso, que refleja su interacción con la tierra (las interacciones gravitatorias con otras masas próximas, relativamente pequeñas, serán despreciables). El resto de las fuerzas que actúen sobre nuestra partícula serán de origen electromagnético necesariamente (a escala macroscópica, toda interacción que no sea de tipo gravitatorio deberá ser electromagnética).

Así pues, las tensiones ejercidas por cables, las fuerzas elásticas de los muelles, las fuerzas de reacción en apoyos, el rozamiento, etc., son fuerzas de origen electromagnético. Todas las mencionadas se deben a las propiedades del estado sólido, que tienen su origen en los distintos tipos de enlace que se dan entre moléculas de sólidos. Ahora bien, sea cual sea la clase de enlace, siempre tendrá un origen en la interacción electromagnética entre las cargas de las partículas subatómicas.

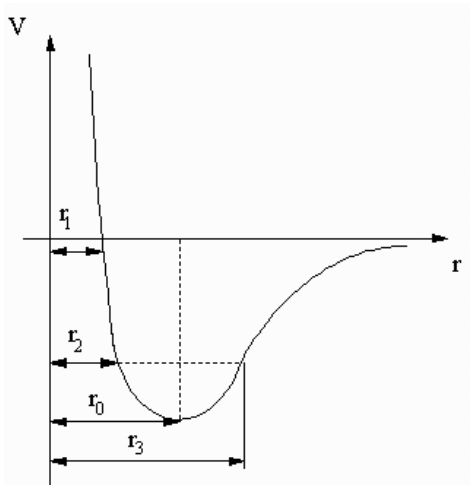


Figura 4.8: Energía potencial de interacción entre dos moléculas de un sólido.

Las moléculas de los sólidos permanecen rígidamente unidas entre sí por enlaces de tipo iónico (heteropolar), covalente (homopolar), de Van der Waals o por enlace metálico, esencialmente. Todos estos enlaces tienen su origen en las propiedades electromagnéticas de las moléculas constitutivas de los sólidos. La Fig. 4.8 muestra analíticamente la forma de la energía potencial típica de interacción entre dos moléculas de un sólido en función de la distancia r entre ambas (la fuerza de interacción viene dada por $F(r) = -dV(r)/dr$).

La distancia r_0 corresponde a la posición de equilibrio (mínima energía potencial), aunque hay que tener en cuenta que no existe ninguna posición en la que las moléculas estén en reposo. Siempre tienen un movimiento de vibración como el que se indica, para un nivel de energía determinado, entre las posiciones r_2 y r_3. Tal estado de vibración aumenta con la temperatura. Si ésta crece mucho, la separación entre moléculas crece, la energía de ligadura se hace muy pequeña (valor asintótico para r muy grande), los enlaces se debilitan y el sólido se "funde".

Por otra parte, el enlace se opone a distancias muy pequeñas entre moléculas. Para $r<r_1$ la

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

energía potencial es positiva, es decir, el enlace se hace repulsivo. Si pretendemos comprimir el sólido llega un momento en que aparecen fuerzas de repulsión muy altas que se oponen a ello.

Además, el comportamiento de la función potencial en torno a r_1 permite dar una explicación, siempre cualitativa, a las propiedades elásticas de los sólidos. Si observamos la figura se aprecia que $V(r)$ es aproximadamente recta en torno al valor r_1. En tal zona la respuesta de un sólido a un esfuerzo de tracción o compresión se manifiesta linealmente mediante una deformación directamente proporcional al esfuerzo aplicado (ley de Hooke).

Las distancias r_1 y r_0 varían de unos sólidos a otros, pero son del orden de 0.1 nm para r_1 y de 0.2 a 0.3 nm para r_0.

4.4. Fuerzas de reacción en apoyos. Rozamiento

4.4.1. Ligaduras

En el caso general, la descripción del movimiento de una partícula en el espacio requiere el empleo de tres coordenadas (cartesianas, como son las tres componentes del vector de posición en un triedro de referencia ortogonal, o de otro tipo). En muchos casos el movimiento de una partícula puede verse sometido a una serie de restricciones que llamaremos ligaduras y que hacen que necesitemos únicamente dos, una o ninguna coordenadas independientes para describirlo. Al número de coordenadas independientes necesarias para la descripción del movimiento de una partícula se le llama grados de libertad. Se cumple g=n-l, donde g representa el número de grados de libertad, n el número de coordenadas necesarias en el caso general (n=3 para una única partícula) y l es el número de ligaduras a que se encuentra sometido el sistema.

En los problemas que nos interesan las ligaduras vendrán impuestas o por las condiciones iniciales más las fuerzas aplicadas, o por las condiciones de contorno y siempre podrán traducirse en ecuaciones matemáticas, tantas como ligaduras existan (l=1, 2 o 3 para una partícula material). Para ilustrar esto vamos a ver algunos ejemplos.

a) l=1. Movimiento de una partícula sobre una superficie.

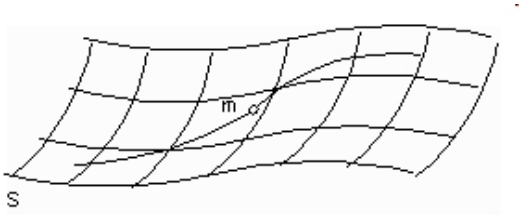


Figura 4.9: Partícula sobre una superficie.

Consideremos una partícula de masa m que describe una cierta trayectoria, apoyada sobre una superficie S sin perder el contacto con ella (Fig. 4.9). La superficie viene representada por una cierta ecuación $f(x, y, z) = 0$ e implica una condición de contorno impuesta a la partícula. En la práctica y para el tipo de problemas que trataremos una ligadura como ésta representa en general el contacto entre la partícula material y una superficie sólida de apoyo y supone una

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

interacción por contacto entre estos dos sistemas, susceptible de ser representada mediante un par de acción y reacción.

No siempre es así. Consideremos una partícula material sometida únicamente a su peso y cuyas condiciones iniciales de movimiento vienen dadas por $\vec{r}_0$ y $\vec{v}_0$ ($\vec{r}_0 = \vec{r}(t=0)$ y $\vec{v}_0$=$\vec{v}(t$=0)).

El movimiento en este caso se produce en el plano vertical a la superficie terrestre (que contenga a $\vec{g}$) y que contiene al vector velocidad inicial $\vec{v}_0$ y al punto donde se encontraba la partícula en el instante inicial (extremo del vector $\vec{r}_0$). Este plano vendrá determinado por una ecuación $h(x,\ y,\ z)$=0 y supone una ligadura que, como es claro, no tiene su origen en ninguna condición de contorno, sino en la forma de la fuerza aplicada y de las condiciones iniciales.

En los dos casos anteriores el número de grados de libertad es g=n-l=3-1=2.

b) l=2. Movimiento sobre una línea.

Una partícula material que se mueve sobre una línea fija está sometida a dos ligaduras representadas por las ecuaciones que determinan la curva en el espacio:

$$f(x,\ y,\ z) = 0$$

$$h(x,\ y,\ z) = 0$$

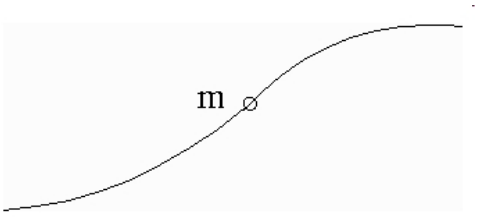


Figura 4.10: Partícula en una curva.

En general tal situación representará una interacción por contacto entre la partícula y una línea sólida y rígida (por ejemplo, una cuenta de collar que se mueve a lo largo de un alambre rígido). En algunos casos puede provenir de una situación impuesta por condiciones iniciales y fuerzas (por ejemplo, el movimiento circular de la luna en torno a la tierra). En cualquier caso, el número de grados de libertad es g=3-2=1.

c) l=3. Reposo.

Una partícula sometida a tres ligaduras no posee ningún grado de libertad (g=3-3=0). Sus coordenadas están perfectamente determinadas por las tres ecuaciones de ligadura (x=*cte*; y=*cte*; z=*cte*) y la partícula se encuentra en reposo.

4.4.2. Fuerzas de reacción en apoyos

Las fuerzas de reacción en apoyos son de gran importancia en el estudio de la mecánica aplicada y tienen su origen en la interacción por contacto que aparece en algunos tipos de ligadura.

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

Consideremos una partícula material que apoya sobre una superficie sólida (Fig. 4.11). Sea τ el plano tangente a la superficie en el punto que ocupa la partícula.

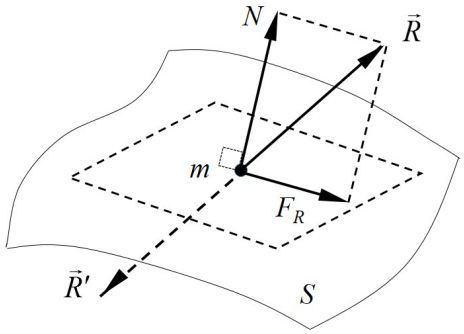


Figura 4.11: Fuerzas de reacción para una partícula sobre un plano.

La interacción entre partícula y superficie de apoyo se manifiesta mediante un par de acción y reacción con origen en la interacción electromagnética. Llamaremos $\vec{R}$ a la reacción que actúa sobre m procedente de la superficie (sobre ésta actúa una "acción" $\vec{R}' = -\vec{R}$ procedente de la partícula). Como consideramos la superficie fija y nos ocupamos del movimiento de la partícula material, solo nos interesa la reacción $\vec{R}$.

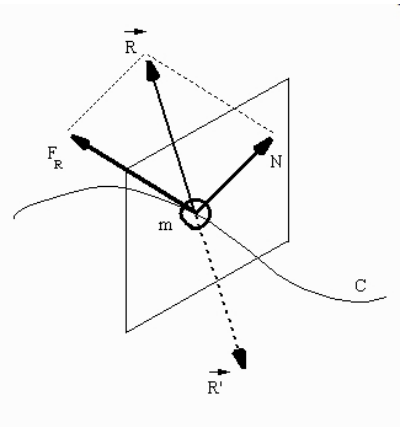


Figura 4.12: Fuerzas de reacción para una partícula en una curva.

Para facilitar el análisis del problema se suele descomponer la reacción $\vec{R}$ en dos componentes, una perpendicular a la superficie, que llamaremos componente normal N (a veces simplemente "normal") y otra contenida en el plano tangente τ, que llamaremos fuerza de rozamiento F_R. Se cumple

$$R = \sqrt{N^2 + F_R^2}$$

En ocasiones la fuerza de rozamiento puede ser nula (o despreciable) con lo que la reacción es únicamente normal, pero nunca puede haber fuerza de rozamiento si la reacción normal es nula (en este último supuesto simplemente no existe interacción entre la partícula y la superficie).

En el caso de interacción entre una partícula material m y una línea rígida C (Fig. 4.12), la situación es análoga. Sobre la partícula actúa una reacción $\vec{R}$, respuesta a la acción $\vec{R}'$ que

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

ella ejerce sobre la línea. La reacción $\vec{R}$ se puede descomponer en una componente normal N, contenida en un plano perpendicular a la línea C y que contenga a m y en una fuerza de rozamiento F_R, tangente a la línea.

4.4.3. Leyes del rozamiento

Existen dos tipos de rozamiento, el rozamiento seco y el rozamiento fluido. Este último se manifiesta entre capas contiguas de fluido que se mueven a diferentes velocidades y es de gran interés para el estudio del movimiento de fluidos y de sólidos en el seno de un fluido o para el análisis de mecanismos lubricados. Este tipo de problemas se estudia en mecánica de fluidos. Solo diremos que la resistencia que opone un medio fluido al movimiento de un sólido se manifiesta mediante fuerzas que dependen de la velocidad relativa del sólido respecto al medio y que su sentido es opuesto al de tal velocidad relativa (en muchas ocasiones el módulo de esta fuerza es directamente proporcional al módulo de la velocidad relativa, para velocidades pequeñas, y en otras es proporcional al cuadrado del módulo de la velocidad relativa, para altas velocidades).

En esta sección nos ocuparemos solo del rozamiento seco producido por la fricción entre dos sólidos, que hemos definido anteriormente y que se manifiesta como una componente tangencial a la superficie o la línea de apoyo de la fuerza de reacción que aparece sobre un objeto sólido que apoya sobre ellas (siempre que el plano o la línea tangente estén definidos).

El rozamiento es un fenómeno complejo que afecta a las moléculas y tipos de enlace de los cuerpos en sus superficies de contacto. La naturaleza y condiciones en que se encuentran tales cuerpos pueden ser muy variables y ello hace imposible deducir leyes precisas sobre cómo actúa el rozamiento, a partir de teorías y modelos. Ilustraremos mediante la descripción de un experimento cómo son las leyes básicas del rozamiento, con un planteamiento muy simplificado, pero suficientemente aproximado.

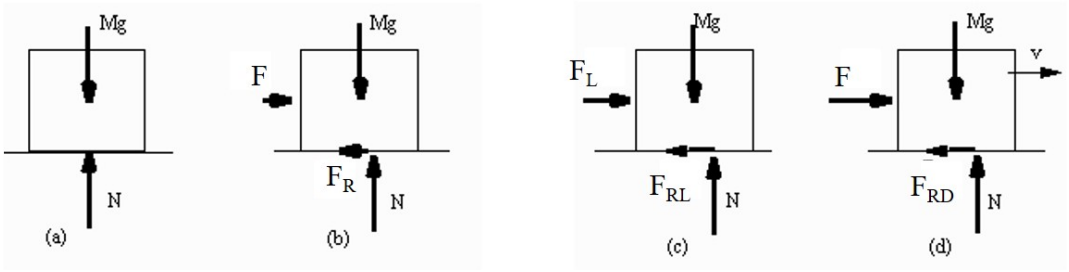


Figura 4.13: Fuerza de rozamiento sobre un bloque en una superficie.

Consideremos un bloque que apoya sobre una superficie horizontal (Fig. 4.13). Inicialmente solo actúa sobre él el peso Mg, aplicado en el centro de masas, y la reacción de la superficie, N, que constituyen un sistema de fuerzas con resultante nula, lo que explica su equilibrio (Fig. 4.13 (a)). Supongamos que se aplica sobre el bloque una fuerza $\vec{F}$ horizontal, cuya línea de acción pase por el centro de masas y cuyo módulo aumente de forma lenta y continua.

La experiencia nos dice que cuando la fuerza $\vec{F}$ es muy pequeña, el bloque se mantiene en equilibrio. Para explicar esto es necesario un diagrama de fuerzas como el indicado en la

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

Fig. 4.13 (b), cuya resultante ha de ser nula. En consecuencia, debe aparecer una fuerza de rozamiento estática -la llamaremos así porque corresponde a una situación de equilibrio- cuyo módulo ha de cumplir $F{=}F_R$. Conforme la fuerza sigue aumentando llegará un momento en que el bloque comience a moverse. En particular, existirá un valor límite F_L para el que aún estaremos en situación estática, pero tal que si se incrementa el valor de la fuerza, $F = F_L + \Delta F$ comenzará el movimiento, sea cual sea el valor de ΔF (Fig. 4.13 (c)). Definimos el coeficiente de rozamiento estático μ_e entre el bloque y la superficie mediante la ecuación

$$F_{RL} = \mu_e N \tag{4.21}$$

donde aún $F_L = F_{RL}$, si bien en situación límite. Lo anterior indica que el módulo de la fuerza de rozamiento estática no puede crecer más allá de F_{RL}, es decir, puede tomar cualquier valor entre

$$0 \leqslant F_R \leqslant \mu_e N \text{ (rozamiento estatico)} \tag{4.22}$$

Nótese que en la expresión anterior F_R es el módulo de la fuerza de rozamiento. Si la fuerza $\vec{F}$ actuase en sentido opuesto al indicado en la figura, también cambiaría el sentido de F_R.

Si aumentamos la fuerza F por encima del valor F_L se comprueba experimentalmente que existe una fuerza de rozamiento dinámica F_{RD} -en este caso la situación es de movimiento relativo del bloque respecto a la superficie- que no varía apreciablemente, en general, al cambiar el valor de F siempre y cuando $F > F_{RD}$ (Fig. 4.13 (d)) y que no es capaz de impedir el movimiento.

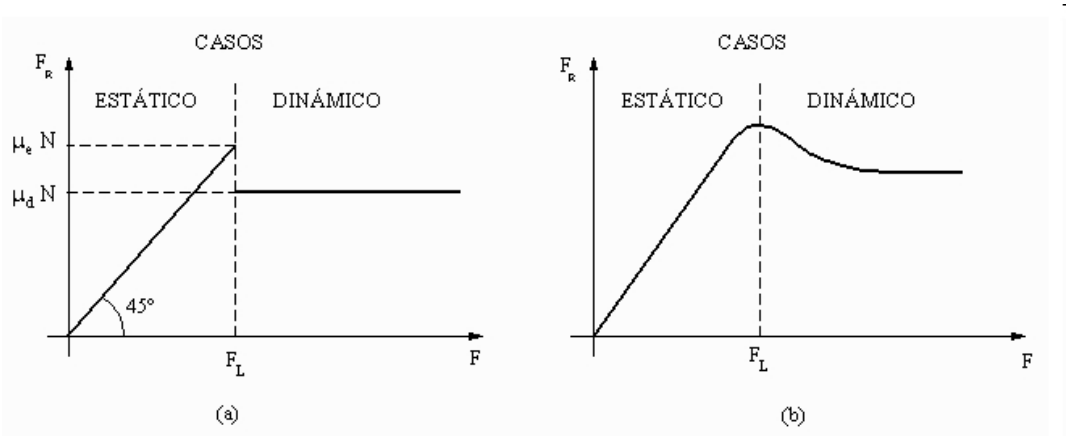


Figura 4.14: Fuerza de rozamiento en función de la fuerza aplicada.

Definimos el coeficiente de rozamiento dinámico μ_d entre el bloque y la superficie mediante

$$F_{RD} = \mu_d N \tag{4.23}$$

Los coeficientes de rozamiento no tienen dimensiones. Se comprueba experimentalmente que $\mu_e \geq \mu_d$. De hecho $\mu_e{>}\mu_d$ para la mayoría de las sustancias. La dependencia de la fuerza de rozamiento con la fuerza exterior aplicada se ilustra más claramente en la Fig. 4.14. En (a) se representa la situación ideal descrita. En (b) se muestra cualitativamente cómo sería la

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

situación real (solo indica que el caso (a) es aproximado y que no se cumple exactamente en algunos aspectos).

Las ecuaciones [4.21], [4.22] y [4.23] que expresan la dependencia de la fuerza de rozamiento con la componente normal de la reacción constituyen las leyes básicas del rozamiento seco (modelo Coulomb-Morin). Además, hay que tener en cuenta que:

- Los coeficientes de rozamiento no dependen del área de la superficie de contacto (la fuerza de rozamiento estática sí puede depender de tal área si consideramos valores poco razonables como, por ejemplo, áreas de contacto tendiendo a cero).
- Los coeficientes de rozamiento dependen sensiblemente de la naturaleza de las superficies de contacto. De hecho, el origen de la fuerza de rozamiento se encuentra en los tipos de moléculas y de enlaces de los sólidos en contacto e, incluso, de las impurezas características (óxidos, etc.) que se forman en las superficies exteriores de los sólidos.
- La forma de las superficies de contacto, a escala microscópica, tiene gran importancia en el rozamiento (no existen superficies reales perfectamente lisas). Toda superficie real presenta, por muy bien pulida que aparentemente esté, protuberancias y valles microscópicos que, cuando se manifiesta una fricción con otro sólido similar, producen roturas y pequeñas soldaduras entre ambas superficies.

En la Tabla 4.2 se indican orientativamente algunos valores aproximados de coeficientes de rozamiento para distintas sustancias.

MATERIALES	μ_e	μ_d
Acero sobre acero	0.75	0.50
Plomo sobre acero	0.95	0.95
Cobre sobre acero	0.50	0.35
Níquel sobre níquel	1.10	0.53
Teflón sobre acero	0.04	0.04
Madera sobre madera	0.25-0.50	0.2-0.4

Tabla 4.2: Coeficientes de rozamiento de diferentes materiales en contacto.

En ocasiones puede ser útil considerar los ángulos de rozamiento θ_e y θ_d, definidos mediante

$$\theta_e = \arctan \mu_e \; ; \quad \theta_d = \arctan \mu_d \tag{4.24}$$

y que toman valores diferentes para cada dos materiales que puedan ponerse en contacto.

