# DINÁMICA DEL SÓLIDO RÍGIDO

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



## ÍNDICE



J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

# ÍNDICE



J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

# ÍNDICE



J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

# FUERZAS Y MOMENTOS APLICADOS SOBRE UN SR

Las fuerzas que actúan sobre un sólido rígido cumplen:

EL MODELO DE FUERZA PUNTUAL

A pesar de que muchas fuerzas se trasmiten sobre una superficie de contacto, es posible reducirlas a una única fuerza, o a una fuerza y un momento, con un punto de aplicación bien determinado.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval


# FUERZAS Y MOMENTOS APLICADOS SOBRE UN SR

LA LEY DEL PARALELOGRAMO DE SUMA VECTORIAL

El efecto que producen varias fuerzas sobre un sólido es igual al que produce su suma vectorial, consideradas como sistema de vectores deslizante.

EL PRINCIPIO DE TRANSMISIBILIDAD

El efecto de una fuerza sobre un sólido rígido no cambia si desplazamos el punto de aplicación a lo largo de su recta soporte.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

# FUERZAS Y MOMENTOS APLICADOS SOBRE UN SR

Las fuerzas exteriores que podemos considerar aplicadas sobre un sólido son:

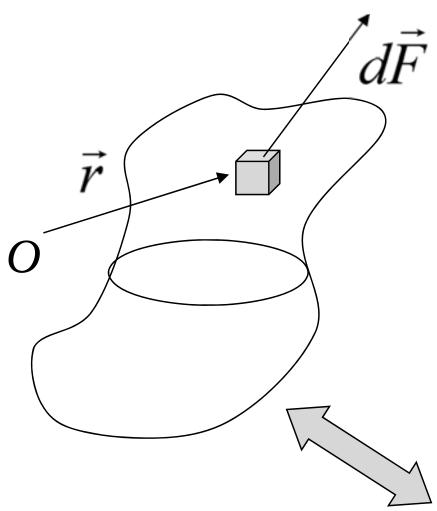
- Fuerzas a distancia, tales como el peso o acciones electromagnéticas.

- Fuerzas y momentos directamente aplicados o de contacto con otros sistemas.

- Fuerzas y momentos de reacción en apoyos.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval


# FUERZAS DISTRIBUIDAS DE FORMA CONTINUA

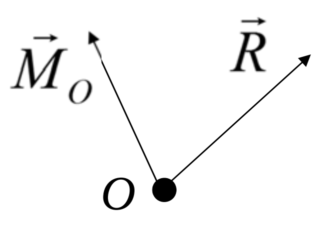



Resultante: $\vec{R} = \int d\vec{F}$

Momento resultante en el origen $O$:

$$\vec{M}_O = \int \vec{r} \times d\vec{F}$$

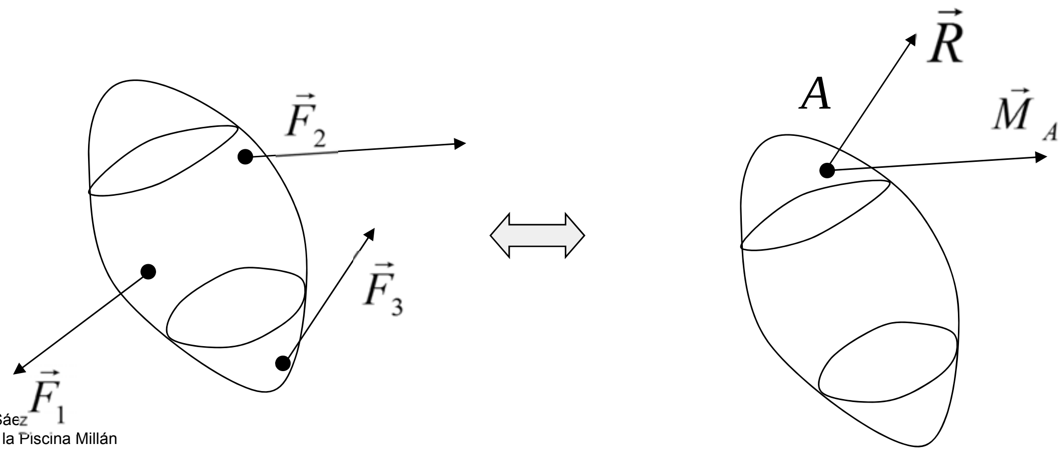
El sistema de fuerzas se reduce en el origen a la resultante y al momento resultante




J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

# REDUCCIÓN DE UN SISTEMA DE FUERZAS

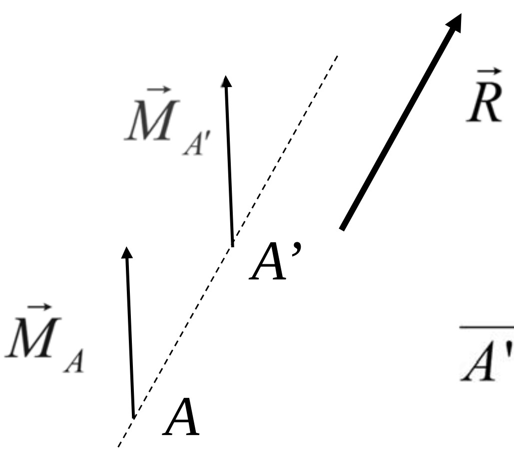
Las fuerzas que actúan sobre un sólido rígido se comportan como un sistema de vectores deslizantes. El sistema de fuerzas se puede reducir en un punto A a un sistema equivalente constituido por la fuerza resultante ( $\vec{R}$ ) y por el momento resultante ( $\vec{M}_A$ ).




J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



# INVARIANTES DE UN SISTEMA DE FUERZAS




La resultante es el invariante vectorial. Existe otro invariante.

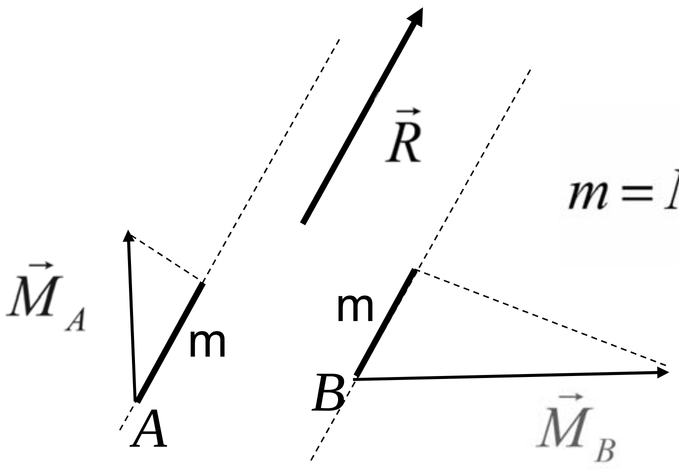
$$\vec{M}_A = \vec{R} \times \overrightarrow{A'A} + \vec{M}_{A'}$$

$$\overrightarrow{A'A} \parallel \vec{R} \rightarrow \vec{R} \times \overrightarrow{A'A} = \vec{0} \rightarrow \vec{M}_A = \vec{M}_{A'}$$

El momento resultante de un sistema respecto de puntos situados en rectas paralelas a la resultante es el mismo

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

# INVARIANTES DE UN SISTEMA DE FUERZAS




$$m = \vec{M}_A \cdot \frac{\vec{R}}{R} = (\vec{M}_B + \vec{R} \times \overrightarrow{BA}) \cdot \frac{\vec{R}}{R} =$$

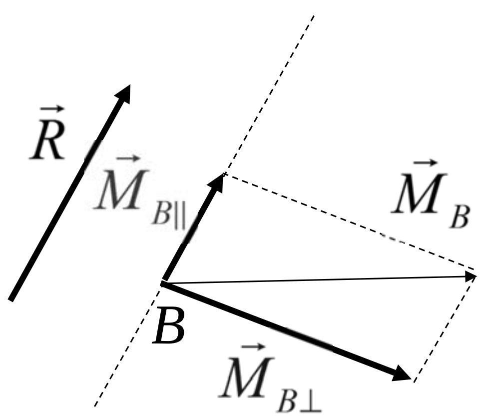
$$= \vec{M}_B \cdot \frac{\vec{R}}{R} \rightarrow \vec{M}_B \cdot \frac{\vec{R}}{R} = m$$

La proyección en la dirección de la resultante del momento resultante del sistema es siempre la misma independientemente del punto con respecto al cual se haya calculado dicho momento.

m es un invariante del sistema de vectores (invariante escalar)

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval


# MOMENTO MÍNIMO



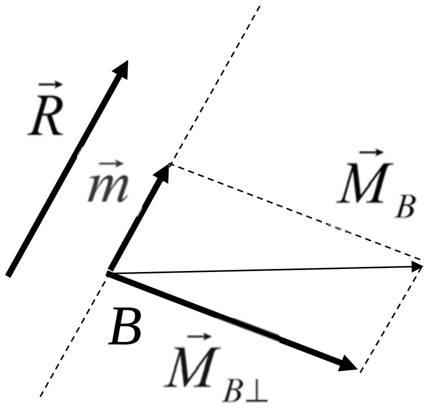

$$\vec{M}_{B||} = \vec{M}_B \cdot \frac{\vec{R}}{R}$$

El momento resultante se puede descomponer siempre en dos vectores: una componente paralela y otra perpendicular a la resultante.

$$\vec{M}_B = \vec{M}_{B||} + \vec{M}_{B\perp}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

# MOMENTO MÍNIMO




$$\vec{M}_{B\|} = \vec{M}_B \cdot \frac{\vec{R}}{R} = m$$

$$\vec{m} = m \cdot \frac{\vec{R}}{R}$$

$$\vec{M}_B = \vec{m} + \vec{M}_{B\perp} \Rightarrow \left|\vec{M}_B\right| = \left|\vec{m} + \vec{M}_{B\perp}\right| = \sqrt{m^2 + M_{B\perp}^2} \geq m$$

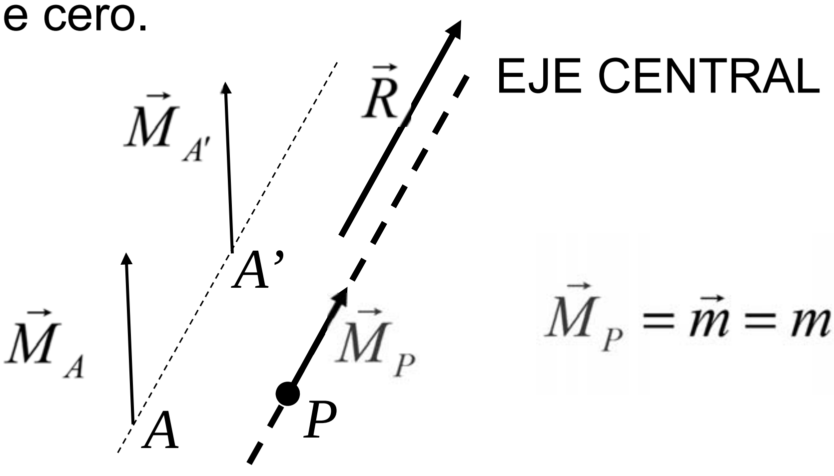
El módulo del momento resultante es siempre mayor o igual que su proyección en la dirección de la resultante.

$\vec{m}$ es el vector momento mínimo

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval


# EJE CENTRAL

Eje Central: Lugar geométrico de los puntos del espacio con respecto a los cuales el momento resultante del sistema es el vector momento mínimo.
Es condición necesaria para que exista que la resultante sea distinta de cero.

