



SISTEMAS DE PARTÍCULAS

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



ÍNDICE



CONCEPTOS BÁSICOS

POSICIÓN Y VELOCIDAD DEL CENTRO DE MASAS (CM)

SISTEMA DE REFERENCIA CM (SCM)

ECUACIÓN DE MOVIMIENTO DEL CM

TEOREMA DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

MOMENTO CINÉTICO

TEOREMA DEL MOMENTO CINÉTICO EN UN SRI

TEOREMA DE MOMENTO CINÉTICO EN UN $SRNI$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval





ÍNDICE

ENERGÍA CINÉTICA

TEOREMA DE LA ENERGÍA CINÉTICA PARA EL *CM*

TEOREMA DE LA ENERGÍA CINÉTICA EN UN *SRI*

TEOREMA DE LA ENERGÍA CINÉTICA EN UN *SRNI*

TRABAJO DE LAS FUERZAS INTERIORES

TRABAJO DE LAS FUERZAS EXTERIORES

TEOREMA DE LA ENERGÍA EN UN *SRI*

TEOREMA DE LA ENERGÍA EN UN *SRNI*

CASO PARTICULAR: SISTEMA DE DOS PARTÍCULAS

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



ÍNDICE

CHOQUES

DEFINICIONES

Choque (Colisión)

Percusiones entre los cuerpos

Línea de choque

Choque excéntrico

Choque central

Choque central directo

Choque central oblicuo

Plano de choque. Línea normal

DETERMINACIÓN DE LA LÍNEA DE CHOQUE

COEFICIENTE DE RESTITUCIÓN

ENERGÍA CINÉTICA EN EL CHOQUE

ECUACIONES PARA LA RESOLUCIÓN DE CHOQUES

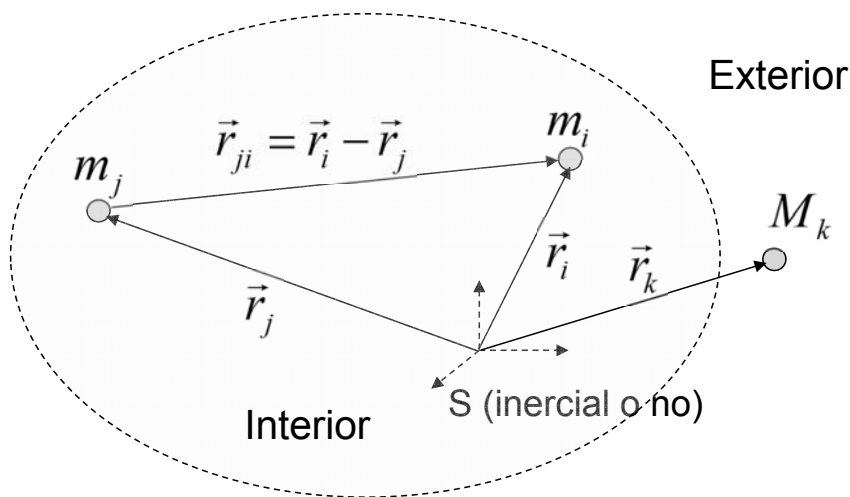
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval





CONCEPTOS BÁSICOS

Vectores de posición



CONCEPTOS BÁSICOS

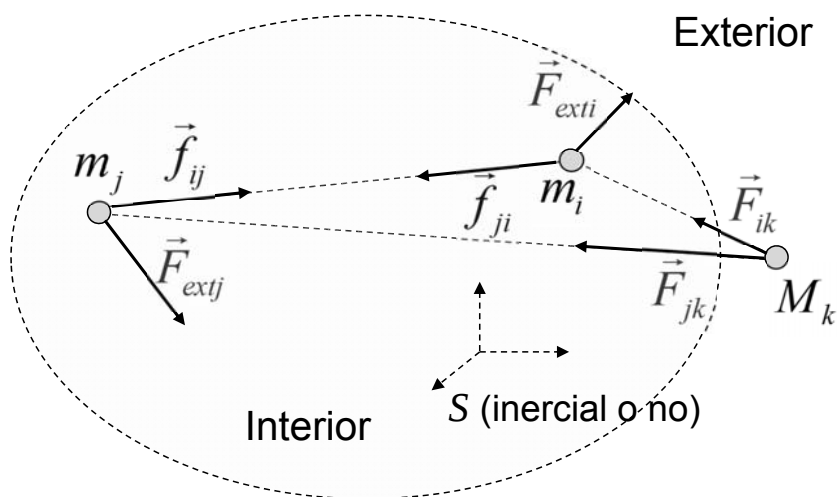
Fuerzas

Fuerzas exteriores

$$\vec{F}_{ext\ i} = \sum_{k=1}^N \vec{F}_{ik}$$

Fuerzas interiores

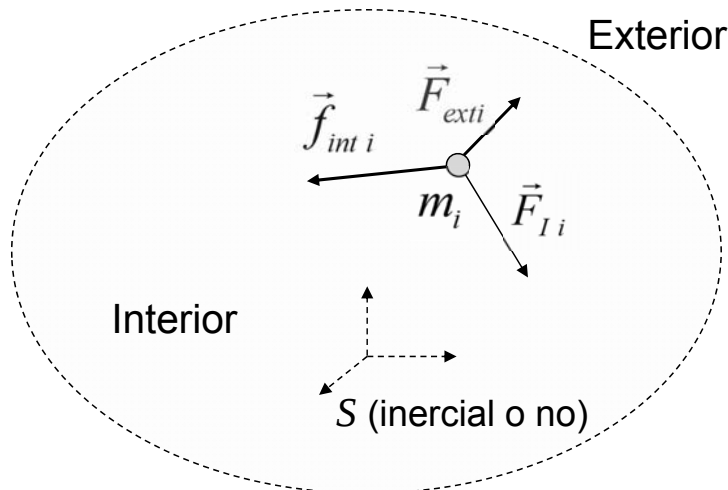
$$\vec{f}_{int\ i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{f}_{ji}$$





CONCEPTOS BÁSICOS

Fuerzas



Fuerza total sobre $m_i \longrightarrow$

$$\vec{F}_i^{total} = \vec{F}_{ext\ i} + \vec{f}_{int\ i} + \vec{F}_{I\ i}$$

Exterior

Interior

Inercia

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

7/83



CONCEPTOS BÁSICOS

Cantidad de movimiento

Suma de las cantidades de movimiento individuales de cada partícula:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i$$

Momento cinético

Suma de los momentos cinéticos individuales de cada partícula:

$$\vec{L}_A = \sum_{i=1}^N \vec{L}_{Ai} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_{Ai} \times \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_A) \times m_i \vec{v}_i$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

8/83





CONCEPTOS BÁSICOS

Energía cinética

Suma de las energías cinéticas individuales de cada partícula:

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2$$

Energía potencial

Puede proceder de la interacción con otras partículas tanto interiores como exteriores al sistema.

En general existirán tanto fuerzas conservativas como disipativas, tanto en el caso de las interiores como en el de las exteriores.



CONCEPTOS BÁSICOS

Energía potencial externa

Para una partícula: $E_{p\ i} = \sum_{k=1}^N E_{p\ ki}$

Para todo el sistema: $E_{p\ ext} = \sum_{i=1}^N E_{p\ i}$

Energía potencial interna

$$E_{p\ int} = \sum_{\text{pares}(i,j)} E_{p\ ji} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\text{pares}(i,j) \\ i \neq j}} (E_{p\ ij} + E_{p\ ji}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N E_{p\ ij}$$

$\sum_{\text{pares}(i,j)} (a_{ij} + a_{ji}) = \sum_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N a_{ij}$

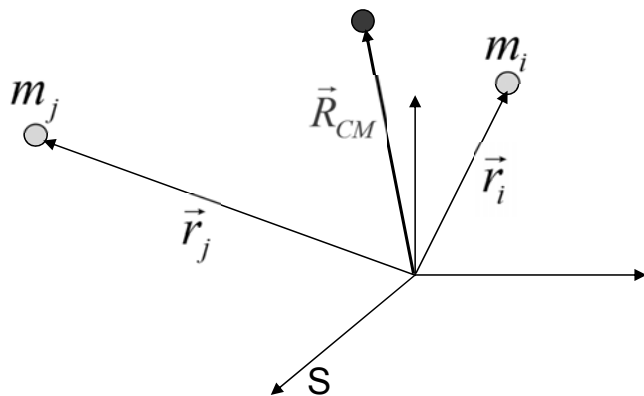




POSICIÓN Y VELOCIDAD DEL CENTRO DE MASAS (CM)