Para aclarar su significado, consideremos un plano inclinado cuyo ángulo de inclinación θ puede variar merced a un eje perpendicular al plano de la figura y que pasa por el punto O (Fig. 4.15). Sobre él apoya un bloque de masa M . Existe una inclinación θ_e para la cual el bloque se encuentra en equilibrio límite (iniciaría su movimiento si $\theta = \theta_e + \Delta\theta$, por muy pequeño que fuese $\Delta\theta$). El equilibrio del bloque sobre el plano está permitido para todo θ que cumpla

$$-\theta_e \leq \theta \leq \theta_e$$

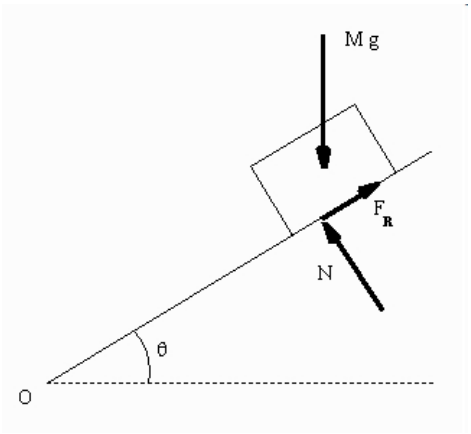


Figura 4.15: Bloque sobre plano inclinado y ángulo de inclinación θ.

Aplicando en la situación límite θ_e que la resultante de las fuerzas que actúan sobre el bloque (peso y reacción) ha de ser nula y la ecuación [4.21] de situación estática límite, obtenemos el sistema de ecuaciones

$$Mg \sin\theta = F_{RL}$$
$$N = Mg \cos\theta$$
$$F_{RL} = \mu_e N$$

cuya solución es

$$\tan\theta_e = \mu_e$$

El ángulo θ_e representa la máxima inclinación del plano compatible con el equilibrio de un objeto situado sobre él.

Si aumentamos la inclinación ($\theta > \theta_e$) el bloque comenzará a moverse a lo largo del plano con movimiento acelerado. Para conseguir que, una vez iniciado el movimiento, sea rectilíneo y uniforme deberemos reducir la inclinación del plano hasta un valor $\theta_d \leq \theta_e$ (según los casos, pero en general $\theta_d < \theta_e$). En tal situación de movimiento rectilíneo uniforme la resultante de las dos fuerzas que actúan sobre el bloque también ha de ser nula y, con un razonamiento similar al utilizado para θ_e pero empleando ahora la ecuación [4.23], obtenemos

$$\tan\theta_d = \mu_d$$

El ángulo θ_d representa la inclinación necesaria para que el bloque pueda moverse en línea recta y a velocidad constante a lo largo del plano.

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

4.5. Método de aplicación de las Leyes de la Dinámica

4.5.1. El diagrama de fuerzas que actúan sobre una partícula material

Para resolver un problema de dinámica, la primera condición necesaria consiste en definir con precisión el **sistema de referencia inercial** que se va a utilizar para representar el movimiento de la partícula. Solo si el sistema es inercial podremos aplicar en él las leyes de la dinámica que hemos expuesto.

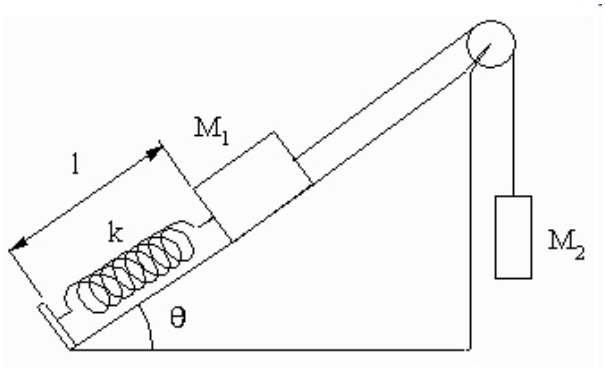


Figura 4.16: Sistema dinámico de dos partículas.

A continuación, es necesario analizar, y ser capaces de describir matemáticamente, el conjunto de las fuerzas que actúan sobre la partícula. En la gran mayoría de las ocasiones conviene representarlas gráficamente mediante un **diagrama de fuerzas**.

Como ejemplo de ello (Fig. 4.16) analizaremos los diagramas de fuerzas para dos partículas: M_1 que apoya sobre un plano inclinado fijo y que está unida a él mediante un muelle ideal de constante k y longitud natural l_0, y M_2, que está unida a M_1 mediante un hilo que pasa por una polea unida al plano inclinado (ambos, hilo y polea, son ideales).

En la Fig. 4.17 (a) y (b), se muestran los diagramas de fuerzas para cada partícula y los sistemas de referencia inerciales, fijos respecto al plano inclinado que se pueden utilizar para describir el movimiento de cada partícula (evidentemente hay otras opciones posibles).

Sobre M_1 actúan cuatro fuerzas:

- El peso $M_1 g$, que representa la interacción con el campo de gravedad terrestre.
- La reacción en el apoyo, $\vec{R}$, que representa la interacción por contacto con el plano inclinado, y que se ha descompuesto en sus dos componentes N y F_R. En principio, como no sabemos si el bloque M_1 se va a mover o va a permanecer en equilibrio, hemos representado la fuerza de rozamiento estática F_R, que implicaría componentes en el eje OX_1 de la aceleración y velocidad nulas ($a_1 = 0$ y $v_1 = 0$). Este supuesto plantea en general dos incógnitas al problema, N y F_R. Si el bloque M_1 se mueve, $a_1 \neq 0$, entonces habría que sustituir F_R por la fuerza de rozamiento dinámica de valor $\mu_d N$, y de sentido

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

opuesto a la velocidad v_1 de M_1 si $v_1 \neq 0$ y de sentido opuesto a la aceleración a_1 si $v_1 = 0$. En este supuesto tendríamos también dos incógnitas, N y a_1.

- La tensión del hilo, T, que representa la interacción de M_1 con el hilo. Un hilo ideal es una aproximación de hilos o cables reales, suficientemente buena en muchos casos. El hilo ideal tiene masa nula y es inextensible, lo que implica que la tensión a que está sometido vale lo mismo en todos sus puntos. T representa una incógnita al problema, en el caso general.

- La fuerza elástica del muelle, $k\delta$ (con $\delta = l\text{-}l_0$, que es la elongación del muelle), representa la interacción con el muelle. El sentido mostrado en la figura corresponde a un alargamiento del muelle, pero podría ser el opuesto correspondiente a una compresión o acortamiento. Un muelle ideal se caracteriza por tener masa nula y es una aproximación bastante buena de muelles reales en muchos casos. Los muelles ideales crean fuerzas elásticas dependientes linealmente de la elongación δ, del tipo $F\text{=-}k\delta$ (con $\delta>0$ si la elongación es positiva, alargamiento, y $\delta<0$ si la elongación es negativa, compresión). El signo negativo indica que el muelle, y por tanto, su fuerza se opone a ser deformado.

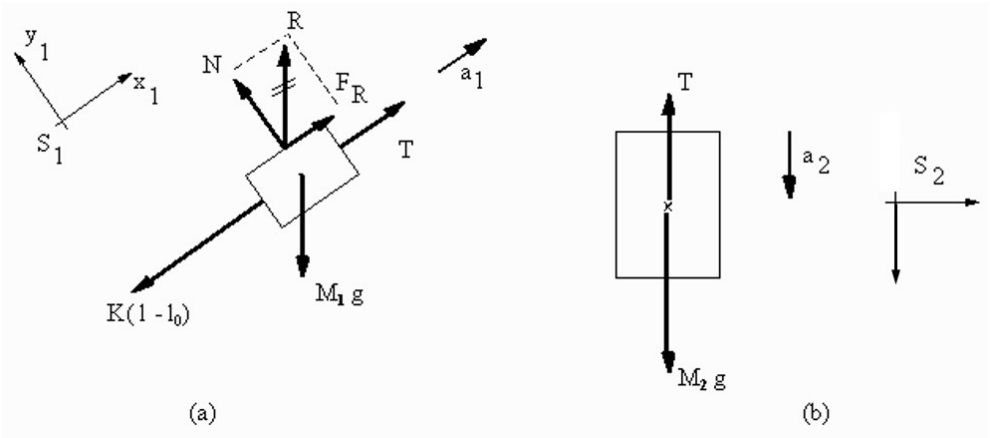


Figura 4.17: Diagrama de fuerzas sobre las partículas.

Un sistema de referencia inercial adecuado para estudiar el comportamiento de M_1 es el S_1 mostrado en la figura, fijo respecto al plano inclinado y con el plano $O_1X_1Z_1$ paralelo al mismo.

Sobre M_2 actúan dos fuerzas:

- El peso M_2g que representa la interacción gravitatoria con la tierra.

- La tensión T, que representa la interacción con el hilo. Al ser este ideal, la tensión tiene el mismo valor que la que actúa sobre M_1.

En la figura se muestra un sistema inercial S_2, fijo respecto al plano inclinado, adecuado para describir el movimiento de M_2.

Además, y para completar el análisis, hay que tener en cuenta que ambas masas están conectadas mediante el hilo a través de una polea ideal (de masa nula y sin que existan pares de rozamiento en su eje de rotación).

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

Del hecho de que hilo y polea sean ideales se deduce que ambas aceleraciones han de ser iguales, $a_1 = a_2$, siempre que el hilo esté tenso ($T>0$).

Se podrían considerar otras posibles interacciones para M_1 y M_2, como por ejemplo, interacciones gravitatorias con otros objetos próximos o entre sí o la resistencia que ejerce el aire sobre cada bloque, suponiendo que se muevan. Consideraremos que, en este caso, efectos como los indicados son despreciables, es decir, de orden de magnitud inferior a los efectos que hemos tenido en cuenta. De hecho, al considerar muelles, hilos y poleas ideales ya hemos supuesto implícitamente ciertas aproximaciones (objetos ideales de este tipo no existen en la práctica, estrictamente). El ejemplo expuesto nos sirve para definir estos objetos ideales que aparecen frecuentemente en la resolución de problemas de mecánica.

Además de los tipos de fuerzas indicados en el ejemplo, nos podemos encontrar con otros casos, teóricos o prácticos. En el supuesto más general, las fuerzas $\vec{F}$ pueden depender de las coordenadas del punto (x, y, z) donde están aplicadas, de las primeras derivadas (v_x, v_y, v_z) de las coordenadas del punto respecto al tiempo y del tiempo t. Tal dependencia general se puede expresar resumidamente como

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) \tag{4.25}$$

Toda fuerza que cumpla las condiciones anteriores puede ser objeto de tratamiento para la resolución de un problema dinámico.

4.5.2. Ecuaciones de la dinámica de la partícula material

Una vez que hemos definido un sistema de referencia inercial y que conocemos todas las fuerzas importantes que se manifiestan en el problema, el siguiente paso para su resolución consiste en plantear las ecuaciones de la dinámica de la partícula material [4.1], que se pueden escribir como

$$\vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \tag{4.26}$$

para una partícula material de masa fija m y siendo $\vec{r}$ su vector de posición respecto a nuestro sistema inercial.

En el caso más general, la ecuación vectorial [4.26] equivale a un sistema de tres ecuaciones diferenciales escalares de segundo orden. Cada una de ellas representa la proyección de la ecuación vectorial sobre los ejes del sistema de referencia, es decir,

$$\begin{aligned} F_x(\vec{r}, \vec{v}, t) &= m\frac{d^2x}{dt^2} \\ F_y(\vec{r}, \vec{v}, t) &= m\frac{d^2y}{dt^2} \\ F_z(\vec{r}, \vec{v}, t) &= m\frac{d^2z}{dt^2} \end{aligned} \tag{4.27}$$

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

El sistema de ecuaciones [4.27] admite un conjunto de infinitas soluciones ($x(t)$, $y(t)$, $z(t)$) o, lo que es lo mismo, todas las posibles soluciones vectoriales

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

correspondientes a cualquier partícula de masa m sometida a la fuerza resultante $\vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$ que aparece en [4.26], sean cuales sean las **condiciones iniciales** en que se encontraba la partícula.

Esto quiere decir que si $\vec{r}(t)$ es solución de [4.26], también lo es cualquier $\vec{r}'(t)$ dado por

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}(t) + \vec{A}t + \vec{B} \tag{4.28}$$

siendo $\vec{A}$ y $\vec{B}$ dos vectores constantes cualesquiera (se puede comprobar fácilmente sin más que sustituir $\vec{r}$ por $\vec{r}'$ en [4.26]).

Para determinar la solución precisa a un problema concreto necesitamos conocer las condiciones iniciales en que se encuentra la partícula. Tales condiciones consisten en los valores del vector de posición y del vector velocidad de la partícula en un cierto instante, que en general no hay inconveniente en considerar como el instante inicial (t=0).

Las condiciones iniciales vienen dadas por

$$\vec{r}_0 = \vec{r}\,(t=0)\,; \quad \vec{v}_0 = \vec{v}\,(t=0) \tag{4.29}$$

es decir, dos datos vectoriales o, equivalentemente por seis datos escalares, en el caso general,

$$\vec{r}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}; \quad \vec{v}_0 = v_{0x}\vec{i} + v_{0y}\vec{j} + v_{0z}\vec{k}$$

y permiten determinar los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ que aparecen en [4.28], determinando unívocamente la solución al problema (se propone como ejercicio comprobar que $\vec{A} = \vec{0}$ y $\vec{B} = \vec{0}$ si $\vec{r}$ y $\vec{r}'$ están referidos al mismo sistema inercial y definidos por las mismas condiciones iniciales).

4.5.3. Resolución de las ecuaciones de la dinámica de la partícula material

La resolución de un problema de dinámica de la partícula material requiere como datos la función fuerza resultante $\vec{F}(\vec{r}, \vec{v}; t)$ que actúa sobre la partícula y las condiciones iniciales $\vec{r}_0$ y $\vec{v}_0$, todo ello representado en un sistema inercial. A partir de estos datos, la evolución de la partícula queda completamente determinada por la ecuación [4.26] y se obtienen como resultados el vector de posición $\vec{r}(t)$ y el vector velocidad $\vec{v}(t)$ en cualquier instante posterior (o anterior) en tal sistema de referencia y siempre que no cambie la forma de la función fuerza empleada.

Lo anterior es aplicable a cualquier sistema físico, ya que es posible, en principio, reducir todo sistema a un conjunto de partículas, cada una de las cuales verifique lo expuesto.

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

En este sentido se dice que la mecánica clásica es determinista. La evolución de cualquier sistema está aparentemente determinada por las fuerzas aplicadas y por las condiciones iniciales de forma que, conocido todo ello, el sistema pierde toda libertad de evolución y se tiene que ajustar a una solución dada. Sin embargo las cosas no son tan sencillas como parece deducirse de lo expuesto. La realidad es bastante más complicada debido a diferentes causas.

Por una parte, aun suponiendo un conocimiento todo lo preciso que queramos de la fuerza y de las condiciones iniciales, no siempre es posible en la práctica obtener una solución analítica de la ecuación [4.26]. Es más, en general es imposible, salvo en algunos casos simples.

Si no podemos obtener una solución analítica siempre será posible atacar la ecuación [4.26] numéricamente a partir de las condiciones iniciales y siempre que el sistema no sea demasiado complejo (los ordenadores son cada vez más accesibles, rápidos y capaces).

A partir de las condiciones iniciales $\vec{r}_0$ y $\vec{v}_0$ podemos obtener numéricamente la solución de un problema dinámico mediante un esquema discreto de integración, como por ejemplo:

$$\vec{r}\,(t_0+\Delta t) \simeq \vec{r}\,(t_0) + \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{t_0}\Delta t + ...$$
$$\vec{v}\,(t_0+\Delta t) \simeq \vec{v}\,(t_0) + \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{t_0}\Delta t + ...$$

por desarrollo en serie de $\vec{r}$ y $\vec{v}$.

Eligiendo Δt lo suficientemente pequeño (según la precisión necesaria) y cortando los desarrollos en el segundo término, podemos escribir las ecuaciones anteriores como

$$\vec{r}\,(t_0+\Delta t) \simeq \vec{r}_0 + \vec{v}_0\Delta t$$
$$\vec{v}\,(t_0+\Delta t) \simeq \vec{v}_0 + \frac{1}{m}\vec{F}(\vec{r}_0,\vec{v}_0,t_0)\Delta t$$

y obtenemos la solución aproximada dejando trabajar al ordenador mediante un programa iterativo, hasta el instante que nos interese.

Hay ocasiones, incluso en sistemas aparentemente simples, en que el método anterior plantea problemas. Según sea la forma de la función fuerza $\vec{F}$ la ecuación [4.26] puede ser estable o inestable. Para una ecuación estable, dos soluciones que difieran poco en sus condiciones iniciales se separan poco a lo largo de su evolución, lo que es una garantía de que los pequeños errores no van a ser excesivamente importantes en el transcurso del tiempo.

Una ecuación diferencial inestable es extremadamente sensible incluso a muy pequeños errores en las condiciones iniciales, que se amplifican a lo largo de la evolución y hacen que dos soluciones inicialmente próximas estén, al cabo de un tiempo corto, arbitrariamente separadas. Dado que en la práctica es imposible medir condiciones iniciales sin error, un sistema inestable es en cierto sentido impredecible. El concepto clásico de determinismo pierde generalidad.

Para los fines de este curso, nos interesan ecuaciones que admitan integración analítica simple, es decir, que se puedan resolver con conocimientos básicos de análisis matemático.

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

4.5.4. Casos particulares de resolución de las ecuaciones de la dinámica

Analizaremos algunos casos relativos al movimiento de una partícula de masa m con un único grado de libertad impuesto por las condiciones iniciales y por la fuerza resultante que actúa sobre ella.

Si la partícula se encuentra en el instante inicial en la posición $(x_0, 0)$ y con velocidad $\vec{v}_0 = v_0\vec{i}$ respecto a un sistema de referencia inercial (Fig. 4.18) y aplicamos sobre ella una fuerza $\vec{F}$ de módulo variable pero cuya dirección sea paralela en todo instante a la de la velocidad inicial, $\vec{F} = F\vec{i}$, entonces el movimiento de la partícula será rectilíneo, con un grado de libertad (la posición en cualquier instante t queda totalmente determinada mediante la coordenada $x(t)$ únicamente).

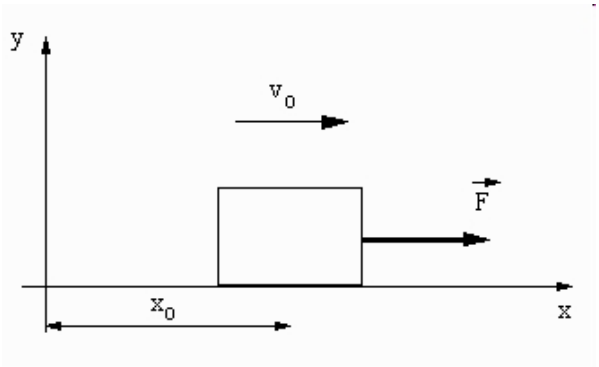


Figura 4.18: Partícula sometida a una fuerza F.

Tomando como datos las condiciones iniciales x_0 y v_0 veremos cómo se aplica el método de resolución de las ecuaciones de la dinámica para distintas posibles dependencias funcionales de la fuerza. En nuestro caso, las ecuaciones [4.27] toman la forma

$$F(x, v, t) = m\frac{d^2x}{dt^2} \tag{4.30}$$

donde F es la proyección de $\vec{F}$ sobre el eje OX, que puede ser positiva o negativa (no debe confundirse con el módulo $\left|\vec{F}\right|$ matemático).

4.5.5. Fuerza constante

En este caso la aceleración de la partícula está dada por

$$a = \frac{F}{m} = cte \tag{4.31}$$

La ecuación [4.30] es ahora

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F}{m}$$

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

Por integraciones sucesivas obtenemos

$$\int d\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{F}{m}\int dt \quad \Rightarrow \quad v = \frac{dx}{dt} = \frac{F}{m}t + C_1$$
$$\int dx = \int \left(\frac{F}{m}t + C_1\right) dt \quad \Rightarrow \quad x = \frac{F}{2m}t^2 + C_1 t + C_2$$

Aplicamos las condiciones iniciales para determinar C_1 y C_2 , y resulta

$$v_0 = v(t=0) = C_1$$

$$x_0 = x(t=0) = C_2$$

con lo que la solución al problema es

$$v = v_0 + \frac{F}{m}t \tag{4.32}$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{F}{2m}t^2 \tag{4.33}$$

El movimiento es rectilíneo uniformemente acelerado (hágase aplicación para el caso de un objeto en caída libre sobre la superficie de la tierra).

4.5.6. Fuerza función del tiempo

En este caso, hemos de exigir que la función $F(t)$ sea integrable, al menos en el intervalo que nos interese. La ecuación [4.30] toma la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{m}F(t)$$

e integrando sucesivamente

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{m}\int F(t)dt + C_1 \tag{4.34}$$

$$x = \int v\, dt = \int \left(\frac{1}{m}\int F(t)\, dt + C_1\right) dt + C_2 \tag{4.35}$$

Conocida la función $F(t)$, y siempre que sea integrable, quedan determinadas las soluciones $x(t,\ C_1,\ C_2)$ y $v(t,\ C_1)$. Aplicando las condiciones iniciales x_0 y v_0 se obtienen en función de ellas los valores de C_1 y C_2 y queda determinada la solución $x(t)$, $v(t)$ para cada problema concreto.