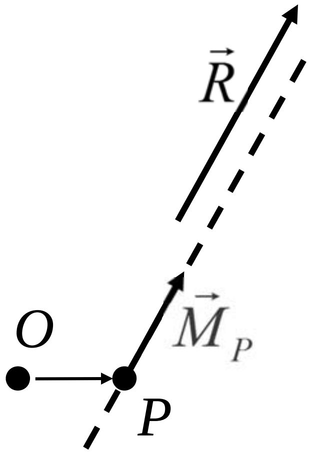



$$\vec{M}_P = \vec{m} = m \cdot \frac{\vec{R}}{R}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

# EJE CENTRAL

Si P es un punto del eje central, entonces: $\vec{M}_P \parallel \vec{R}$




$$\vec{M}_P = \vec{M}_O + \vec{R} \times \vec{OP} = \vec{M}_O - \vec{r} \times \vec{R}$$

$$\vec{M}_P \times \vec{R} = \vec{0} \rightarrow \vec{M}_O \times \vec{R} - (\vec{r} \times \vec{R}) \times \vec{R} = \vec{0}$$

$$0 = -(\vec{r} \cdot \vec{R})\vec{R} + (\vec{R} \cdot \vec{R})\vec{r} + \vec{M}_O \times \vec{R}$$

EJE CENTRAL

$$\vec{r} = \frac{\vec{R} \times \vec{M}_O}{R^2} + \frac{(\vec{r} \cdot \vec{R})}{R} \frac{\vec{R}}{R}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

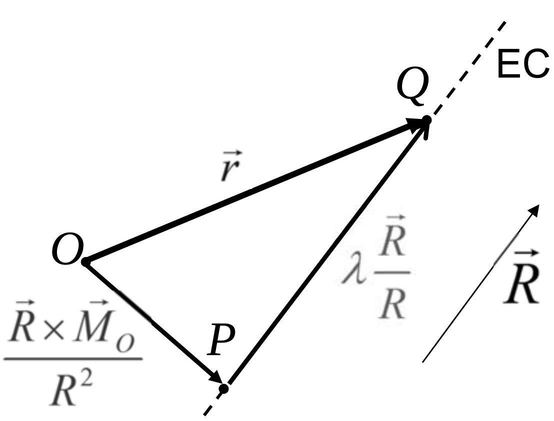


# EJE CENTRAL

$$\vec{r} = \frac{\vec{R} \times \vec{M}_O}{R^2} + \frac{(\vec{r} \cdot \vec{R})}{R} \frac{\vec{R}}{R}$$

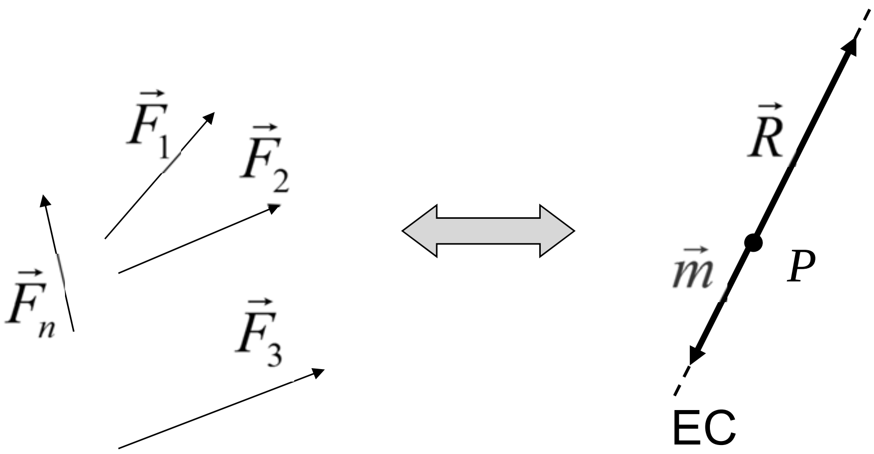
Introducimos el parámetro $\lambda$: $\lambda = \dfrac{\vec{r} \cdot \vec{R}}{R}$

Ecuación vectorial $\quad \vec{r} = \dfrac{\vec{R} \times \vec{M}_O}{R^2} + \lambda \dfrac{\vec{R}}{R}$




J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

# TORSOR EQUIVALENTE




El sistema de vectores se reduce en un punto P del eje central a la resultante y al vector momento mínimo.

El conjunto de ambos vectores recibe el nombre de Torsor Equivalente.

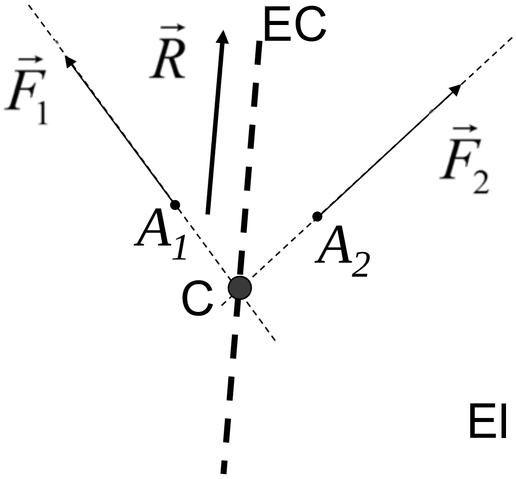
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval





# FUERZAS CONCURRENTES

Las rectas soporte de todas las fuerzas pasan por un mismo punto llamado punto de concurrencia C.




El momento resultante respecto al punto C es nulo, por tanto, el momento mínimo es nulo.

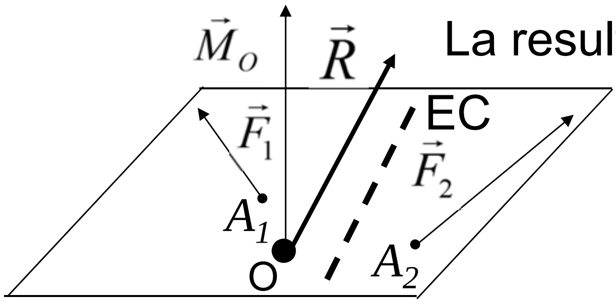
El Eje Central pasará por el punto C.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CASOS ESPECIALES DE
SISTEMAS DE FUERZAS

# FUERZAS COPLANARIAS

Todas las fuerzas están contenidas en el mismo plano.




La resultante está contenida en el plano.

El momento resultante respecto de un punto del plano es perpendicular al plano.

Por tanto, el momento mínimo es cero.

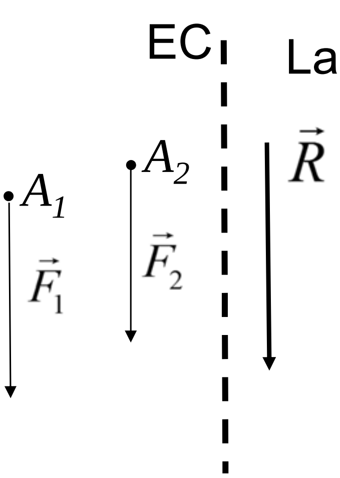
El Eje Central también está contenido en el plano.



CASOS ESPECIALES DE
SISTEMAS DE FUERZAS

# FUERZAS PARALELAS

Las rectas soporte de todas las fuerzas son paralelas entre sí




La resultante es paralela al sistema de vectores

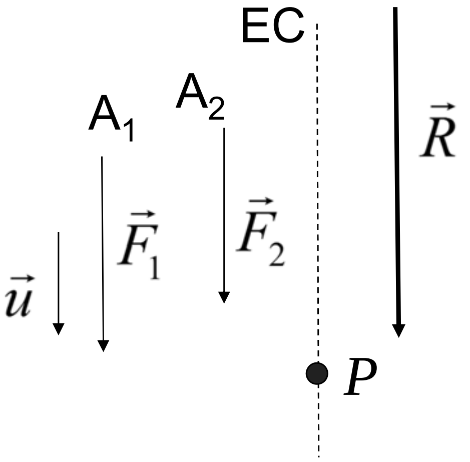
El momento resultante es perpendicular a la resultante.
Por tanto, el momento mínimo es nulo.

El Eje Central es paralelo al sistema de fuerzas.

CASOS ESPECIALES DE SISTEMAS DE FUERZAS

# FUERZAS PARALELAS: CENTRO

Si $P$ pertenece al eje central (momento mínimo nulo):




$$\vec{0} = \vec{M}_P = \vec{M}_O + \vec{R} \times \vec{OP} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \times \vec{OP}$$

Como: $\vec{F}_i = F_i \vec{u}$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} F_i \vec{r}_i\right) \times \vec{u} + \vec{u} \times \sum_{i=1}^{n} F_i \vec{OP} = 0$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



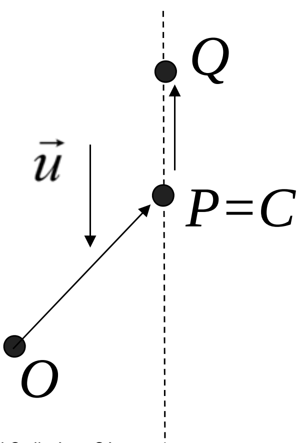
CASOS ESPECIALES DE SISTEMAS DE FUERZAS

# FUERZAS PARALELAS: CENTRO

$$\left(\sum_{i=1}^{n} F_i \vec{r}_i - \sum_{i=1}^{n} F_i \vec{OP}\right) \times \vec{u} = 0$$

Para que se cumpla la ecuación anterior debe ocurrir:

O bien 1)




$$\left(\sum_{i=1}^{n} F_i \vec{r}_i - \sum_{i=1}^{n} F_i \vec{OP}\right) = 0 \Rightarrow \vec{OP} = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i} = \vec{OC}$$

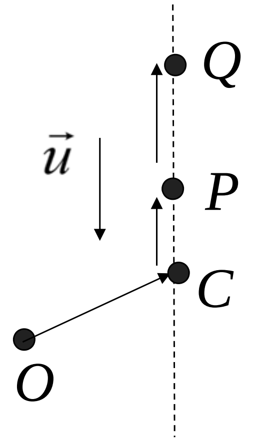
Ecuación del eje central: $\vec{OQ} = \vec{OC} + \lambda \vec{u}$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CASOS ESPECIALES DE SISTEMAS DE FUERZAS

# FUERZAS PARALELAS: CENTRO

O bien 2)




$$\left(\sum_{i=1}^{n} F_i\vec{r}_i - \sum_{i=1}^{n} F_i\vec{OP}\right) = \kappa\vec{u}$$

$$\vec{OP} = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i} - \frac{\kappa}{\sum_{i=1}^{n} F_i}\vec{u} = \vec{OC} + \kappa'\vec{u}$$

Ecuación del eje central: $\vec{OQ} = \vec{OC} + \lambda\vec{u}$

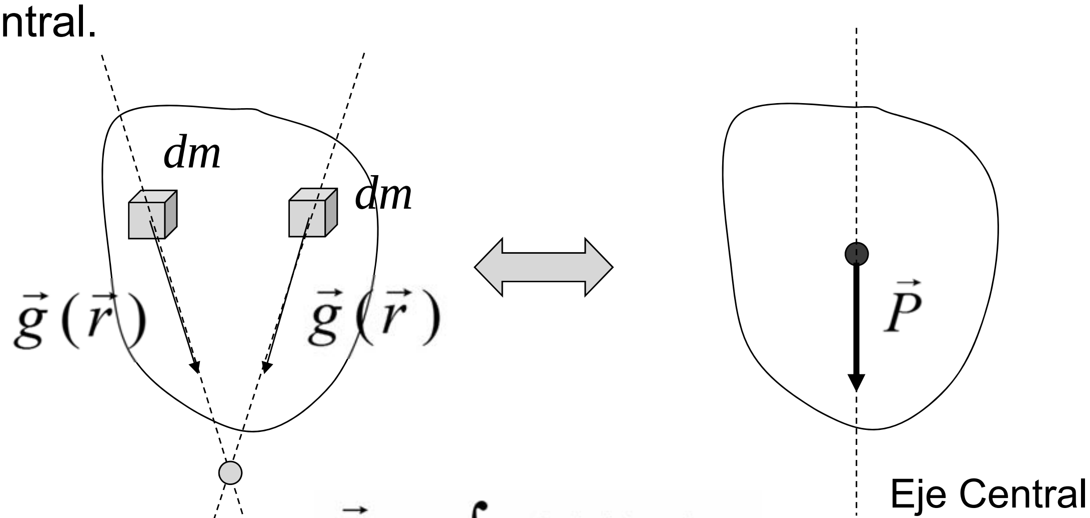
$C$ es el centro del sistema de vectores. Si cambia la dirección de $\vec{u}$, el centro del sistema es el mismo.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



# CENTRO DE GRAVEDAD

Sobre grandes masas, el campo gravitatorio es un campo central reducible a la resultante aplicada en un punto del eje central.