POSICIÓN

$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$$



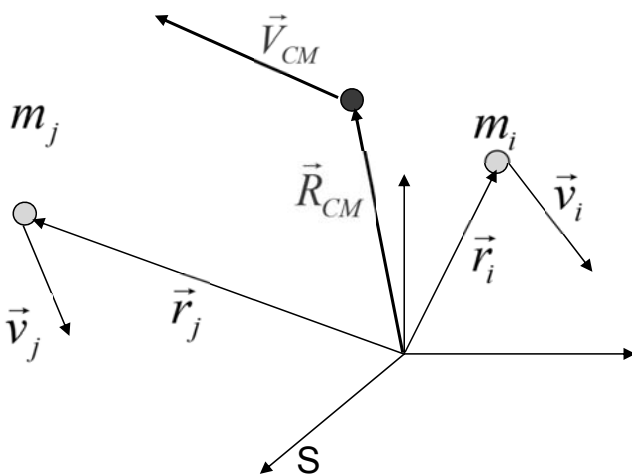
$$X_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i x_i; \quad Y_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i y_i; \quad Z_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i z_i$$



POSICIÓN Y VELOCIDAD DEL CENTRO DE MASAS (CM)

VELOCIDAD

$$\vec{V}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i$$



Cantidad de Movimiento del Sistema:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = M \vec{V}_{CM}$$

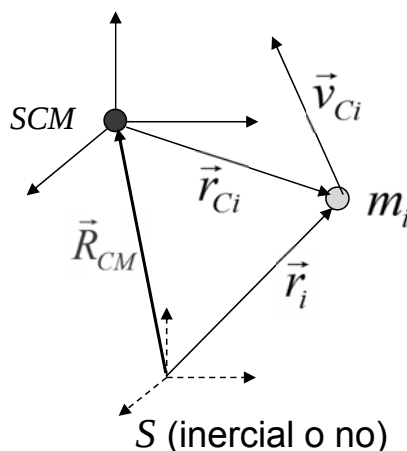




SISTEMA DE REFERENCIA CM (SCM)

Sistema en traslación respecto a S con origen en el CM

$$\vec{r}_i = \vec{R}_{CM} + \vec{r}_{Ci}$$



Sumando para todas las partículas del sistema:

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i = M \vec{R}_{CM} + \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_{Ci} \Rightarrow \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_{Ci} = \vec{0}$$



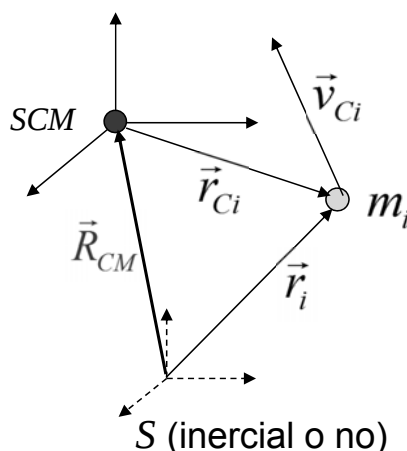
SISTEMA DE REFERENCIA CM (SCM)

Sistema en traslación respecto a S con origen en el CM

$$\vec{r}_i = \vec{R}_{CM} + \vec{r}_{Ci}$$

Derivando

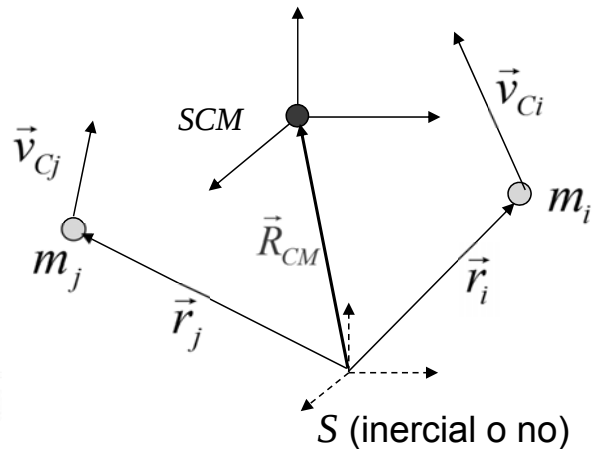
$$\vec{v}_i = \vec{V}_{CM} + \frac{d\vec{r}_{Ci}}{dt} = \vec{V}_{CM} + \vec{v}_{Ci}$$





SISTEMA DE REFERENCIA CM (SCM)

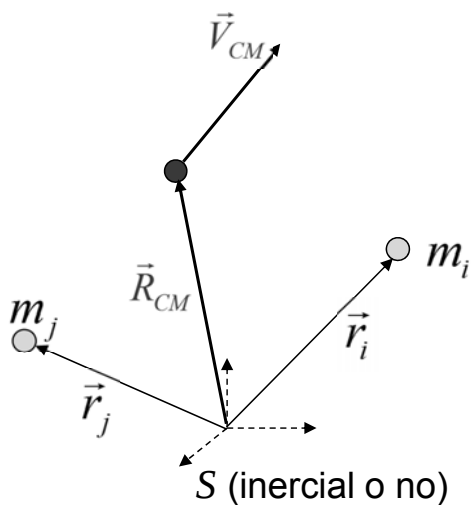
$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = M \vec{V}_{CM} + \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_{Ci} \Rightarrow \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_{Ci} = \vec{0}$$



Derivando
$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_{Ci} = \vec{0}$$



ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO DEL CM



$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{F}_{ext\ i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{f}_{ji} + \vec{F}_{I\ i}$$

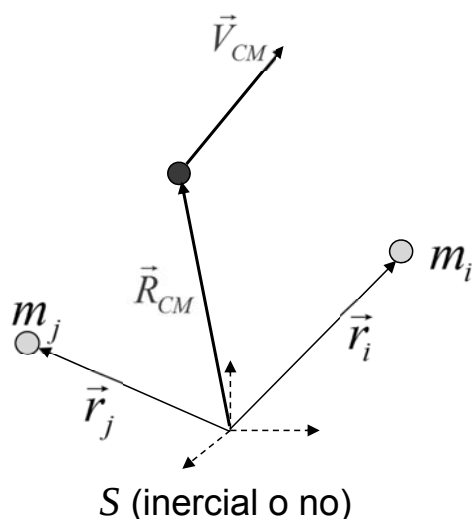
$$\sum_{i=1}^N m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{ext\ i} + \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{f}_{ji} + \sum_{i=1}^N \vec{F}_{I\ i}$$





ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO DEL CM

La resultante de fuerzas internas de un sistema de partículas es nula.



$$\sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{f}_{ij} = \sum_{\substack{\forall \text{ pares } (i,j) \\ i \neq j}} (\vec{f}_{ij} + \vec{f}_{ji}) = \vec{0}$$

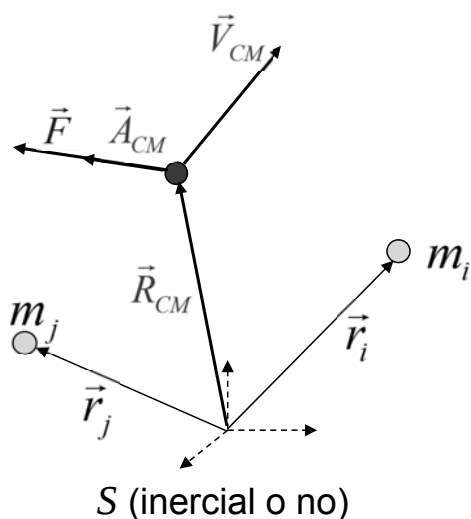
$\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = M \frac{d\vec{V}_{CM}}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{ext\,i} + \sum_{i=1}^N \vec{F}_{I\,i} = \vec{F}_{ext} + \vec{F}_I = \vec{F}$$



ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO DEL CM

El CM se mueve como una partícula de masa M sobre la que actúa la resultante de fuerzas externas y de inercia.



$$M \vec{A}_{CM} = M \frac{d\vec{V}_{CM}}{dt} = \vec{F}$$

$\vec{F}$ engloba las fuerzas
exteriores y de inercia



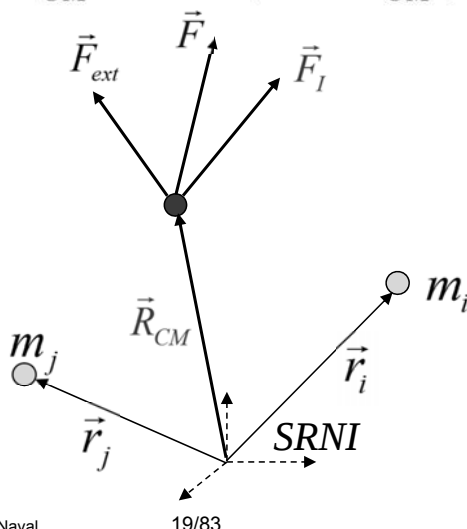


ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO DEL CM

Resultante de fuerzas de inercia en un sistema no inercial:

$$\vec{F}_I = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{Ii} = -\sum_{i=1}^N m_i \left(\vec{a}_O + \vec{\alpha} \times \vec{r}_i + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_i) + 2(\vec{\Omega} \times \vec{v}_i) \right)$$

$$\vec{F}_I = -M \left(\vec{a}_O + \vec{\alpha} \times \vec{R}_{CM} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{R}_{CM}) + 2(\vec{\Omega} \times \vec{V}_{CM}) \right)$$



J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

19/83



TEOREMA DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

El impulso total de las fuerzas exteriores y de inercia sobre un sistema de partículas es igual a la variación de la cantidad de movimiento en ese intervalo.

Principio de Conservación:

Si $\vec{I} = \vec{0}$, la cantidad de movimiento del sistema $\vec{p}$ se conserva.

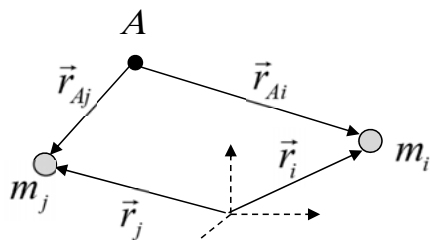
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

20/83



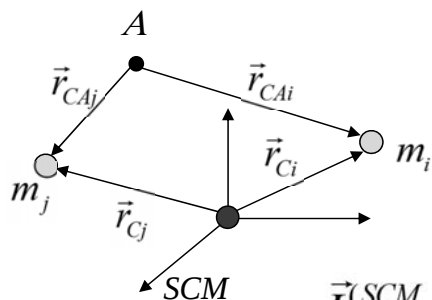


MOMENTO CINÉTICO



En S (A puede ser un punto móvil):

$$S \text{ (inercial o no)} \quad \vec{L}_A = \sum_{i=1}^N \vec{L}_{Ai} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_{Ai} \times \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_A) \times m_i \vec{v}_i$$



En el SCM :

$$\vec{L}_A^{(SCM)} = \sum_{i=1}^N \vec{L}_{Ai}^{(SCM)} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_{CAi} \times \vec{p}_{Ci} = \sum_{i=1}^N (\vec{r}_{Ci} - \vec{r}_{CA}) \times m_i \vec{v}_{Ci}$$



MOMENTO CINÉTICO

Relación entre el momento cinético en S y en el SCM

Se puede comprobar que el momento cinético del sistema de partículas con respecto al CM vale lo mismo independientemente de ser calculado en S ($\vec{L}_{CM}$) o en el SCM ($\vec{L}_{CM}^{(SCM)}$)

$$\vec{L}_{CM}^{(SCM)} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_{Ci} \times m_i \vec{v}_{Ci}$$

$$\vec{L}_{CM} = \sum_{i=1}^N \vec{L}_{CMi} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_{Ci} \times \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i - \vec{R}_{CM}) \times m_i \vec{v}_i$$





MOMENTO CINÉTICO

Relación entre el momento cinético en S y en el SCM

$$\vec{L}_{CM} = \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i - \vec{R}_{CM}) \times m_i \vec{v}_i$$

$$\begin{aligned} \vec{L}_{CM} &= \sum_{i=1}^N \vec{r}_{Ci} \times m_i (\vec{V}_{CM} + \vec{v}_{Ci}) = \sum_{i=1}^N \vec{r}_{Ci} \times m_i \vec{V}_{CM} + \sum_{i=1}^N \vec{r}_{Ci} \times m_i \vec{v}_{Ci} = \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_{Ci}}_{\vec{0}} \times \vec{V}_{CM} + \vec{L}_{CM}^{(SCM)} = \vec{L}_{CM}^{(SCM)} \end{aligned}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

23/83



MOMENTO CINÉTICO

Relación entre el momento cinético en S y en el SCM

$$\vec{L}_A = \sum_{i=1}^N \vec{L}_{Ai} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_{Ai} \times \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_A) \times m_i \vec{v}_i = \vec{L}_O - \overrightarrow{OA} \times M \vec{V}_{CM}$$

$$\vec{r}_i = \vec{R}_{CM} + \vec{r}_{Ci}$$

$$\vec{v}_i = \vec{V}_{CM} + \vec{v}_{Ci}$$

$$\vec{L}_A = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{R}_{CM} + \vec{r}_{Ci} - \vec{r}_A) \times (\vec{V}_{CM} + \vec{v}_{Ci})$$

$$\vec{L}_A = \left(\sum_{i=1}^N m_i \right) (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_A) \times \vec{V}_{CM} + (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_A) \times \left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_{Ci} \right) + \left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_{Ci} \right) \times \vec{V}_{CM} + \sum_{i=1}^N \vec{r}_{Ci} \times m_i \vec{v}_{Ci}$$

$$\vec{L}_A = (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_A) \times M \vec{V}_{CM} + \sum_{i=1}^N \vec{r}_{Ci} \times m_i \vec{v}_{Ci}$$

$$\vec{L}_A = (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_A) \times M \vec{V}_{CM} + \vec{L}_{CM}^{(SCM)}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

24/83





MOMENTO CINÉTICO

Relación entre el momento cinético en S y en el SCM

$$\vec{L}_A = \vec{L}_O - \vec{OA} \times M\vec{V}_{CM}$$

$$\vec{L}_{CM} = \vec{L}_{CM}^{(SCM)}$$

$$\vec{L}_A = (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_A) \times M\vec{V}_{CM} + \vec{L}_{CM}$$

El momento cinético del sistema respecto al punto A es la suma del momento cinético del sistema respecto del CM más el momento cinético de una masa M supuestamente situada en el CM y con su velocidad con respecto del punto A (*Teorema de König para el momento cinético*)



TEOREMA DEL MOMENTO CINÉTICO EN UN SRI

$$\vec{L}_A = \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_A) \times m_i \vec{v}_i$$

Si el punto A está en reposo en S ($\vec{v}_A = \vec{0}$) o es el CM ($\vec{v}_A = \vec{V}_{CM}$)

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_A) \times m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} + \sum_{i=1}^N ((\vec{v}_i - \vec{v}_A) \times m_i \vec{v}_i)$$



$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_A) \times m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}$$





TEOREMA DEL MOMENTO CINÉTICO EN UN *SRI*

Sustituyendo las fuerzas:

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_A) \times \vec{F}_{ext\ i} + \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_A) \times \vec{f}_{ji}$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_A) \times \vec{f}_{ji} = \sum_{\text{pares}(i,j)} ((\vec{r}_i - \vec{r}_A) \times \vec{f}_{ji} + (\vec{r}_j - \vec{r}_A) \times \vec{f}_{ij}) = \sum_{\text{pares}(i,j)} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{f}_{ji} = \vec{0}$$

3ª ley de Newton $\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$

Principio fuerte: $(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{f}_{ji} = \vec{0}$



TEOREMA DEL MOMENTO CINÉTICO EN UN *SRI*

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_A) \times \vec{F}_{ext\ i} = \sum_{i=1}^N \vec{M}_{ext\ Ai} = \vec{M}_{ext\ A} = \vec{M}_A$$

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_A \quad (A \text{ en reposo en el } SRI \text{ o } A \equiv CM)$$

En un *SRI* la derivada del momento cinético con respecto a un punto en reposo o al *CM* es la suma de los momentos de las fuerzas exteriores.





TEOREMA DEL MOMENTO CINÉTICO EN UN *SRI*

Principio de Conservación:

$$\vec{M}_A = \vec{0} \rightarrow \vec{L}_A = \overrightarrow{cte}$$

Si el momento de las fuerzas exteriores respecto a un punto en reposo en un *SRI* o al *CM* es cero, el momento cinético se conserva.



TEOREMA DEL MOMENTO CINÉTICO EN UN *SRNI*

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_A) \times (\vec{F}_{ext\,i} + \vec{F}_{I\,i}) + \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_A) \times \vec{f}_{ji}$$

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_A) \times (\vec{F}_{ext\,i} + \vec{F}_{I\,i}) = \sum_{i=1}^N (\vec{M}_{ext\,Ai} + \vec{M}_{I\,Ai}) = \vec{M}_{ext\,A} + \vec{M}_{I\,A}$$

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_{ext\,A} + \vec{M}_{I\,A} = \vec{M}_A \quad (A \text{ en reposo en el } SRNI \text{ o } A \equiv CM)$$

En un *SRNI* la derivada del momento cinético con respecto a un punto en reposo o al *CM* es la suma de los momentos de las fuerzas exteriores más las de inercia.





TEOREMA DEL MOMENTO CINÉTICO EN UN *SRNI*

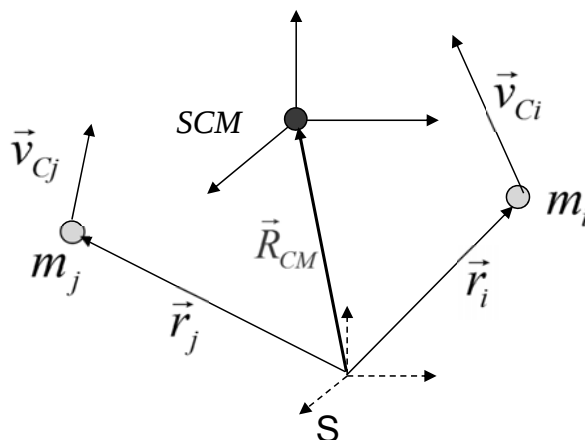
Principio de Conservación:

$$\vec{M}_{ext\ A} + \vec{M}_{I\ A} = \vec{0} \rightarrow \vec{L}_A = \overline{cte}$$

Si el momento de las fuerzas exteriores más las de inercia respecto a un punto en reposo en un *SRNI* o al *CM* es cero, el momento cinético se conserva.



ENERGÍA CINÉTICA



$$E_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\vec{V}_{CM} + \vec{v}_{Ci})^2$$





ENERGÍA CINÉTICA DE UN SP

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \vec{V}_{CM} \cdot \vec{V}_{CM} + \sum_{i=1}^N m_i \vec{V}_{CM} \cdot \vec{v}_{Ci} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_{Ci} \cdot \vec{v}_{Ci}$$

$$E_c = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \underbrace{\vec{V}_{CM} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_{Ci}}_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_{Ci}^2$$

$$E_c = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_{Ci}^2$$



ENERGÍA CINÉTICA DE UN SP

$$E_c = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + E_c^{(SCM)}$$

Teorema de König

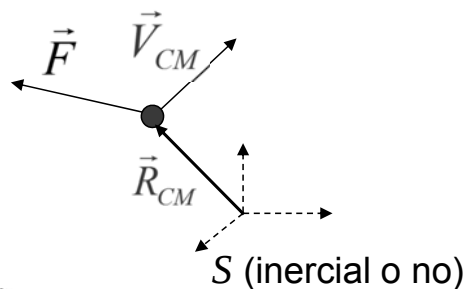
La energía cinética del sistema es la suma de la energía cinética de una partícula de masa M que tiene el movimiento del CM más la energía cinética del sistema de partículas referida al sistema CM .





TEOREMA DE LA ENERGÍA CINÉTICA PARA EL CM

$$M \frac{d\vec{V}_{CM}}{dt} = \vec{F}$$



$$M \frac{d\vec{V}_{CM}}{dt} \cdot \vec{V}_{CM} dt = \sum_{i=1}^N (\vec{F}_{ext\ i} + \vec{F}_{I\ i}) \cdot \frac{d\vec{R}_{CM}}{dt} dt$$

$$\int_{\vec{V}_{CM0}}^{\vec{V}_{CM}} M d\vec{V}_{CM} \cdot \vec{V}_{CM} = \sum_{i=1}^N \int_{\vec{R}_{CM0}}^{\vec{R}_{CM}} (\vec{F}_{ext\ i} + \vec{F}_{I\ i}) \cdot d\vec{R}_{CM}$$

$$d\vec{V}_{CM} \cdot \vec{V}_{CM} = \frac{1}{2} d(\vec{V}_{CM} \cdot \vec{V}_{CM}) = \frac{1}{2} d(V_{CM}^2) = V_{CM} dV_{CM}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

35/83



TEOREMA DE LA ENERGÍA CINÉTICA PARA EL CM

$$\int_{V_{CM0}}^{V_{CM}} M V_{CM} dV_{CM} = \int_{\vec{R}_{CM0}}^{\vec{R}_{CM}} \vec{F} \cdot d\vec{R}_{CM}$$

$$\frac{1}{2} M V_{CM}^2 - \frac{1}{2} M V_{CM0}^2 = W_{CM}$$

La variación de energía cinética del centro de masas es igual al trabajo de la resultante de fuerzas exteriores y de inercia realizado en el CM.

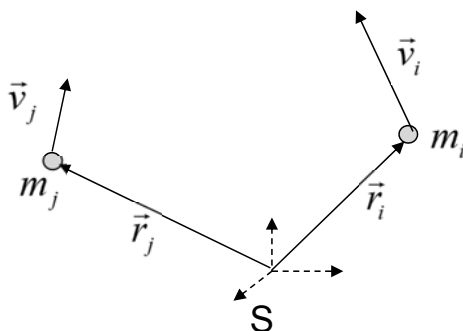
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

36/83





TEOREMA DE LA ENERGÍA CINÉTICA EN UN SRI



$$\delta W = \sum_{i=1}^N \delta W_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{total} \cdot d\vec{r}_i = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot d\vec{r}_i$$

$$\sum_{i=1}^N m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \vec{v}_i dt = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{ext\ i} \cdot d\vec{r}_i + \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{f}_{ji} \cdot d\vec{r}_i$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

37/83



TEOREMA DE LA ENERGÍA CINÉTICA EN UN SRI

$$\sum_{i=1}^N \int_{\vec{v}_{i0}}^{\vec{v}_i} m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \vec{v}_i = \sum_{i=1}^N \int_{v_{i0}}^{v_i} m_i \frac{dv_i}{dt} \cdot v_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_{i0}^2 = E_c - E_{c0}$$

$$d\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \frac{1}{2} d(\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i) = \frac{1}{2} d(v_i^2) = v_i dv_i$$

$$\sum_{i=1}^N \int_{\vec{r}_{i0}}^{\vec{r}_i} \vec{F}_{ext\ i} \cdot d\vec{r}_i + \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \int_{\vec{r}_{i0}}^{\vec{r}_i} \vec{f}_{ji} \cdot d\vec{r}_i = W_{ext} + W_{int}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

38/83





TEOREMA DE LA ENERGÍA CINÉTICA EN UN SRI

$$W = W_{ext} + W_{int} = E_c - E_{c0}$$

En un SRI el trabajo de fuerzas exteriores e interiores de un sistema de partículas es igual a la variación de su energía cinética.

En el SCM:

$$W^{(SCM)} = W_{ext}^{(SCM)} + W_{int}^{(SCM)} = E_c^{(SCM)} - E_{c0}^{(SCM)}$$



TEOREMA DE LA ENERGÍA CINÉTICA EN UN SRI

Principio de conservación:

$$W = W_{ext} + W_{int} = 0$$

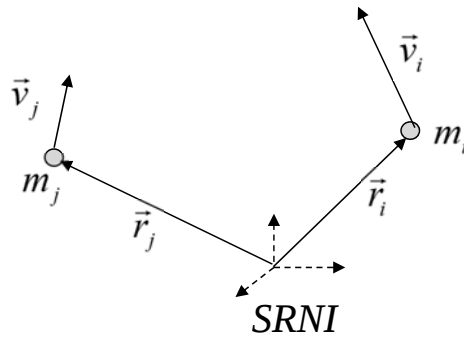
En un SRI si el trabajo total de un sistema de partículas es cero, la energía cinética se conserva.

$$E_c = E_{c0}$$





TEOREMA DE LA ENERGÍA CINÉTICA EN UN *SRNI*



$$\begin{aligned}\delta W &= \sum_{i=1}^N \delta W_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{total} \cdot d\vec{r}_i = \sum_{i=1}^N (\vec{F}_{ext\,i} + \vec{F}_{I\,i}) \cdot d\vec{r}_i + \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{f}_{ji} \cdot d\vec{r}_i \\ \sum_{i=1}^N \int_{\vec{r}_{i0}}^{\vec{r}_i} (\vec{F}_{ext\,i} + \vec{F}_{I\,i}) \cdot d\vec{r}_i &+ \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \int_{\vec{r}_{i0}}^{\vec{r}_i} \vec{f}_{ji} \cdot d\vec{r}_i = W_{ext} + W_I + W_{int}\end{aligned}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

41/83



TEOREMA DE LA ENERGÍA CINÉTICA EN UN *SRNI*

$$W = W_{ext} + W_I + W_{int} = E_c - E_{c0}$$

En un *SRNI* el trabajo de fuerzas exteriores, de inercia e interiores de un sistema de partículas es igual a la variación de su energía cinética.

En el *SCM*:

$$W^{(SCM)} = W_{ext}^{(SCM)} + W_I^{(SCM)} + W_{int}^{(SCM)} = E_c^{(SCM)} - E_{c0}^{(SCM)}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

42/83





TEOREMA DE LA ENERGÍA CINÉTICA EN UN *SRNI*

Principio de conservación:

$$W = W_{ext} + W_I + W_{int} = 0$$

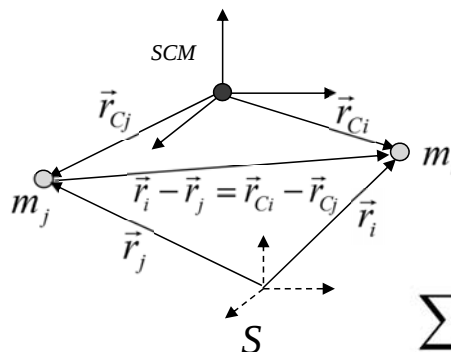
En un *SRNI* si el trabajo total de un sistema de partículas es cero, la energía cinética se conserva.

$$E_c = E_{c0}$$



TRABAJO DE LAS FUERZAS INTERIORES

Trabajo de las fuerzas interiores:



$$\sum_{\text{pares}(i,j)} (a_{ij} + a_{ji}) = \sum_i \sum_{\substack{j \\ j \neq i}} a_{ij}$$

$$W_{int}^{(SCM)} = \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \int_{\vec{r}_{Ci0}}^{\vec{r}_{Ci}} \vec{f}_{ji} \cdot d\vec{r}_{Ci} = \sum_{\substack{\forall \text{ pares}(i,j) \\ i \neq j}} \int_{\vec{r}_{Ci0}}^{\vec{r}_{Ci}} (\vec{f}_{ji} \cdot d\vec{r}_{Ci} + \vec{f}_{ij} \cdot d\vec{r}_{Cj})$$





TRABAJO DE LAS FUERZAS INTERIORES

$$W_{int}^{(SCM)} = \sum_{pares(i,j)} \int_{\vec{r}_{Ci0}-\vec{r}_{Cj0}}^{\vec{r}_{Ci}-\vec{r}_{Cj}} \vec{f}_{ji} \cdot d(\vec{r}_{Ci} - \vec{r}_{Cj}) = \sum_{pares(i,j)} \int_{\vec{r}_{i0}-\vec{r}_{j0}}^{\vec{r}_i-\vec{r}_j} \vec{f}_{ji} \cdot d(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

$$W_{int}^{(SCM)} = \sum_{\substack{\forall pares(i,j) \\ i \neq j}} \int_{\vec{r}_{i0}}^{\vec{r}_i} (\vec{f}_{ji} \cdot d\vec{r}_i + \vec{f}_{ij} \cdot d\vec{r}_j) = \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \int_{\vec{r}_{i0}}^{\vec{r}_i} \vec{f}_{ji} \cdot d\vec{r}_i = W_{int}$$

El trabajo de las fuerzas interiores en el *SCM* coincide con el trabajo de las mismas fuerzas en el sistema *S*



TRABAJO DE LAS FUERZAS INTERIORES

El trabajo de las fuerzas interiores es cero en algunos casos:

$$W_{int} = 0$$

Poleas y cables:

La ligadura obliga a que en la dirección de la fuerza interna

$$d\vec{r}_i = d\vec{r}_j \rightarrow \vec{f}_{ji} \cdot d\vec{r}_i + \vec{f}_{ij} \cdot d\vec{r}_j = 0$$

Sólido rígido:

La ligadura obliga a que en la dirección de la fuerza interna

$$d|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = 0 \rightarrow \vec{f}_{ji} \cdot d(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = 0$$





TRABAJO DE LAS FUERZAS INTERIORES

Fuerzas interiores conservativas:

$$dE_{pji} = dE_p(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = -\vec{f}_{ji} \cdot d(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = -\vec{f}_{ji} \cdot d\vec{r}_{ji} = -\vec{f}_{ij} \cdot d\vec{r}_{ij} = dE_{pij}$$

$$W_{int} = \sum_{pares(i,j)} \int_{\vec{r}_{i0} - \vec{r}_{j0}}^{\vec{r}_i - \vec{r}_j} \vec{f}_{ji} \cdot d(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = - \sum_{pares(i,j)} (E_p(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) - E_p(|\vec{r}_{i0} - \vec{r}_{j0}|))$$

$$W_{int} = - \sum_{pares(i,j)} (E_{pij} - E_{pij0}) = -(E_{pint} - E_{pint0})$$



TRABAJO DE LAS FUERZAS INTERIORES

$$E_{pint} = \sum_{pares(i,j)} E_{pji} = \frac{1}{2} \sum_{pares(i,j)} (E_{pji} + E_{pij}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N E_{pji}$$

$$W_{int} = -\Delta E_{pint}$$





TRABAJO DE LAS FUERZAS EXTERIORES

Fuerzas exteriores conservativas:

$$dE_{pi} = -\vec{F}_{ext\ i} \cdot d\vec{r}_i$$

$$W_{ext\ cons} = \sum_i \int_{\vec{r}_{i0}}^{\vec{r}_i} \vec{F}_{ext\ i} \cdot d\vec{r}_i = -\sum_i (E_{pi} - E_{pi0}) = -(E_{p\ ext} - E_{p\ ext0})$$

$$E_{p\ ext} = \sum_i E_{pi}$$

$$W_{ext\ cons} = -\Delta E_{p\ ext}$$



TEOREMA DE LA ENERGÍA EN UN SRI

En general, distinguiendo las fuerzas exteriores conservativas del resto y considerando todas las fuerzas interiores conservativas en el teorema de la energía cinética:

$$W_{ext\ dis} + W_{ext\ cons} - \Delta E_{p\ int} = E_c - E_{c0}$$

$$W_{ext\ dis} - \Delta E_{p\ ext} - \Delta E_{p\ int} = E_c - E_{c0}$$

$$W_{ext\ dis} = \Delta E_c + \Delta E_{p\ ext} + \Delta E_{p\ int}$$

Energía mecánica: $E_m = E_c + E_{p\ ext} + E_{p\ int}$





TEOREMA DE LA ENERGÍA EN UN *SRI*

$$W_{ext\ dis} = \Delta E_m$$

En un *SRI* el trabajo de las fuerzas exteriores disipativas es igual a la variación de la energía mecánica del sistema.

Principio de conservación:

En un *SRI* si el trabajo de las fuerzas exteriores disipativas es cero, se conserva la energía mecánica.

$$E_m = E_{m0}$$



TEOREMA DE LA ENERGÍA EN UN *SRNI*

En general, distinguiendo las fuerzas reales conservativas del resto y considerando las fuerzas interiores conservativas:

$$W_{ext\ dis} + W_{ext\ cons} + W_I - \Delta E_{p\ int} = E_c - E_{c0}$$

$$W_{ext\ dis} - \Delta E_{p\ ext} + W_I - \Delta E_{p\ int} = E_c - E_{c0}$$

$$W_{ext\ dis} + W_I = \Delta E_c + \Delta E_{p\ ext} + \Delta E_{p\ int}$$





TEOREMA DE LA ENERGÍA EN UN SRNI

Energía mecánica:

$$E_m = E_c + E_{p\ ext} + E_{p\ int}$$

$$W_{ext\ dis} + W_I = \Delta E_m$$

El trabajo de las fuerzas exteriores disipativas más el de las fuerzas de inercia es igual a la variación de la energía mecánica del sistema.



TEOREMA DE LA ENERGÍA EN UN SRNI

$$W_{ext\ dis} + W_I = 0$$

Principio de conservación:

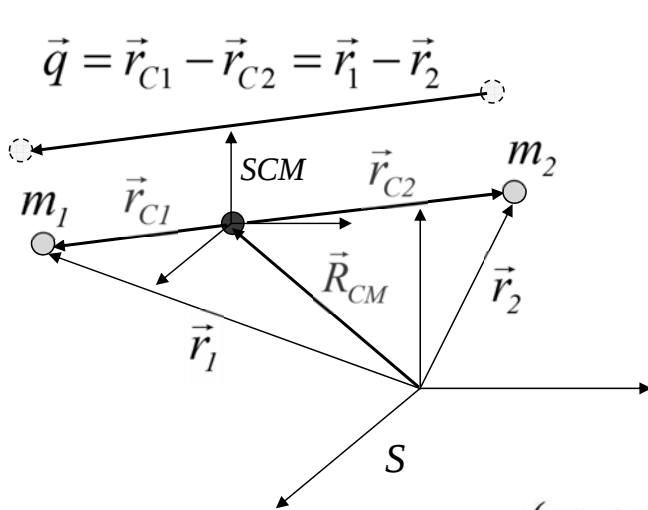
Si el trabajo de las fuerzas exteriores disipativas más el de las fuerzas de inercia es cero, se conserva la energía mecánica.

$$E_m = E_{m0}$$





SISTEMA DE DOS PARTÍCULAS



$$\vec{R}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{(m_1 + m_2)}$$

$$(m_1 + m_2) \vec{R}_{CM} = m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2$$

$$(m_1 + m_2) \vec{R}_{CM} + m_2 \vec{r}_1 = m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_2 \vec{r}_1$$

$$(m_1 + m_2) \vec{R}_{CM} + m_2 (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = (m_1 + m_2) \vec{r}_1$$



SISTEMA DE DOS PARTÍCULAS

$$\vec{r}_1 = \vec{R}_{CM} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \vec{R}_{CM} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\vec{r}_{C1} - \vec{r}_{C2})$$

Masa reducida: $\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

Vector posición relativa: $\vec{q} = \vec{r}_{C1} - \vec{r}_{C2} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$

$$\vec{r}_1 = \vec{R}_{CM} + \frac{\mu}{m_1} \vec{q}$$





SISTEMA DE DOS PARTÍCULAS

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 - (\vec{r}_{C1} - \vec{r}_{C2}) = \vec{R}_{CM} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}(\vec{r}_{C1} - \vec{r}_{C2}) = \vec{R}_{CM} - \frac{\mu}{m_2} \vec{q}$$

Derivando: $\vec{v}_1 = \vec{V}_{CM} + \overbrace{\frac{\mu}{m_1} \dot{\vec{q}}}^{\vec{v}_{C1}} \quad \vec{v}_2 = \vec{V}_{CM} - \frac{\mu}{m_2} \dot{\vec{q}}$

$$\dot{\vec{q}} = \vec{v}_{C1} - \vec{v}_{C2} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$$

Cantidad de movimiento en el *SCM*:

$$\vec{p}_{C1} = m_1 \vec{v}_{C1} = -m_2 \vec{v}_{C2} = -\vec{p}_{C2} = \mu \dot{\vec{q}}$$



SISTEMA DE DOS PARTÍCULAS

Energía cinética:

$$E_c = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{(m_1 + m_2)}{2} V_{CM}^2 + \frac{1}{2} \mu^2 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \dot{q}^2$$

$$E_c = \frac{M}{2} V_{CM}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{q}^2$$

En el *SCM*:

$$E_c^{(SCM)} = \frac{1}{2} \mu \dot{q}^2$$





SISTEMA DE DOS PARTÍCULAS

Momento Cinético respecto del origen O :

$$\begin{aligned}
 \vec{L}_O &= \vec{r}_1 \times m_1 \vec{v}_1 + \vec{r}_2 \times m_2 \vec{v}_2 = \\
 &= (\vec{R}_{CM} + \frac{\mu}{m_1} \vec{q}) \times (m_1 \vec{V}_{CM} + \mu \dot{\vec{q}}) + (\vec{R}_{CM} - \frac{\mu}{m_2} \vec{q}) \times (m_2 \vec{V}_{CM} - \mu \dot{\vec{q}}) = \\
 &= \vec{R}_{CM} \times M \vec{V}_{CM} + \left(\frac{\mu^2}{m_1} + \frac{\mu^2}{m_2} \right) (\vec{q} \times \dot{\vec{q}}) = \vec{R}_{CM} \times M \vec{V}_{CM} + \vec{q} \times \mu \dot{\vec{q}} \\
 \vec{L}_A &= (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_A) \times M \vec{V}_{CM} + \vec{L}_{CM}^{(SCM)}
 \end{aligned}$$

En el SCM (el origen O es el CM):

$$\vec{L}_{CM}^{(SCM)} = \vec{q} \times \mu \dot{\vec{v}}_q$$



SISTEMA DE DOS PARTÍCULAS

Suponemos fuerzas internas radiales dirigidas en la dirección de $\vec{q}$

$$\begin{aligned}
 \vec{f}(q) &= - \frac{dE_p(q)}{dq} \frac{\vec{q}}{q} = f \frac{\vec{q}}{q} \\
 \ddot{\vec{q}} &= \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \frac{f}{m_1} \frac{\vec{q}}{q} - \left(- \frac{f}{m_2} \frac{\vec{q}}{q} \right) = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} f(q) \frac{\vec{q}}{q} \\
 \mu \ddot{\vec{q}} &= f(q) \frac{\vec{q}}{q}
 \end{aligned}$$





SISTEMA DE DOS PARTÍCULAS

Si no hay fuerzas externas (sistema aislado), el SCM es inercial.

$$M \frac{d\vec{V}_{CM}}{dt} = \vec{0} \rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = M\vec{V}_{CM} = \vec{cte}$$

$$\frac{d\vec{L}_{CM}^{(SCM)}}{dt} = \vec{0} \rightarrow \vec{L}_{CM}^{(SCM)} = \vec{q} \times \mu \vec{v}_q = \vec{cte}$$

El movimiento de las masas está en un plano perpendicular a $\vec{L}_{CM}^{(SCM)}$ que contiene a $\vec{q}$ y $\vec{v}_q$

$$E_m^{(SCM)} = \frac{1}{2} \mu \dot{q}^2 + E_p(q) = cte$$

La energía mecánica se conserva

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

61/83



CHOQUES



DEFINICIONES

Choque (Colisión):

Interacción entre dos cuerpos en un $\Delta t \rightarrow 0$.

Se tratarán únicamente las colisiones mecánicas que suponen un contacto entre cuerpos rígidos o elásticos y que tengan superficies exteriores suficientemente suaves, de manera que sea aplicable el modelo de partícula material.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

62/83



CHOQUES



DEFINICIONES

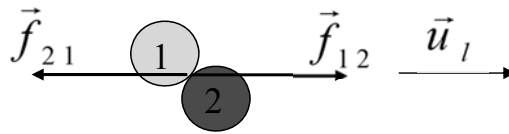
Percusiones que aparecen durante el choque:

$$\vec{P}_{12} = \int_0^{\Delta t} \vec{f}_{12} dt = - \int_0^{\Delta t} \vec{f}_{21} dt = - \vec{P}_{21} \quad \vec{P}_{12} = - \vec{P}_{21}$$

Línea de choque:

Recta soporte de las percusiones.

$\vec{u}_l$ es el vector unitario en esa dirección.



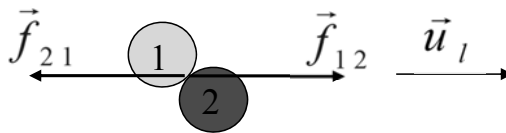
CHOQUES



DEFINICIONES

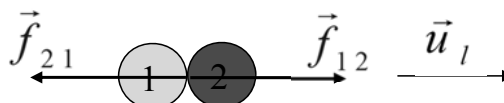
Choque excéntrico:

La línea de choque no pasa por los centros de masas de las partículas. No se estudia en este curso.



Choque central:

La línea de choque pasa por los centros de masas de las partículas.



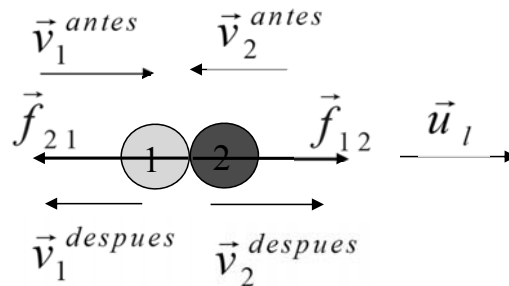
CHOQUES



DEFINICIONES

Choque central directo

Las velocidades antes y después del choque son paralelas a la línea de choque.



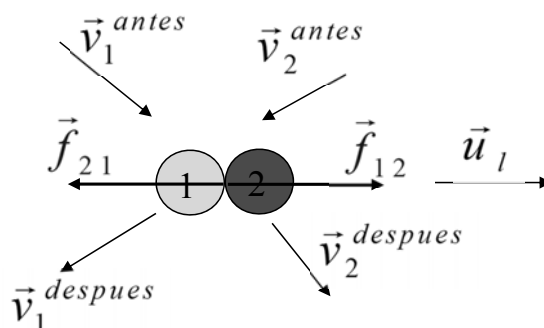
CHOQUES



DEFINICIONES

Choque central oblicuo

Las velocidades antes y después del choque no son paralelas a la línea de choque.



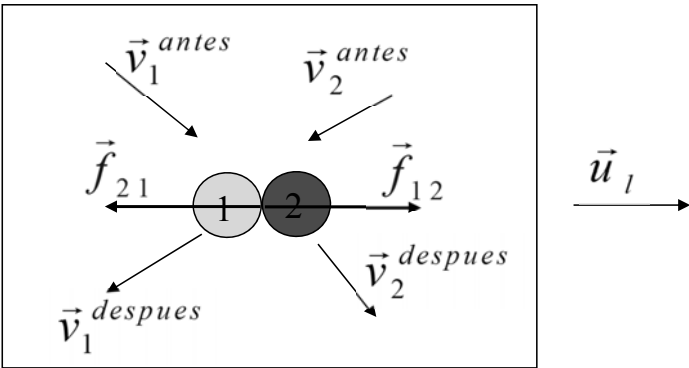
CHOQUES



DEFINICIONES

Plano de choque (partículas puntuales):

Plano que contiene a la línea de choque y que definen las velocidades antes de la colisión.



CHOQUES

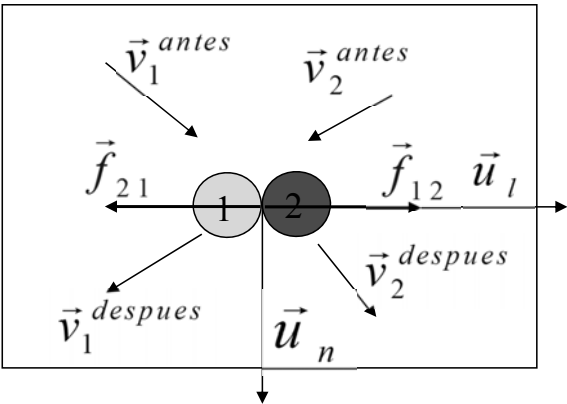


DEFINICIONES

Línea normal:

Línea perpendicular a la de choque y contenida en el plano de choque.

$\vec{u}_n$ es el vector unitario en esa dirección.



CHOQUES

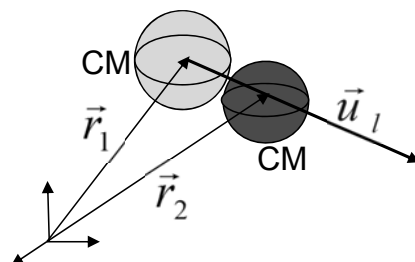


DETERMINACIÓN DE LA LÍNEA DE CHOQUE

Cuerpos con dimensiones:

Es la línea que une los centros de masas durante el choque.

$$\vec{u}_l = \frac{\vec{r}_2^a - \vec{r}_1^a}{|\vec{r}_2^a - \vec{r}_1^a|}$$



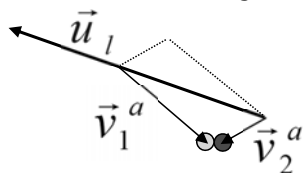
CHOQUES



DETERMINACIÓN DE LA LÍNEA DE CHOQUE

Partículas:

Velocidad relativa justo antes del choque

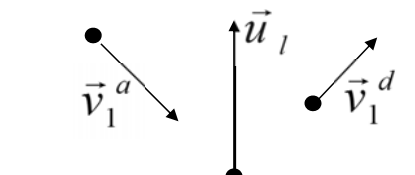


$$\vec{u}_l = \frac{\vec{v}_2^a - \vec{v}_1^a}{|\vec{v}_2^a - \vec{v}_1^a|}$$

Partícula contra superficie:

Tiene la dirección de la reacción en el apoyo

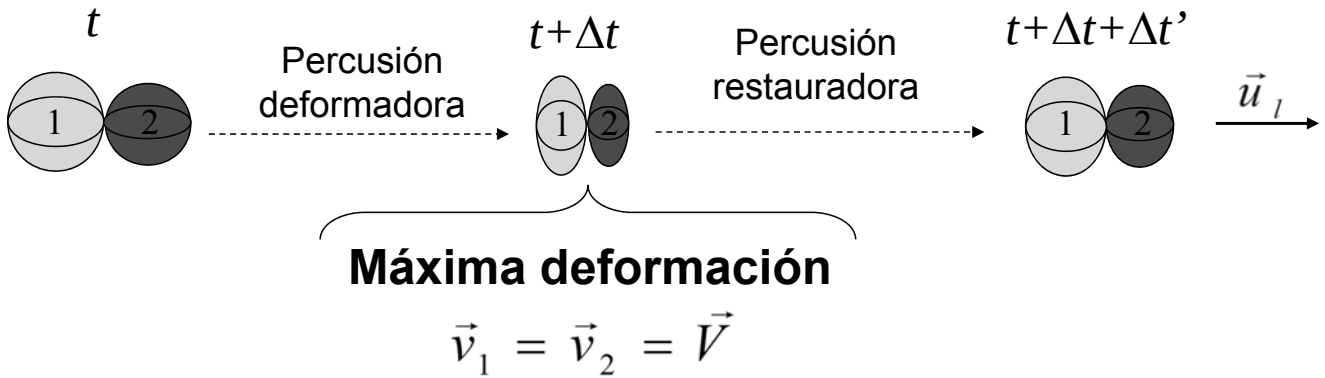
Ejemplo: Apoyo sin rozamiento



CHOQUES



COEFICIENTE DE RESTITUCIÓN



Percusión sobre 1: $\vec{P}_{21} = \vec{P}_{21}^{deformadora} + \vec{P}_{21}^{restauradora}$

Percusión sobre 2: $\vec{P}_{12} = \vec{P}_{12}^{deformadora} + \vec{P}_{12}^{restauradora}$



CHOQUES



COEFICIENTE DE RESTITUCIÓN

En la deformación:

$$\begin{aligned} -P_{21}^{def} &= m_1 V - m_1 v_1^a \\ P_{12}^{def} &= m_2 V - m_2 v_2^a \end{aligned}$$

En la restauración:

$$\begin{aligned} -P_{21}^{res} &= m_1 v_1^d - m_1 V \\ P_{12}^{res} &= m_2 v_2^d - m_2 V \end{aligned}$$

El coeficiente de restitución se define como el cociente entre los valores escalares de la percusión restauradora y la deformadora.

$$e = \frac{P_{12}^{rest}}{P_{12}^{def}} = \frac{P_{21}^{rest}}{P_{21}^{def}}$$



CHOQUES



COEFICIENTE DE RESTITUCIÓN

$$\frac{P_{21}^{res}}{P_{21}^{def}} = \frac{v_1^d - V}{V - v_1^a}$$

$$\frac{P_{12}^{res}}{P_{12}^{def}} = \frac{v_2^d - V}{V - v_2^a}$$

$$\frac{P_{12}^{rest}}{P_{12}^{def}} = \frac{P_{21}^{rest}}{P_{21}^{def}}$$

$$\frac{v_1^d - V}{V - v_1^a} = \frac{v_2^d - V}{V - v_2^a} = \frac{(v_1^d - V) - (v_2^d - V)}{(V - v_1^a) - (V - v_2^a)} = -\frac{(v_2^d - v_1^d)}{(v_2^a - v_1^a)}$$



CHOQUES



COEFICIENTE DE RESTITUCIÓN

$$e = -\frac{(v_2^d - v_1^d)}{(v_2^a - v_1^a)}$$

En el choque central directo: $e = -\frac{v_2^d - v_1^d}{v_2^a - v_1^a}$

En el choque central oblicuo: $e = -\frac{(\vec{v}_2^d - \vec{v}_1^d) \cdot \vec{u}_l}{(\vec{v}_2^a - \vec{v}_1^a) \cdot \vec{u}_l}$



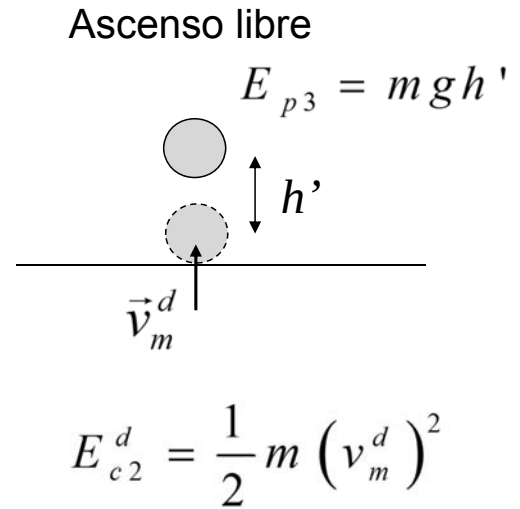
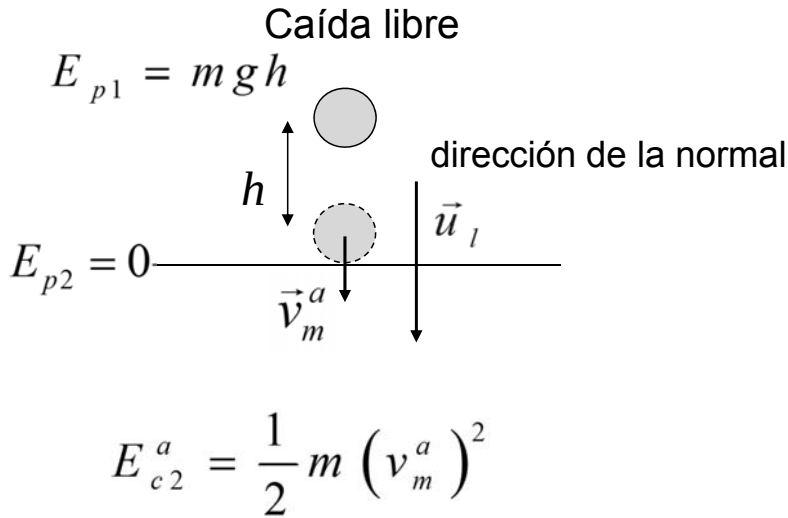
CHOQUES



COEFICIENTE DE RESTITUCIÓN

Ejemplo:

Partícula material en caída libre chocando contra el suelo



CHOQUES



COEFICIENTE DE RESTITUCIÓN

Conservación de la Energía Mecánica

$$E_{p1} = E_{c2}^a \longrightarrow v_m^a = \sqrt{2gh}$$

$$E_{c2}^d = E_{p3} \longrightarrow v_m^d = -\sqrt{2gh'}$$

$$e = -\frac{v_{suelo}^d - v_m^d}{v_{suelo}^a - v_m^a} = -\frac{0 - v_m^d}{0 - v_m^a} = \sqrt{\frac{h'}{h}}$$



CHOQUES



COEFICIENTE DE RESTITUCIÓN

Choque elástico

No se disipa energía cinética en el choque

$$E_{c2}^a = E_{c2}^d \longrightarrow h = h' \longrightarrow e = 1$$

Choque inelástico

Se disipa toda la energía cinética en el choque

$$E_{c2}^d = 0 \longrightarrow h' = 0 \longrightarrow e = 0$$

Choque parcialmente elástico

Situación intermedia

$$E_{c2}^a > E_{c2}^d \neq 0 \longrightarrow h > h' \neq 0 \longrightarrow 1 > e > 0$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

77/83

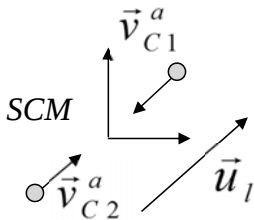


CHOQUES



COEFICIENTE DE RESTITUCIÓN

En el SCM: $m_1 \vec{v}_{C1} + m_2 \vec{v}_{C2} = \vec{0} \rightarrow \vec{v}_{C2} = -\frac{m_1}{m_2} \vec{v}_{C1}$



$$\vec{u}_l = \frac{\vec{v}_{C2}^a - \vec{v}_{C1}^a}{|\vec{v}_{C2}^a - \vec{v}_{C1}^a|} = -\frac{\vec{v}_{C1}^a}{v_{C1}^a} = \frac{\vec{v}_{C2}^a}{v_{C2}^a}$$

$$e = -\frac{(\vec{v}_{C2}^d - \vec{v}_{C1}^d) \cdot \vec{u}_l}{(\vec{v}_{C2}^a - \vec{v}_{C1}^a) \cdot \vec{u}_l} = -\frac{\left(-\frac{m_1}{m_2} \vec{v}_{C1}^d - \vec{v}_{C1}^d\right) \cdot \vec{u}_l}{\left(-\frac{m_1}{m_2} \vec{v}_{C1}^a - \vec{v}_{C1}^a\right) \cdot \vec{u}_l} = -\frac{\vec{v}_{C1}^d \cdot \vec{u}_l}{\vec{v}_{C1}^a \cdot \vec{u}_l}$$

$$e = -\frac{v_{C1}^d}{v_{C1}^a} = -\frac{v_{C2}^d}{v_{C2}^a}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

78/83



CHOQUES



ENERGÍA CINÉTICA EN EL CHOQUE

$$E_c = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_{Ci}^2 = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m v_{Ci}^2$$

$$\begin{aligned} E_c^d - E_c^a &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_{Ci}^{d2} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_{Ci}^{a2} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i e^2 v_{Ci}^{a2} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_{Ci}^{a2} = (e^2 - 1) \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_{Ci}^{a2} \right) \end{aligned}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

79/83



CHOQUES



ENERGÍA CINÉTICA EN EL CHOQUE

$$\Delta E_c = (e^2 - 1) E_c^a (SCM)$$

Choque elástico

$$\Delta E_c = 0 \longrightarrow E_c^a = E_c^d \longrightarrow e = 1$$

Choque inelástico

$$E_c^d = 0 \longrightarrow \Delta E_c = -E_c^a \longrightarrow e = 0$$

Choque parcialmente elástico (semielástico)

$$E_c^a > E_c^d \neq 0 \longrightarrow \Delta E_c < 0 \longrightarrow 0 < e < 1$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

80/83



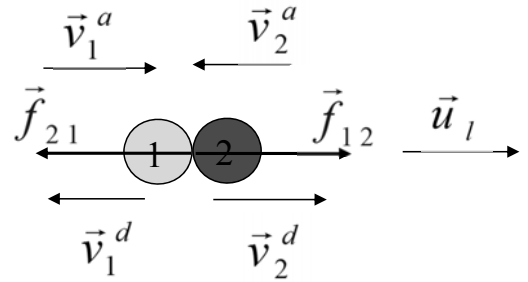
CHOQUES



ECUACIONES PARA LA RESOLUCIÓN DE CHOQUES

Choque Central Directo:

$$\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0}$$



$$m_1 v_1^a + m_2 v_2^a = m_1 v_1^d + m_2 v_2^d$$

$$e = - \frac{v_2^d - v_1^d}{v_2^a - v_1^a}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

81/83



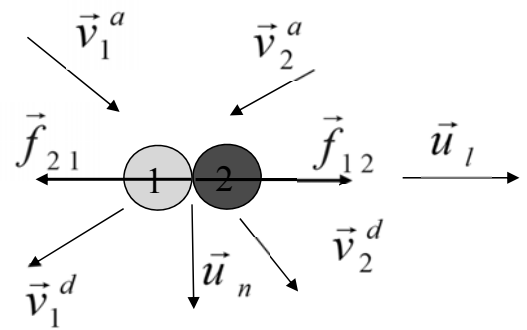
CHOQUES



ECUACIONES PARA LA RESOLUCIÓN DE CHOQUES

Choque Central Oblicuo:

$$\vec{F}_{ext} \cdot \vec{u}_l = \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{u}_l = 0$$



$$m_1 v_{1l}^a + m_2 v_{2l}^a = m_1 v_{1l}^d + m_2 v_{2l}^d$$

$$e = - \frac{v_{2l}^d - v_{1l}^d}{v_{2l}^a - v_{1l}^a}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

82/83



CHOQUES



ECUACIONES PARA LA RESOLUCIÓN DE CHOQUES

$$\vec{v}_i = v_{i\,l} \vec{u}_l + v_{i\,n} \vec{u}_n, \quad i = 1, 2$$

$$\vec{F}_{21} \cdot \vec{u}_n = \frac{d\vec{p}_1}{dt} \cdot \vec{u}_n = 0 \longrightarrow v_{1\,n}^a = v_{1\,n}^d$$

$$\vec{F}_{12} \cdot \vec{u}_n = \frac{d\vec{p}_2}{dt} \cdot \vec{u}_n = 0 \longrightarrow v_{2\,n}^a = v_{2\,n}^d$$