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

4.5.7. Fuerza función de la velocidad

En este caso podemos poner la ecuación fundamental de la dinámica en la forma

$$F(v) = m\frac{dv}{dt}$$

de donde

$$\frac{dv}{F(v)} = \frac{1}{m}\,dt$$

que representa la ecuación en variables separadas. Integrándola

$$\int \frac{dv}{F(v)} = \frac{1}{m}\,t + C_1$$

Si la función $[F(v)]^{-1}$ es integrable analíticamente, entonces existe su función primitiva y podemos, en principio, despejar $v(t)$ en la forma

$$v = f(t, C_1) \tag{4.36}$$

donde f será una cierta función del tiempo y del parámetro C_1. Si $f(t,C_1)$ es integrable se tiene

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad x = \int f(t, C_1)dt + C_2 \tag{4.37}$$

De nuevo las condiciones iniciales nos permitirán determinar C_1 y C_2. Entonces la solución del problema viene dada por las expresiones [4.36] y [4.37], siempre que se cumplan las condiciones impuestas.

4.5.8. Fuerza función de la posición

En este caso

$$F(x) = m\frac{dv}{dt} \tag{4.38}$$

que contiene tres variables interdependientes, x, v y t. Para convertirla en una ecuación en variables separables empleamos la regla de la cadena

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx} \tag{4.39}$$

con lo que la ecuación [4.38] se puede escribir en la forma

$$F(x) = m\,v\,\frac{dv}{dx}$$

o bien separando variables en

$$mv\ dv = F(x)\ dx$$

Integramos esta ecuación

$$\frac{1}{2}mv^2 = \int F(x)\,dx + C_1$$

y despejamos v

$$v = \frac{dx}{dt} = \pm\left[\frac{2}{m}\left(\int F(x)\,dx + C_1\right)\right]^{1/2} \tag{4.40}$$

El proceso seguido hasta aquí constituye un caso particular del teorema de la energía cinética que veremos más adelante. Integrando de nuevo [4.40] obtenemos

$$\pm\, t = \int \frac{dx}{\left[\frac{2}{m}\left(\int F(x)\,dx + C_1\right)\right]^{1/2}} + C_2 \tag{4.41}$$

que nos permite expresar x en función de t siempre que tal inversión sea posible y que las integrales que aparecen en [4.40] y [4.41] estén definidas analíticamente. Como siempre, las constantes C_1 y C_2 se determinan mediante las condiciones iniciales en cada caso concreto. La solución al problema viene dada por $v(x)$ (ecuación [4.40]), $x(t)$ (ecuación [4.41]) y, obtenida esta última, por

$$v(t) = \frac{dx}{dt}$$

4.5.9. Muelle ideal: Movimiento Armónico Simple

Como ya dijimos, un muelle ideal está caracterizado por tener masa nula y por ejercer una fuerza directamente proporcional a su elongación, sobre cualquier objeto unido a su extremo.

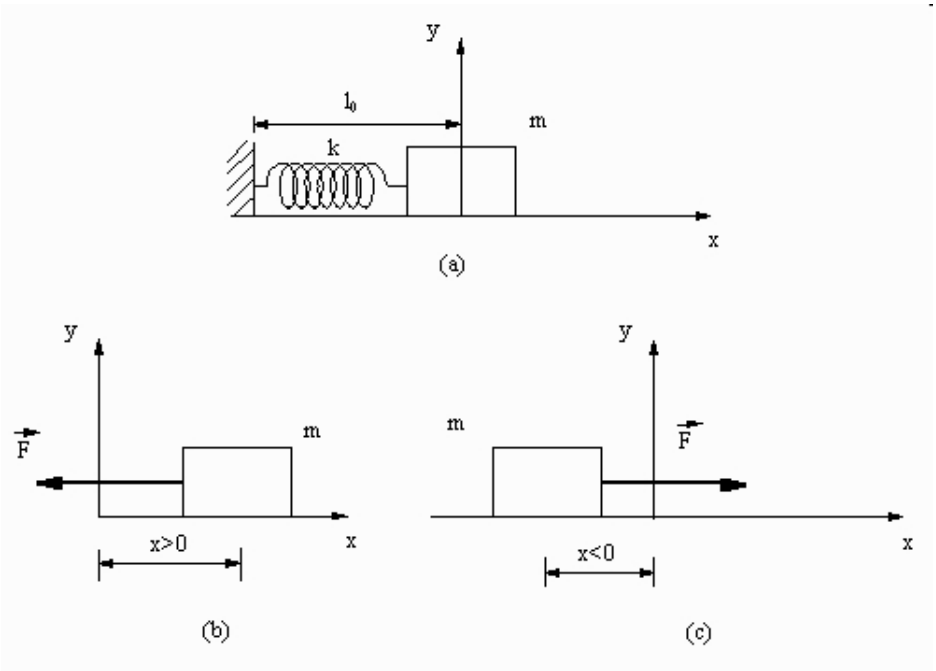


Figura 4.19: Partícula sometida a la fuerza de un muelle.

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval
etsiae

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

En la Fig. 4.19 (a) se representa un muelle ideal de longitud natural l_0 unido por su extremo izquierdo a un soporte fijo y por su extremo derecho a una masa m que, en la dirección del eje OX, va a estar sometida únicamente a la fuerza que el muelle ejerce sobre ella (supongamos, por ejemplo, que entre el plano de apoyo y=0 y la masa no existe rozamiento).

Cuando el muelle está en su longitud natural, caso (a), no ejerce ninguna fuerza sobre m. Situamos el origen de nuestro sistema inercial OXY en la posición que ocupa la masa m en estas circunstancias. De esta forma, la elongación del muelle será igual a la coordenada x de la posición de m.

Si el desplazamiento de la masa m es positivo (alargamiento), $x>0$, la fuerza que ejerce el muelle sobre m es negativa (Fig. 4.19 (b)) mientras que en caso contrario, $x<0$, es positiva (Fig. 4.19 (c)). En consecuencia, la fuerza elástica se puede expresar en cualquier circunstancia como

$$F = -kx; \quad \vec{F} = F\vec{i} \tag{4.42}$$

donde k es la constante elástica o rigidez del muelle.

Si nos fijamos en el muelle como sistema, al tener masa nula, la resultante de las fuerzas que actúan sobre él debe ser nula también (en caso contrario su aceleración sería infinita, lo que va en contra de la experiencia). Teniendo en cuenta esto y la tercera ley de Newton, es fácil entender que los diagramas de fuerzas sobre el muelle, correspondientes a alargamiento y compresión son los representados en la Fig. 4.20(a) y (b), respectivamente.

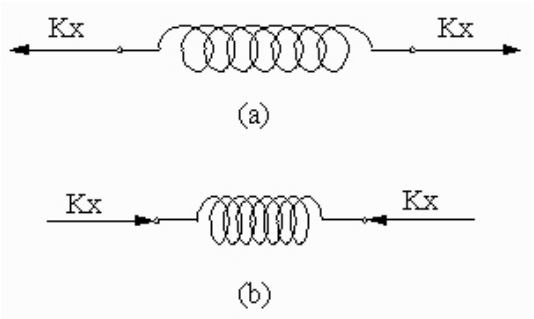


Figura 4.20: Alargamiento y compresión de un muelle.

El muelle ideal se utiliza habitualmente en dinámica y representa el ejemplo más sencillo de fuerza dependiente de la posición. Vamos a deducir la ecuación del movimiento de la masa m sujeta al muelle para unas ciertas condiciones iniciales, por ejemplo:

$$x(t=0) = 0; \quad v(t=0) = v_0$$

La ecuación [4.38] junto con [4.42] conduce a

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Se define la pulsación ω del movimiento como el valor positivo

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{4.43}$$

con lo que la ecuación anterior se reduce a:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \tag{4.44}$$

que es una ecuación diferencial, lineal y homogénea, de segundo orden, incompleta (carece de término en la primera derivada de x) y que es característica del movimiento armónico simple.

Para obtener la solución empleamos el cambio de variables [4.39] con lo que resulta

$$v\frac{dv}{dx} = -\omega^2 x \quad \Rightarrow \quad vdv = -\omega^2 x dx$$

Para integrar esta ecuación usaremos un método alternativo equivalente al de las constantes C_1 y C_2 que consiste en incluir las condiciones iniciales como límites de integración. Resulta

$$\int_{v_0}^{v} vdv = -\omega^2 \int_0^x xdx \quad \Rightarrow \quad v^2 = v_0^2 - \omega^2 x^2$$

Nótese que los límites inferiores son las correspondientes condiciones iniciales y los superiores las variables genéricas a determinar, que aparecen con la misma notación en el integrando. Utilizaremos esta notación siempre que no llame a confusión.

Hemos obtenido la dependencia de v con x

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{v_0^2 - \omega^2 x^2} \tag{4.45}$$

Integramos esta ecuación

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 - \omega^2 x^2}} = \int_0^t dt$$

es decir

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 x^2}{v_0^2}}} = v_0 \int_0^t dt$$

que, con el cambio de variable

$$\frac{\omega}{v_0}x = \sin\alpha \; ; \quad dx = \frac{v_0}{\omega}\cos\alpha d\alpha$$

conduce a

$$\frac{\omega}{v_0}\int_{\sin^{-1}0}^{\sin^{-1}(\omega x/v_0)} d\alpha = v_0 t \quad \Rightarrow \quad \sin^{-1}\left(\frac{\omega x}{v_0}\right) = \omega t$$

es decir

$$x = \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t) \tag{4.46}$$

que es una de las formas habituales de expresar la ecuación horaria de un movimiento armónico simple. Otra forma equivalente a [4.46] es

$$x = \frac{v_0}{\omega}\cos(\omega t - \pi/2)$$

como es inmediato comprobar. Para las condiciones iniciales elegidas, la amplitud del movimiento es $\frac{v_0}{\omega}$. Se han seleccionado estas condiciones particulares para simplificar el desarrollo en la integración de la ecuación [4.44]. Si se consideran condiciones iniciales generales, también se obtiene como solución de la ecuación un movimiento armónico simple, como es evidente.

4.6. Las Leyes de la dinámica en sistemas no inerciales

4.6.1. Sistemas de referencia no inerciales. Fuerzas de inercia

Recordemos que un sistema de referencia es no inercial cuando no se cumple en él la primera ley de Newton. Para una partícula libre, es decir aislada de cualquier posible influencia, y respecto a un sistema de referencia no inercial, el movimiento será acelerado a lo largo de una trayectoria cualquiera.

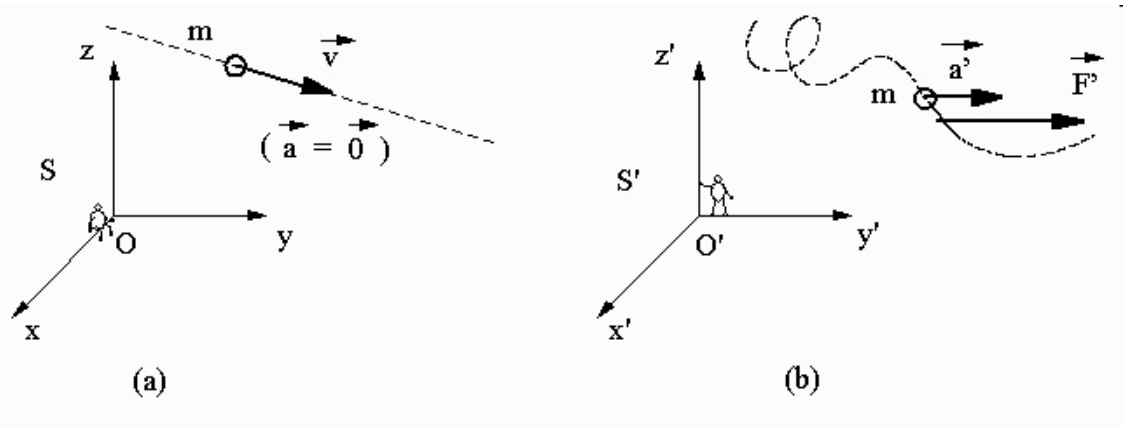


Figura 4.21: Partícula observada desde un sistema inercial S y no inercial S'.

Supongamos que dos observadores ligados a sendos sistemas de referencia, uno inercial, S, y el otro no inercial, S', observan una misma partícula libre, de masa m (Fig. 4.21). Además, los dos observadores tienen "mentalidad newtoniana", es decir, están acostumbrados a interpretar sus experiencias habituales respecto al movimiento en base a las leyes de Newton (esto es bastante normal, al menos desde el siglo XVIII).

El observador S podría decir: "como sobre la partícula m no actúa ninguna fuerza, entonces su movimiento es rectilíneo uniforme", pero es poco probable. Más bien razonaría como sigue:

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

"Dado que la partícula que observo está en movimiento rectilíneo y uniforme, entonces no puede actuar ninguna fuerza sobre ella, o equivalentemente, la resultante de las fuerzas que actúan sobre ella es nula".

Adviértase que la opinión del observador S no resulta todo lo completa que debiera. Está dando por supuesto que su sistema es inercial. Nosotros sí lo sabemos (lo hemos impuesto) pero, ¿cómo puede saberlo él? No obstante debemos ser indulgentes con el observador S. La tendencia de afirmar que nuestro sistema de referencia es el mejor entre los posibles, por principio, ha sido muy general en la historia de la ciencia, en particular en la de la astronomía.

El observador S puede percatarse de que su sistema es inercial si es capaz de medir que la fuerza neta que actúa sobre la partícula es nula (es decir, es una partícula libre) al mismo tiempo que observa que su movimiento es rectilíneo y uniforme. Supongamos que lo hace. Pero, ¿qué ocurre en el sistema no inercial?

El observador S' está ligado a un sistema de referencia que debe tener un movimiento respecto a S más o menos complicado, pero siempre con alguna aceleración (S' no puede estar en movimiento rectilíneo uniforme de traslación respecto a S porque sería inercial, en contra de lo acordado). En consecuencia, la misma partícula m se mueve respecto a S' con movimiento acelerado a lo largo de una trayectoria cualquiera.

En principio, no hay ningún motivo para que el observador S' tenga una mentalidad muy diferente a la de S y, en este caso, podría muy bien afirmar implícitamente la calidad de su sistema de referencia diciendo: "Puesto que la partícula m sigue un movimiento acelerado, con aceleración $\vec{a}'$, entonces actúa una fuerza resultante sobre ella de valor $\vec{F}' = m\vec{a}'$". Al razonar de esta forma, estaría dando por supuesto que S' es inercial. ¿Cómo podría desengañarse?

De la misma forma que decíamos antes para el caso del observador S, si S' es capaz de demostrar que la partícula m es libre -por ejemplo, dándose cuenta de que no interacciona con ningún otro sistema y no puede actuar ninguna fuerza sobre ella- al mismo tiempo que su movimiento no es rectilíneo y uniforme, tendrá que concluir que su sistema de referencia no es inercial.

Sin embargo, según la interpretación anterior, el observador S' fue capaz de plantear una ecuación del tipo

$$\vec{F}' = m\vec{a}' \tag{4.47}$$

donde $\vec{a}'$ es la aceleración de m medida en S'. Pero, ¿qué es $\vec{F}'$? No es una fuerza real, porque las fuerzas reales proceden de la interacción entre partículas, y m no interacciona con nada, según dijimos. No obstante, para S' tiene el mismo efecto que una fuerza real en cuanto a cómo actúa respecto al movimiento de la partícula m. A $\vec{F}'$ se le llama **fuerza de inercia** o fuerza ficticia y su origen está en el movimiento acelerado del sistema S' respecto a cualquier sistema inercial. Las fuerzas de inercia solo aparecen cuando se estudian movimientos desde sistemas no inerciales y para ellas carece de sentido el principio de acción y reacción.

Ejemplos de fuerzas de inercia son el exceso o defecto de peso que se aprecia cuando un ascensor acelera ascendiendo o descendiendo, o la fuerza centrífuga que empuja a los ocupantes de un vehículo en sentido contrario al centro de curvatura de una curva.

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

En la práctica, los sistemas de referencia están ligados a sólidos. Las fuerzas de inercia que aparecen en sistemas no inerciales se manifiestan sobre una partícula a través de fuerzas de reacción que representan la interacción con alguno de los sólidos ligados al sistema no inercial. Así, cuando un autobús marcha en línea recta y a velocidad constante, no notamos ningún efecto (baches y ruidos aparte), pero cuando frena sí. Si no estuviéramos ligados al autobús, seguiríamos a velocidad constante hasta estrellarnos con el parabrisas delantero -pero esto no hay que tenerlo en cuenta, puesto que es una ligadura-, mientras el autobús retrocedería bajo nuestros pies. De forma similar, los pilotos de aviones acrobáticos o los astronautas se ven sometidos a violentas fuerzas en el interior de la cabina, que se evalúan mediante el número de "ges". El origen de ellas está en que tales cabinas en movimiento acelerado no constituyen sistemas inerciales, y por lo tanto, aparecen fuerzas de inercia. Se puede objetar que hemos dicho que estas fuerzas son ficticias, mientras que los esfuerzos que han de soportar los pilotos son reales. La explicación está en que estos esfuerzos no proceden de las fuerzas de inercia propiamente, sino de las reacciones con los sistemas que ligan piloto y cabina (si no existieran estos sistemas el piloto saldría despedido de ella). Por ejemplo, si por efecto de la salida de un picado violento, un piloto se ve sometido a $3g$, esto quiere decir que el asiento ejerce sobre él una fuerza igual a tres veces su peso, debido a la interacción real entre asiento y piloto (el asiento recibe una fuerza igual y de sentido contrario, evidentemente). El efecto de un alto factor de "ges" sobre una persona puede ser muy peligroso, pero no procede en realidad de las fuerzas de inercia, sino de los anclajes, cinturones, u otros tipos de sistemas que lo sujetan, e incluso de la interacción de unas partes de su cuerpo sobre otras, en definitiva, de las ligaduras con los sistemas no inerciales.

Como comentario final, y al margen de los fines específicos de este curso, hay que tener en cuenta que el principio de equivalencia, fundamento básico de la teoría general de la relatividad, afirma que "un observador no tiene medios para distinguir si su laboratorio se encuentra en un campo gravitatorio uniforme o en un sistema de referencia acelerado", es decir, debe haber una equivalencia real entre fuerza gravitatoria y fuerzas de inercia. Este principio está, sin embargo, fuera de los límites de aplicación de la mecánica newtoniana que nos ocupa.

4.6.2. La ecuación fundamental de la dinámica en sistemas no inerciales

Consideremos dos sistemas de referencia, S inercial y S' no inercial y con un movimiento general respecto a S, dado por una traslación de su origen con aceleración instantánea $\vec{a}_{O'}(t)$ y por una rotación instantánea $\vec{\Omega}(t)$.

Cinemáticamente, el movimiento de una misma partícula de masa m se describe mediante los vectores de posición, velocidad y aceleración $(\vec{r}, \vec{v}, \vec{a})$ en S y por $\vec{r}'$, $\vec{v}'$ y $\vec{a}'$, relativos al sistema móvil S'. Como ya se dijo, las descripciones del movimiento son distintas pero están relacionadas entre sí, de forma que

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{O'} + \vec{\Omega} \times \vec{r}' \tag{4.48}$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{O'} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}') + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}' \tag{4.49}$$

El significado de estas expresiones y de los términos que aparecen en ellas se trató en el estudio del movimiento relativo.

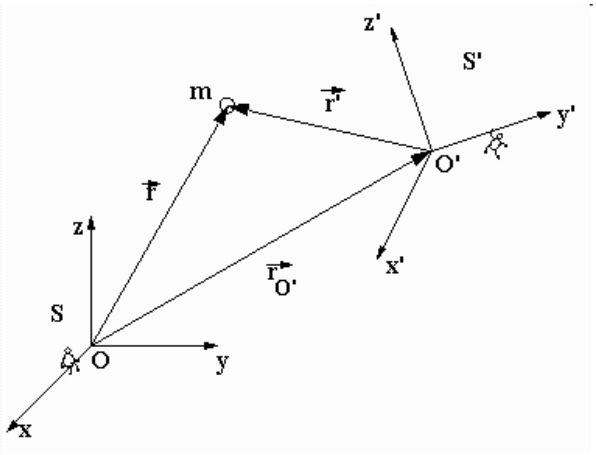


Figura 4.22: Partícula observada desde un sistema inercial S y uno no inercial S'.

Dinámicamente, podemos aplicar las leyes de Newton en el sistema S que es inercial. Sea $\vec{F}$ la fuerza resultante que actúa sobre la partícula. Se cumple que

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (\text{en } S) \tag{4.50}$$

Si sustituimos en esta última ecuación la aceleración $\vec{a}$ dada por [4.49] y reagrupamos términos, resulta

$$\vec{F} - m\vec{a}_{O'} - m\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{r}' - m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}') - 2m\vec{\Omega} \times \vec{v}' = m\vec{a}' \tag{4.51}$$

Definimos la fuerza de inercia total $\vec{F}'$ que aparece sobre m en S', debida al movimiento del sistema, como

$$\vec{F}' = -m\vec{a}_{O'} - m\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{r}' - m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}') - 2m\vec{\Omega} \times \vec{v}' \tag{4.52}$$

que no es una fuerza real, pero en S' influye en el movimiento de m como si lo fuera.