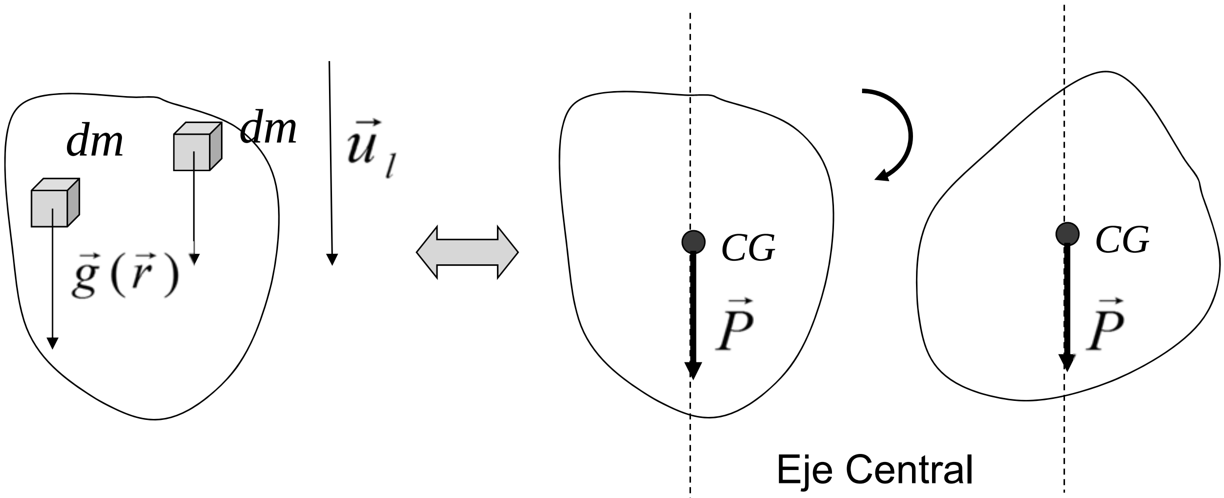



$$\vec{P} = \int_M \vec{g}(\vec{r})\,dm$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

# CENTRO DE GRAVEDAD

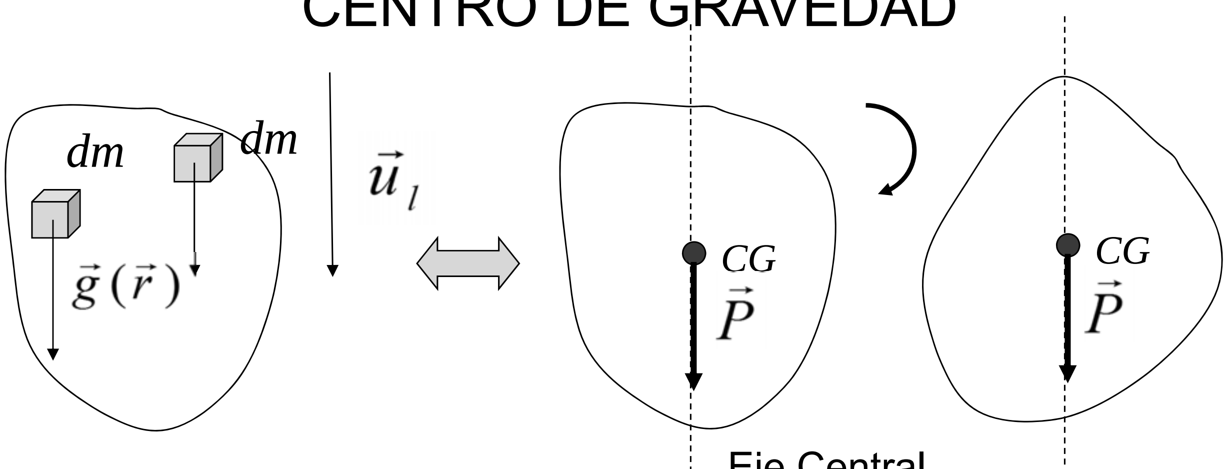
En la aproximación de vectores paralelos no uniformes, el campo gravitatorio es un campo de vectores paralelos reducible a la resultante aplicada en un punto del eje central. Un punto siempre de este eje es el CENTRO, llamado centro de gravedad ($CG$).




J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



# CENTRO DE GRAVEDAD




$$\vec{g}(\vec{r}) = g(\vec{r})\vec{u}_l$$

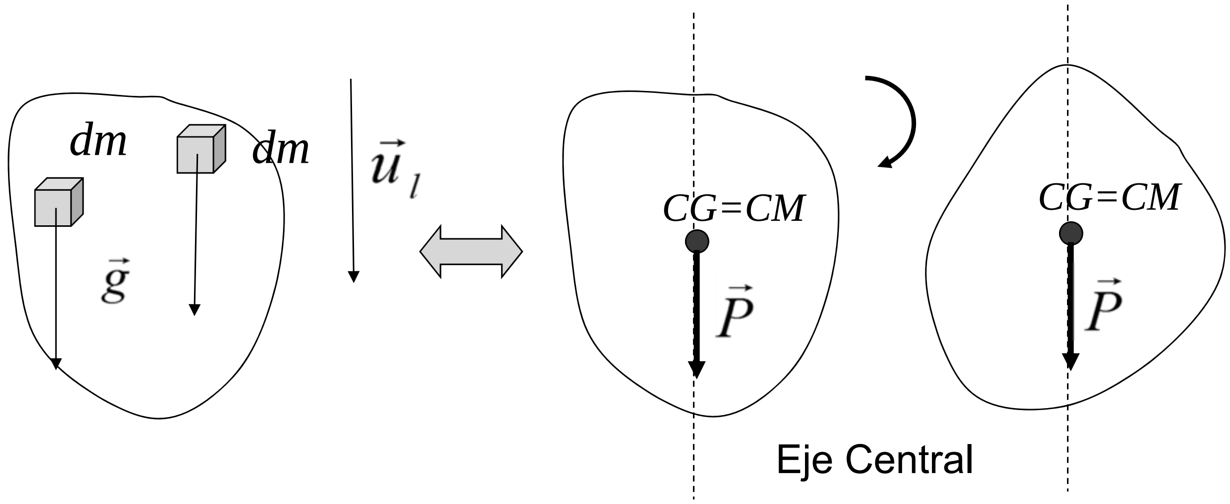
$$\vec{P} = \left( \int_M g(\vec{r})dm \right) \vec{u}_l \qquad \vec{R}_{CG} = \frac{\int_M g(\vec{r})\vec{r}dm}{\int_M g(\vec{r})dm}$$

El centro de gravedad es el mismo independientemente de la orientación del sólido (véase sistemas de vectores deslizantes)

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

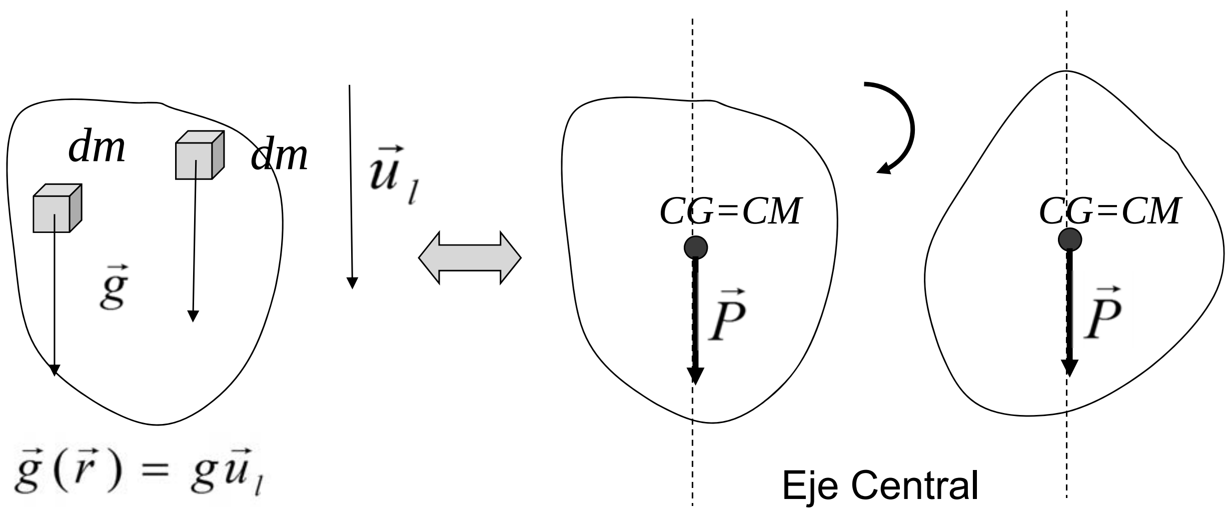
# CENTRO DE GRAVEDAD

En la aproximación de vectores paralelos uniformes, el campo gravitatorio es un campo de vectores paralelos reducible a la resultante aplicada en un punto del eje central. Un punto siempre de este eje es el CENTRO, llamado centro de gravedad que coincide en este caso con el $CM$.




J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval


# CENTRO DE GRAVEDAD




$$\vec{g}(\vec{r}) = g\vec{u}_l$$

$$\vec{P} = \left( \int_M g\,dm \right) \vec{u}_l = Mg\vec{u}_l$$

$$\vec{R}_{CG} = \frac{\int_M \vec{r}\,dm}{M} = \vec{R}_{CM}$$

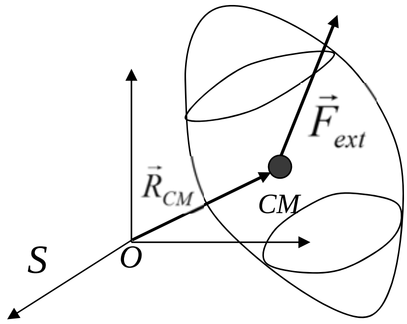
El centro de gravedad coincide con el $CM$.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

# ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO DEL $CM$

De manera análoga a un sistema de partículas se verifica:

$$M\frac{d\vec{V}_{CM}}{dt}=\vec{F}_{ext}$$




Ecuación de movimiento del $CM$:

$$M\vec{A}_{CM}=\vec{F}_{ext}$$

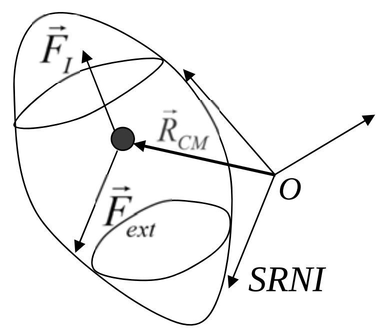
Cantidad de movimiento del $SR$: $\vec{p}=\int_M dm\,\vec{v}=M\vec{V}_{CM}$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



# ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO DEL $CM$ EN UN $SRNI$

$$M\frac{d\vec{V}_{CM}}{dt}=\vec{F}_{ext}+\vec{F}_I=\vec{F}$$




Ecuación de movimiento del $CM$ en $SRNI$:

$$M\vec{A}_{CM}=\vec{F}$$

Cantidad de movimiento del $SR$ en $SRNI$:

$$\vec{p}=\int_M dm\,\vec{v}=M\vec{V}_{CM}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

# ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO DEL $CM$ EN UN $SRNI$

Resultante de fuerzas de inercia en un sistema no inercial con aceleración del origen $\vec{a}_O$, de velocidad angular $\vec{\Omega}$ y aceleración angular $\vec{\alpha}$:

$$\vec{F}_I = \int_M d\vec{F}_I$$

$$\vec{F}_I = -\int_M \left(\vec{a}_O + \vec{\alpha}\times\vec{r} + \vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}) + 2(\vec{\Omega}\times\vec{v})\right)dm$$

$$\vec{F}_I = -M\left(\vec{a}_O + \vec{\alpha}\times\vec{R}_{CM} + \vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{R}_{CM}) + 2(\vec{\Omega}\times\vec{V}_{CM})\right)$$



# TEOREMA DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = M\,\frac{d\vec{V}_{CM}}{dt} = \vec{F}_{ext}$$ (Suponemos un $SRI$)

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{ext}\,dt = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

El impulso total de las fuerzas exteriores sobre un sólido rígido es igual a la variación de la cantidad de movimiento en ese intervalo.

Principio de conservación
Si $\vec{I} = \vec{0}$, la cantidad de movimiento del sistema $\vec{p}$ se conserva.

# TEOREMA DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO EN UN *SRNI*

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = M\,\frac{d\vec{V}_{CM}}{dt} = \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{I} = \vec{F}$$

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

El impulso total de las fuerzas exteriores y de inercia sobre un sólido rígido es igual a la variación de la cantidad de movimiento en ese intervalo.

Principio de conservación
Si $\vec{I} = \vec{0}$, la cantidad de movimiento del sistema $\vec{p}$ se conserva.

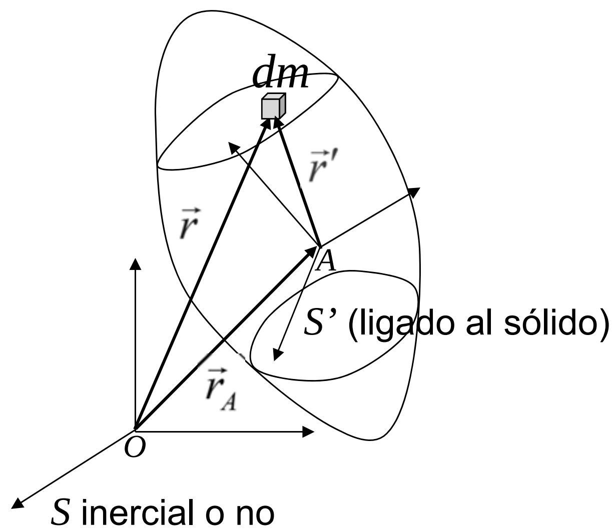


# MOMENTO CINÉTICO DE UN *SR*

$$\vec{L}_A = \sum_{i=1}^{N} (\vec{r}_i - \vec{r}_A)\times m_i\vec{v}_i$$

$$\downarrow$$

$$\vec{L}_A = \int_M (\vec{r} - \vec{r}_A)\times(dm\,\vec{v})$$




Utilizando el sistema *S'* ligado al sólido: $\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{r}_A$

$$\vec{v} = \vec{v}_A + \vec{\omega}\times(\vec{r} - \vec{r}_A) = \vec{v}_A + \vec{\omega}\times\vec{r}\,'$$

# MOMENTO CINÉTICO DE UN $SR$

$$\vec{L}_A = \int_M r' \times dm(\vec{v}_A + \vec{\omega}\times\vec{r}') = \underbrace{(\int_M dm\,\vec{r}')\times\vec{v}_A}_{M\overrightarrow{AC}\times\vec{v}_A} + \int_M dm\,\vec{r}'\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')$$

A debe ser un punto en reposo $(\vec{v}_A = 0)$

o el $CM$ $(\overrightarrow{AC} = \vec{0})$

$$\vec{L}_A = \int_M dm\,\vec{r}'\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') = \int_M dm(\left|\vec{r}'\right|^2 \vec{\omega} - (\vec{\omega}\cdot\vec{r}')\vec{r}')$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval


# MOMENTO CINÉTICO DE UN $SR$

$$\vec{L}_A = \int_M dm(\vec{r}'^2\omega_x - (x'\omega_{x'} + y'\omega_{y'} + z'\omega_{z'})x')\vec{i}' +$$
$$+\int_M dm(\vec{r}'^2\omega_y - (x'\omega_{x'} + y'\omega_{y'} + z'\omega_{z'})y')\,\vec{j}' +$$
$$+\int_M dm(\vec{r}'^2\omega_z - (x'\omega_{x'} + y'\omega_{y'} + z'\omega_{z'})z')\vec{k}'$$

$$(L_A)_{x'} = \left(\int_M dm(\vec{r}'^2 - x'^2)\right)\omega_{x'} - \left(\int_M dmx'y'\right)\omega_{y'} - \left(\int_M dmx'z'\right)\omega_{z'}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

# MOMENTO CINÉTICO DE UN $SR$

Momento de inercia respecto del eje $X'$

$$I_{x'} = \int_M dm(\vec{r}'^2 - x'^2) = \int_M dm(y'^2 + z'^2) = \overline{I}_{11}$$

Productos de inercia

$$-P_{x'y'} = -\int_M dm x'y' = \overline{I}_{12} \qquad -P_{x'z'} = -\int_M dm x'z' = \overline{I}_{13}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



# MOMENTO CINÉTICO DE UN $SR$

A debe ser un punto en reposo o el $CM$: $\vec{L}_A = \overline{I}_A \cdot \vec{\omega}$

$$\begin{pmatrix} L_{Ax'} \\ L_{Ay'} \\ L_{Az'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{x'} & -P_{x'y} & -P_{x'z} \\ -P_{y'x'} & I_{y'} & -P_{y'z'} \\ -P_{z'x'} & -P_{z'y'} & I_{z'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{x'} \\ \omega_{y'} \\ \omega_{z'} \end{pmatrix}$$

Tensor de Inercia calculado en $A$

(Simétrico e independiente del tiempo al obtenerse en $S'$)

En general, $\vec{L}_A$ y $\vec{\omega}$ no son paralelos

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

# MOMENTO CINÉTICO DE UN $SR$

Ejes principales de Inercia: $\overline{I}_{ij} = 0$

En un sólido homogéneo con tres planos de simetría ortogonales, la intersección de los planos es un eje principal, y la intersección de los ejes es el $CM$.

En ejes principales para el $CM$ (centrales):

$$\vec{L}_{CM} = I_{Cx'}\omega_{x'}\vec{i}' + I_{Cy'}\omega_{y'}\vec{j}' + I_{Cz'}\omega_{z'}\vec{k}'$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



# TEOREMA DEL MOMENTO CINÉTICO

Si $A$ es un punto fijo (continuamente en reposo) o el $CM$:

$$\left(\frac{d\vec{L}_A}{dt}\right)_S = \int_M (\vec{r} - \vec{r}_A) \times (d\vec{F}_{ext} + d\vec{F}_I) = \int_M (d\vec{M}_{ext\,A} + d\vec{M}_{I\,A}) = \vec{M}_A$$

$$\vec{L}_A = M\,\overrightarrow{AC} \times \vec{v}_A + \overline{I}_A \cdot \vec{\omega}$$

Utilizando el sistema $S'$ ligado al sólido:

$$\vec{M}_A = \left(\frac{d\vec{L}_A}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\vec{L}_A}{dt}\right)_{S'} + \omega \times \vec{L}_A = \overline{I}_A \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} + \omega \times \vec{L}_A$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

# TEOREMA DEL MOMENTO CINÉTICO

Principio de Conservación:

Si el momento resultante es nulo, el momento cinético del sólido se conserva.

Análogamente a un sistema de partículas se tiene:

$$\vec{L}_A = \vec{L}_O - \overrightarrow{OA} \times M\vec{V}_{CM}$$

$$\vec{L}_A = (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_A) \times M\vec{V}_{CM} + \vec{L}_{CM}$$





# ECUACIONES DE EULER

Tomando ejes principales de inercia y el *CM (A=CM)*:

$$\vec{L}_{CM} = I_{Cx'}\omega_{x'}\vec{i}' + I_{Cy'}\omega_{y'}\vec{j}' + I_{Cz'}\omega_{z'}\vec{k}'$$

$$\left(\frac{d\vec{L}_{CM}}{dt}\right)_{S'} = I_{Cx'}\frac{d\omega_{x'}}{dt}\vec{i}' + I_{Cy'}\frac{d\omega_{y'}}{dt}\vec{j}' + I_{Cz'}\frac{d\omega_{z'}}{dt}\vec{k}'$$

TEOREMA DEL MOMENTO CINÉTICO

# ECUACIONES DE EULER

$$I_{Cx'}\frac{d\omega_{x'}}{dt}+(I_{Cz'}-I_{Cy'})\omega_{z'}\omega_{y'}=M_{Cx'}$$

$$I_{Cy'}\frac{d\omega_{y'}}{dt}+(I_{Cx'}-I_{Cz'})\omega_{x'}\omega_{z'}=M_{Cy'}$$

$$I_{Cz'}\frac{d\omega_{z'}}{dt}+(I_{Cy'}-I_{Cx'})\omega_{y'}\omega_{x'}=M_{Cz'}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



TEOREMA DEL MOMENTO CINÉTICO

# ECUACIONES DE EULER

Tomando ejes principales y un punto fijo $Q$ $(A=Q)$:

$$\vec{M}_Q=\left(\frac{d\vec{L}_Q}{dt}\right)_S=\left(\frac{d\vec{L}_Q}{dt}\right)_{S'}+\omega\times\vec{L}_Q=\overline{I}_Q\cdot\frac{d\vec{\omega}}{dt}+\omega\times\vec{L}_Q$$

$$\vec{L}_Q=I_{Qx'}\omega_{x'}\vec{i}'+I_{Qy'}\omega_{y'}\vec{j}'+I_{Qz'}\omega_{z'}\vec{k}'$$

Se obtienen idénticas ecuaciones a las anteriores

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

TEOREMA DEL MOMENTO CINÉTICO

# ECUACIONES DE EULER

$$I_{Qx'}\frac{d\omega_{x'}}{dt}+(I_{Qz'}-I_{Qy'})\omega_{z'}\omega_{y'}=M_{Qx'}$$

$$I_{Qy'}\frac{d\omega_{y'}}{dt}+(I_{Qx'}-I_{Qz'})\omega_{x'}\omega_{z'}=M_{Qy'}$$

$$I_{Qz'}\frac{d\omega_{z'}}{dt}+(I_{Qy'}-I_{Qx'})\omega_{y'}\omega_{x'}=M_{Qz'}$$

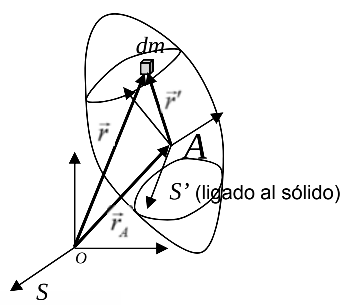
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



# ENERGÍA CINÉTICA DE UN $SR$

$$\vec{v}=\vec{v}_A+\vec{\omega}\times(\vec{r}-\vec{r}_A)=\vec{v}_A+\vec{\omega}\times\vec{r}\,'$$

$$\vec{r}\,'=\vec{r}-\vec{r}_A$$




$$E_c=\frac{1}{2}\int_M dm\,v^2=\frac{1}{2}\int_M dm(\vec{v}_A+\vec{\omega}\times\vec{r}\,')\cdot(\vec{v}_A+\vec{\omega}\times\vec{r}\,')=$$

$$=(\int_M dm)\frac{v_A^2}{2}+\underbrace{\vec{v}_A\cdot(\vec{\omega}\times(\int_M dm\,\vec{r}\,'))}_{0}+\int_M\frac{dm}{2}\left|\vec{\omega}\times\vec{r}\,'\right|^2$$

Si $A$ es un punto en reposo ( $\vec{v}_A=\vec{0}$), o el $CM$ ( $\int_M dm\,\vec{r}\,'=\vec{0}$ )

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

# ENERGÍA CINÉTICA DE UN $SR$

Llamando: $\vec{D} = \vec{\omega} \times \vec{r}' = \vec{v} - \vec{v}_A$

$$\left|\vec{\omega} \times \vec{r}'\right|^2 = \vec{D} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}') = \vec{\omega} \cdot (\vec{r}' \times \vec{D}) = \vec{\omega} \cdot (\vec{r}' \times (\vec{v} - \vec{v}_A))$$

Es decir:

$$E_c = \frac{1}{2} M v_A^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \left( \int_M dm\, (\vec{r} - \vec{r}_A) \times (\vec{v} - \vec{v}_A) \right)$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



# ENERGÍA CINÉTICA DE UN $SR$

Si $A=Q$ es un punto en reposo ($\vec{v}_A = \vec{0}$), la energía cinética es la de rotación alrededor de ese punto.

$$E_c = \frac{1}{2} M v_A^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \left( \int_M dm (\vec{r} - \vec{r}_A) \times (\vec{v} - \vec{v}_A) \right)$$

$$E_c = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \left( \int_M dm\, (\vec{r} - \vec{r}_Q) \times \vec{v} \right) = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}_Q$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

# ENERGÍA CINÉTICA DE UN $SR$

Si $A$ es el $CM$, la energía es suma de la energía cinética de traslación del sólido más la energía cinética de rotación alrededor del $CM$

$$E_c = \frac{1}{2}MV_{CM}^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\left(\int_M dm(\vec{r}-\vec{R}_{CM})\times(\vec{v}-\vec{V}_{CM})\right) =$$

$$= \frac{1}{2}MV_{CM}^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\left(\int_M dm(\vec{r}-\vec{R}_{CM})\times\vec{v}\right)$$

$$\vec{V}_{CM}\int_M dm\left(\vec{r}-\vec{R}_{CM}\right) = \vec{0}$$

$$E_c = \frac{1}{2}MV_{CM}^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{L}_{CM}$$

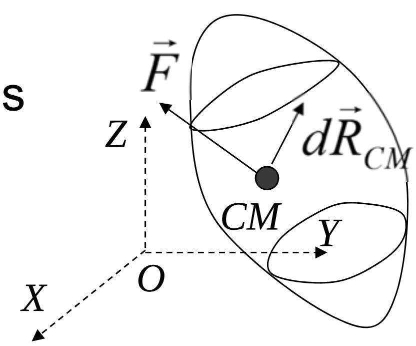
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval


# TEOREMA DE LA ENERGÍA CINÉTICA PARA EL $CM$

De manera idéntica a un sistema de partículas tenemos:

$$W_{CM} = \int_{\vec{R}_{CM_0}}^{\vec{R}_{CM}} \vec{F}\cdot d\vec{R}_{CM} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}\cdot\vec{V}_{CM}dt = \frac{1}{2}MV_{CM}^2 - \frac{1}{2}MV_{CM_0}^2$$

Resultante de fuerzas aplicadas y de inercia




$S$ (inercial o no)

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

# TEOREMA DE LA ENERGÍA CINÉTICA

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}Mv_A^2) + \frac{1}{2}\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_S \cdot \vec{L}_A + \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\left(\frac{d\vec{L}_A}{dt}\right)_S$$

$$\vec{\omega}\cdot\left(\frac{d\vec{L}_A}{dt}\right)_S = \vec{\omega}\cdot\left[\left(\frac{d\vec{L}_A}{dt}\right)_{S'} + \vec{\omega}\times\vec{L}_A\right] = \vec{\omega}\cdot\left(\frac{d\vec{L}_A}{dt}\right)_{S'}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



# TEOREMA DE LA ENERGÍA CINÉTICA

Llamaremos $\overline{I}_{ij}$ a las componentes del tensor de inercia:

$$\vec{\omega}\cdot\left(\frac{d\vec{L}_A}{dt}\right)_{S'} = \sum_i \omega_i\left(\frac{dL_{A,i}}{dt}\right)_{S'} = \sum_i \omega_i \sum_j \overline{I}_{ij}\left(\frac{d\omega_j}{dt}\right)_{S'} = \sum_i\sum_j \omega_i \overline{I}_{ij}\left(\frac{d\omega_j}{dt}\right)_{S'} =$$

$$= \sum_j\left(\frac{d\omega_j}{dt}\right)_{S'}\sum_i \overline{I}_{ij}\omega_i = \sum_j\left(\frac{d\omega_j}{dt}\right)_{S'}\sum_i \overline{I}_{ji}\omega_i = \sum_j\left(\frac{d\omega_j}{dt}\right)_{S'} L_{A,j}$$

Por la simetría del tensor y su independencia del tiempo:

$$\vec{\omega}\cdot\left(\frac{d\vec{L}_A}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{S'}\cdot\vec{L}_A = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_S\cdot\vec{L}_A$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

# TEOREMA DE LA ENERGÍA CINÉTICA

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}Mv_A^2) + \vec{\omega}\cdot\left(\frac{d\vec{L}_A}{dt}\right)_S = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}Mv_A^2) + \vec{\omega}\cdot(\vec{M}_{ext\ A} + \vec{M}_{I\ A})$$

Consideremos que $A$ es fijo o el $CM$, aunque más adelante veremos su aplicación a cualquier punto:

$$\Delta E_c = \Delta(\frac{1}{2}Mv_A^2) + \int_{t_a}^{t_b} \vec{\omega}\cdot(\vec{M}_{ext\ A} + \vec{M}_{I\ A})dt$$



# TEOREMA DE LA ENERGÍA CINÉTICA

Si $A$=$Q$ es un punto fijo del sólido ($\vec{v}_A = \vec{0}$):

$$\Delta E_c = \int_{t_a}^{t_b} \vec{\omega}\cdot\vec{M}_Q dt = W_{M_Q} = W$$

El cambio de energía cinética es debido al momento de fuerzas reales y de inercia calculado respecto del punto fijo.

# TEOREMA DE LA ENERGÍA CINÉTICA

Si $A$ es el $CM$: $\dfrac{dE_c}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}MV_{CM}^2\right) + \vec{\omega}\cdot(\vec{M}_{ext\,CM} + \vec{M}_{I\,CM})$

$$\frac{dE_c}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{V}_{CM} + \vec{\omega}\cdot\vec{M}_{CM}$$

$$\Delta E_c = \int_{t_a}^{t_b} \vec{F}\cdot\vec{V}_{CM}\,dt + \int_{t_a}^{t_b} \vec{\omega}\cdot\vec{M}_{CM}\,dt = W_{CM} + W_{M_{CM}} = W$$

El cambio de energía cinética es debido al trabajo de la resultante de fuerzas reales y de inercia aplicadas en el $CM$ más el trabajo del momento de dichas fuerzas calculado respecto del $CM$.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval


# TEOREMA DE LA ENERGÍA CINÉTICA

Para cualquier otro punto $P$, reduciendo allí el sistema de fuerzas:

$$\Delta E_c = \int_{t_a}^{t_b} \vec{F}\cdot\vec{V}_{CM}\,dt + \int_{t_a}^{t_b} \vec{\omega}\cdot\vec{M}_{CM}\,dt$$

Usando el campo de velocidades y el teorema de cambio de polo:

$$\Delta E_c = \int_{t_a}^{t_b} \vec{F}\cdot(\vec{v}_P + \vec{\omega}\times\overrightarrow{PC})dt + \int_{t_a}^{t_b} \vec{\omega}\cdot(\vec{M}_P + \vec{F}\times\overrightarrow{PC})dt$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

# TEOREMA DE LA ENERGÍA CINÉTICA

Es decir:

$$\Delta E_c = \int_{t_a}^{t_b} \vec{F} \cdot \vec{v}_P dt + \int_{t_a}^{t_b} \vec{\omega} \cdot \vec{M}_P dt + \int_{t_a}^{t_b} \underbrace{\vec{F} \cdot (\vec{\omega} \times \overrightarrow{PC}) dt + \vec{\omega} \cdot (\vec{F} \times \overrightarrow{PC}) dt}_{\vec{0}}$$

$$\Delta E_c = \int_{t_a}^{t_b} \vec{F} \cdot \vec{v}_P dt + \int_{t_a}^{t_b} \vec{\omega} \cdot \vec{M}_P dt = W$$

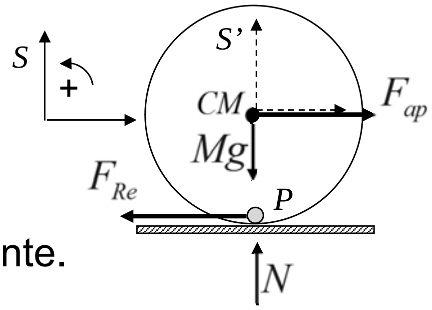
Puede darse el caso de que cambie el punto del sólido al que reduzcamos el sistema para calcular el trabajo, en este caso la fórmula sigue siendo válida siendo $P$ un punto diferente del sólido en cada instante.



# TEOREMA DE LA ENERGÍA CINÉTICA

Ejemplo: Trabajo del rozamiento estático en rodadura

$$W_{F_{\mathrm{Re}}} = \int_{t_a}^{t_b} \vec{F}_{\mathrm{Re}} \cdot \underbrace{\vec{v}_P}_{0} dt + \int_{t_a}^{t_b} \omega \underbrace{M_{P z'(\mathrm{Re})}}_{0} dt = 0$$




El punto $P$ del sólido es diferente en cada instante.

Principio de Conservación:

Si el trabajo de la resultante y el momento resultante de fuerzas aplicadas y de inercia en un punto es nulo, se conserva la energía cinética.

$$Si\, W = 0 \Rightarrow E_c = cte$$

# TEOREMA DE LA ENERGÍA CINÉTICA

Equivalencia con un Sistema de Partículas:

$$\frac{dE_c}{dt}=\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}MV_{CM}^2)+\vec{\omega}\cdot(\vec{M}_{CM}+\vec{M}_{I\,CM})$$

$$\frac{dE_c}{dt}=\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}MV_{CM}^2)+\vec{\omega}\cdot\int_M \vec{r}'\times(d\vec{F}+d\vec{F}_I)$$

$$\frac{dE_c}{dt}=\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}MV_{CM}^2)+\int_M d\vec{F}\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}')=\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}MV_{CM}^2)+\int_M d\vec{F}\cdot(\vec{v}-\vec{V}_{CM})$$

$$\Delta E_c=\int_{\vec{R}_{CM\,a}}^{\vec{R}_{CM\,b}}\vec{F}\cdot d\vec{R}_{CM}+\int\int_M d\vec{F}\cdot(d\vec{r}-d\vec{R}_{CM})$$

$$\Delta E_c=\int_M\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b}d\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

Expresión análoga a la de un sistema de partículas

$$W=\sum_{i=1}^{N}\int_{\vec{r}_{ia}}^{\vec{r}_{ib}}\vec{F}_i\cdot d\vec{r}_i$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



# TEOREMA DE LA ENERGÍA MECÁNICA

Distinguiendo las fuerzas aplicadas (exteriores) conservativas del resto:

$$W_{ext}=\sum_{i=1}^{N}\int_{\vec{r}_{ia}}^{\vec{r}_{ib}}\vec{F}_{ext\,i}\cdot d\vec{r}_i$$

$$W_{ext\,cons}=\int_M\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b}d\vec{F}_{ext\,cons}\cdot d\vec{r}=-\Delta E_p$$

$$\Delta E_c=W_{disipativas}-\Delta E_p$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

# TEOREMA DE LA ENERGÍA MECÁNICA

$$W_{disipativas} = \Delta E_c + \Delta E_p$$

Energía mecánica: $E_m = E_c + E_p$

$$W_{disipativas} = \Delta E_m$$

El trabajo de las fuerzas disipativas es igual al incremento de la energía mecánica

Principio de Conservación:

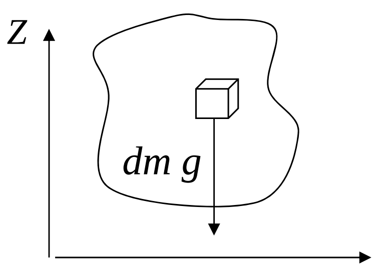
Si el trabajo de las fuerzas disipativas es nulo, se conserva la energía mecánica.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



# TEOREMA DE LA ENERGÍA MECÁNICA

Energía potencial de un sólido en el campo gravitatorio terrestre:




Consideramos la aproximación de vectores paralelos uniformes

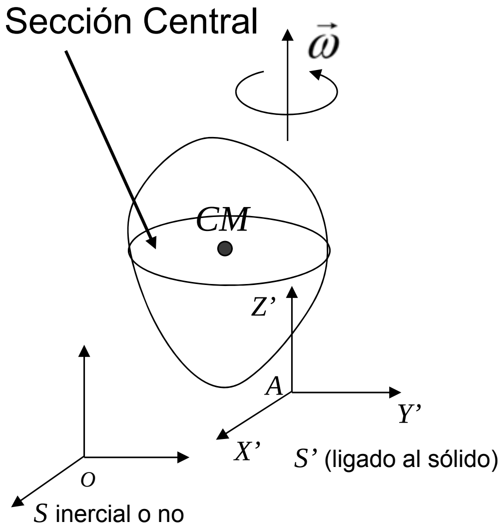
$$E_p = \int_M dm\, g\, z = g \int_M dm\, z = MgZ_{CM}$$

El incremento de energía potencial es positiva al alejarse de la Tierra. Hemos considerado el origen en la posición $z=0$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

# APLICACIÓN AL MOVIMIENTO PLANO

Se verifica que la velocidad angular es paralela a una dirección fija ($\vec{k}' = \vec{k}$) y la velocidad de todas las partículas del sólido es perpendicular a la velocidad angular:



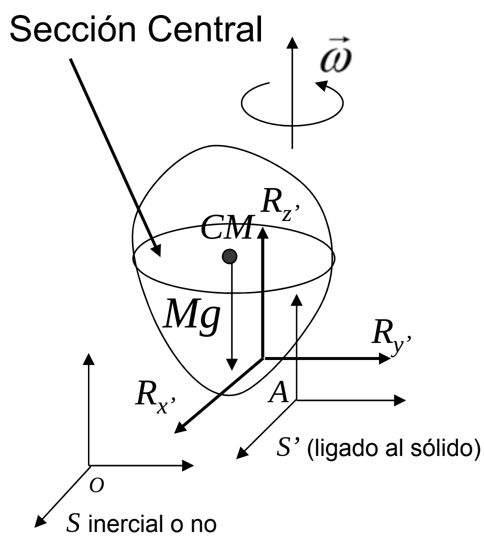

$$\vec{v}_P \cdot \vec{\omega} = 0 \ \ \forall P$$

La velocidad de las partículas es paralela al plano $X'Y'$.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



# APLICACIÓN AL MOVIMIENTO PLANO




Para el movimiento del $CM$ tenemos:

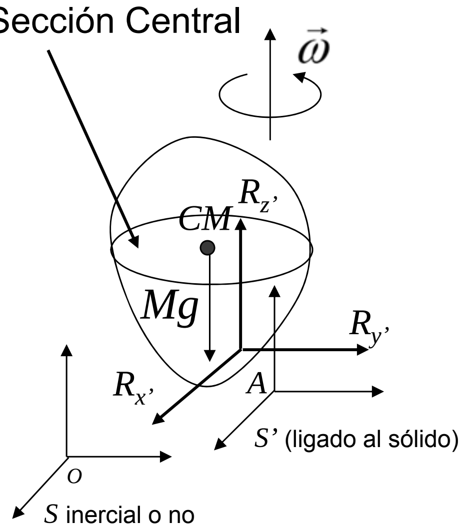
$$M\vec{A}_{CM} = \vec{F} \quad \rightarrow \quad F_{z'} = 0 \quad \left(-Mg + R_{z'} = 0\right)$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

# APLICACIÓN AL MOVIMIENTO PLANO

A debe ser un punto en reposo del sólido o el $CM$

$$\vec{L}_A = \overline{I}_A \cdot \vec{\omega}$$




Movimiento plano:

$$\omega_{x'} = \omega_{y'} = 0$$

$$\vec{L}_A = -P_{x'z'}\omega_{z'}\vec{i}' - P_{y'z'}\omega_{z'}\vec{j}' + I_{z'}\omega_{z'}\vec{k}'$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



# APLICACIÓN AL MOVIMIENTO PLANO

$$\vec{M}_A = \left(\frac{d\vec{L}_A}{dt}\right)_{S'} + \omega \times \vec{L}_A$$

$$\omega \times \vec{L}_A = -\omega_{z'}^2 P_{x'z'}\vec{j}' + \omega_{z'}^2 P_{y'z'}\vec{i}'$$

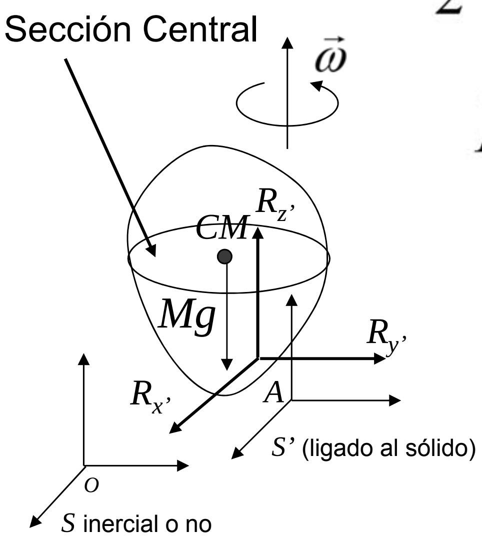
$$\left.\begin{aligned} -P_{x'z'}\alpha_{z'} + P_{y'z'}\omega_{z'}^2 &= M_{A\,x'} \\ -P_{y'z'}\alpha_{z'} - P_{x'z'}\omega_{z'}^2 &= M_{A\,y'} \\ I_{z'}\alpha_{z'} &= M_{A\,z'} \end{aligned}\right\}$$ Ecuaciones de Euler

A debe ser un punto fijo del sólido (continuamente en reposo) o el $CM$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

# APLICACIÓN AL MOVIMIENTO PLANO

$$E_c = \frac{1}{2} M v_A^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}_A$$




$$\vec{L}_A = -P_{x'z'}\omega_{z'}\vec{i}' - P_{y'z'}\omega_{z'}\vec{j}' + I_{z'}\omega_{z'}\vec{k}'$$

$$\vec{\omega} \cdot \vec{L}_A = \omega_{z'}^2 I_{z'}$$

$$E_c = M \frac{v_A^2}{2} + \frac{1}{2} I_{z'} \omega_{z'}^2$$

$A$ debe ser un punto en reposo del sólido o el $CM$



# APLICACIÓN AL MOVIMIENTO PLANO

Para el $CM$:

$$\Delta E_c = \int_{t_a}^{t_b} \vec{F} \cdot \vec{V}_{CM} dt + \int_{t_a}^{t_b} \vec{\omega} \cdot \vec{M}_{CM} dt = \int_{t_a}^{t_b} \vec{F} \cdot \vec{V}_{CM} dt + \int_{t_a}^{t_b} \omega_{z'} M_{CM\,z'} dt$$

Para un punto fijo del sólido $Q$:

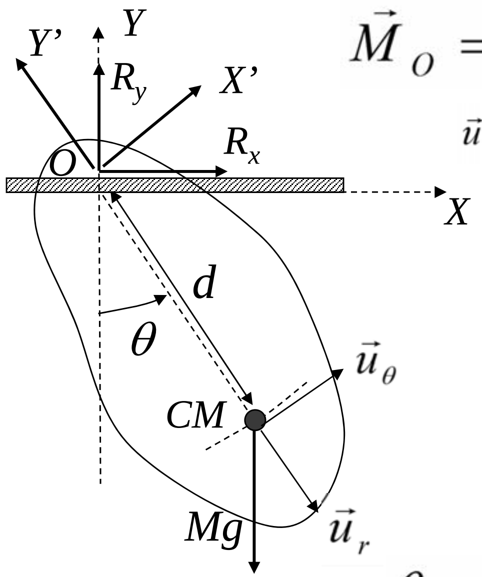
$$\Delta E_c = \int_{t_a}^{t_b} \omega_{z'} M_{Q\,z'} dt = \int_{\theta_a}^{\theta_b} M_{Q\,z'} d\theta \rightarrow \quad \omega_{z'} = \frac{d\theta}{dt}$$

$\theta$ ángulo girado en torno al eje $z'$

MOVIMIENTO PLANO
CON PUNTO FIJO

# PÉNDULO FÍSICO

Sólido rígido que oscila sin rozamiento bajo la acción de la gravedad alrededor de un eje fijo en el plano $XY$.




$$\vec{M}_O = d\vec{u}_r \times (-Mg)\vec{j} = -Mgd\sin\theta\vec{k}$$

$$\vec{u}_r = -\cos\theta\vec{j} + \sin\theta\vec{i}$$

$$I_{z'}\alpha = -Mgd\sin\theta$$

$$I_{z'}\frac{d^2\theta}{dt^2} + Mgd\sin\theta = 0$$

Oscilaciones pequeñas: $\theta_m << 1$

$$\theta = \theta_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{Mgd}{I_{z'}}}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



MOVIMIENTO PLANO
CON PUNTO FIJO

# PÉNDULO FÍSICO

Es necesario aplicar las ligaduras a través de los campos de velocidades y aceleraciones para calcular reacciones:
El $CM$ describe un movimiento circular.

$$R_r\vec{u}_r + R_\theta\vec{u}_\theta + Mg\cos\theta\vec{u}_r - Mg\sin\theta\vec{u}_\theta = M\vec{A}_{CM}$$

$$\vec{V}_{CM} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OC} \rightarrow \vec{V}_{CM} = \omega d\ \vec{u}_\theta$$

$$\vec{A}_{CM} = \vec{\alpha} \times \overrightarrow{OC} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{OC})$$

$$\vec{A}_{CM} = \alpha d\ \vec{u}_\theta - \omega^2 d\ \vec{u}_r$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

MOVIMIENTO PLANO
CON PUNTO FIJO

# PÉNDULO FÍSICO

Las reacciones en el punto $O$ no producen trabajo puesto que se encuentran aplicadas en un punto fijo, ni tampoco momento en ese punto.

$$W_R = \int_{t_a}^{t_b} \vec{R} \cdot \underbrace{\vec{v}_O}_{\vec{0}}\, dt + \int_{t_a}^{t_b} \vec{\omega} \cdot \underbrace{\vec{M}_{RO}}_{\vec{0}}\, dt = 0$$

$$\Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_p = 0$$

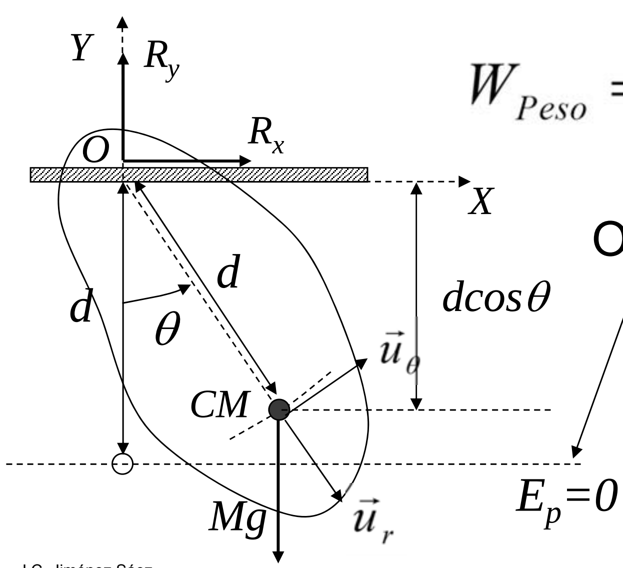
El sistema de fuerzas paralelas gravitatorias se reduce para sólidos sobre la superficie terrestre a una única fuerza aplicada en el $CM$ de valor $Mg$.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval


MOVIMIENTO PLANO
CON PUNTO FIJO

PÉNDULO FÍSICO

$$W_{Peso} = \int_M \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} (-dm\, g\, \vec{j}) \cdot d\vec{r} = -\int_M \int_{y_a}^{y_b} dm\, g\, dy = -\int_M dmg(y_b - y_a)$$




$$W_{Peso} = -Mg(Y_{CM\,b} - Y_{CM\,a}) = -\Delta E_p$$

Origen de energía potencial

$$E_p(Y_{CM}) = mg(d + Y_{CM}),,\ Y_{CM} < 0$$

$$E_p(\theta) = mgd(1 - \cos\theta)$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

MOVIMIENTO PLANO
CON PUNTO FIJO

# PÉNDULO FÍSICO

Para el $CM$:

$$E = \frac{1}{2} m V_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM\,z'} \omega^2 + mgd(1-\cos\theta) = cte$$

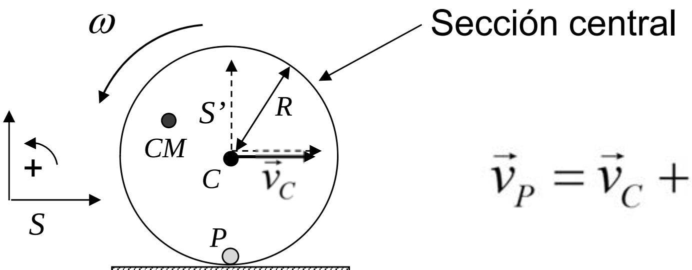
Para el punto fijo $O$:

$$E = \frac{1}{2} I_{O\,z'} \omega^2 + mgd(1-\cos\theta) = cte$$



# MOVIMIENTO PLANO DE RODADURA

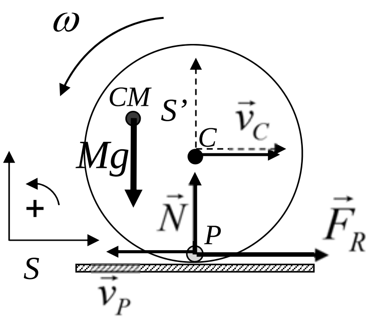
Relacionamos las velocidades y aceleraciones de los puntos $C$ (centro geométrico, que puede coincidir o no con el $CM$) y $P$ (punto de contacto):




$$\vec{v}_P = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \overrightarrow{CP} = (v_C + \omega R)\vec{i}$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_C + \vec{\alpha} \times \overrightarrow{CP} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{CP}) = (a_C + \alpha R)\,\vec{i} + \omega^2 R\,\vec{j}$$

# MOVIMIENTO PLANO DE RODADURA



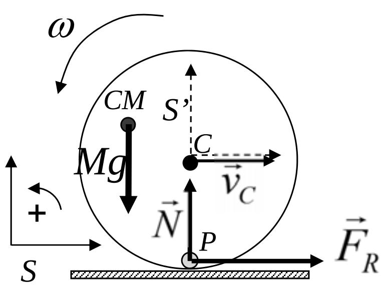

$$\vec{v}_P = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \overrightarrow{CP} = (v_C + \omega R)\vec{i} \neq \vec{0}$$

Si $\vec{v}_P \neq \vec{0}$ :

El disco **desliza**, y la fuerza de rozamiento es dinámica:
$F_{Rd} = \mu_d N$ y con sentido opuesto a la velocidad del punto $P$.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval


# MOVIMIENTO PLANO DE RODADURA




$$\vec{v}_P = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \overrightarrow{CP} = (v_C + \omega R)\vec{i} = \vec{0}$$

$$\vec{a}_P = (a_C + \alpha R)\,\vec{i} + \omega^2 R\,\vec{j} = \omega^2 R\,\vec{j}$$

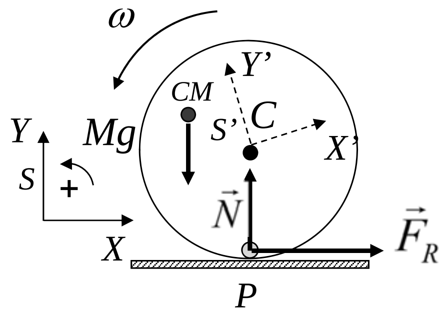
Si $\vec{v}_P = \vec{0}$ :

El disco **rueda**: $v_C = -\omega R \quad a_C = -\alpha R$
y la fuerza de rozamiento es estática, $|F_{Re}| \leq \mu_e N$ .
Su sentido puede ser cualquiera de los dos.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

# MOVIMIENTO PLANO DE RODADURA

El sentido positivo de giro es el antihorario




Ecuaciones para el $CM$: $MA_{CM\,x} = F_x \; ; \quad MA_{CM\,y} = F_y$

Si el $CM$ coincide con $C$ se tiene que: $F_y = -Mg + N = 0$

Ecuación de rotación alrededor del $CM$: $I_{z'}\alpha = M_{CM\,z'}$

El sólido debe ser simétrico respecto del plano $XY$ para que: $P_{x'z'} = P_{y'z'} = 0$ y se mantenga el movimiento plano pues no hay momentos en $X$ e $Y$.

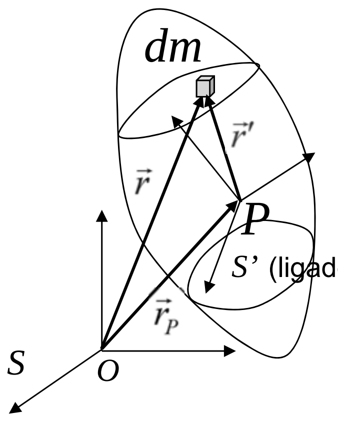
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



# MOVIMIENTO PLANO DE RODADURA

## Punto instantáneamente en reposo (no fijo)

$$\vec{L}_P = \left(\int_M dm\,\vec{r}'\right)\times\vec{v}_P + \int_M dm\,\vec{r}'\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') = \left(\int_M dm\,\vec{r}'\right)\times\vec{v}_P + \underbrace{\vec{L}}_{\bar{I}_P\cdot\vec{\omega}}$$




$$\vec{M}_P = \left(\frac{d\vec{L}_P}{dt}\right)_S = M\,\overrightarrow{PC}\times\vec{a}_P + \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{S'} + \vec{\omega}\times\vec{L}$$

Para el movimiento plano:

$$-P_{x'z'}\alpha_{z'} + P_{y'z'}\omega_{z'}^2 = M_{P\,x'}$$

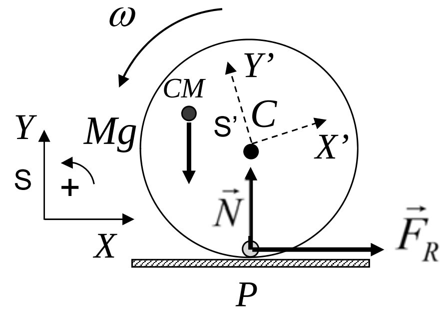
$$-P_{y'z'}\alpha_{z'} - P_{x'z'}\omega_{z'}^2 = M_{P\,y'}$$

$$I_{z'}\alpha_{z'} + M(\overrightarrow{PC}\times\vec{a}_P)\cdot\vec{k} = M_{P\,z'}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

# MOVIMIENTO PLANO DE RODADURA

El sentido positivo de giro es el antihorario




Si el $CM$ coincide con $C$ se tiene que:

$$\overrightarrow{PC} \parallel \vec{a}_P$$

Y la ecuación de rotación alrededor de $P$ es:

$$I_{z'}\alpha = M_{P\,z'}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



# MOVIMIENTO PLANO DE RODADURA

Para el $CM$: $$\Delta E_c = \int_{t_a}^{t_b} \vec{F}\cdot\vec{V}_{CM}\,dt + \int_{t_a}^{t_b} \omega M_{CM\,z'}\,dt$$

Para el punto $P$: $$\Delta E_c = \int_{t_a}^{t_b} \vec{F}\cdot\vec{v}_P\,dt + \int_{t_a}^{t_b} \omega M_{P\,z'}\,dt = W$$

El trabajo de la fuerza de rozamiento dinámica es negativo para que el sistema pierda energía. $\vec{F}_{Rd}\cdot\vec{v}_P < 0$

En el caso estático el trabajo del rozamiento es cero, pues $\vec{v}_P = \vec{0}$ (el rozamiento no crea momento en P).

$$\vec{F}_{Re}\cdot\vec{v}_P = 0$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

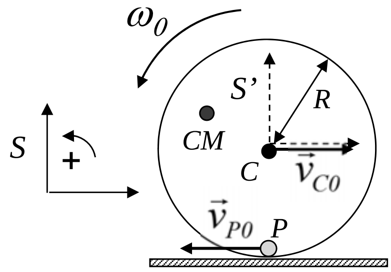
# MOVIMIENTO PLANO DE RODADURA

Dependiendo de las Condiciones Iniciales se presentan dos posibilidades

$v_{C0} = -\omega_0 R$

$v_{C0} \neq \omega_0 R$

$C$ puede ser o no el $CM$




$F_{\mathrm{Re}}$

Resolución

Se debe comprobar:

$\left|F_{\mathrm{Re}}\right| \leq \mu_e N$

$F_{\mathrm{R}d} = \mu_d N$

Opuesta a $\vec{v}_{P0}$

Resolución

Correcto siempre que:

$v_C \neq -\omega R$

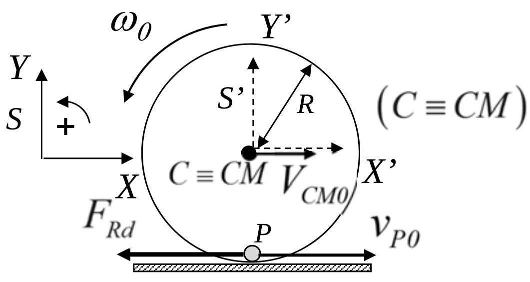
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



MOVIMIENTO PLANO DE RODADURA

## CILINDRO HOMOGÉNEO DESLIZANDO CON POSTERIOR RODADURA

### MOVIMIENTO DE DESLIZAMIENTO




$$\vec{v}_{P0} = (V_{CM0} + \omega_0 R)\vec{i}$$

$$V_{CM0} \neq -\omega_0 R$$

El rozamiento dinámico es opuesto a $\vec{v}_{P0}$

La distribución de masa es simétrica respecto al plano $X'Y'$

$$P_{x'z'} = P_{y'z'} = 0$$

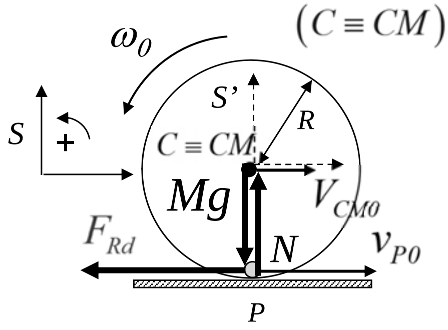
$$I_{CMz'} = \frac{1}{2} M R^2$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

# MOVIMIENTO PLANO DE RODADURA

## CILINDRO HOMOGÉNEO DESLIZANDO CON POSTERIOR RODADURA

### MOVIMIENTO DE DESLIZAMIENTO




$$(C \equiv CM) \qquad MA_{CM} = -F_{Rd}$$

$$0 = N - Mg$$

$$F_{Rd} = \mu_d N$$

$$I_{CMz'}\alpha = (\overrightarrow{CP} \times \vec{F}_{Rd})_{z'} = -R\mu_d N$$

Condiciones Iniciales

$$V_{CM}(t=0) = V_{CM0}; \quad \omega(t=0) = \omega_0$$

El sentido positivo de giro es el antihorario

Integrando las ecuaciones con las condiciones iniciales:

$$V_{CM} = V_{CM0} - \mu_d g t \qquad \omega = \omega_0 - \frac{2\mu_d g t}{R}$$



# MOVIMIENTO PLANO DE RODADURA

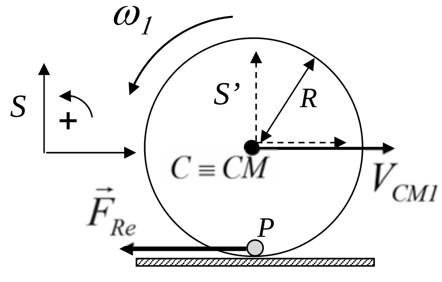
## CILINDRO HOMOGÉNEO DESLIZANDO CON POSTERIOR RODADURA

### MOVIMIENTO DE DESLIZAMIENTO

Instante $t_1$ en el que se produce la rodadura:

$$V_{CM}(t_1) = V_{CM1} \quad \omega(t_1) = \omega_1$$

$$V_{CM1} = -\omega_1 R \quad \rightarrow \quad t_1 = \frac{V_{CM0} + \omega_0 R}{3\mu g}$$



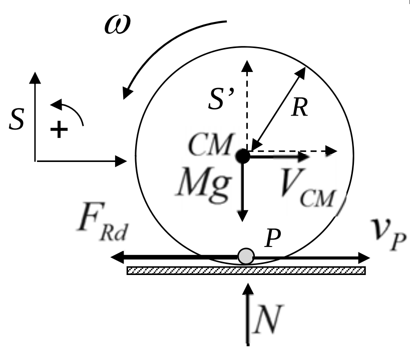

Si $V_{CM1}$ es positiva, el sólido gira en el sentido contrario al dibujado para $\omega_1$ ($\omega_1$<0).

# MOVIMIENTO PLANO DE RODADURA

## CILINDRO HOMOGÉNEO DESLIZANDO CON POSTERIOR RODADURA

### MOVIMIENTO DE DESLIZAMIENTO

Para el $CM$:




$$E_c = M\frac{V_{CM}^2}{2} + \frac{1}{2} I_{CMz'} \omega^2$$

Teorema de la Energía Cinética en el CM:

$$\Delta E_c = \int_{t_0}^{t_1} (-\mu_d N) V_{CM} dt + \int_{t_0}^{t_1} \omega(-\mu_d NR) dt$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

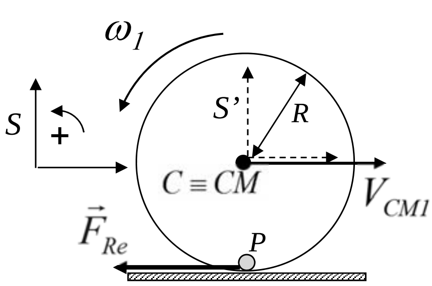


MOVIMIENTO PLANO DE RODADURA

CILINDRO HOMOGÉNEO DESLIZANDO CON POSTERIOR RODADURA

### MOVIMIENTO DE RODADURA

Se supone un sentido para la fuerza de rozamiento estático (la resolución determinará si $F_{Re} > 0$ o $< 0$).




$$MA_{CM} = -F_{Re} \qquad 0 = N - Mg$$

$$I_{CMz'}\alpha = (\overrightarrow{CP} \times \vec{F}_{Re})_{z'} = -RF_{Re}$$

Ligadura de rodadura: $A_{CM} = -R\alpha$

Tras resolver las ecuaciones se debe comprobar que:

$$\left| F_{\mathrm{Re}} \right| \leq \mu_e N$$

Nota: también sirve la ecuación de momentos en $P$: $I_{Pz'}\alpha = M_{Pz'} = 0$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

# MOVIMIENTO PLANO DE RODADURA

## CILINDRO HOMOGÉNEO DESLIZANDO CON POSTERIOR RODADURA

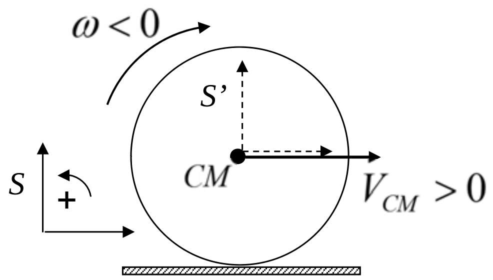
### MOVIMIENTO DE RODADURA

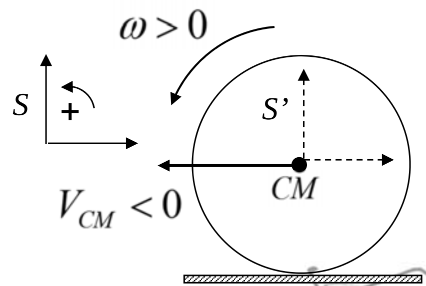
Teniendo en cuenta que después de resolver las ecuaciones previas tanto la aceleración lineal del $CM$ como la aceleración angular son nulas:

$$V_{CM}(t_1) = V_{CM\,1} \qquad \omega(t_1) = \omega_1 \qquad A_{CM} = 0 \qquad \alpha = 0$$

$$V_{CM} = V_{CM\,1} \qquad \omega = -\frac{V_{CM}}{R} = \omega_1$$

Dos posibilidades:




J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

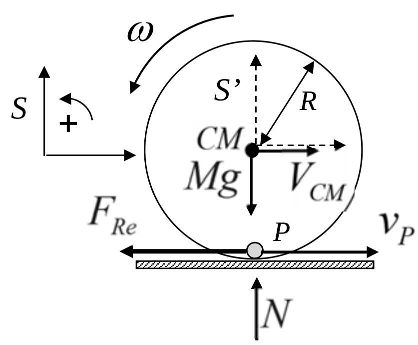


# MOVIMIENTO PLANO DE RODADURA

## CILINDRO HOMOGÉNEO DESLIZANDO CON POSTERIOR RODADURA

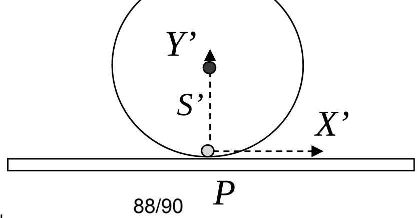
### MOVIMIENTO DE RODADURA

$$\Delta E_c = \int_{t_a}^{t_b} \vec{F} \cdot \underbrace{\vec{v}_P}_{0}\, dt + \int_{t_a}^{t_b} \omega\, \underbrace{M_{P\,z'}}_{0}\, dt = 0$$




Para el $CM$: $E_c = M\dfrac{V_{CM}^2}{2} + \dfrac{1}{2} I_{CM\,z'}\omega^2$

Para el punto de contacto $P$ en reposo: $E_c = \dfrac{1}{2} I_{P\,z'}\omega^2$




J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

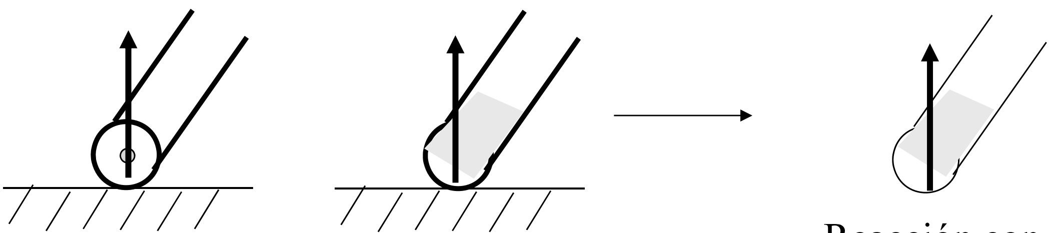
# EQUILIBRIO: REACCIONES EN APOYOS EN EL PLANO

Un sólido rígido se halla en equilibrio cuando la resultante de fuerzas aplicadas y de inercia es cero, y el momento resultante respecto a un punto cualquiera es cero.

( $\vec{F}$ son fuerzas aplicadas y de inercia)

$$\vec{F} = \vec{0} \qquad \vec{M}_A = \vec{0}$$

(Por el teorema de cambio de polo el punto de cálculo del momento $A$ es indiferente al ser la resultante $F=0$)



Sólido con rodamiento ideal

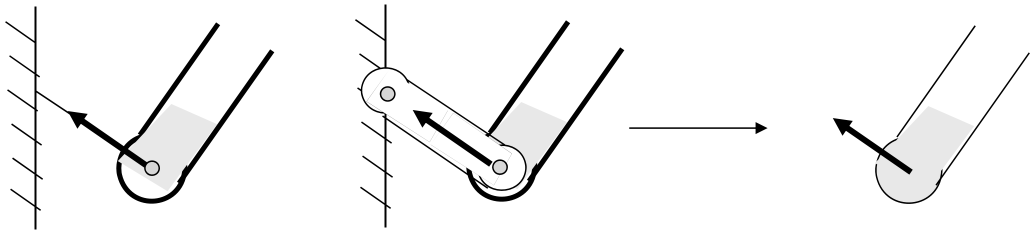
Sólido en apoyo sin rozamiento

Reacción con línea de acción conocida

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



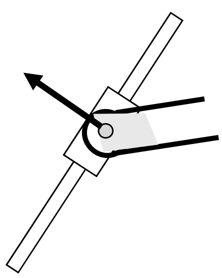
# EQUILIBRIO: REACCIONES EN APOYOS EN EL PLANO



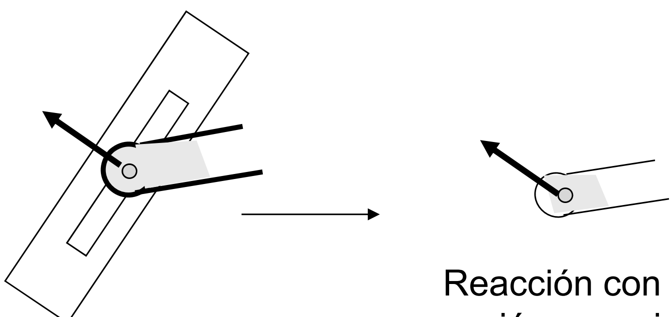
Sólido sujeto a cable ideal

Sólido sujeto a varilla ideal

Reacción con línea de acción conocida



Sólido sujeto a pasador sobre varilla sin fricción



Reacción con línea de acción conocida

Sólido sujeto a perno sin fricción en ranura lisa

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval