



CINEMÁTICA DEL SÓLIDO RÍGIDO

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



ÍNDICE

GRADOS DE LIBERTAD DE UN SÓLIDO RÍGIDO (SR)
CAMPO DE VELOCIDADES DE UN SR
CONDICIÓN CINEMÁTICA DE RIGIDEZ
VELOCIDAD ANGULAR DE ROTACIÓN DE UN SR
RELACIÓN ENTRE VELOCIDADES DE DOS PUNTOS DEL SR
CONDICIÓN CINEMÁTICA DE RIGIDEZ
VELOCIDAD DE DESLIZAMIENTO
EJE INSTANTÁNEO DE ROTACIÓN Y MÍNIMO
DESLIZAMIENTO (EIRyMD)
EJE INSTANTÁNEO DE ROTACIÓN (EIR)
CAMPO DE ACELERACIONES

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval





ÍNDICE

MOVIMIENTO PLANO

MOVIMIENTO GENERAL

CENTRO INSTANTÁNEO DE ROTACIÓN (CIR)

MOVIMIENTO DE TRASLACIÓN

MOVIMIENTO DE ROTACIÓN CON EJE FIJO

MOVIMIENTO CON PUNTO FIJO

TEOREMA DE EULER

MOVIMIENTO GENERAL

TEOREMA DE CHASLE

DESLIZAMIENTO ENTRE DOS SÓLIDOS

RODADURA Y PIVOTAMIENTO

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

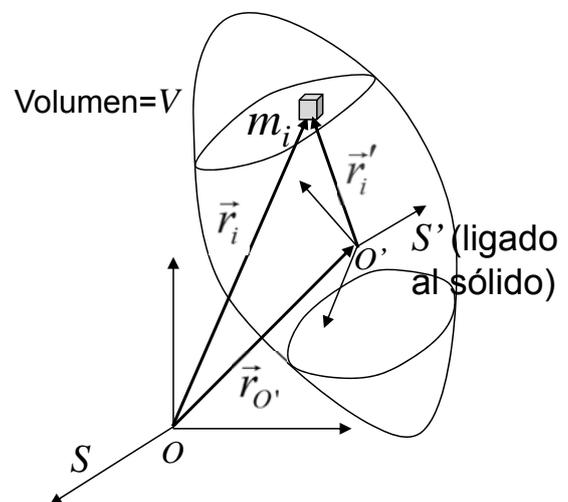
3/30



GRADOS DE LIBERTAD DE UN SR

Un sólido rígido es un sistema de partículas tal que la distancia entre dos cualesquiera de ellas no varía.

Un sólido rígido sólo tiene 6 grados de libertad. Por tanto, la posición de un sólido rígido queda determinada si se conocen los tres ángulos que determinan la orientación del sistema ligado al sólido S' respecto del S , además de las componentes del vector $\vec{r}_{O'}$.



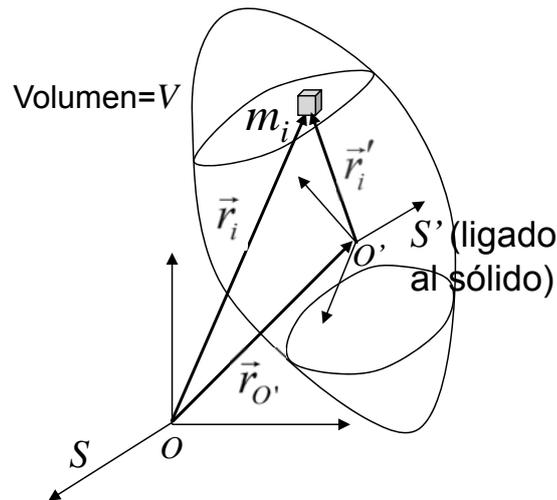
F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

4/30





CAMPO DE VELOCIDADES



Usando el movimiento relativo y dado que el sistema S' es una sistema ligado al sólido ($\vec{v}'_i = \vec{0}$), la velocidad de un punto i del sólido es:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{O'} + \vec{\Omega}_{S'S} \times \vec{r}'_i$$

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

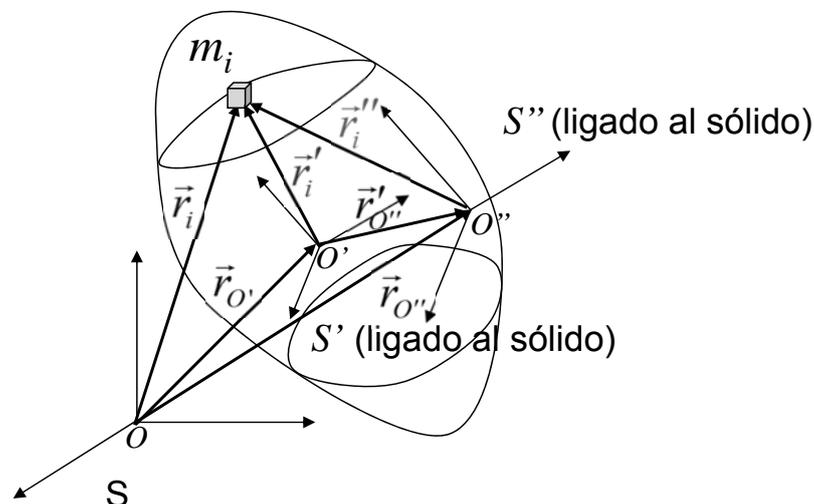
5/30



CAMPO DE VELOCIDADES

VELOCIDAD ANGULAR

Introducimos otro sistema de referencia S'' también ligado al sólido pero con origen distinto al de S' :



F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

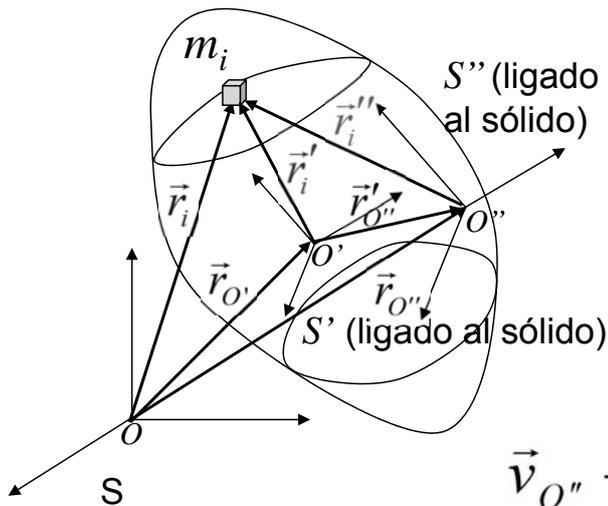
6/30



CAMPO DE VELOCIDADES



VELOCIDAD ANGULAR



Haciendo uso de S'' :

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{O''} + \vec{\Omega}_{S''S} \times \vec{r}_i''$$

Como:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{O'} + \vec{\Omega}_{S'S} \times \vec{r}_i'$$

Igualando:

$$\vec{v}_{O''} + \vec{\Omega}_{S''S} \times \vec{r}_i'' = \vec{v}_{O'} + \vec{\Omega}_{S'S} \times \vec{r}_i'$$

Dado que $\vec{v}_{O''} = \vec{v}_{O'} + \vec{\Omega}_{S'S} \times \vec{r}'_{O''}$, queda:

$$\vec{\Omega}_{S''S} \times \vec{r}_i'' = \vec{\Omega}_{S'S} \times (\vec{r}_i' - \vec{r}'_{O''}) = \vec{\Omega}_{S'S} \times \vec{r}_i''$$

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

7/30



CAMPO DE VELOCIDADES



VELOCIDAD ANGULAR

$$\vec{\Omega}_{S'S} = \vec{\Omega}_{S''S}$$

La velocidad angular del sistema S' es la misma que la del sistema S'' .

Es decir, es independiente del origen del sistema de referencia ligado al sólido.

Esta velocidad angular se conoce como velocidad angular del sólido rígido ($\vec{\omega}$).

$$\vec{\omega} = \vec{\Omega}_{S'S}$$

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

8/30



CAMPO DE VELOCIDADES



RELACIÓN ENTRE VELOCIDADES DE DOS PUNTOS DEL SR

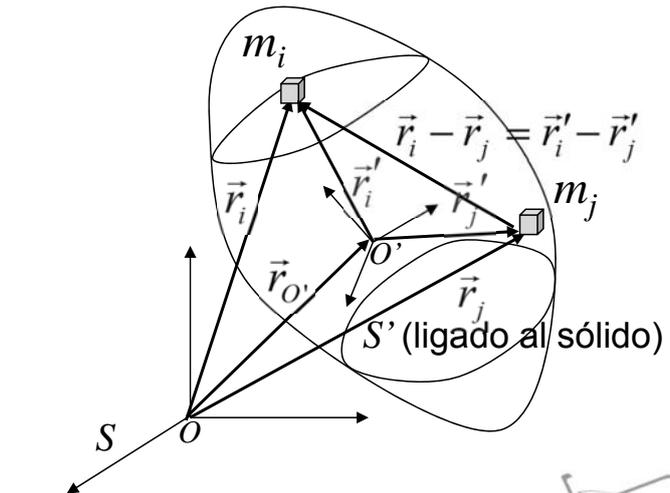
$$\vec{v}_i = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}'_i$$

$$\vec{v}_i = \underbrace{\vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}'_j}_{\vec{v}_j} + \vec{\omega} \times (\vec{r}'_i - \vec{r}'_j)$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_j + \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

También se puede escribir:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_Q + \vec{\omega} \times \overrightarrow{QP}$$



9/30

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



CAMPO DE VELOCIDADES



CONDICIÓN CINEMÁTICA DE RIGIDEZ

La condición cinemática de rigidez implica que, dadas dos partículas P y Q cualesquiera del sólido, la proyección de sus respectivas velocidades sobre la recta que las une es la misma.

$$\vec{v}^P \cdot \vec{u}^{PQ} = \vec{v}^Q \cdot \vec{u}^{PQ}$$

Las dos partículas avanzan o retroceden a lo largo de la línea que las une en igual medida, manteniendo su distancia relativa.

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

10/30

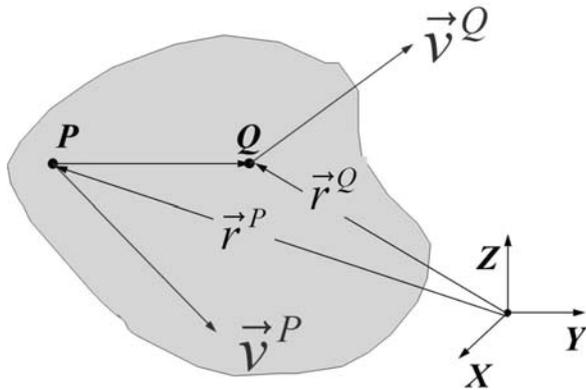


CAMPO DE VELOCIDADES

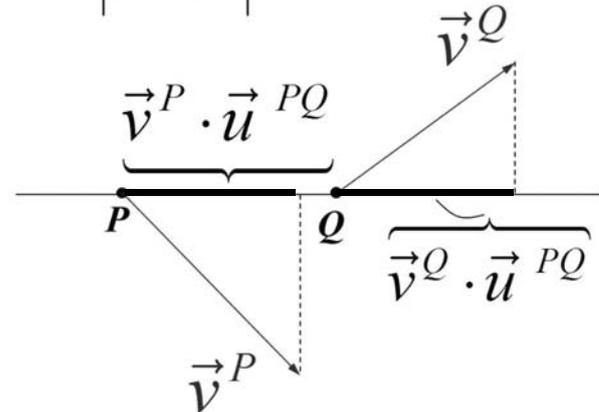


CONDICIÓN CINEMÁTICA DE RIGIDEZ

$$\vec{v}^P \cdot \vec{u}^{PQ} = \vec{v}^Q \cdot \vec{u}^{PQ}$$



$$\vec{u}^{PQ} = \frac{\vec{r}^Q - \vec{r}^P}{|\vec{r}^Q - \vec{r}^P|}$$



F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

11/30



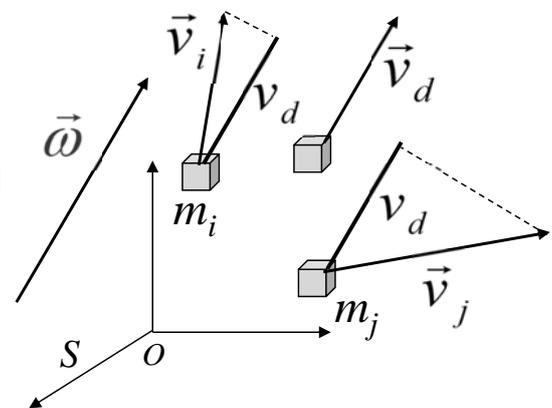
CAMPO DE VELOCIDADES



VELOCIDAD DE DESLIZAMIENTO

La proyección de la velocidad de cualquier partícula del sólido en la dirección de la velocidad angular es la misma. A dicha proyección se le llama velocidad de deslizamiento.

El vector velocidad de deslizamiento es un vector en la dirección de la velocidad angular, cuyo módulo es la velocidad mínima que tienen los puntos del sólido.



$$\vec{v}_i = \vec{v}_j + \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

$$\vec{v}_i \cdot \vec{\omega} = \vec{v}_j \cdot \vec{\omega}$$

$$v_d = \vec{v}_i \cdot \frac{\vec{\omega}}{\omega} \rightarrow \vec{v}_d = v_d \frac{\vec{\omega}}{\omega}$$

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

12/30



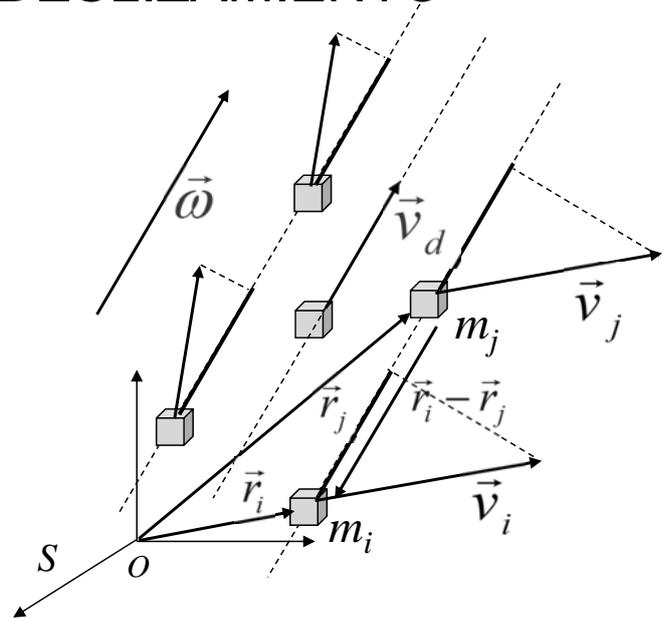
CAMPO DE VELOCIDADES

VELOCIDAD DE DESLIZAMIENTO

$$\vec{v}_i = \vec{v}_j + \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

$$\vec{\omega} \parallel (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_j$$



Todos los puntos situados sobre rectas paralelas a la velocidad angular poseen la misma velocidad.

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

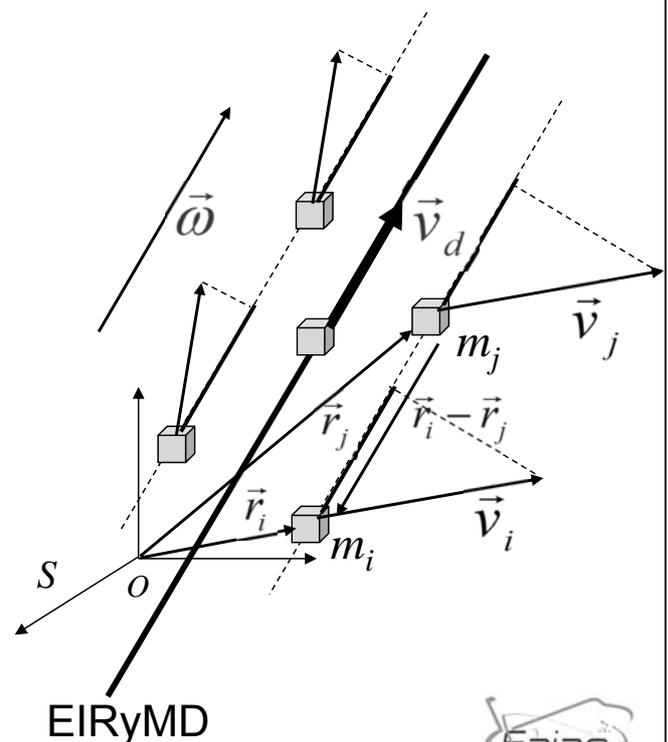
13/30



EJE INSTANTÁNEO DE ROTACIÓN Y MÍNIMO DESLIZAMIENTO (EIRyMD)

EIRyMD:

Lugar geométrico de los puntos del sólido que tienen la mínima velocidad instantánea, esto es, la velocidad de deslizamiento. Si la velocidad de deslizamiento es cero, se le llama Eje Instantáneo de Rotación (EIR).



EIRyMD

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

14/30





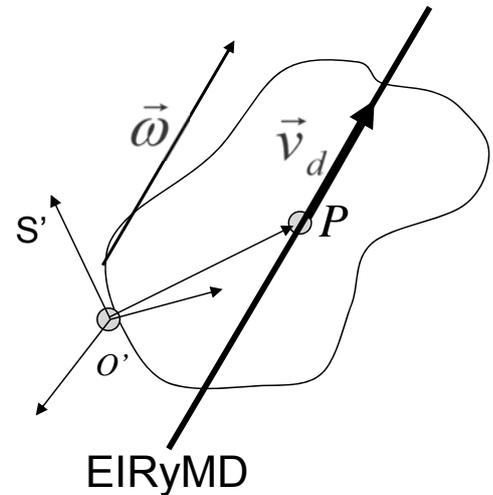
EJE INSTANTÁNEO DE ROTACIÓN Y MÍNIMO DESLIZAMIENTO (EIRyMD)

Ecuación

$$\vec{v}_d = \vec{v}_P = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{O'P}$$

$$\vec{0} = \vec{v}_P \times \vec{\omega} = \vec{v}_{O'} \times \vec{\omega} + (\vec{\omega} \times \overrightarrow{O'P}) \times \vec{\omega}$$

$$\vec{0} = \vec{v}_{O'} \times \vec{\omega} + \omega^2 \overrightarrow{O'P} - (\vec{\omega} \cdot \overrightarrow{O'P}) \vec{\omega}$$



Definimos el parámetro λ :

$$\lambda = \frac{\vec{\omega} \cdot \overrightarrow{O'P}}{\omega}$$

$$\overrightarrow{O'P} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_{O'}}{\omega^2} + \lambda \frac{\vec{\omega}}{\omega}$$

F. Jiménez Lorenzo

J.C. Jiménez Sáez

S. Ramírez de la Piscina Millán

U.D. Física I

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

15/30



EJE INSTANTÁNEO DE ROTACIÓN (EIR)

El EIR existe cuando:

$$v_d = \vec{v}_P \cdot \frac{\vec{\omega}}{\omega} = 0$$

El sólido tiene algún punto instantáneamente fijo.

(Ej: Sólido con un punto fijo)

$$\vec{v}_P = \vec{0}$$

La velocidad de algún punto es perpendicular a $\vec{\omega}$.

(Ej: Sólido en movimiento plano)

$$\vec{v}_P \perp \vec{\omega}$$

F. Jiménez Lorenzo

J.C. Jiménez Sáez

S. Ramírez de la Piscina Millán

U.D. Física I

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

16/30





CAMPO DE ACELERACIONES

Derivando el campo de velocidades: $\vec{v}_i = \vec{v}_j + \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$

Obtenemos la relación entre aceleraciones de dos puntos del sólido o campo de aceleraciones del sólido.

$$\vec{a}_i = \vec{a}_j + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j) + \vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{v}_j)$$

← Aceleración angular del sólido $\vec{\alpha}$

También se puede escribir:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_Q + \vec{\alpha} \times \overrightarrow{QP} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{QP})$$

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

17/30



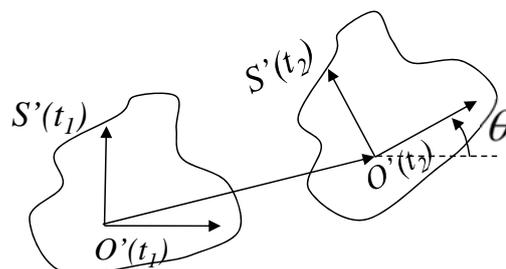
MOVIMIENTO PLANO

MOVIMIENTO GENERAL

El número de grados de libertad en el movimiento plano general de un sólido rígido es tres (3):

Posición del origen (2) y ángulo girado (1).

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{O'P}$$



F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

18/30



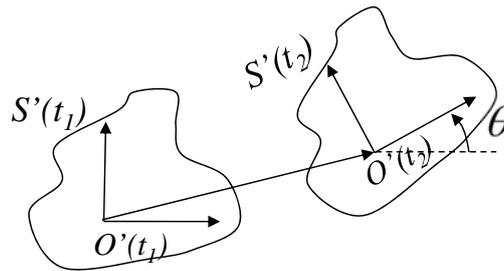
MOVIMIENTO PLANO



MOVIMIENTO GENERAL

Teorema de Chasle

El movimiento plano general de un sólido entre dos posiciones cualesquiera se puede conseguir mediante una traslación y una rotación. La traslación depende del punto que se elija del sólido, pero la rotación no.



En la figura el vector $\overline{O'(t_1)O'(t_2)}$ depende del punto O' elegido, pero el ángulo girado por el sólido es siempre θ

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

19/30

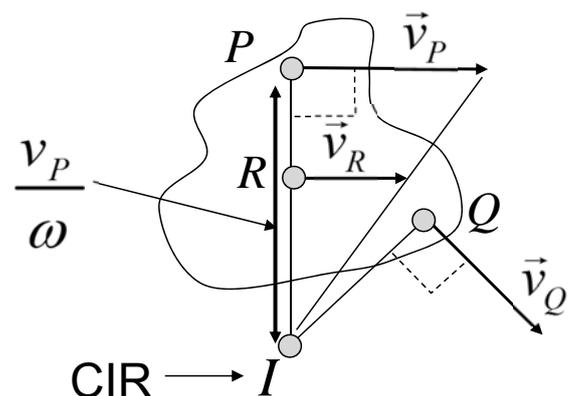


MOVIMIENTO PLANO



CENTRO INSTANTÁNEO DE ROTACIÓN (CIR)

CIR: Intersección del EIR con la sección central del sólido. (Esta sección es la intersección del sólido con el plano que contiene la trayectoria del centro de masas).



$$v_P \vec{u} = \vec{v}_P = \vec{v}_{CIR} + \vec{\omega} \times \overline{IP} = \vec{\omega} \times \overline{IP} = \omega |IP| \vec{u} \rightarrow |IP| = \frac{v_P}{\omega}$$

$$|IR| = \frac{v_R}{\omega}; \quad |IQ| = \frac{v_Q}{\omega}$$

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

20/30



MOVIMIENTO PLANO

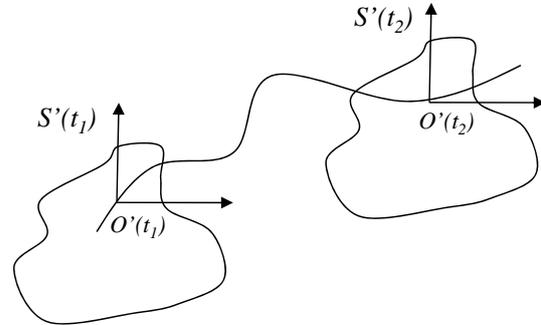


MOVIMIENTO DE TRASLACIÓN

El número de grados de libertad es dos (2):

Posición del origen (2).

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{O'P}$$



$$\vec{\omega} = \vec{0} \longrightarrow \vec{v}_P = \vec{v}_{O'}$$

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

21/30



MOVIMIENTO PLANO

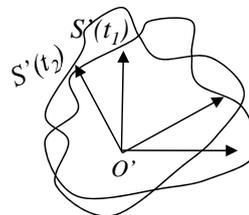


MOVIMIENTO DE ROTACIÓN CON EJE FIJO

El número de grados de libertad es uno (1):

Ángulo girado (1).

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{O'P}$$



$$\vec{v}_{O'} = \vec{0} \longrightarrow \vec{v}_P = \vec{\omega} \times \overrightarrow{O'P}$$

El eje fijo es perpendicular al plano del movimiento y pasa por O'

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

22/30



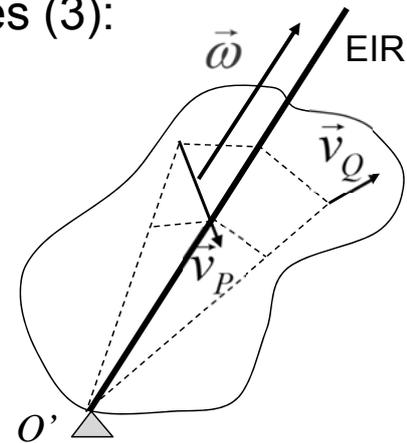


MOVIMIENTO CON PUNTO FIJO

El número de grados de libertad es tres (3):

Ángulos girados por S' (3).

La velocidad de deslizamiento del sólido es cero, basta calcularla en el punto fijo O' .



El eje con los puntos de velocidad instantánea nula que atraviesa O' es el EIR.

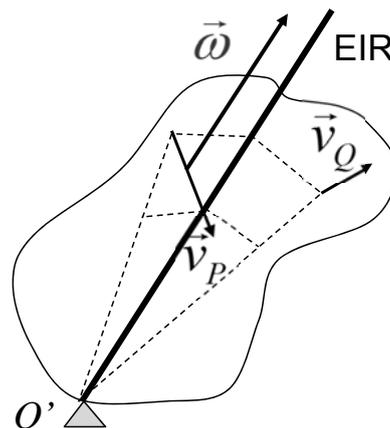
$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \times O'\vec{P}$$



MOVIMIENTO CON PUNTO FIJO

TEOREMA DE EULER

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \times O'\vec{P}$$



El movimiento de un sólido con un punto fijo es una rotación instantánea alrededor de un eje (EIR) que pasa por el punto fijo.



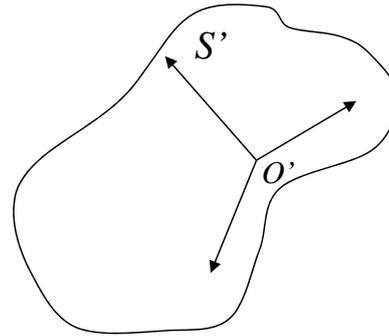


MOVIMIENTO GENERAL

El número de grados de libertad es seis (6):

Posición de O' (3) y ángulos girados por S' (3).

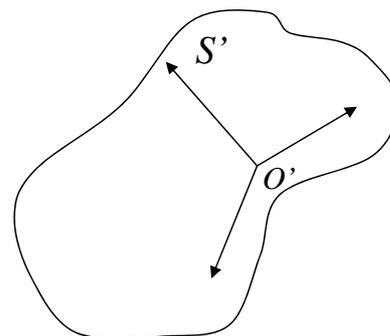
$$\vec{v}_P = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{O'P}$$



MOVIMIENTO GENERAL

TEOREMA DE CHASLE

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{O'P}$$



Teorema de Chasle

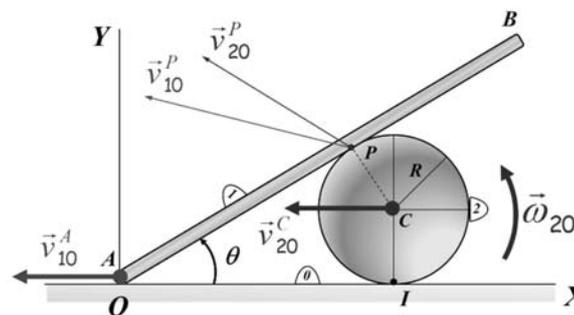
El movimiento más general de un sólido se puede conseguir como la superposición de una traslación a la velocidad de traslación de uno de sus puntos y una rotación del sólido como si el punto considerado estuviera fijo instantáneamente.





DESLIZAMIENTO ENTRE DOS SÓLIDOS

Dados dos sólidos en contacto, como es el caso del disco (sólido 2) y de la varilla (sólido 1) de la figura (el sólido 0 es el sistema fijo), si la velocidad del punto del sólido 1 que en ese instante pasa por P , \vec{v}_{10}^P , no es igual que la velocidad \vec{v}_{20}^P del correspondiente punto del sólido 2 que pasa en el mismo instante por dicho punto, se dice que existe deslizamiento en P entre los dos sólidos.

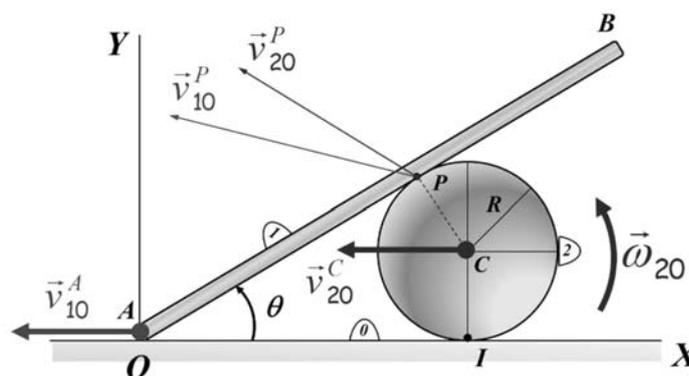


F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

27/30



DESLIZAMIENTO ENTRE DOS SÓLIDOS



La velocidad de deslizamiento del sólido 2 respecto al sólido 1, en el punto de contacto P , queda definida por la diferencia:

$$\vec{v}_{21}^P = \vec{v}_{20}^P - \vec{v}_{10}^P$$

F. Jiménez Lorenzo
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

28/30



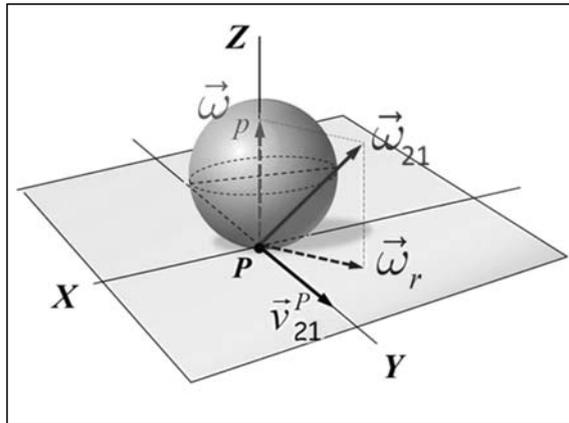


RODADURA Y PIVOTAMIENTO

Si un sólido (la esfera de la figura) se mueve por una superficie (sólido 1), de manera que existe una componente de su velocidad angular de rotación perpendicular a esa superficie se dice que el sólido 2 pivota sobre el sólido 1 y a esa componente de la velocidad angular se le denomina:

velocidad angular de pivotamiento $\vec{\omega}_p$

$$\vec{\omega}_p = (\vec{\omega}_{21} \cdot \vec{n}) \vec{n}$$



29/30

F. Jiménez Lorenzo

J.C. Jiménez Sáez

S. Ramírez de la Piscina Millán

U.D. Física I

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

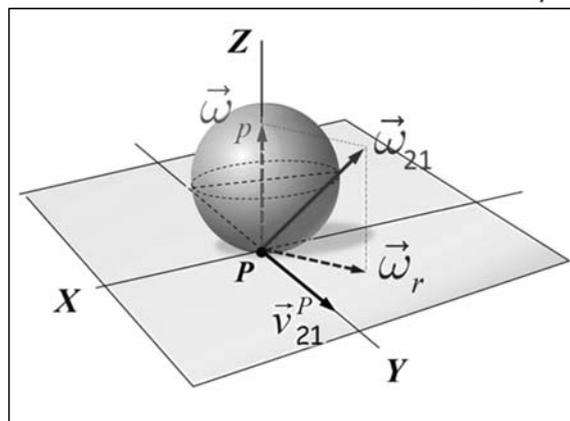


RODADURA Y PIVOTAMIENTO

Si además la velocidad angular posee una componente paralela a la superficie, se dice que rueda y a tal componente se la denomina

velocidad angular de rodadura, $\vec{\omega}_r$

$$\vec{\omega}_r = \vec{n} \times (\vec{\omega}_{21} \times \vec{n})$$



30/30

F. Jiménez Lorenzo

J.C. Jiménez Sáez

S. Ramírez de la Piscina Millán

U.D. Física I

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