Sustituyendo [4.52] en [4.51] resulta

$$\vec{F} + \vec{F}' = m\,\vec{a}' = \left(\frac{d\vec{p}'}{dt}\right)_{S'} \tag{4.53}$$

A la ecuación [4.53], equivalente a [4.51], se la conoce como **ecuación fundamental de la dinámica en sistemas no inerciales**. Es evidente que se reduce a [4.47] si $\vec{F} = 0$ (partícula libre).

La ecuación [4.52] clasifica la fuerza de inercia total $\vec{F}'$ en cuatro términos, dependientes de cuatro posibles aspectos del movimiento del sistema S':

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

a) $-m\vec{a}_{O'}$ representa la fuerza de inercia debida a la traslación instantánea.

b) $-m\dfrac{d\vec{\Omega}}{dt}\times\vec{r}'$ es la fuerza de inercia que aparece cuando la rotación del sistema no es uniforme (se le llama transversal o azimutal).

c) $-m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}')$ es la fuerza centrífuga, debida a la rotación y al "brazo" $\vec{r}'$ respecto a su eje.

d) $-2m\vec{\Omega}\times\vec{v}'$ es la fuerza de Coriolis, debida al movimiento relativo de m respecto al sistema en rotación.

La fuerza de inercia total $\vec{F}'$ actúa sobre cualquier partícula con masa. De hecho, para un observador en S' toda partícula m se ve sometida al campo de fuerzas de inercia dado por la ecuación [4.52], que depende de las magnitudes características del movimiento del sistema, $\vec{a}_{O'}$, $\vec{\Omega}$ y $\dfrac{d\vec{\Omega}}{dt}$, y es función del estado cinemático de la partícula (posición y velocidad relativas, $\vec{r}'$ y $\vec{v}'$) en el caso general.

En el caso particular en que

$$\vec{a}'=0\ ;\quad \vec{\Omega}=0\ ;\quad \frac{d\vec{\Omega}}{dt}=0$$

el sistema S' está en movimiento rectilíneo uniforme de traslación respecto a S, $\vec{F}'=\vec{0}$ (no actúan fuerzas de inercia) y la ecuación [4.53] se reduce a

$$\vec{F}=m\vec{a}'$$

que, junto con [4.49] implica que $\vec{a}$=$\vec{a}'$. En este caso S y S' son equivalentes, es decir, ambos son sistemas inerciales y [4.48] se reduce a

$$\vec{v}=\vec{v}'+\vec{v}_{O'}$$

que constituye la transformación de velocidades de Galileo.

4.6.3. Ejemplos de fuerzas de inercia

Analizaremos cuatro ejemplos de fuerzas de inercia. En cada uno de ellos aparece solamente una de las cuatro formas de fuerza de inercia que se indican en la ecuación [4.52].

a) $\vec{F}'=-m\vec{a}_{O'}$

Supongamos un sistema de referencia S' en movimiento rectilíneo de traslación con aceleración $\vec{a}_{O'}$ respecto a un sistema de referencia inercial S (Fig. 4.23(a)).

Dos observadores situados en S y S' se disponen a explicar el estado dinámico de una masa en reposo relativo a S'. Para el observador S' la masa m está en reposo, es decir, $\vec{a}'=0$, y

lo justifica mediante el diagrama de fuerzas de la Fig. 4.23(b), en el que m está sometida a tres fuerzas reales, el peso y la reacción de la superficie de apoyo con dos componentes N y F_R estática y a una fuerza ficticia, $-m\vec{a}_{O'}$ (se cumple que $F_R = ma_{O'}$, en módulo). Para el observador S, m tiene una aceleración $\vec{a} = \vec{a}_{O'}$ y al ser un sistema inercial en su diagrama solo aparecen las tres fuerzas reales (Fig. 4.23(c)).

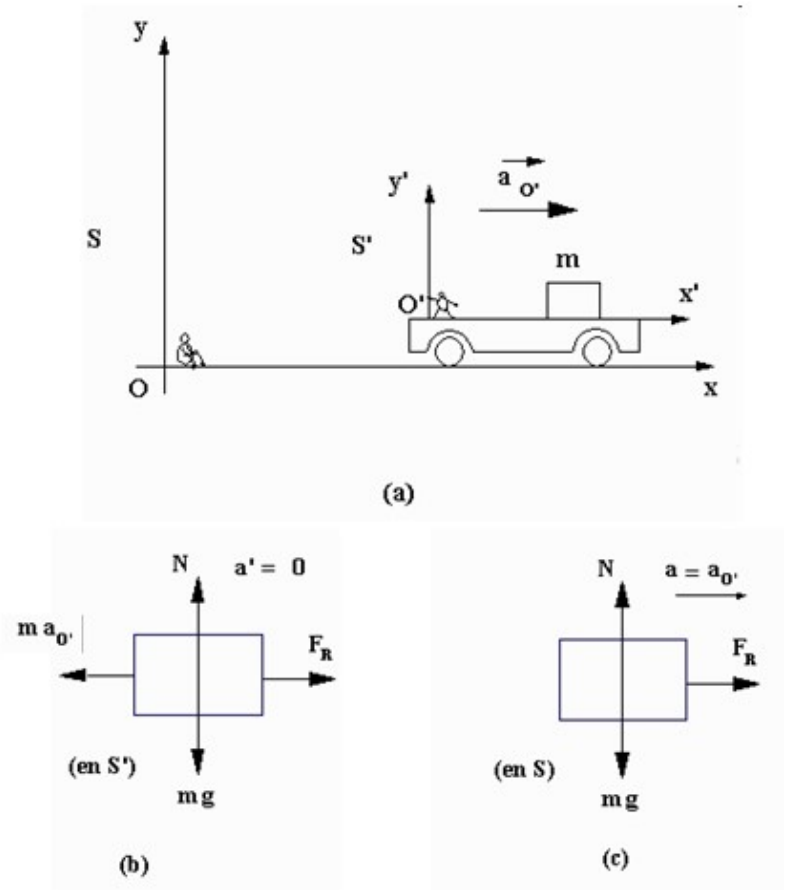


Figura 4.23: Sistema *S'* en traslación acelerada.

b) $\vec{F}' = -m\dfrac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{r}'$

Consideremos el sistema *S'* ligado a una plataforma circular que puede girar en torno a su eje *O'Z'* y el sistema S fijo (Fig. 4.24(a)). La plataforma está en reposo instantáneo y actúa sobre ella un par que le comunica una aceleración angular $\vec{\alpha} = \dfrac{d\vec{\Omega}}{dt}$. Sobre ella apoya con rozamiento una masa m a una distancia *r'* del eje, en reposo respecto a la plataforma en tal instante (supondremos que la fuerza de rozamiento estática máxima es grande respecto al producto de la masa por la aceleración angular α por la distancia r').

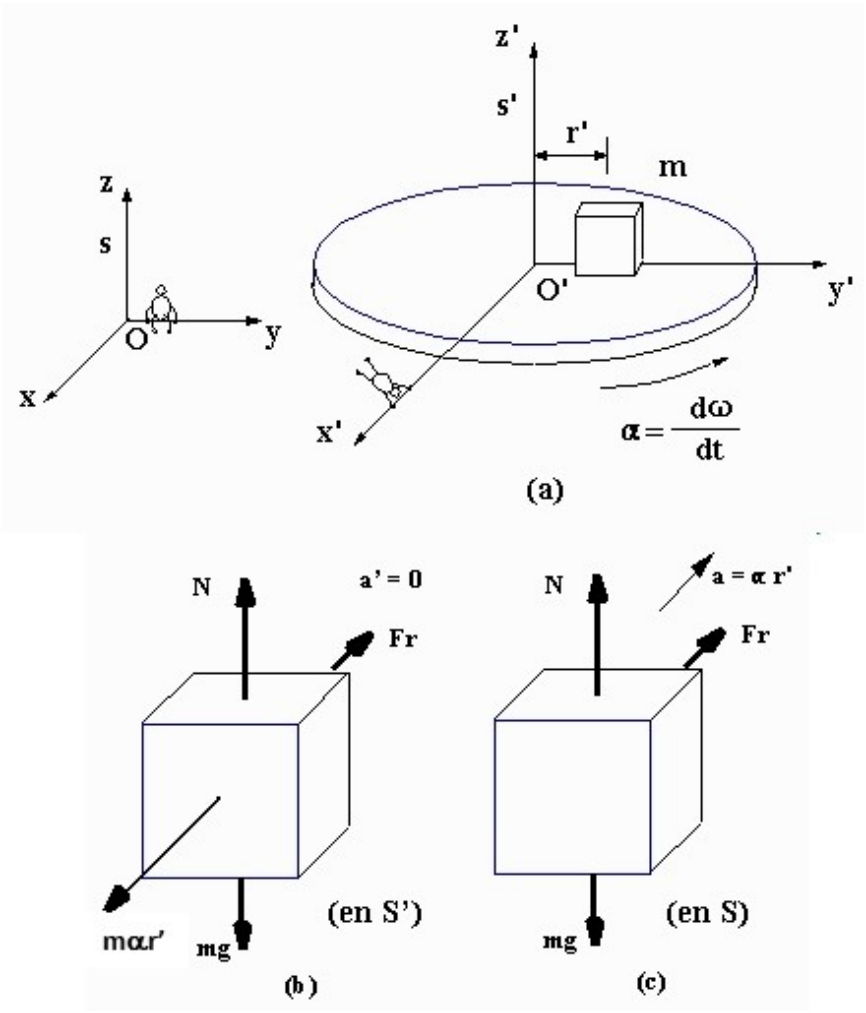


Figura 4.24: Sistema *S'* con giro no uniforme y sin velocidad angular.

Un observador ligado a *S'* describe el equilibrio relativo de m mediante el diagrama de fuerzas de la Fig. 4.24(b), con tres fuerzas reales, la fuerza de rozamiento, el peso y la reacción de la plataforma, y una fuerza de inercia, $-m\vec{\alpha} \times \vec{r}'$.

El observador S describe el movimiento de m, con aceleración de módulo $a{=}\alpha r'$, mediante el diagrama de la Fig. 4.24(c) en el que solo aparecen las tres fuerzas reales.

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

c) $\vec{F}' = -m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}')$

Supongamos ahora que la plataforma ligada a *S'* tiene un movimiento de rotación en torno a *O'Z'* con velocidad angular $\vec{\Omega}$ constante. Bajo los mismos supuestos que en el ejemplo b, por lo demás, el diagrama de fuerzas que explica el reposo de m en *S'* (Fig. 4.25(b)) incluye en este caso la fuerza centrífuga $-m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}')$ como fuerza de inercia. El diagrama de la Fig. 4.25(c) explica el movimiento circular de radio *r'*, uniforme, que observa *S*.

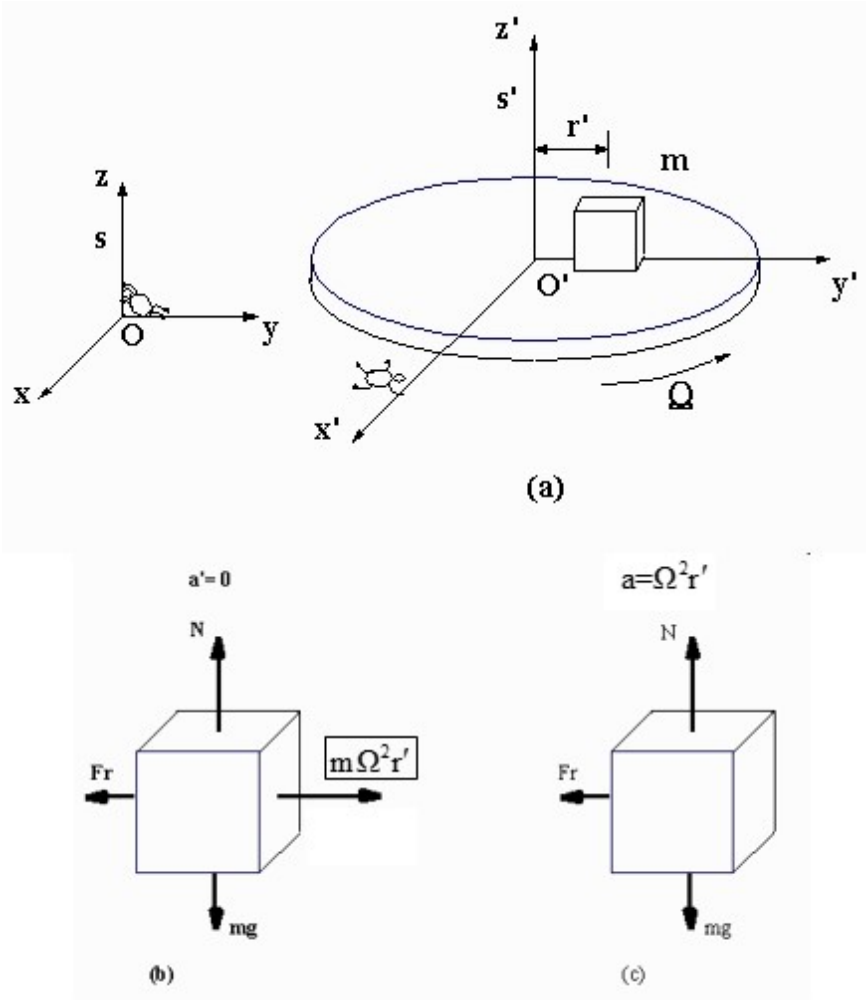


Figura 4.25: Sistema *S'* con giro uniforme.

Se propone como ejercicio analizar los ejemplos b y c en los siguientes casos:

1. No existe rozamiento entre m y la plataforma.

2. Existe rozamiento, pero es pequeño respecto a los valores de $m\alpha r'$ en el caso b y respecto a $m\Omega^2 r'$ en el caso c.

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

d) $\vec{F}' = -2m\vec{\Omega} \times \vec{v}'$

Consideremos ahora la plataforma ligada a *S'* en la misma situación que en el ejemplo c, pero supongamos que la masa m se encuentra en cierto instante en el punto *O'* (r'=0) y con velocidad $\vec{v}'$ relativa a la plataforma y cuya dirección y sentido coinciden con los del eje *O'Y'* (Fig. 4.26(a)).

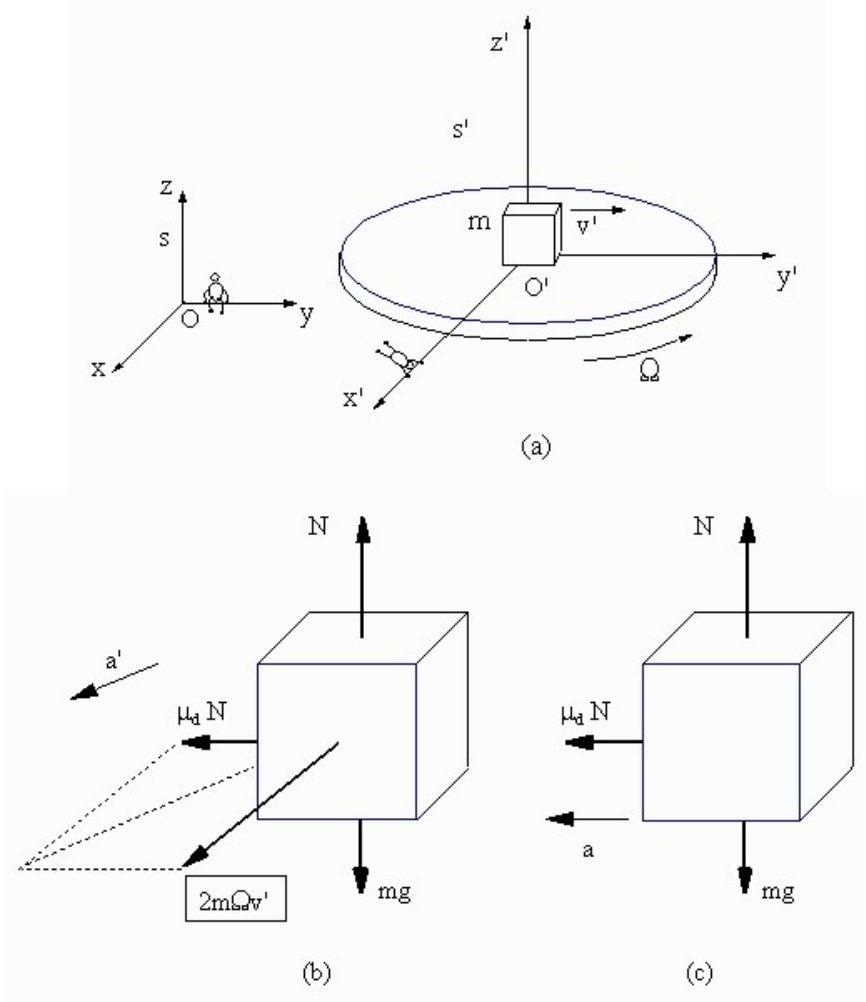


Figura 4.26: Sistema *S'* con giro uniforme y partícula con velocidad relativa.

El diagrama de fuerzas de la Fig. 4.26(b) explica el movimiento relativo de m respecto a *S'*, con aceleración $\vec{a}'$ en la dirección y sentido de la composición de $\mu_d N$, fuerza de rozamiento dinámica, y de $-2m\vec{\Omega} \times \vec{v}'$, fuerza de inercia de Coriolis, que es la que se manifiesta en este caso.

El diagrama de fuerzas para el observador inercial S se obtiene del de *S'* sin más que eliminar la fuerza de Coriolis (Fig. 4.26(c)). La aceleración de m en este sistema tiene la dirección y sentido de la fuerza de rozamiento dinámica.

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

4.6.4. ¿Es la Tierra un sistema de referencia inercial?

La gran mayoría de las aplicaciones de la mecánica se realizan con referencia a la superficie de la tierra. Por ello es de gran importancia saber cuándo y hasta qué punto se puede considerar a la tierra como un sistema inercial.

Si un sistema de referencia S_T ligado a la superficie de la tierra es inercial, entonces sobre cualquier cuerpo en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme de traslación, la resultante de las fuerzas reales aplicadas sobre él ha de ser nula, y si no es inercial entonces la resultante de las fuerzas reales y de las fuerzas de inercia aplicadas sobre él ha de ser nula, pero en este último caso la resultante de las fuerzas reales no será nula en general. En la mayor parte de los casos utilizamos la tierra como sistema de referencia inercial, aunque esto es una aproximación que no es válida en algunas circunstancias. ¿Qué error cometemos con ello?

Para contestar a la pregunta anterior recurramos a una referencia más válida que la superficie de la tierra como sistema inercial respecto al espacio absoluto. Sea un sistema de referencia S_T ligado a la superficie de la tierra, en movimiento de rotación con velocidad angular Ω_D (rotación diaria, de periodo $T_D = 24$ horas) y con origen en un punto P de la superficie (Fig. 4.27). Sea otro sistema de referencia S_C con origen en el centro C de la tierra y ajeno a su rotación diaria. S_C se aproximará en mayor medida a la definición de sistema inercial ideal que S_T.

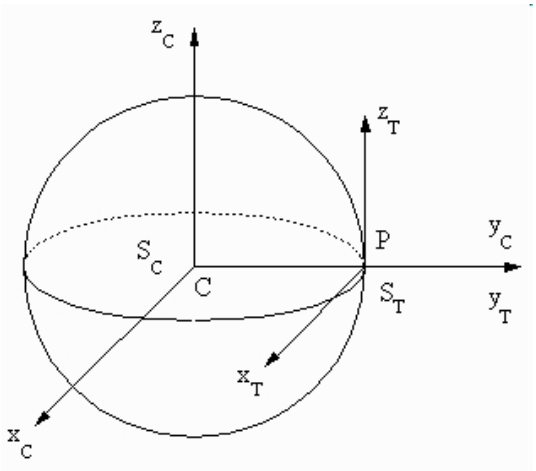


Figura 4.27: Sistema inercial en el centro de la tierra S_C y sistema en la superficie ligado a la tierra S_T.

La velocidad angular de rotación de S_T respecto a S_C viene dada por

$$\Omega_D = \frac{2\pi}{T_D} \approx 10^{-4}\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

donde hemos expresado el resultado aproximado, en orden de magnitud. Solo nos interesa una evaluación aproximada.

Para una partícula de masa m situada en las proximidades del origen P de S_T, con vector de posición relativa a S_T $\vec{r}' \approx 0$, que se mueva con velocidad relativa $v' \approx 300$ m·s^{-1} y situando el origen P en el ecuador con objeto de evaluar los efectos máximos, el valor aproximado de las fuerzas de inercia, comparadas con el peso mg que actúa sobre m, viene dado por

$$-m\vec{a}_{O'}\ ;\quad |\vec{a}_{O'}| = |\vec{a}_p| \simeq \Omega_D^2 R_T \simeq 0.03\ \mathrm{ms}^{-2} \ll g$$

$$-m\frac{d\vec{\Omega}_D}{dt} \times \vec{r}' \approx 0$$

$$-m\vec{\Omega}_D \times (\vec{\Omega}_D \times \vec{r}') \approx 0$$

$$-2m\vec{\Omega}_D \times \vec{v}'\ ;\quad \left|-2\vec{\Omega}_D \times \vec{v}'\right| \leq 2\Omega_D v' \simeq 0.04\ \mathrm{ms}^{-2} \ll g$$

donde R_T representa el radio de la tierra ($|\vec{r}_{CP}| \approx R_T$). Nótese que el efecto del giro aparece aquí en el término $-m\vec{a}_{O'}$, debido a como hemos definido los sistemas S_T y S_C, y que para la fuerza de Coriolis hemos evaluado el máximo valor posible del módulo de tal fuerza por unidad de masa. Como se ve, para el ejemplo expuesto, los efectos de las fuerzas de inercia son muy inferiores al peso y despreciables en la mayoría de los casos.

Para un observador ligado a S_C y que considere su sistema inercial, dado un cuerpo en reposo en la superficie de la tierra la resultante de las fuerzas reales que actúan sobre él no puede ser nula, ya que deben explicar la aceleración del movimiento circular en torno al eje de rotación de la tierra, que sigue en su sistema de referencia.

Pero S_C no representa tampoco la última palabra en cuanto a sistema de referencia inercial idóneo, ya que el centro de la tierra sigue un movimiento periódico anual a lo largo de una elipse (que por simplicidad aproximaremos mediante una circunferencia) con velocidad angular de rotación:

$$\Omega_A = \frac{2\pi}{T_A} \approx 10^{-7}\ \mathrm{rad} \cdot \mathrm{s}^{-1}$$

donde el periodo de rotación es $T_A \approx$ 365 días.

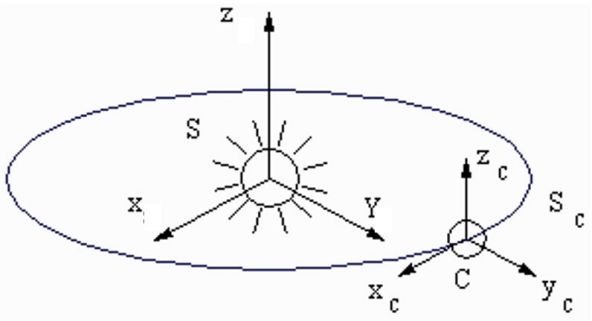


Figura 4.28: Sistema inercial en el centro del sol S y sistema en el centro de la tierra S_C sin giro de sus ejes respecto al sistema S.

Consideremos un sistema de referencia S con centro en el Sol y fijo a éste, y el sistema S_C anterior, ligado al centro de la tierra y cuyo origen sigue un movimiento de rotación con velocidad angular Ω_A y radio de la órbita $R_O \approx$ $1.5{\cdot}10^{11}$ m (Fig. 4.28). Si consideramos S como sistema inercial, el efecto de las fuerzas de inercia por unidad de masa que aparecen

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

sobre cualquier objeto situado en las proximidades de la tierra (con vector de posición relativa $|\vec{r}'_C| \approx R_T$) viene dado por:

$$-m\vec{a}_{O'} \; ; \quad |\vec{a}_{O'}| = |\vec{a}_C| \simeq \Omega_A^2 R_O \simeq 0.006 \text{ ms}^{-2} \ll g$$

y nulo para el resto de las fuerzas de inercia.

Del mismo modo, el sistema S sigue un movimiento de rotación en torno a nuestra galaxia, en cuyo centro podríamos definir un sistema de referencia S_G aproximadamente más inercial. Los efectos de fuerzas de inercia serían aún menores en este caso. A su vez, las galaxias se alejan unas respecto a otras, en general, en el universo. En este caso, no obstante, no es posible definir un centro origen de un sistema de referencia S_U todavía más inercial, ni siquiera tiene sentido.

Así pues, mientras que la tierra no es, estrictamente, un sistema de referencia inercial, se puede considerar que sí lo es para la gran mayoría de las aplicaciones de la mecánica, pero no para todas.

Por ejemplo, la fuerza de Coriolis que aparece sobre las partículas de aire en movimiento, debido a que la tierra no es un sistema inercial (Fig. 4.29 (a)), es un efecto de gran importancia para describir el movimiento ciclónico. Sobre una partícula de aire, con velocidad $\vec{v}'$ relativa a la superficie de la tierra aparece una fuerza de Coriolis $-2m\vec{\Omega}_D \times \vec{v}'$ que comunica a la partícula una aceleración relativa dirigida hacia la derecha de $\vec{v}'$ en el hemisferio norte y hacia la izquierda en el sur. Como consecuencia, cuando las líneas de corriente convergen en un punto, se produce un movimiento de rotación, en forma de remolino, en sentido contrario a las agujas del reloj en el hemisferio norte y en el sentido de las agujas del reloj en el sur, relativo a la superficie de la tierra.

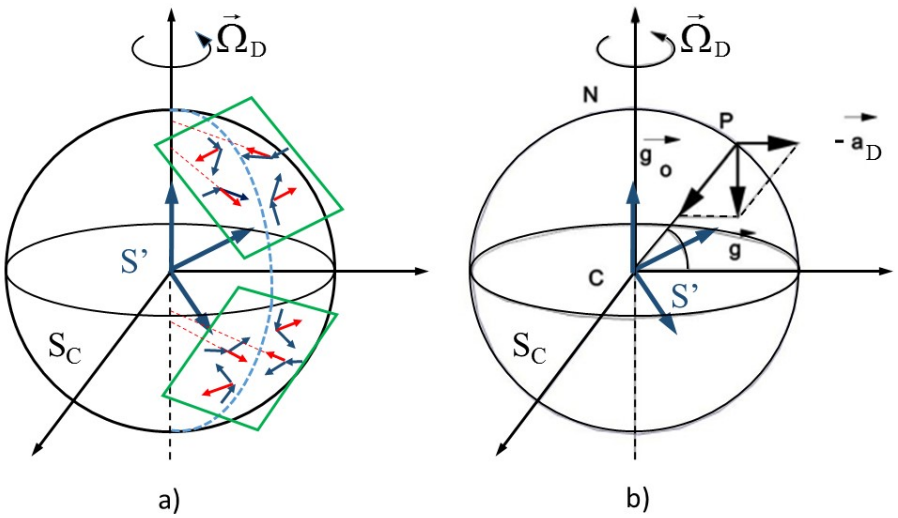


Figura 4.29: Sistema S' en el centro de la tierra y ligado a ésta y sistema inercial S_C en el centro de la tierra pero sin su giro: (a) movimiento ciclónico, en rojo aparece la fuerza de Coriolis y en azul la velocidad en un plano tangente, (b) variaciones de la gravedad local.

Obsérvese que para desviar las líneas de corriente que corren paralelas a los paralelos terrestres influye tambien la curvatura de la tierra además de la fuerza de Coriolis (la corriente

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

se ve empujada hacia el eje de rotación de la tierra o se aleja de éste debido a dicha fuerza). Por su parte la corriente que corre paralela a los meridianos se ve empujada hacia los paralelos.

El que la tierra no sea estrictamente un sistema inercial es causa también de las pequeñas variaciones del valor de la gravedad local con la latitud en un sistema ligado a la tierra. Para calcular el peso local de un objeto en un punto P de la superficie de la tierra (Fig. 4.29 (b)), hemos de sumar el efecto real del peso dado por $\vec{g}_0$ con la fuerza centrífuga de inercia por unidad de masa -$\vec{a}_D$ debida a la rotación diaria de la tierra (suponemos un sistema S' en el centro de la tierra, ligado a ella y, por tanto, con su movimiento de giro).

Así obtenemos

$$\vec{g} = \vec{g}_0 - \vec{\Omega}_D \times (\vec{\Omega}_D \times \vec{r}'_P) \tag{4.54}$$

donde $\vec{r}'_P = \overrightarrow{CP}$ y $|\vec{r}'_P| \approx R_T$ (Fig. 4.29). Ello hace que el valor $g = |\vec{g}|$ de la gravedad local varíe con la latitud λ (ángulo del vector $\vec{r}'_P$ con el plano ecuatorial), ya que el último término de la ecuación [4.54] tiene por módulo:

$$\left|\vec{\Omega}_D \times (\vec{\Omega}_D \times \vec{r}'_P)\right| = \Omega_D^2 R_T \cos\lambda$$

Como es fácil ver, tal término es máximo en el ecuador (λ=0, lo que supone un valor mínimo de la gravedad local) y mínimo, es decir, nulo en los polos. En la Tabla 4.3 se dan algunos valores aproximados de g en función de λ. La gravedad varía, en menor medida, con otros factores aparte de la latitud.

latitud, λ	**gravedad, g ($\mathbf{m{\cdot}s^{-2}}$)**
90°	9.83
60°	9.82
50°	9.81
40°	9.80
25°	9.79
0°	9.78

Tabla 4.3: Valores de la gravedad en función de la latitud en un sistema ligado a la tierra con su origen en el centro de ésta.

4.7. Teoremas fundamentales de la mecánica

Al estudiar en la sección 4.5 el método general de aplicación de las leyes de la dinámica, se dijo que en la mayoría de los casos la resolución del sistema de ecuaciones [4.27], que explican

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

el comportamiento de una partícula material, puede ser muy complicada y la situación es peor, en general, para un sistema de varias partículas.

La información completa sobre la evolución del sistema está contenida en la solución analítica de tales ecuaciones. Existen, no obstante, ciertos teoremas fundamentales que permiten obtener en determinados casos una información parcial, a veces suficiente. Tales teoremas son, en particular, muy útiles cuando la solución completa al problema es inaccesible en la práctica.

Consideraremos tres teoremas fundamentales de la dinámica de la partícula material: el de la cantidad de movimiento, el del momento cinético y el del trabajo y la energía mecánica. Cada uno de ellos conduce a una ley de conservación: la de la cantidad de movimiento, la del momento cinético y la de la energía mecánica.

4.7.1. Impulso mecánico y cantidad de movimiento

Se define el impulso mecánico de una fuerza en el intervalo de tiempo entre t_1 y t_2 como

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt \tag{4.55}$$

Es una magnitud vectorial, que depende del tipo de fuerza $\vec{F}$ y del intervalo $[t_1,t_2]$, pero no del tiempo. Su representación en un sistema de referencia viene dada por

$$\vec{I} = I_x\vec{i} + I_y\vec{j} + I_z\vec{k} = \left(\int_{t_1}^{t_2} F_x\, dt\right)\vec{i} + \left(\int_{t_1}^{t_2} F_y\, dt\right)\vec{j} + \left(\int_{t_1}^{t_2} F_z\, dt\right)\vec{k}$$

Cada componente I_x, I_y, I_z representa el área encerrada por las funciones F_x, F_y, F_z y el eje de abscisas cuando se las representa en función del tiempo.

Su ecuación de dimensiones es:

$$[I] = [F][t] = \mathrm{LMT}^{-1}$$

y sus unidades en el SI son N·s, que son las mismas que las de la cantidad de movimiento, magnitud que ya se ha definido.

4.7.2. Teorema de la cantidad de movimiento

Sea una partícula de masa m cuya posición está referida a un sistema inercial S y su cantidad de movimiento en tal sistema es $\vec{p} = m\vec{v}$. El impulso mecánico de la fuerza resultante $\vec{F}$ que actúa sobre la partícula en el intervalo entre t_1 y t_2 es:

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right) dt = \int_{t_1}^{t_2} d\vec{p}\, dt = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

es decir, se cumple que

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\, dt = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 \tag{4.56}$$

La ecuación [4.56] constituye la expresión matemática del teorema de la cantidad de movimiento para una partícula material cuyo enunciado es:

"*En un sistema de referencia inercial, el impulso mecánico de la resultante de las fuerzas que actúan sobre una partícula material en un intervalo de tiempo es igual a la variación de la cantidad de movimiento de la partícula en tal intervalo*"

Para un intervalo de tiempo infinitesimal, dt, la ecuación [4.56] equivale a la segunda ley de Newton

$$\vec{F}dt = d\vec{p} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

4.7.3. Conservación de la cantidad de movimiento

Para una única partícula material, la ley de conservación de la cantidad de movimiento equivale trivialmente a la primera ley de Newton.

En efecto, si en la expresión [4.56] el impulso de la fuerza resultante $\vec{F}$ que actúa sobre m es nulo, $\vec{I} = 0$, la cantidad de movimiento de la partícula toma el mismo valor al final que al principio del intervalo, pero no implica que sea constante. Para conseguir esto, es necesario imponer que la fuerza resultante sea nula, $\vec{F} = 0$. Es decir, para S inercial,

$$\vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = \overrightarrow{cte}$$

En consecuencia, la ley de conservación de la cantidad de movimiento no nos aporta ninguna información adicional en el caso de una partícula material.

4.7.4. El teorema de la cantidad de movimiento en sistemas no inerciales

Con una deducción similar a la que se ha empleado para la ecuación [4.56] en un sistema inercial S, y empleando la ecuación fundamental de la dinámica, ec. [4.53], podemos obtener que para un sistema de referencia no inercial, S', se cumple

$$\vec{I} + \vec{I}' = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\, dt + \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}'\, dt = \vec{p}_2' - \vec{p}_1' = m\vec{v}_2' - m\vec{v}_1' \tag{4.57}$$

donde $\vec{I}'$ es el impulso de la fuerza de inercia total, $\vec{F}'$, que actúa sobre la partícula en el intervalo entre t_1 y t_2, y $\vec{p}'$ es la cantidad de movimiento de la partícula relativa a S', relacionada con $\vec{p}$ mediante

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

$$\vec{p} = \vec{p}' + m\vec{v}_{O'} + m\vec{\Omega} \times \vec{r}' \tag{4.58}$$

siendo $\vec{v}_{O'}$ la velocidad del origen de S' y $\vec{\Omega}$ su velocidad angular.

Si el sistema S' es también inercial, en movimiento rectilíneo y uniforme de traslación respecto a S, con velocidad $\vec{v}_{O'}$ constante, entonces

$$\vec{p} = \vec{p}' + m\vec{v}_{O'}$$

lo que indica que la cantidad de movimiento cambia, en general, al cambiar de sistema de referencia. No obstante las variaciones de cantidad de movimiento son idénticas en ambos sistemas

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = (\vec{p}_2' + m\vec{v}_{O'}) - (\vec{p}_1' + m\vec{v}_{O'}) = \vec{p}_2' - \vec{p}_1'$$

y, en consecuencia, el teorema de la cantidad de movimiento [4.56] tiene la misma forma en todos los sistema de referencia inerciales.

4.8. Momento cinético

4.8.1. Definiciones básicas

Consideremos una partícula material de masa m cuya cantidad de movimiento viene dada por $\vec{p}$, sometida a una fuerza resultante $\vec{F}$, y un punto Q (Fig. 4.30). Definimos el **momento cinético** o momento angular de la partícula material respecto al punto Q como

$$\vec{L}_Q = (\vec{r} - \vec{r}_Q) \times \vec{p} = (\vec{r} - \vec{r}_Q) \times m\vec{v} \tag{4.59}$$

es decir, el momento respecto a Q de su vector cantidad de movimiento $\vec{p}$. Su ecuación de dimensiones es

$$[L_Q] = [r][p] = \mathrm{L^2MT^{-1}}$$

y su unidad en el SI es $\mathrm{m^2 \cdot kg{\cdot}s^{-1}}$.

Definimos el **momento dinámico** respecto al punto Q de la resultante de las fuerzas $\vec{F}$ que actúan sobre la partícula como

$$\vec{M}_Q = (\vec{r} - \vec{r}_Q) \times \vec{F} \tag{4.60}$$

Su ecuación de dimensiones es

$$[M_Q] = [r][F] = \mathrm{L^2MT^{-2}}$$

y su unidad en el SI es $1\ \mathrm{m^2 \cdot kg{\cdot}s^{-2}} = 1\ \mathrm{N{\cdot}m}$, que no recibe ningún nombre especial.

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

4.8.2. Teorema del momento cinético con respecto a un punto

Consideremos un punto Q en el que calculamos el momento cinético en un sistema inercial S (Fig. 4.30).

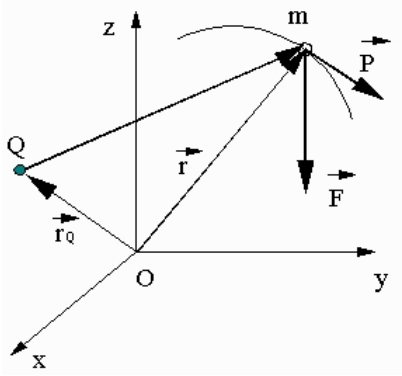


Figura 4.30: Variables del teorema del momento cinético.

Calculando la derivada con respecto al tiempo del momento cinético de la partícula $\vec{L}_Q$, obtenemos

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \frac{d((\vec{r}-\vec{r}_Q)\times m\vec{v})}{dt} = \frac{d(\vec{r}-\vec{r}_Q)}{dt}\times m\vec{v} + (\vec{r}-\vec{r}_Q)\times\frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

y al estar situados en un sistema de referencia inercial

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

siendo $\vec{F}$ la fuerza resultante aplicada sobre m. Como además $\dfrac{d\vec{r}}{dt}\times m\vec{v} = 0$, resulta

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = -\vec{v}_Q\times m\vec{v} + \vec{M}_Q \tag{4.61}$$

La ecuación [4.61] es la expresión matemática del teorema del momento cinético respecto a un punto móvil. Si se trata de un punto en reposo (o fijo), el teorema se enuncia:

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \vec{M}_Q \tag{4.62}$$

Es decir, para una partícula material:

"*El momento dinámico de la resultante de las fuerzas que actúan sobre una partícula material respecto a un punto en reposo (o fijo) en un sistema de referencia inercial es igual a la derivada respecto al tiempo del momento cinético de la partícula material respecto al mismo punto*"

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

4.8.3. Teorema del momento cinético respecto a un eje

Consideremos un eje en reposo (o fijo) respecto a un sistema de referencia inercial que atraviesa el punto Q. Sea $\vec{u}_e$ el vector unitario que define la dirección y sentido del eje.

Para una partícula material sometida a una fuerza total $\vec{F}$ se define el momento cinético con respecto a un eje como la proyección del momento cinético con respecto a cualquier punto del eje sobre dicho eje, es decir

$$L_e = \vec{L}_Q \cdot \vec{u}_e \tag{4.63}$$

que es una magnitud escalar, positiva o negativa.

Análogamente, definimos el momento dinámico de la fuerza resultante $\vec{F}$ respecto a un eje como:

$$M_e = \vec{M}_Q \cdot \vec{u}_e \tag{4.64}$$

Ambas magnitudes tienen las mismas dimensiones que el momento cinético y el momento dinámico, $\vec{L}_Q$ y $\vec{M}_Q$ respectivamente, ya que $\vec{u}_e$ es adimensional.

Si multiplicamos la expresión [4.62] escalarmente por $\vec{u}_e$, con $\vec{u}_e$ en reposo, obtenemos

$$\frac{d(\vec{L}_Q \cdot \vec{u}_e)}{dt} = \vec{M}_Q \cdot \vec{u}_e \quad \text{es decir} \quad \frac{dL_e}{dt} = M_e \tag{4.65}$$

La ecuación [4.65] constituye la expresión matemática del teorema del momento cinético respecto a un eje para una partícula material.

4.8.4. Conservación del momento cinético

En el caso en que el momento dinámico $\vec{M}_Q$ sea nulo en la ecuación [4.62], se cumple que

$$\vec{M}_Q = (\vec{r} - \vec{r}_Q) \times \vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{L}_Q}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L}_Q = \overrightarrow{cte} \tag{4.66}$$

que constituye la expresión de la ley de conservación del momento cinético respecto a un punto, cuyo enunciado es:

"*Si el momento dinámico de la fuerza total que actúa sobre una partícula material respecto a un punto fijo en un sistema de referencia inercial es nulo en un intervalo de tiempo, entonces el momento cinético de la partícula respecto a tal punto se mantiene constante a lo largo de ese intervalo*"

El punto en este caso solo puede ser fijo ya que un punto en reposo en un intervalo merece tal consideración. El momento dinámico se anula en los siguientes casos:

a) $\vec{r} - \vec{r}_Q = 0$. Caso trivial de partícula fija en el punto Q.

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

b) $\vec{F} = 0$. Partícula en movimiento rectilíneo y uniforme.

c) $\vec{r} - \vec{r}_Q \parallel \vec{F}$. Puesto que tanto la recta soporte de $\vec{r} - \vec{r}_Q$ como la de $\vec{F}$ contienen al punto que ocupa la partícula, esta condición equivale a que la línea de acción de la fuerza $\vec{F}$ contenga en todo instante al punto Q. Este caso es típico de las fuerzas centrales y lo desarrollaremos más adelante.

De forma similar, si el momento dinámico de $\vec{F}$ respecto a un eje fijo en un sistema inercial se anula en un cierto intervalo, entonces el momento cinético respecto a dicho eje se mantiene constante en ese intervalo (conservación del momento cinético con respecto a un eje). En efecto, de la ecuación [4.65] se obtiene

$$M_e = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dL_e}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad L_e = cte \tag{4.67}$$

A menudo se presentan situaciones en las que el momento cinético $\vec{L}_Q$ no se conserva, pero sí que lo hace su proyección L_e sobre un eje que pase por Q. Así, por ejemplo, si el momento solo tiene componente z: $\vec{M}_Q = M_{Qz}\vec{k}$, de la ecuación [4.66] obtenemos

$$L_{Qx} = cte \quad \text{y} \quad L_{Qy} = cte$$

es decir, L_{Qx} y L_{Qy} se mantienen constantes, pero L_{Qz} cambia. En este caso, podemos obtener información de la ley de conservación del momento cinético a pesar de no conservarse $\vec{L}_Q$.

4.8.5. El teorema del momento cinético en sistemas no inerciales

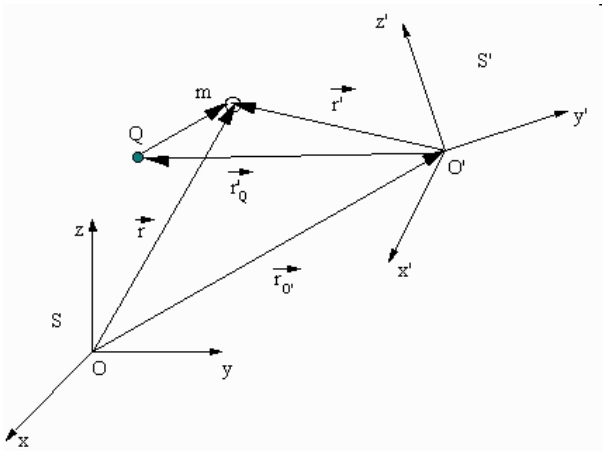


Figura 4.31: Variables del teorema del momento cinético en un sistema no inercial.

Respecto a un punto Q, en un sistema de referencia no inercial S', el momento cinético viene dado por

$$\vec{L}'_Q = (\vec{r}' - \vec{r}'_Q) \times m\vec{v}' \tag{4.68}$$

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

Si derivamos la expresión anterior con respecto al tiempo en *S'*, obtenemos

$$\left(\frac{d\vec{L}'_Q}{dt}\right)_{S'} = \left(\frac{d(\vec{r}' - \vec{r}'_Q)}{dt}\right)_{S'} \times m\vec{v}' + (\vec{r}' - \vec{r}'_Q) \times \left(\frac{d\vec{p}'}{dt}\right)_{S'} \tag{4.69}$$

pero por la ecuación fundamental de la dinámica en sistemas no inerciales, ec. [4.53], se tiene

$$\vec{F} + \vec{F}' = m\vec{a}' = \left(\frac{d\vec{p}'}{dt}\right)_{S'}$$

Definimos el momento dinámico de la fuerza real total $\vec{F}$ y el momento dinámico de la fuerza de inercia $\vec{F}'$, ambos respecto a Q, mediante

$$\vec{M}_Q = (\vec{r}' - \vec{r}'_Q) \times \vec{F}; \quad \vec{M}'_Q = (\vec{r}' - \vec{r}'_Q) \times \vec{F}' \tag{4.70}$$

con lo que de [4.69] y teniendo en cuenta que $\vec{v}' \times m\vec{v}' = 0$ resulta

$$\left(\frac{d\vec{L}'_Q}{dt}\right)_{S'} = -\vec{v}'_Q \times m\vec{v}' + \vec{M}_Q + \vec{M}'_Q \tag{4.71}$$

que es la expresión del teorema del momento cinético respecto a un punto móvil en un sistema no inercial.

En el caso general, el momento de fuerzas de inercia respecto de Q tiene una expresión complicada,

$$\vec{M}'_Q = (\vec{r}' - \vec{r}_Q) \times (-m\vec{a}_{O'} - m\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{r}' - m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}') - 2m\vec{\Omega} \times \vec{v}')$$

Para un sistema no inercial en movimiento de traslación, $\vec{\Omega} = 0$ y $\dfrac{d\vec{\Omega}}{dt} = 0$, queda:

$$\vec{M}'_Q = (\vec{r}' - \vec{r}_Q) \times (-m\vec{a}_{O'}) \tag{4.72}$$

Si *S'* es un sistema inercial en movimiento rectilíneo y uniforme de traslación respecto a S, entonces $\vec{M}'_Q = \vec{0}$ y la ecuación [4.71] equivale a la [4.61], como es evidente.

4.8.6. Relación entre los momentos cinéticos calculados en dos puntos diferentes

Sea una partícula material de masa m tal que su posición en un sistema de referencia inercial S viene dada por el vector de posición $\vec{r}_P$, su cantidad de movimiento por $\vec{p}$ y la fuerza neta que actúa sobre ella por $\vec{F}$.

Consideremos un punto Q móvil, con vector de posición $\overrightarrow{OQ}$ (Fig. 4.32), velocidad $\vec{v}_Q$ y aceleración $\vec{a}_Q$, en el sistema S. En función del momento cinético con respecto al punto O

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

podemos expresar el momento cinético con respecto a cualquier punto del sistema de referencia S mediante el teorema del cambio de polo

$$\vec{L}_Q = \vec{L}_O - \overrightarrow{OQ} \times \vec{p} \tag{4.73}$$

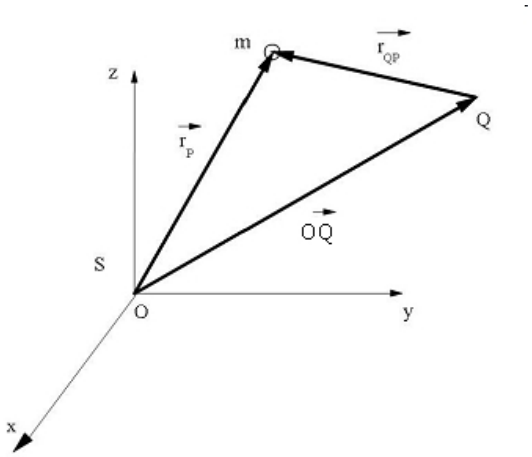


Figura 4.32: Variables del teorema que relaciona momentos calculados respecto a dos puntos diferentes.

y lo mismo para el momento dinámico

$$\vec{M}_Q = \vec{M}_O - \overrightarrow{OQ} \times \vec{F} \tag{4.74}$$

y para cualquier par de puntos, no necesariamente O y Q se tendrían fórmulas análogas.

4.8.7. Fuerzas centrales

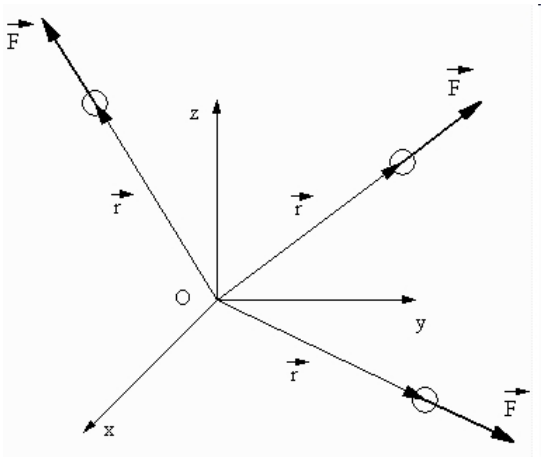


Figura 4.33: Fuerza central.

Decimos que un campo de fuerzas es central cuando las rectas soporte de cualquier fuerza del mismo pasan por un punto O que se llama centro del campo (Fig. 4.33).

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

Si utilizamos O como origen de un sistema de referencia, los vectores fuerza de un campo central pueden ser expresados en cada punto, en función del vector de posición $\vec{r}$ del punto en cuestión, mediante

$$\vec{F} = F\vec{u}_r \quad \text{con} \quad \vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{r}$$

siendo F la proyección de $\vec{F}$ sobre $\vec{u}_r$ y r el módulo del vector de posición del punto.

En la práctica son de gran importancia los campos centrales radiales. Un campo es radial si solo depende de la coordenada radial r (módulo de $\vec{r}$). Así, un campo vectorial central y radial viene expresado como

$$\vec{F}(\vec{r}) = F(r)\vec{u}_r \tag{4.75}$$

y toma los mismos valores en superficies esféricas con centro en O.

Ejemplos de campos estáticos centrales y radiales lo constituyen las fuerzas electrostáticas y gravitatorias creadas por cargas eléctricas o masas en reposo, respectivamente. Veremos, a continuación, algunas características del campo gravitatorio relacionadas con la conservación del momento cinético.

En todo campo central se verifica la conservación del momento cinético respecto al centro del campo O. En efecto, para cualquier punto, se verifica que $\vec{r} \parallel \vec{F}$ (Fig. 4.33) y

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{L}_O = \overrightarrow{cte}$$

En consecuencia, el momento cinético de cualquier partícula, sometida únicamente a la fuerza del campo central, se mantiene constante respecto al centro O.

La expresión de la fuerza de interacción gravitatoria entre dos masas (ec. [4.15]) indica que si las dos son del mismo orden ($m_1 \approx m_2$), al estar sometidas a fuerzas del mismo módulo, reaccionarán con aceleraciones similares de forma que no existe ningún centro estático para los campos de fuerzas creados por cada una de ellas. Sin embargo, si una masa es mucho mayor que la otra ($m_1 >> m_2$) o que otras situadas en sus inmediaciones, el efecto que producen las fuerzas gravitatorias sobre la masa mayor m_1 puede ser despreciable en muchos casos y podemos considerar a m_1 como el centro fijo del campo de fuerzas gravitatorias que crea, que será central, radial y estático. Esta es la situación que se produce, por ejemplo, en el sistema solar, donde la masa del sol es mucho mayor que la masa de los planetas. El sol constituye el centro de un campo gravitatorio central al que están sometidos los planetas.

En consecuencia, el momento cinético del sistema solar respecto al centro del sol es constante y, en particular, el momento cinético de un planeta cualquiera de masa m respecto al centro del sol también es constante a lo largo de su órbita:

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times m\vec{v} = \overrightarrow{cte}$$

El hecho de que $\vec{L}_O$ sea constante en dirección implica que la trayectoria de un planeta es plana, lo que justifica en parte la primera ley de Kepler:

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

"Las órbitas de los planetas son elipses, en uno de cuyos focos está situado el sol".

Del hecho de que el módulo de $\vec{L}_O$ sea constante, podemos deducir la segunda ley de Kepler:

"El vector de posición de cualquier planeta con respecto al sol barre áreas iguales en tiempos iguales".

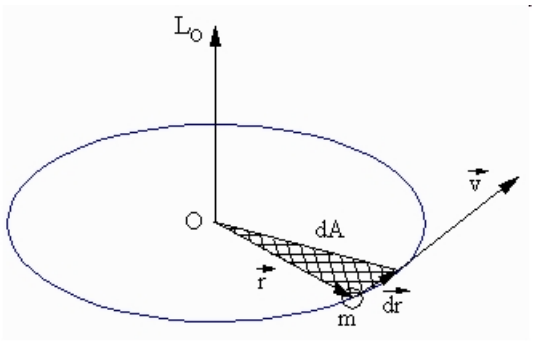


Figura 4.34: Área barrida por el radio vector.

Definimos la velocidad areolar como la velocidad con la que el radio vector con origen en el sol y extremo acompañando al planeta barre áreas (Fig. 4.34).

Si el radio vector barre un área ΔA en el tiempo Δt, la velocidad areolar es:

$$v_A = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{dA}{dt}$$

e incluso, si las áreas barridas son planas, como en nuestro caso, se puede definir el vector velocidad areolar mediante

$$\vec{v}_A = \frac{d\vec{A}}{dt}$$

siendo $d\vec{A}$ el vector área plana que representa el área dA barrida en el límite $\Delta t \to 0$.

El módulo del momento cinético del planeta respecto al centro del sol es

$$\left|\vec{L}_O\right| = m\left|\vec{r} \times \vec{v}\right| = m\left|\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}\right|$$

pero como el área dA viene dada por

$$dA = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times d\vec{r}\right|$$

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

(véase Fig. 4.34), resulta que

$$v_A = \frac{dA}{dt} = \frac{\left|\vec{L}_O\right|}{2m} = cte$$

Es más, dado que $\vec{L}_O$ es perpendicular a la órbita, es paralelo a $\vec{v}_A$ y, en consecuencia,

$$\vec{v}_A = \frac{\vec{L}_O}{2m} = \overrightarrow{cte}$$

donde, además, el vector área $d\vec{A}$ tiene sentido definido por la regla del sacacorchos en función del sentido de recorrido de la órbita del planeta.

La tercera ley de Kepler dice:

> ***"Los cuadrados de los periodos de revolución son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de las elipses que describen los planetas".***

La justificaremos para el caso particularmente simple de una órbita circular a partir de la ley de gravitación universal y de la segunda ley de Newton.

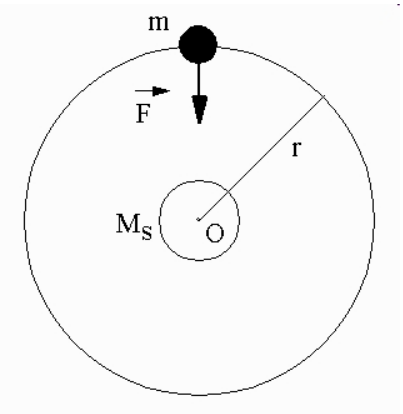


Figura 4.35: Fuerza sobre un planeta en su giro alrededor del sol en una órbita circular.

Sea un planeta de masa m que describe una órbita circular de radio r en torno al sol, fijo, de masa M_S. Respecto a un sistema inercial con origen en el centro del sol, la única fuerza que actúa sobre el planeta tiene por módulo

$$F = G\frac{M_S m}{r^2}$$

y su sentido es el indicado en la Fig. 4.35. Como la órbita es circular y el movimiento del planeta uniforme, éste tiene únicamente aceleración centrípeta, de valor

$$a_C = \omega^2 r = \frac{4\pi^2}{T^2} r$$

siendo ω la velocidad angular de rotación y T el período de revolución del planeta. Aplicando la segunda ley de Newton, $\vec{F} = m\vec{a}_C$, queda

$$G\frac{M_S m}{r^2} = m\frac{4\pi^2}{T^2} r \quad \Rightarrow \quad \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S}$$

es decir, la razón T^2/r^3 vale lo mismo para todos los planetas del sistema solar (lo hemos demostrado solo para órbitas circulares, pero es válido también para órbitas elípticas). Se sugiere resolver el mismo ejemplo utilizando un sistema no inercial ligado al planeta.

4.9. Percusiones

4.9.1. Percusiones y cantidad de movimiento

Llamaremos percusión $\vec{P}$ al impulso mecánico producido por una fuerza $\vec{F}(t)$ de duración tan breve que se pueda considerar aproximadamente instantánea. Es decir:

$$\vec{P} = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \vec{F} dt \ \text{ con } \Delta t \to 0$$

Si $\vec{P}$ es la percusión que actúa sobre una partícula de masa m, aplicando el teorema de la cantidad de movimiento [4.56], obtenemos

$$\vec{P} = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \vec{F} dt = \vec{p}(t_0 + \Delta t) - \vec{p}(t_0) = \Delta\vec{p} = m\Delta\vec{v} \tag{4.76}$$

es decir, la percusión impone a la partícula una variación de velocidad $\Delta\vec{v}$, instantánea en el caso límite $\Delta t \approx 0$. Tal variación supone, en este caso ideal, una discontinuidad en la velocidad cosa que, al no ser posible en la práctica, representa únicamente una aproximación, válida en ciertos casos, de la situación en ese límite de percusión instantánea.

Podemos aproximar mediante percusiones los impulsos producidos por fuerzas de muy poca duración y de valor apreciable, como las que aparecen en el impacto entre dos esferas rígidas o en un golpe rápido de un martillo sobre un objeto rígido. En cualquier caso, la fuerza $\vec{F}$ que produce la percusión, procede de la interacción entre dos objetos y verifica la tercera ley de Newton, de forma que

$$\vec{P}_{12} = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \vec{F}_{12} dt = -\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \vec{F}_{21} dt = -\vec{P}_{21} \tag{4.77}$$

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

Cuando una percusión actúa sobre una partícula se debe cumplir con suficientemente buena aproximación que:

a) La duración es casi nula, $\Delta t \approx 0$ (Δt=0 en el caso límite ideal).

b) El cambio de velocidad de la partícula es casi instantáneo.

c) La posición de la partícula no cambia apreciablemente en Δt.

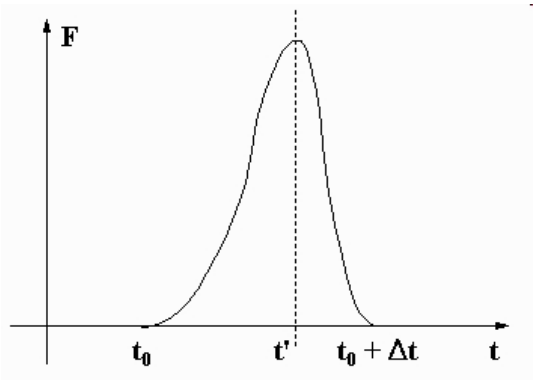


Figura 4.36: Fuerza en función del tiempo para una percusión.

Si conociéramos la forma de la función $\vec{F}(t)$ en el intervalo $[t_0,\ t_0+\Delta t]$, podríamos calcular la percusión $\vec{P}$ por integración, pero en la práctica tal función suele ser desconocida. La Fig. 4.36 muestra cualitativamente una forma típica de función fuerza para percusiones como las indicadas en los ejemplos señalados.

El módulo de $\vec{F}(t)$ crece hasta un máximo $F(t')$ y se anula en los extremos del intervalo $[t_0,t_0+\Delta t]$. Por supuesto, cualquier tipo de función fuerza, distinta de la anterior, de duración muy breve y cuyo impulso mecánico $\vec{P}$ no sea despreciable, puede ser también considerada como una percusión.

Cuando sobre una partícula de masa m, en reposo, actúa una percusión $\vec{P}$, en t=0, el efecto que produce es comunicarle una velocidad inicial $\vec{v}_0$ (Fig. 4.37) sin que su posición cambie prácticamente.

Figura 4.37: Una partícula que recibe una percusión no cambia su posición, sí su velocidad.

En este ejemplo, el valor de v_0 viene dado por

$$v_0 = \frac{P}{m} = \frac{1}{m}\int_0^{\Delta t} F dt \quad (\text{con } \Delta t \to 0)$$

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

En la Fig. 4.38 se muestra la situación real (a) producida por la percusión y la situación ideal (b) por la que la aproximaremos (se ha supuesto que para $t > \Delta t$ no actúa ninguna fuerza sobre m y v es constante).

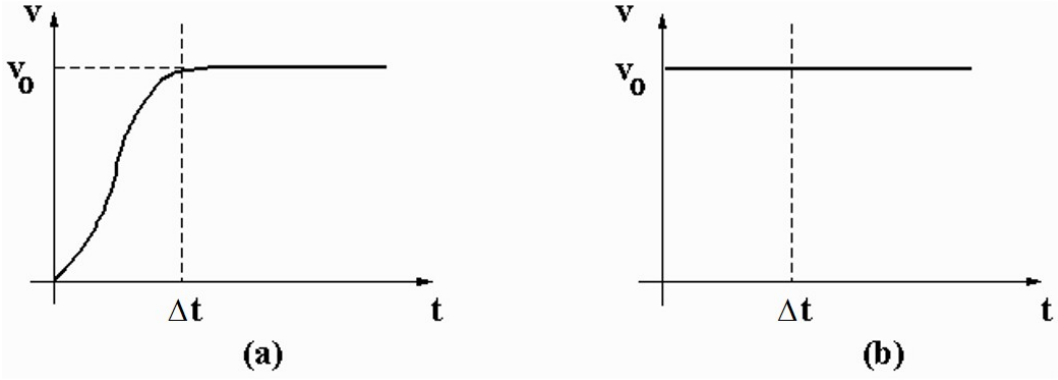


Figura 4.38: Comportamiento real e ideal de la velocidad tras una percusión.

4.9.2. Percusiones y momento cinético

Cuando una percusión $\vec{P}$ actúa sobre una partícula material se produce una variación del momento cinético (Fig. 4.39).

Se puede obtener una expresión sencilla, válida en ciertos casos, de tal variación utilizando las aproximaciones indicadas para percusiones. En efecto, aplicando el teorema del momento cinético a la partícula, respecto al punto fijo Q, obtenemos

$$\left((\vec{r} - \vec{r}_Q) \times \vec{F}\right) dt = d\vec{L}_Q$$

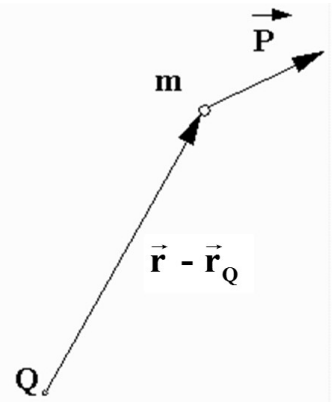


Figura 4.39: Percusión sobre una partícula.

donde hemos supuesto que está sometida únicamente a la fuerza $\vec{F}$ que crea la percusión. Integramos la ecuación anterior en el intervalo donde está definida $\vec{F}$ y resulta

$$\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \left((\vec{r} - \vec{r}_Q) \times \vec{F}\right) dt = \vec{L}_Q(t_0 + \Delta t) - \vec{L}_Q(t_0) = \Delta\vec{L}_Q$$

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

Como $\vec{r}$ permanece aproximadamente constante en el intervalo de integración

$$\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \left((\vec{r}-\vec{r}_Q)\times\vec{F}\right) dt = (\vec{r}-\vec{r}_Q)\times \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \vec{F}dt = (\vec{r}-\vec{r}_Q)\times\vec{P}$$

queda:

$$(\vec{r}-\vec{r}_Q)\times\vec{P} = \Delta\vec{L}_Q \tag{4.78}$$

es decir, el momento dinámico del vector percusión respecto al punto Q es igual al cambio del momento cinético respecto a Q producido por tal percusión.

4.10. Trabajo y energía mecánica

4.10.1. Trabajo de una fuerza

Se define el trabajo realizado por una fuerza $\vec{F}$ constante, cuyo punto de aplicación se desplaza en línea recta a lo largo de una distancia representada por el vector desplazamiento $\Delta\vec{r}$, Fig. 4.40, como

$$W = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r} = F\Delta r\cos\alpha \tag{4.79}$$

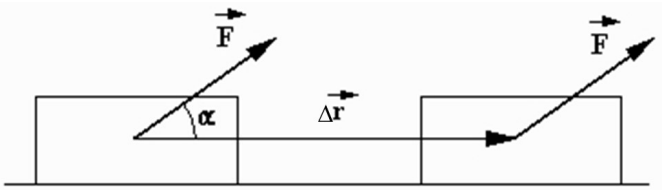


Figura 4.40: Trabajo sobre una partícula de una fuerza constante.

La definición anterior se refiere solo a la fuerza y a su desplazamiento rectilíneo $\Delta\vec{r}$. En la figura se ha representado a la fuerza actuando sobre un bloque en movimiento rectilíneo de traslación. Esta es la situación que se nos presentará en dinámica: el trabajo W de la fuerza actuará sobre algún cuerpo, que en algunos casos se podrá reducir a una partícula material, como en el caso de la figura, y en otros no, debido a que el movimiento no será de traslación, como sucederá para un sólido rígido con rotación.

El trabajo W definido en [4.79] puede ser positivo o negativo, ya que el ángulo α puede variar entre 0 y π radianes. Como casos particulares tenemos:

a) Si $\alpha = 0 \Rightarrow W = F\Delta r$ y el trabajo es máximo.

b) Si $\alpha = \pi/2 \Rightarrow \ W = 0$ y el trabajo es nulo.

c) Si $\alpha = \pi \Rightarrow W = -F\Delta r$ y el trabajo es mínimo, es decir, de valor absoluto máximo y negativo.

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

La definición [4.79] está muy restringida por las condiciones impuestas en ella. En el caso general la fuerza $\vec{F}(\vec{r},\vec{v},t)$ no será constante y el desplazamiento de su punto de aplicación tendrá lugar a lo largo de una curva cualquiera C definida mediante el extremo de un vector de posición $\vec{r}(t)$, (Fig. 4.41). Si se divide la curva C entre dos puntos 1 y 2, de vectores de posición $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ en un conjunto numerable de N elementos, cada uno de ellos abarcando un arco Δs_i de la curva y definimos $\vec{r}_i$ como el vector con origen fijo en O y cuyo extremo está en cualquier punto perteneciente al elemento de curva Δs_i, $\vec{F}_i$ como el vector fuerza en cualquier punto del elemento de curva Δs_i y $\Delta\vec{r}_i$ como el vector con origen en el primer punto del elemento Δs_i y extremo en su último punto, se puede aplicar aproximadamente la definición [4.79] a cada elemento de curva

$$\Delta W_i = \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i \tag{4.80}$$

siempre que la división de la curva se haga en elementos suficientemente pequeños (N grande), en cuyo caso $|\Delta\vec{r}_i| \approx \Delta s_i$, y que la función fuerza no varíe demasiado bruscamente, de forma que su valor a lo largo del elemento Δs_i se pueda considerar aproximadamente constante en módulo, dirección y sentido. En particular, $\vec{F}$ no podrá ser discontinua en ningún punto interior del elemento de curva.

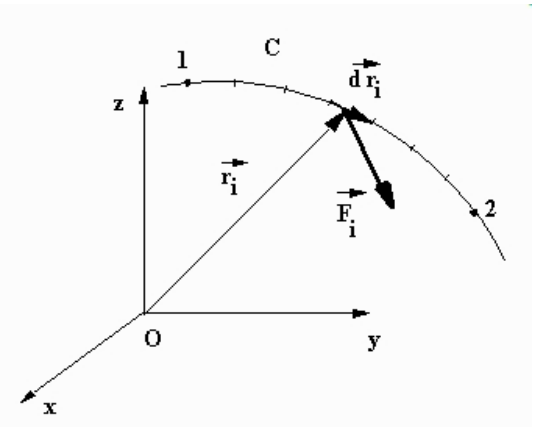


Figura 4.41: Trabajo sobre una partícula.

La expresión aproximada [4.80] solo será precisa en el límite en el que la longitud del elemento tiende a cero, lo que implica que $ds = |d\vec{r}|$ y la podamos escribir como

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{4.81}$$

para cada elemento ds. El símbolo δW representa el trabajo infinitesimal realizado por la fuerza $\vec{F}$ en el desplazamiento $d\vec{r}$ de su punto de aplicación. Se utiliza δW en lugar de dW porque W no es una función, en general, y en consecuencia δW no es la diferencial exacta de una función.

La expresión aproximada del trabajo total de la fuerza $\vec{F}$ cuando su punto de aplicación se desplaza a lo largo de la curva C entre los puntos 1 y 2 se obtiene sumando las expresiones [4.80] para todos los elementos de curva

$$W_{12} \approx \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i$$

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

Para obtener una definición precisa se debe exigir que la longitud de todos y cada uno de los elementos tienda a cero, para lo cual basta imponer que N tienda a infinito, siendo todos los Δs_i de la misma longitud aproximadamente. Es decir

$$W_{12} = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i \tag{4.82}$$

Cada término $\vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i$ tiende, en el límite, a la ecuación [4.81]. La expresión [4.82] es la integral de línea de la función vectorial a lo largo de la curva C entre sus puntos 1 y 2:

$$W_{12} = \int_{1_C}^{2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{4.83}$$

y representa el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$ al desplazarse su punto de aplicación entre los puntos 1 y 2 a lo largo de la curva C.

El trabajo W_{12} realizado por una fuerza depende de la trayectoria C que sigue su origen, como es evidente a partir de la definición [4.83]. Dadas dos trayectorias diferentes C y C^* se verifica:

$$\int_{1_C}^{2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \neq \int_{1_{C^*}}^{2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{4.84}$$

lo que en principio parece exigir que la notación de la magnitud escalar trabajo debería incluir la trayectoria C además de los puntos inicial y final, expresándose la ecuación [4.84] en la forma

$$W_{12}^{C} \neq W_{12}^{C^*} \tag{4.85}$$

No obstante, emplearemos habitualmente la notación más simple W para el trabajo, siempre que no pueda dar lugar a confusión y teniendo en cuenta implícitamente su dependencia de la trayectoria y de los puntos inicial y final.

De la ecuación [4.83] se deduce que el trabajo de la fuerza $\vec{F}$, entre dos puntos de una trayectoria C, cambia de signo si el recorrido se hace en sentido inverso, es decir,

$$W_{12}^{C} = \int_{1_C}^{2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{2_C}^{1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -W_{21}^{C} \tag{4.86}$$

ya que $\vec{F}$ no cambia y el $d\vec{r}$ cambia de sentido.

Las ecuaciones [4.84] y [4.85] indican que el trabajo no es una función y que, en consecuencia, no está definida su diferencial. En particular se deduce de ellas que el trabajo a lo largo de una trayectoria cerrada es, en general, no nulo.

Sea una trayectoria cerrada C. Considerémosla dividida en dos trayectorias no cerradas C' y C'' entre dos puntos 1 y 2 (Fig. 4.42). Las expresiones del trabajo de una fuerza a lo largo de las curvas C' y C'', empleando el mismo sentido de recorrido para la curva total C, vienen dadas por

$$W_{12}^{\text{C'}} = \int_{1_{\text{C'}}}^{2} \vec{F} \cdot d\vec{r}; \qquad W_{12}^{\text{C''}} = \int_{1_{\text{C''}}}^{2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

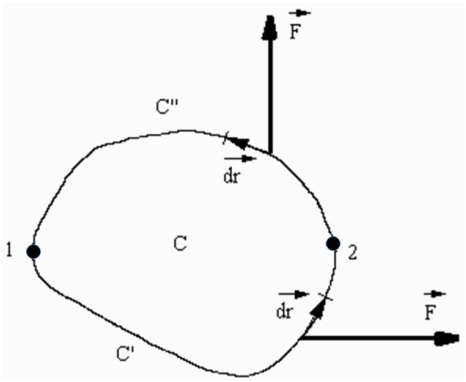


Figura 4.42: Trabajo sobre una partícula a lo largo de diferentes caminos.

El trabajo total a lo largo de la trayectoria C es

$$W^{\text{C}} = \oint_{\text{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = W_{12}^{\text{C'}} + W_{21}^{\text{C''}}$$

y como de [4.85] y [4.86] se tiene que

$$W_{12}^{\text{C'}} \neq W_{12}^{\text{C''}} = -W_{21}^{\text{C''}}$$

resulta

$$W^{\text{C}} = \oint_{\text{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \neq 0 \tag{4.87}$$

Existen, no obstante, casos particulares en los que la expresión [4.87] es nula para cualquier posible trayectoria cerrada y corresponden a fuerzas conservativas, que se tratarán más adelante (apartado 4.10.4). En estos casos, el trabajo no depende de la trayectoria C sino solo de los puntos inicial y final (1 y 2) y el trabajo infinitesimal δW corresponde a la diferencial de una función.

La ecuación de dimensiones del trabajo viene dada por

$$[W] = [F][r] = (\text{LMT}^{-2})\text{L} = \text{L}^2\text{MT}^{-2}$$

y su unidad en el SI correspondiente se denomina Julio:

$$1\ \text{J} = 1\ \text{N·m} = 1\ \text{m}^2\text{·kg·s}^{-2}$$

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

4.10.2. Potencia mecánica

La potencia mecánica es una magnitud escalar que tiene en cuenta simultáneamente el trabajo realizado por una fuerza o sistema de fuerzas y el tiempo empleado en realizarlo. Se utiliza habitualmente como magnitud característica de las máquinas.

Supongamos que una fuerza o sistema de fuerzas realiza un trabajo total ΔW en un tiempo Δt. Se define su potencia media como

$$P_m = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

El trabajo realizado ΔW experimenta variaciones, en general, a lo largo del intervalo de tiempo Δt. Se define la potencia instantánea como

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\delta W}{dt} \tag{4.88}$$

que no cabe interpretar como la derivada de W con respecto al tiempo, dado que W no es una función en el caso general. Solo cabría tal interpretación si la fuerza o sistema de fuerzas están obligadas a trabajar de una forma y a lo largo de una trayectoria definidas.

En ocasiones la potencia se puede considerar debida al efecto de una fuerza única $\vec{F}$ que realiza trabajo. En este caso se puede aplicar el modelo de partícula material estrictamente (representando un cuerpo en movimiento de traslación sometido a la fuerza total $\vec{F}$).

En estas circunstancias la ec. [4.88] se puede escribir como

$$P = \frac{\delta W}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \tag{4.89}$$

y la potencia es igual a la fuerza que realiza el trabajo multiplicada escalarmente por la velocidad con que se mueve su punto de aplicación.

Hay otros casos en que tal expresión no es aplicable, como sucede en el trabajo que realiza un par de fuerzas, de momento $\vec{M}$, que es un sistema de resultante nula. Es fácil demostrar que en este supuesto

$$P = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$$

siendo $\vec{\omega}$ la velocidad angular instantánea del cuerpo sobre el que actúa el par. En una situación general, la potencia se deberá al trabajo de una fuerza y de un par resultantes y habrá que tener en cuenta ambos efectos.

El rendimiento mecánico de una máquina se define como

$$\eta = \frac{\text{potencia producida}}{\text{potencia absorbida}}$$

y representa el porcentaje de potencia útil teniendo en cuenta las pérdidas en los elementos de la máquina. Si la potencia es constante, la expresión anterior equivale a

$$\eta = \frac{\text{trabajo producido}}{\text{trabajo absorbido}}$$

El rendimiento siempre es menor que la unidad.

La ecuación de dimensiones de la potencia es

$$[P] = [W][t^{-1}] = (\mathrm{L^2MT^{-2}})(\mathrm{T^{-1}}) = \mathrm{L^2MT^{-3}}$$

y su unidad en el SI se denomina vatio y es igual a

$$1\ \mathrm{W} = 1\ \mathrm{J{\cdot}s^{-1}} = 1\ \mathrm{m^2 \cdot kg{\cdot}s^{-3}}$$

Otras unidades de potencia son

$$1\ \mathrm{kgm{\cdot}s^{-1}} = 9.8\ \mathrm{W}$$

$$1\ \mathrm{CV} = 75\ \mathrm{kgm{\cdot}s^{-1}} = 736\ \mathrm{W} = 0.736\ \mathrm{kW}$$

$$1\ \mathrm{HP} = 746\ \mathrm{W}$$

Toda unidad de potencia, multiplicada por una unidad de tiempo, representa una unidad de trabajo (o energía). En particular:

$$1\ \mathrm{kW{\cdot}h} = 3.6{\cdot}10^6\ \mathrm{J}$$

$$1\ \mathrm{MW{\cdot}h} = 3.6{\cdot}10^9\ \mathrm{J}$$

4.10.3. Teorema de la energía cinética

Para una partícula material de masa m cuya trayectoria está referida a un sistema inercial S, el trabajo de la resultante $\vec{F}$ de las fuerzas que actúan sobre ella, entre dos instante t_1 y t_2, verifica que

$$W = \int_{1_C}^{2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = m \int_{1_C}^{2} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} \tag{4.90}$$

donde C representa la trayectoria que sigue la partícula en el sistema S.

Teniendo en cuenta el cambio de variable

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot d\vec{v} = \vec{v} \cdot d\vec{v} = d\left(\frac{v^2}{2}\right)$$

la ecuación [4.90] se reduce a

$$W = \int_{1_C}^{2} d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{1}{2}mv^2(2) - \frac{1}{2}mv^2(1) \tag{4.91}$$

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

Se define la energía cinética de la partícula como

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \tag{4.92}$$

y es fácil comprobar que tiene la misma ecuación de dimensiones que el trabajo.

De [4.91] y [4.92] resulta

$$W = E_c(2) - E_c(1) = \Delta E_c \tag{4.93}$$

que constituye la expresión del teorema de la energía cinética cuyo enunciado es:

"*El trabajo realizado por la resultante de las fuerzas que actúan sobre un partícula material, en un sistema de referencia inercial y entre dos instantes t_1 y t_2, es igual a la variación de la energía cinética de la partícula en ese intervalo*"

El teorema anterior se cumple siempre para una partícula material, cualesquiera que sean las fuerzas que actúan sobre ella y es generalizable, con ciertas matizaciones, al caso de sistemas de partículas y de sólidos rígidos, como se verá más adelante. La ecuación [4.93] permite medir la energía cinética en las mismas unidades que el trabajo.

El trabajo y la energía cinética son magnitudes que cambian ante cambios de sistemas de referencia inerciales en movimiento rectilíneo uniforme de traslación entre sí. No obstante, el teorema de la energía cinética se cumple en cualquier sistema de referencia inercial.

Sean dos sistemas de referencia inerciales S y S', tales que S' sigue un movimiento de traslación respecto a S con velocidad constante $\vec{V}$. Dada una partícula material de masa M, sus trayectorias son diferentes en ambos sistemas. Se propone como ejercicio demostrar que

$$E_c = E'_c + (1/2)MV^2 + M\vec{v}' \cdot \vec{V}$$

$$W = W' + \vec{V} \cdot \vec{I}$$

siendo E_c y E'_c las energías cinéticas y W y W' los trabajos de la fuerza resultante en los sistemas S y S', respectivamente, $\vec{v}'$ la velocidad de la partícula en el sistema S' e $\vec{I}$ el impulso de la fuerza resultante, en el intervalo de tiempo en el que se calcula el trabajo.

4.10.4. Fuerzas conservativas. Energía potencial

A pesar de que en el caso general, el trabajo depende de la trayectoria (ec. [4.84]), existen ciertas fuerzas para las que el trabajo entre dos puntos 1 y 2 vale lo mismo para toda posible trayectoria que conecte esos dos puntos. A tales fuerzas se les llama fuerzas conservativas y verifican que

$$W_{12}^{\mathrm{C}} = \int_{1_{\mathrm{C}}}^{2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{1_{\mathrm{C}^*}}^{2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = W_{12}^{\mathrm{C}^*} \tag{4.94}$$

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

para todas las posibles curvas C y C^* entre 1 y 2.

Como consecuencia de ello, el trabajo de una fuerza conservativa es nulo para toda trayectoria cerrada

$$W = \oint_{\mathrm{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \forall \mathrm{C\ cerrada} \tag{4.95}$$

Si una fuerza es conservativa, el trabajo que realiza al desplazarse su punto de aplicación entre dos puntos 1 y 2 no depende del camino C seguido, sino únicamente de los puntos inicial y final.

Es posible, en este caso, definir una función de la posición, la **energía potencial** asociada a tal fuerza, que verifique

$$W_{12} = \int_{1_{\mathrm{C}}}^{2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{1_{\mathrm{C}}}^{2} dE_p = E_p(1) - E_p(2) \tag{4.96}$$

donde por $E_p(1)$ se entiende el valor de la energía potencial en el punto 1, $E_p(1)$=$E_p(x_1,y_1,z_1)$=$E_p(\vec{r}_1)$, y análogamente para $E_p(2)$.

Una fuerza conservativa definida en una región del espacio determina en tal región el campo escalar de su energía potencial $E_p(x,\ y,\ z)$. Este campo no está unívocamente determinado, ya que la ecuación [4.96] define la diferencia, y no valores absolutos de la energía potencial. Por lo tanto, si $E_p(\vec{r})$ representa la función energía potencial asociada a una fuerza conservativa, también lo hace $E_p(\vec{r})$+A, siendo A cualquier constante. Para definir sin ambigüedad una función energía potencial es necesario adoptar alguna referencia que permita determinar el valor de la constante A o, para simplificar más aún, anularla. Si la referencia viene dada por la condición impuesta al valor de la energía potencial en un cierto punto (x_0, y_0, z_0):

$$E_{p0} = E_p(x_0, y_0, z_0)$$

entonces la función energía potencial en cualquier otro punto es

$$E_p(x, y, z) = E_{p0} - \int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{4.97}$$

como se puede comprobar fácilmente de la ecuación [4.96]. En muchas ocasiones se suele utilizar como referencia el criterio $E_p(r \to \infty) = 0$. No obstante, funciones energía potencial que difieran entre sí en el valor de una constante cualquiera representan igualmente bien la energía potencial asociada a una fuerza conservativa.

La ecuación [4.96], que define el trabajo como la diferencia de energía potencial para fuerzas conservativas, permite medir la energía potencial en las mismas unidades que el trabajo y la energía cinética. Expresada en forma diferencial se reduce a

$$\delta W = -dE_p \tag{4.98}$$

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

lo que indica que el trabajo infinitesimal es igual a menos la diferencial de la función energía potencial, en este caso. Conocida la forma de esta función podremos calcular fácilmente el trabajo realizado por la fuerza conservativa entre dos puntos cualesquiera.

La interacción entre dos partículas 1 y 2 se produce mediante un par de acción y reacción $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ y este par representa una interacción de fuerzas conservativas mediante una única energía potencial $E_p^{12} = E_p^{21}$ que representa la energía total de la interacción entre las dos partículas. La notación E_p^{12} es más completa que E_p, pero emplearemos esta última siempre que no haya riesgo de confusión.

Teniendo en cuenta que en un desarrollo en serie de primer orden de una función de varias variables, podemos escribir el diferencial en función de las derivadas parciales de la forma:

$$dE_p = \frac{\partial E_p}{\partial x}dx + \frac{\partial E_p}{\partial y}dy + \frac{\partial E_p}{\partial z}dz$$

$$dE_p = \text{grad}\, E_p \cdot d\vec{r}$$

donde $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ y $\text{grad}\, E_p = \frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k}$. De la ec. [4.96] se obtiene inmediatamente que:

$$\vec{F} = -\text{grad}\, E_p = -\nabla E_p \tag{4.99}$$

donde se ha usado el operador matemático nabla ($\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$) para expresar el operador gradiente. De esta manera, el vector fuerza a partir de la energía potencial se obtiene en coordenadas cartesianas como:

$$\vec{F} = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k}$$

Inmediatamente se puede comprobar que el operador rotacional de esta fuerza conservativa es nulo, usando por ejemplo coordenadas cartesianas se tiene que:

$$\text{rot grad}\, E_p = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \partial E_p/\partial x & \partial E_p/\partial y & \partial E_p/\partial z \end{vmatrix} = 0$$

También se puede demostrar la implicación en sentido inverso, es decir, que si la fuerza $\vec{F}$ tiene rotacional cero existe una función energía potencial tal que se verifica la ec. [4.99]. De esta manera una fuerza conservativa se puede definir como aquella que verifica que su rotacional es cero:

$$\text{rot}\, \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = 0$$

donde se ha usado el operador nabla para obtener el operador rotacional.

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

4.10.5. Algunos ejemplos de fuerzas conservativas

A. Campo de fuerzas uniforme

Un campo de fuerzas es uniforme cuando toma el mismo valor $\vec{F} = \overrightarrow{cte}$ en todos los puntos de la región donde está definido. Un campo uniforme se representa gráficamente mediante líneas de fuerza rectas, paralelas y equidistantes (Fig. 4.43).

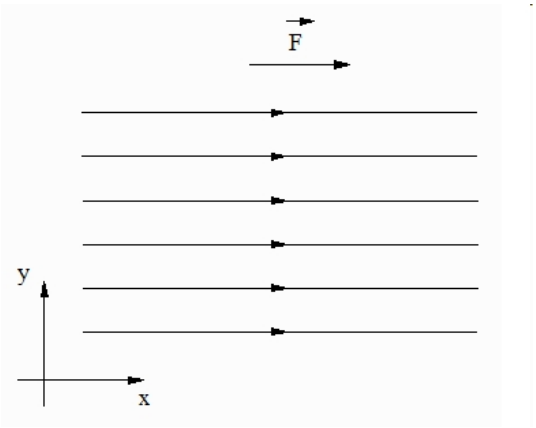


Figura 4.43: Campo de fuerzas uniforme.

Todo campo $\vec{F}$ uniforme tiene una energía potencial E_p asociada. Puesto que $\vec{F}$ solo actúa en la dirección OX de la Fig. 4.43, la energía potencial depende exclusivamente de la variable x. En este caso se puede escribir

$$F = -\frac{dE_p}{dx} \tag{4.100}$$

es decir

$$\int_1^2 dE_p = -\int_{x_1}^{x_2} F dx \quad \Rightarrow \quad E_p(2) - E_p(1) = -F(x_1 - x_2) \tag{4.101}$$

lo que permite obtener la energía potencial como

$$E_p(x) = -Fx + A$$

donde A se puede determinar mediante algún criterio de referencia. Por ejemplo, si $E_p(x{=}0){=}0$, entonces $A = 0$ y

$$E_p(x) = -Fx \tag{4.102}$$

aunque ambas expresiones son equivalentes. Como se ve claramente en este ejemplo, la fuerza $\vec{F}$ tiene un sentido tal que apunta hacia valores decrecientes de la energía potencial.

El caso de campos de fuerza uniformes supone una situación teórica ideal que en ocasiones representa aproximadamente bien situaciones reales. Así, si consideramos una región del espacio

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

próxima a la superficie de la tierra, y no demasiado extensa, entonces en ella el campo de gravedad terrestre $\vec{g}$ se puede considerar uniforme con buena aproximación de manera que crea sobre una partícula de masa m una fuerza constante $\vec{F} = m\vec{g} = -mg\vec{k}$, en un sistema de referencia en el que el eje OZ sea vertical y su sentido ascendente. En este caso la expresión [4.102] se transforma en

$$E_p(z) = -mgz \tag{4.103}$$

con la referencia implícita $E_p(z = 0) = 0$, que es la conocida expresión de la energía potencial de una masa m sometida a la gravedad, en las proximidades de la superficie de la tierra.

B. Campo gravitatorio

Todo campo de fuerzas $\vec{F}(r)$ central y radial es conservativo. En particular, el campo gravitatorio $\vec{g}$, que representa en cada punto la fuerza por unidad de masa (ec. [4.16]), es conservativo, como ya se vio en la sección 4.3.2.

Dado un campo gravitatorio $\vec{g}(r)$, el potencial gravitatorio $V_g(r)$, que representa la energía potencial por unidad de masa, será también radial y, en este caso, la ecuación [4.100] se reduce a

$$\vec{g}(r) = -\frac{dV_g}{dr}\vec{u}_r \tag{4.104}$$

siendo $\vec{u}_r$ un vector unitario asociado al vector de posición del punto que estamos considerando (unitario radial de coordenadas esféricas) y con origen en el centro del campo. La ecuación anterior equivale a

$$-G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r = -\frac{dV_g}{dr}\vec{u}_r$$

es decir,

$$dV_g = GM\frac{dr}{r^2}$$

Adoptando como referencia $V_g(r \to \infty) = 0$ e integrando, obtenemos

$$V_g(r) = -GM\int_{\infty}^{r}\frac{dr}{r^2} = -G\frac{M}{r} \tag{4.105}$$

que representa la función potencial gravitatorio asociada con el campo $\vec{g}(r)$ que crea la masa M. La energía potencial de interacción gravitatoria entre la masa M y otra masa m situada a una distancia r de ella viene dada por

$$E_p(r) = mV_g(r) = -G\frac{mM}{r} \tag{4.106}$$

donde el signo menos indica que la interacción se manifiesta mediante dos fuerzas de acción y reacción atractivas, actuando sobre cada una de las masas. Toda energía potencial positiva representa fuerzas de interacción repulsivas y viceversa.

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

En la expresión de la energía potencial de interacción entre dos masas (ec. [4.106]), se observa que el valor absoluto de E_p decrece con el inverso de r y está definido para cualquier distancia, salvo para $r = 0$. Decimos que este punto de la función $E_p(r)$ presenta una singularidad. En la Fig. 4.44 se representa la función potencial $V_g(r)$ debida a la masa M situada en $r = 0$ y la energía potencial de interacción entre ella y otra masa m, en los casos m<1 y m>1, en función de la distancia r entre ambas.

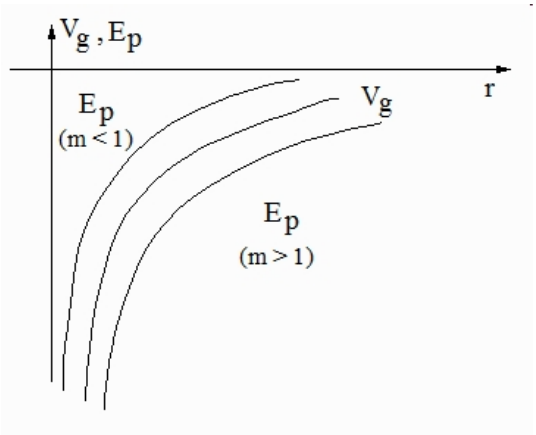


Figura 4.44: Energía potencial gravitatoria.

C. Muelle ideal

La fuerza que ejerce un muelle ideal (ec. [4.42]) se comporta como una fuerza conservativa. Su energía potencial elástica es fácil de calcular. Como

$$dE_p(x) = -Fdx = kxdx$$

integrando, resulta

$$E_p(x_2) - E_p(x_1) = -\int_{x_1}^{x_2} kxdx = \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2$$

con lo que se puede definir una energía potencial $E_p(x)$, función de la elongación del muelle, como

$$E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2 \tag{4.107}$$

con la referencia implícita de $E_p(x{=}0) = 0$, es decir, la energía potencial es nula cuando el muelle está en su longitud natural.

4.10.6. El teorema de la energía mecánica

A las fuerzas que no son conservativas se las denomina fuerzas disipativas. Sobre una partícula material pueden actuar fuerzas conservativas, $\vec{F}_C$, y fuerzas disipativas, $\vec{F}_D$, siendo la

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

fuerza resultante total $\vec{F} = \vec{F}_C + \vec{F}_D$. Esta fuerza verifica el teorema de la energía cinética, ec. [4.93] donde la curva que recorre la partícula es Γ:

$$W = \int_{1_\Gamma}^{2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{1_\Gamma}^{2} \vec{F}_C \cdot d\vec{r} + \int_{1_\Gamma}^{2} \vec{F}_D \cdot d\vec{r} = E_c(2) - E_c(1) \tag{4.108}$$

Si denotamos los trabajos debidos a fuerzas conservativas y disipativas como

$$W_C = \int_{1_\Gamma}^{2} \vec{F}_C \cdot d\vec{r}; \quad W_D = \int_{1_\Gamma}^{2} \vec{F}_D \cdot d\vec{r}$$

la ecuación [4.108] se puede escribir en forma simplificada como

$$W = W_C + W_D = E_c(2) - E_c(1) \tag{4.109}$$

El trabajo de fuerzas disipativas depende de la trayectoria y el de fuerzas conservativas no, luego su suma, que representa el trabajo total W depende de la trayectoria (excepto en el caso trivial en el que solo actúen fuerzas conservativas).

Como por la ecuación [4.96] se verifica

$$W_C = E_p(1) - E_p(2)$$

la ec. [4.109] se puede escribir como

$$W_D = (E_c(2) + E_p(2)) - (E_c(1) + E_p(1)) \tag{4.110}$$

Definimos la energía mecánica de la partícula como

$$E = E_c + E_p \tag{4.111}$$

que es una función de la velocidad, a través de E_c, y de la posición, a través de E_p. En función de ella, la ecuación [4.110] toma la forma

$$W_D = E(2) - E(1) \tag{4.112}$$

que representa el teorema de la energía mecánica, cuyo enunciado es:

"*El trabajo de la resultante de las fuerzas disipativas que actúan sobre una partícula material, en un sistema inercial y en un intervalo entre t_1 y t_2, es igual a la variación de la energía mecánica de la partícula en tal intervalo*"

Ejemplos de fuerzas disipativas que aparecen a menudo en dinámica los constituyen las fuerzas de rozamiento, tanto por fricción seca (que se analizaron en la sección 4.4.3), como fluida (que se traducen en fuerzas dependientes de la velocidad). Las fuerzas de rozamiento se oponen al sentido del movimiento, produciendo un trabajo negativo a lo largo de cualquier trayectoria. Si todo el trabajo disipativo es debido a fuerzas de este tipo, $W_D<0$, y la ecuación [4.112] implica que la partícula pierde o disipa energía mecánica en otros tipos de energía y que

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

se producen flujos de energía no mecánica entre la partícula y el sistema en contacto con ella, en particular flujo de calor. En efecto:

$$W_D < 0 \quad \Rightarrow \quad E(2) - E(1) < 0 \quad \Rightarrow \quad E(2) < E(1)$$

la energía mecánica final es menor que la inicial.

Si sobre una partícula no actúan fuerzas disipativas, $\vec{F}_D = 0$, entonces $W_D = 0$, y la ecuación [4.112] se reduce al teorema de conservación de la energía mecánica

$$E(2) - E(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad E = cte \tag{4.113}$$

válido en todo intervalo en el que $\vec{F}_D = 0$.

El teorema de conservación de la energía mecánica tiene gran aplicación en los problemas en los que la partícula se mueve sin rozamiento o con rozamiento despreciable en las superficies o líneas de apoyo.

4.10.7. El teorema de la energía mecánica en sistemas no inerciales

En un sistema no inercial actúan sobre una partícula fuerzas reales $\vec{F}=\vec{F}_C+\vec{F}_D$, conservativas o disipativas, y fuerzas de inercia $\vec{F}'$. La suma $\vec{F} + \vec{F}'$ de fuerzas reales y de inercia verifica la ecuación fundamental de la dinámica en sistemas no inerciales [4.53]. A partir de ella y por un procedimiento análogo podemos deducir una ecuación similar a la [4.93] y obtener

$$W+W' = \int_{1_{\Gamma'}}^{2} \vec{F} \cdot d\vec{r}+\int_{1_{\Gamma'}}^{2} \vec{F}' \cdot d\vec{r}' = \int_{1_{\Gamma'}}^{2} \vec{F}_C \cdot d\vec{r}+\int_{1_{\Gamma'}}^{2} \vec{F}_D \cdot d\vec{r}+\int_{1_{\Gamma'}}^{2} \vec{F}' \cdot d\vec{r}' = \frac{1}{2}mv'^2(2)-\frac{1}{2}mv'^2(1)$$

donde W' representa el trabajo ficticio de las fuerzas de inercia, Γ' la trayectoria que sigue la partícula en el sistema no inercial S' y $\vec{v}'$ su velocidad relativa a tal sistema. En notación resumida, la ecuación anterior se puede poner como

$$W + W' = E'_c(2) - E'_c(1) \tag{4.114}$$

y constituye el teorema de la energía cinética para un sistema no inercial.

De forma similar, el teorema de la energía mecánica (ec. [4.112]), se puede adaptar a un sistema no inercial como

$$W_D + W' = E'(2) - E'(1) \tag{4.115}$$

siendo $E' = E'_c + E'_p$ la energía mecánica relativa al sistema no inercial S'. Obsérvese que no conviene separar el trabajo de fuerzas de inercia, W', en términos conservativos y disipativos, aun cuando alguna fuerza de inercia se pueda comportar como si se tratara de una fuerza

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

conservativa. *W'* no representa un trabajo de fuerzas reales y no se debe poner en paridad con el trabajo debido a tales fuerzas.

Así, por ejemplo, el trabajo de la fuerza centrífuga en un sistema no inercial con velocidad angular constante $\vec{\Omega}$ sobre una partícula de masa m se puede calcular como la diferencia de una función asimilable a una energía potencial:

$$\delta W = \vec{F}_c \cdot d\vec{r}' = -m(\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}')) \cdot d\vec{r}' = -m(\vec{\Omega} \times \vec{u}) \cdot d\vec{r}' = m(\vec{\Omega} \times d\vec{r}') \cdot \vec{u} = md\vec{u} \cdot \vec{u}$$

$$W = \int m\vec{u} \cdot d\vec{u} = \int \frac{1}{2} md(\vec{u} \cdot \vec{u}) = \frac{1}{2} m \int d(u^2) = \frac{m}{2} u^2(2) - \frac{m}{2} u^2(1) = \frac{m}{2} \left|\vec{\Omega} \times \vec{r}'(2)\right|^2 - \frac{m}{2} \left|\vec{\Omega} \times \vec{r}'(1)\right|^2$$

Si sobre la partícula no actúan fuerzas disipativas, entonces $W_D = 0$, y la ecuación [4.115] se reduce a

$$W' = E'(2) - E'(1) \tag{4.116}$$

En este caso no se conserva la energía mecánica en *S'* debido al efecto del trabajo ficticio de las fuerzas de inercia, *W'*.

Finalmente indicar que la fuerza de Coriolis no realiza nunca trabajo, hecho que se demuestra fácilmente aplicando las propiedades del producto mixto.

4.10.8. Energía mecánica para una partícula en movimiento armónico simple

Como se vio en la sección 4.5.9, una masa m sometida a la fuerza elástica de un resorte ideal (F=-kx, siendo x la elongación del muelle y la posición de m en un sistema de referencia adecuado), se mueve con una ecuación horaria característica de un movimiento armónico simple

$$x = \mathrm{a}\cos(\omega t - \varphi)$$

donde a representa la amplitud del movimiento, ω la pulsación, relacionada con el periodo por

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

y φ la fase inicial.

La velocidad de la masa m viene dada por

$$v = -\mathrm{a}\omega \sin(\omega t - \varphi)$$

En consecuencia, la energía cinética de m en función del tiempo es

$$E_c(t) = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \mathrm{a}^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - \varphi) \tag{4.117}$$

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

y la energía potencial del muelle, teniendo en cuenta que $k = m\,\omega^2$, viene dada, en función del tiempo, por

$$E_p(t) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 \mathrm{a}^2 \cos^2(\omega t - \varphi) \tag{4.118}$$

Al actuar sobre la masa m solo la fuerza elástica, que es conservativa, se conserva su energía mecánica (ec. [4.113]) y se verifica que

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\omega^2 \mathrm{a}^2 \tag{4.119}$$

como es fácil comprobar sumando las ecuaciones [4.117] y [4.118].

Se puede utilizar este resultado para obtener las expresiones de la energía cinética y potencial en función de la elongación x del muelle. Se obtiene

$$E_c = E - E_p = \frac{1}{2}m\omega^2(\mathrm{a}^2 - x^2) \tag{4.120}$$

para la energía cinética, y

$$E_p = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \tag{4.121}$$

para la energía potencial. En la Fig. 4.45 se representan las variaciones de las energías cinética y potencial en función de la elongación x, que tienen forma de parábola, con máximo y mínimo, respectivamente, en el intervalo [-a,a].

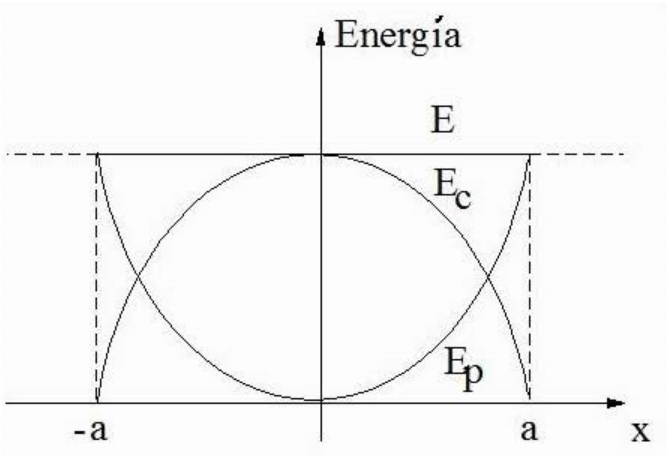


Figura 4.45: Energías cinética y potencial de un muelle en función de la posición.

La energía mecánica viene determinada por el segmento entre -a y a contenido en la recta de ecuación

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 \mathrm{a}^2$$

paralela al eje de abscisas.

Los valores medios de E_c y E_p, en un periodo, entre t y $t+T$, se calculan mediante las expresiones

$$< E_c >= \frac{1}{T}\int_t^{t+T} E_c dt = \frac{\omega^2}{2\pi}\frac{1}{2}m\omega^2 \mathrm{a}^2 \int_t^{t+\frac{2\pi}{\omega}} \sin^2(\omega t - \varphi)dt$$

$$< E_p >= \frac{1}{T}\int_t^{t+T} E_p dt = \frac{\omega^2}{2\pi}\frac{1}{2}m\omega^2 \mathrm{a}^2 \int_t^{t+\frac{2\pi}{\omega}} \cos^2(\omega t - \varphi)dt$$

y resultan

$$< E_c >=< E_p >= \frac{1}{4}m\omega^2 \mathrm{a}^2 \tag{4.122}$$

como es fácil comprobar.

La ecuación [4.119] debe cumplirse también para valores medios

$$< E >=< E_c > + < E_p >$$

como se puede comprobar, teniendo en cuenta que el valor medio de una magnitud constante es igual a su propio valor (es decir, $<E>=E$ en nuestro caso).

La Fig. 4.46 muestra la variación de las energías cinética y potencial y el valor de la energía mecánica para el movimiento armónico simple que sigue la partícula en un semiperíodo entre t' y $t'+T/2$, siendo t' un instante en el que $x(t') =$ -a y, en consecuencia, $v(t')=0$. Se muestran también los valores medios de la energía cinética y potencial $<E_c> =<E_p>=E/2$.

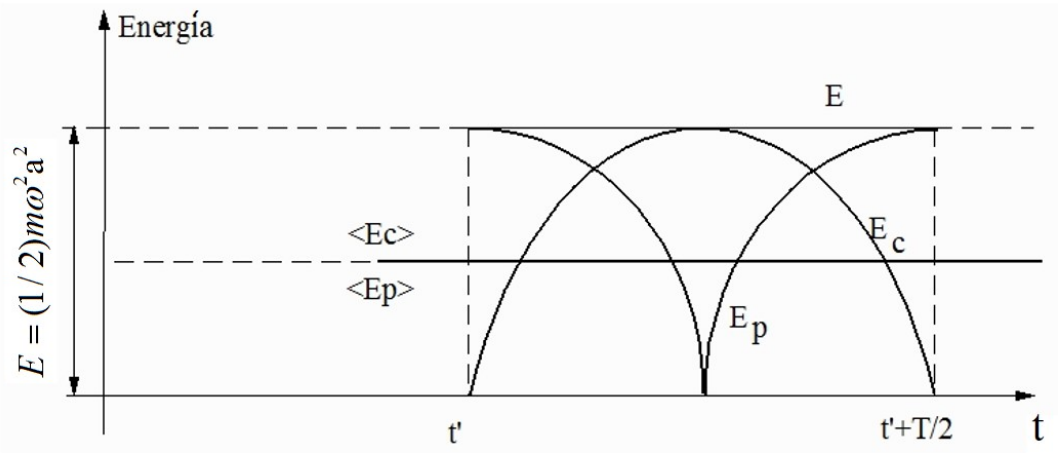


Figura 4.46: Energías cinética y potencial y promedios para un muelle en función del tiempo.

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval