

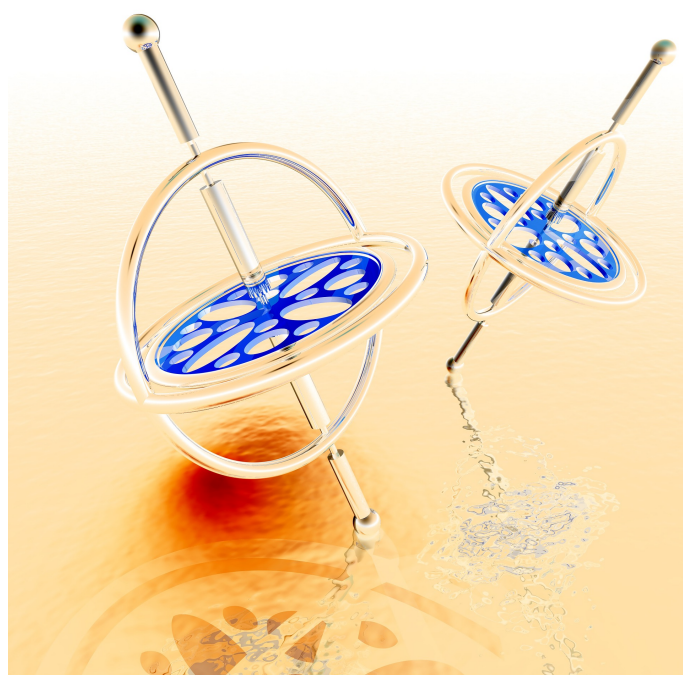


POLITÉCNICA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA
AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO

FÍSICA I

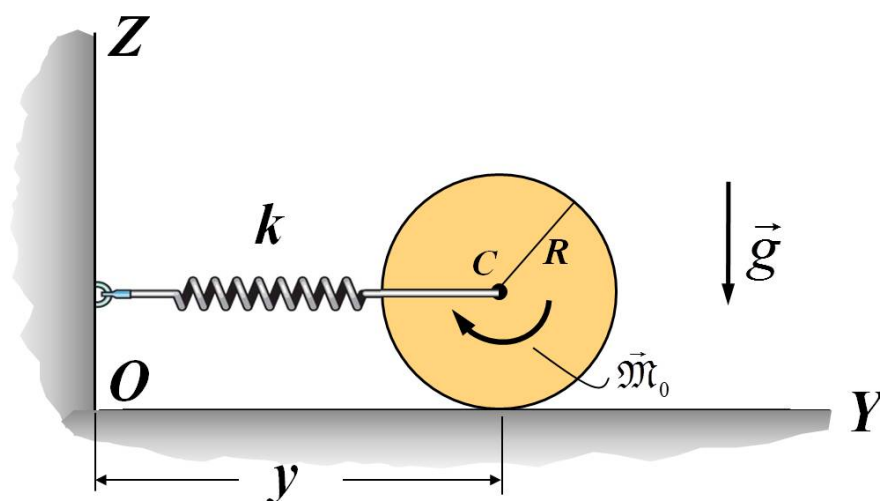
TEORÍA
Mecánica





POLITÉCNICA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO



TEMA 8.- DINÁMICA DEL SÓLIDO RÍGIDO

José Carlos JIMÉNEZ SÁEZ

Pablo PALACIOS CLEMENTE

Santiago RAMÍREZ DE LA PISCINA MILLÁN

ÍNDICE DINÁMICA DEL SÓLIDO RÍGIDO

8. Dinámica del sólido rígido	1
8.1. Propiedades del campo vectorial de momentos	1
8.2. Momento mínimo	2
8.3. Eje central	3
8.3.1. Determinación geométrica	4
8.3.2. Determinación analítica	4
8.4. Invariantes de un sistema de fuerzas	6
8.5. Torsor equivalente	7
8.6. Sistemas de fuerzas distribuidas de forma continua	8
8.7. Casos particulares de sistemas de fuerzas	10
8.7.1. Sistema de fuerzas concurrentes	10
8.7.2. Sistema de fuerzas paralelas	11
8.7.3. Sistema de fuerzas coplanarias	16
8.8. Propiedades de un sólido rígido	16
8.8.1. Movimiento plano de un sólido rígido	17
8.8.2. Sistema de fuerzas aplicadas sobre un sólido rígido	18
8.9. Movimiento del centro de masas de un sólido rígido	20
8.10. Impulso mecánico para un sólido rígido	22
8.11. Movimiento de un sólido rígido con un eje fijo en un sistema inercial	22
8.11.1. Movimiento del centro de masas	22
8.11.2. Momento cinético	24
8.11.3. Péndulo físico	26
8.12. Momento cinético de un sólido rígido	27
8.12.1. Momento cinético en el movimiento general	27
8.12.2. Teorema del momento cinético	32
8.12.3. Teorema del momento cinético en el movimiento plano	34
8.13. Ecuaciones de la dinámica del movimiento plano	36
8.14. Trabajo y energía mecánica para un sólido rígido	37
8.14.1. Energía cinética de un sólido rígido	37
8.14.2. Teorema de la energía cinética para el centro de masas	39
8.14.3. Teorema de la energía cinética	40
8.14.4. Energía potencial de un sólido rígido en el campo de gravedad terrestre	43
8.14.5. Teorema de la energía mecánica para un sólido rígido	44
8.14.6. Trabajo y energía cinética para un sólido rígido en movimiento plano	45
8.15. Dinámica del movimiento plano de rodadura	50
8.15.1. Rodadura sin deslizamiento en el instante inicial	50
8.15.2. Rodadura con deslizamiento desde el instante inicial	53
8.15.3. Resistencia a la rodadura	54
8.15.4. Rotación de pivotamiento	56

8.16. Introducción a la estática	58
8.17. Condiciones de equilibrio para un sólido rígido	59
8.18. El método general de la estática	60
8.19. Ligaduras: Reacciones en apoyos	61
8.20. Equilibrio del sólido rígido en un plano	65
8.21. Casos particulares simples en estática del sólido rígido	67
8.21.1. Sólido sometido a dos fuerzas	67
8.21.2. Sólido sometido a tres fuerzas	67

8.1. Propiedades del campo vectorial de momentos

El principio de transmisibilidad permite tratar las fuerzas aplicadas a un sólido rígido como vectores deslizantes. Los efectos mecánicos de las fuerzas no cambian si estas se trasladan a lo largo de su recta de acción (recta soporte). En el capítulo 1 vimos cómo un sistema de fuerzas se podía reducir en un punto a la resultante y a un momento resultante. Si redujésemos el sistema a otro punto la resultante no variaría, no así el momento resultante que verificaría el teorema de cambio de polo (ec. [1.24]):

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + \vec{O'O} \times \vec{R} \quad (8.1)$$

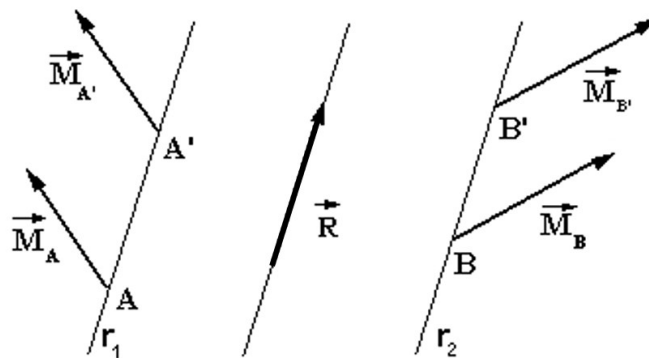


Figura 8.1: Campo vectorial de momentos y resultante.

Esta ecuación da una distribución espacial de momentos tal que el momento resultante del sistema con respecto a puntos situados en una misma recta paralela a la resultante ($\vec{R}$) es el mismo. La dirección de la resultante define rectas paralelas a ella y caracterizadas cada una por el hecho de que el momento resultante del sistema es el mismo independientemente del punto de la recta elegido para calcularlo.

Dada una recta r_1 paralela a la resultante ($\vec{R}$), el momento resultante del sistema es el mismo con respecto a cualquier punto de esa recta (Fig. 8.1). Para otra recta paralela a $\vec{R}$, r_2 , ocurrirá igual, aunque el momento no tiene por qué valer lo mismo que para los puntos de la recta r_1 .

8.2. Momento mínimo

Si observamos la expresión [8.1] nos damos cuenta de que el término $\overrightarrow{O'O} \times \vec{R}$ es un vector siempre perpendicular a la resultante $\vec{R}$. Es decir, su proyección en la dirección de ésta es nula. Esta observación nos conduce a una interesante conclusión si proyectamos en la dirección de la resultante los tres vectores de la igualdad [8.1]. Esta es que:

$$\vec{M}_{O'} \cdot \frac{\vec{R}}{R} = \vec{M}_O \cdot \frac{\vec{R}}{R}$$

“La proyección en la dirección de la resultante del momento resultante del sistema es siempre la misma independientemente del punto con respecto al cual se haya calculado dicho momento”.

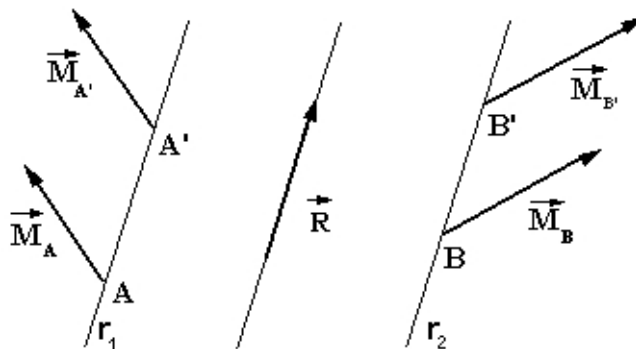


Figura 8.2: Momento mínimo.

La proyección del momento resultante del sistema en la dirección de la resultante (Fig. 8.2) es un invariante del sistema que llamaremos **momento mínimo** y que designaremos por la letra m .

$$m = \vec{M}_O \cdot \frac{\vec{R}}{R} \quad (8.2)$$

Existirá en particular una recta paralela a $\vec{R}$ en la que el momento resultante del sistema tenga de módulo $|\vec{m}|$ y de dirección y sentido la de la resultante. A tal momento resultante le llamaremos vector momento mínimo:

$$\vec{m} = m \frac{\vec{R}}{R} \quad (8.3)$$

Hay dos formas de comprobar que efectivamente $|\vec{m}|$ es el módulo mínimo que puede tener el momento resultante del sistema con respecto a cualquier punto:

$$1^a) |\vec{M}_O| \cos \alpha = P_R(\vec{M}_O)$$

$$|\vec{M}_O| = \frac{P_R(\vec{M}_O)}{\cos \alpha}$$

$$(|\vec{M}_O|)_{\min} \Rightarrow (\cos \alpha)_{\max} \Rightarrow \alpha = 0, \pi$$

La dirección y sentido del vector momento mínimo es la de $\vec{R}$ y, por tanto, su valor escalar debe coincidir con m .

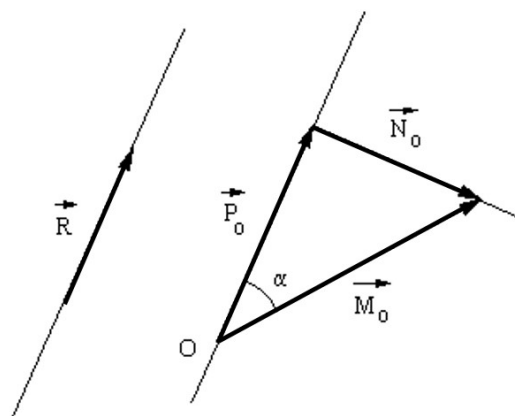


Figura 8.3: Proyección del momento en la dirección de la resultante.

2ª) Si descomponemos $\vec{M}_O$ en dos direcciones (Fig. 8.3), una paralela a $\vec{R}$ ($\vec{P}_O$) y otra perpendicular a ella ($\vec{N}_O$), se cumplirá:

$$\vec{M}_O = \vec{P}_O + \vec{N}_O$$

$$|\vec{M}_O| = \sqrt{P_O^2 + N_O^2} = \sqrt{m^2 + N_O^2} \geq |m|$$

es decir, $(|\vec{M}_O|)_{\min} = |m|$.

8.3. Eje central

El eje central de un sistema de vectores deslizantes es el lugar geométrico de los puntos del espacio con respecto a los cuales el momento resultante del sistema es el vector momento mínimo.

Recordando lo estudiado en el apartado anterior, esta definición es equivalente a:

“el eje central es el lugar geométrico de los puntos del espacio con respecto a los cuales el momento resultante del sistema es paralelo a la dirección de la resultante”.

En la propia definición de eje central va implícita la necesidad de que la resultante del sistema ($\vec{R}$) sea no nula para que el eje central exista como tal.

Demostraremos a continuación que, si se cumple esta condición ($\vec{R} \neq 0$), el eje central existe y es una recta.

8.3.1. Determinación geométrica

Se trata de encontrar una recta paralela a la resultante y que cumpla la condición de que el momento resultante del sistema con respecto a cualquier punto de esa recta esté contenido en ella y sea, por lo tanto, paralelo a la resultante.

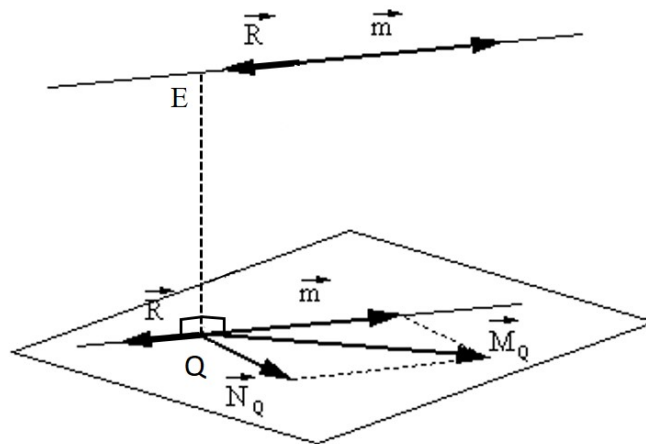


Figura 8.4: Determinación geométrica del eje central.

Sea $\vec{M}_Q$ el momento resultante del sistema con respecto al punto Q . Descomponemos este vector en otros dos, uno paralelo a la resultante ($\vec{m}$) y otro perpendicular a ella ($\vec{N}_Q$) (Fig. 8.4). Así, $\vec{M}_Q = \vec{m} + \vec{N}_Q$.

Trazamos la recta QE , perpendicular al plano definido por la recta paralela a $\vec{R}$ que pasa por Q y $\vec{M}_Q$. El punto E debe estar a una distancia (d) de Q tal que $|\vec{N}_Q| = Rd$ y ser tal que el vector $\vec{QE}$ forme con $\vec{R}$ y $\vec{N}_Q$ un triedro a derechas ($\vec{N}_Q = -\vec{R} \times \vec{QE}$).

Se puede comprobar fácilmente que una recta paralela a la resultante y que pase por E es el eje central del sistema.

8.3.2. Determinación analítica

Ecuación general

Sea un sistema de referencia $OXYZ$ en el que la resultante $\vec{R}$ y el momento resultante con respecto a un punto Q , $\vec{M}_Q$, vienen representados por:

$$\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} + R_z \vec{k}$$

$$\vec{M}_Q = M_{Qx}\vec{i} + M_{Qy}\vec{j} + M_{Qz}\vec{k}$$

siendo $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$. Suponemos que el punto $P(x, y, z)$ es un punto del eje central. Por el teorema de cambio de polo [8.1]:

$$\vec{M}_P = \vec{M}_Q + \vec{r}_{PQ} \times \vec{R}$$

donde:

$$\vec{r}_{PQ} = (x_Q - x)\vec{i} + (y_Q - y)\vec{j} + (z_Q - z)\vec{k}$$

$$\begin{aligned} \vec{M}_P = & (M_{Qx} + (R_z(y_Q - y) - R_y(z_Q - z))\vec{i} + (M_{Qy} + (R_x(z_Q - z) - R_z(x_Q - x))\vec{j} + \\ & (M_{Qz} + (R_y(x_Q - x) - R_x(y_Q - y))\vec{k} \end{aligned}$$

La condición que deben cumplir los puntos del eje central es que $\vec{M}_P$ sea paralelo a $\vec{R}$, es decir:

$$\begin{aligned} \frac{M_{Qx} + (R_z(y_Q - y) - R_y(z_Q - z))}{R_x} = \\ = \frac{M_{Qy} + (R_x(z_Q - z) - R_z(x_Q - x))}{R_y} = \\ = \frac{M_{Qz} + (R_y(x_Q - x) - R_x(y_Q - y))}{R_z} \end{aligned}$$

Si hubiéramos elegido como punto Q el origen O del triedro de referencia, $x_Q = y_Q = z_Q = 0$, nos quedaría la ecuación

$$\frac{M_{Ox} - R_z y + R_y z}{R_x} = \frac{M_{Oy} - R_x z + R_z x}{R_y} = \frac{M_{Oz} - R_y x + R_x y}{R_z} \quad (8.4)$$

Ecuación vectorial

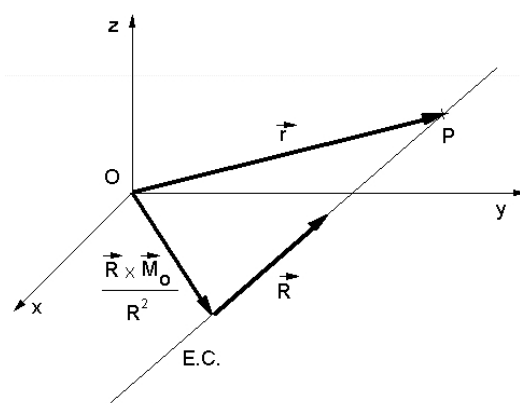


Figura 8.5: Variables de la ecuación vectorial del EC.

Sea $\vec{R}$ la resultante y $\vec{M}_O$ el momento resultante con respecto al origen de un sistema coordenado $OXYZ$, para un sistema de vectores deslizantes (Fig. 8.5). Por el teorema de cambio de polo [8.1] sabemos

$$\vec{M}_P = \vec{M}_O - \vec{r} \times \vec{R}$$

Si P es un punto del eje central, entonces $\vec{M}_P \parallel \vec{R}$ y,

$$0 = \vec{M}_P \times \vec{R} = \vec{M}_O \times \vec{R} - (\vec{r} \times \vec{R}) \times \vec{R}$$

Aplicando la propiedad del doble producto vectorial de ec. [1.13]

$$0 = \vec{M}_O \times \vec{R} - (\vec{r} \cdot \vec{R})\vec{R} + (\vec{R} \cdot \vec{R})\vec{r}$$

donde el extremo del vector $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ recorre todos los puntos del eje central y tiene origen fijo en O . Introduciendo el parámetro λ como

$$\lambda = \frac{\vec{R} \cdot \vec{r}}{R^2} = \frac{R_x x + R_y y + R_z z}{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

donde λ es un número real y puede tomar cualquier valor, y despejando $\vec{r}$, resulta

$$\vec{r} = \frac{\vec{R} \times \vec{M}_O}{R^2} + \lambda \frac{\vec{R}}{R} \quad (8.5)$$

que es la ecuación vectorial del eje central.

El primer término del segundo miembro representa el vector que con origen en O tiene por extremo el punto del eje central más próximo a O . Es perpendicular a la resultante y su módulo es igual a la mínima distancia entre el eje central y el origen O del sistema coordenado. El vector de posición de ese punto del eje central se obtiene para $\lambda=0$.

El segundo término representa todos los posibles vectores paralelos a la resultante al ir variando el parámetro λ . La suma de ambos términos proporciona el vector de posición de los puntos del eje central desde el sistema de referencia $OXYZ$.

8.4. Invariantes de un sistema de fuerzas

Hemos visto que en un sistema de fuerzas (vectores deslizantes) existen magnitudes características que no cambian al cambiar de punto (como la resultante $\vec{R}$) y otras que sí lo hacen (como el momento resultante $\vec{M}_P$). Decimos que una magnitud de un sistema de fuerzas (vectores deslizantes) es invariante si no cambia cuando cambiamos de punto (es un concepto distinto del de invariancia vectorial general).

Todo sistema de fuerzas tiene un número infinito de magnitudes invariantes, pero en el caso general solo existen dos invariantes independientes.

Ya hemos demostrado que el escalar m (momento mínimo) no depende del punto O elegido para calcular el momento resultante del sistema. Es un invariante llamado **invariante escalar**.

También la resultante ($\vec{R}$) del sistema es un invariante, en este caso un **invariante vectorial**. Es necesario observar que, aunque el vector $\vec{R}$ no depende del triedro de referencia, sí lo hacen sus componentes. Es decir, el vector $\vec{R}$, aun siendo el mismo independientemente del triedro de referencia elegido, tendrá distintas componentes en cada uno de ellos. Por ejemplo en dos sistemas S y S' diferentes se tendrá:

$$\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} + R_z \vec{k} = R'_x \vec{i}' + R'_y \vec{j}' + R'_z \vec{k}'$$

El módulo de la resultante no depende, evidentemente, del triedro de referencia.

$$R = (R_x^2 + R_y^2 + R_z^2)^{1/2} = (R'^2_x + R'^2_y + R'^2_z)^{1/2}$$

8.5. Torsor equivalente

Ya vimos que en el caso más general un sistema de fuerzas (vectores deslizantes) es físicamente equivalente a la resultante aplicada en un punto y al momento resultante del sistema con respecto a ese punto. Y que gracias a esta característica simplificábamos desde el punto de vista matemático la operación con estos sistemas.

Apoyándonos en el concepto de eje central podemos avanzar un paso más en esta simplificación. Si el punto Q elegido para reducir el sistema es un punto cualquiera del espacio, $\vec{R}$ y $\vec{M}_Q$ tendrán, en general, módulos no nulos y direcciones arbitrarias.

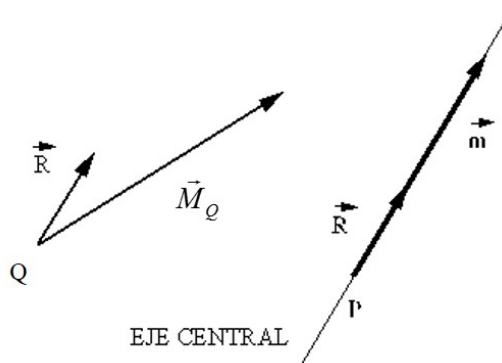


Figura 8.6: Torsor equivalente.

Sin embargo, si el punto P pertenece al eje central, ambos vectores ($\vec{R}$ y $\vec{M}_P$) tendrán la misma dirección y $\vec{M}_P$ tendrá por valor escalar el momento mínimo m . Nos encontramos con un conjunto especial de vectores (Fig. 8.6) que llamaremos **TORSOR**:

“Conjunto de dos vectores ($\vec{R}$ y $\vec{M}_P$) a los que queda reducido un sistema general de vectores deslizantes cuando para esa reducción se elige un punto del eje central. Está caracterizado porque $\vec{R}$ es paralela a $\vec{M}_P$ y $|\vec{M}_P|=m$ ”.

Resumiendo, en el caso más general ($\vec{R} \cdot \vec{M}_P \neq 0$, es decir, $\vec{R} \neq 0$, $\vec{M}_P \neq 0$ y $\vec{R}$ no es perpendicular a $\vec{M}_P$) el sistema se reduce a su torsor equivalente aplicado en un punto del eje central.

Analizamos los casos particulares en que $\vec{R} \cdot \vec{M}_P = 0$:

a) $\vec{R} = 0$ y $\vec{M}_P \neq 0$. El sistema se reduce a un momento resultante $\vec{M}_P$ que es siempre el mismo con respecto a cualquier punto del espacio.

b) $\vec{R} \neq 0$ y $\vec{M}_P = 0$ (en algún punto P). El sistema tiene momento mínimo nulo ($m=0$) y se reduce a la resultante $\vec{R}$ aplicada en cualquier punto del eje central. Dicho eje es en este caso la recta paralela a $\vec{R}$ que pasa por P .

c) $\vec{R} \neq 0$ y $\vec{M}_P \neq 0$ y $\vec{R}$ perpendicular a $\vec{M}_P$. El sistema tiene momento mínimo nulo ($m=0$) y se reduce a la resultante $\vec{R}$ aplicada en cualquier punto del eje central (y a $\vec{R}$ y $\vec{M}_P$ perpendiculares en cualquier punto que no pertenezca al eje central).

c) $\vec{R} = 0$ y $\vec{M}_P = 0$ (en algún punto P). El sistema es equivalente al vector nulo.

8.6. Sistemas de fuerzas distribuidas de forma continua

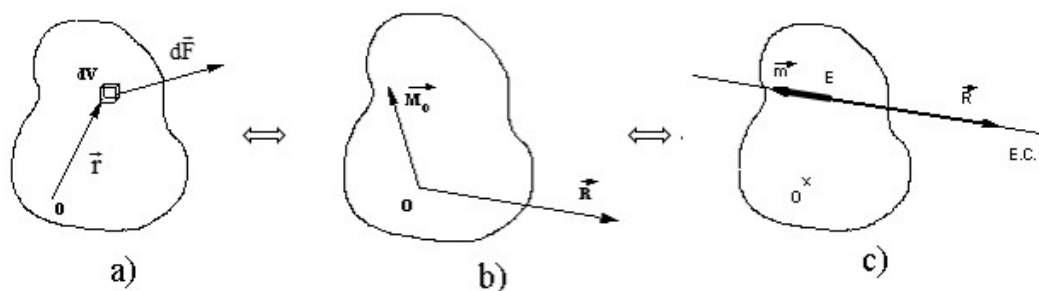


Figura 8.7: Reducción de un sistema de fuerzas distribuido de forma continua.

En el estudio del sólido rígido se nos presentará el problema de tratar sistemas de fuerzas (vectores deslizantes) infinitesimales en módulo, distribuidos de forma continua sobre un cierto volumen, superficie o línea.

Sea un volumen V tal que sobre cada uno de sus elementos dv , cuya posición está determinada por el vector de posición $\vec{r}$ respecto a un punto de referencia O (Fig. 8.7), está aplicado un diferencial de fuerza $d\vec{F}$.

Podemos utilizar el mismo tratamiento empleado en sistemas de vectores deslizantes sin más que sustituir las sumas a todos los vectores del sistema por integrales realizadas sobre todo el volumen V en el que están definidos los diferenciales de fuerza distribuidos $d\vec{F}$.

En consecuencia:

$$\vec{R} = \int_V d\vec{F} \quad \vec{M}_O = \int_V \vec{r} \times d\vec{F} \quad (8.6)$$

y el sistema equivale, en cada punto O , a la resultante $\vec{R}$ y al momento resultante $\vec{M}_O$. Esto simplifica el problema al cálculo de estas dos incógnitas vectoriales incluso en los casos en que no sepamos nada acerca de cómo es la distribución de fuerzas $d\vec{F}$ sobre los puntos del volumen V , que es lo que sucede en la mayoría de los casos.

En los puntos del eje central el sistema se reduce al torsor equivalente:

$$\vec{R} = \int_V d\vec{F} \quad ; \quad \vec{m} = \frac{\vec{M}_O \cdot \vec{R}}{R^2} \vec{R} \quad (8.7)$$

y en los casos más simples en los que el momento mínimo es nulo, se reduce únicamente a la resultante $\vec{R}$ en tales puntos.

Todo ello es aplicable de la misma manera si en lugar de tratar con una distribución de fuerzas infinitesimales en un volumen V nos referimos a una superficie S o a una línea L . En particular citaremos dos ejemplos: el concepto y definición de centro de gravedad, que se estudiará más adelante, y el modelo de fuerza puntual para explicar la interacción por contacto entre dos sólidos (Fig. 8.8), que vamos a considerar a continuación.

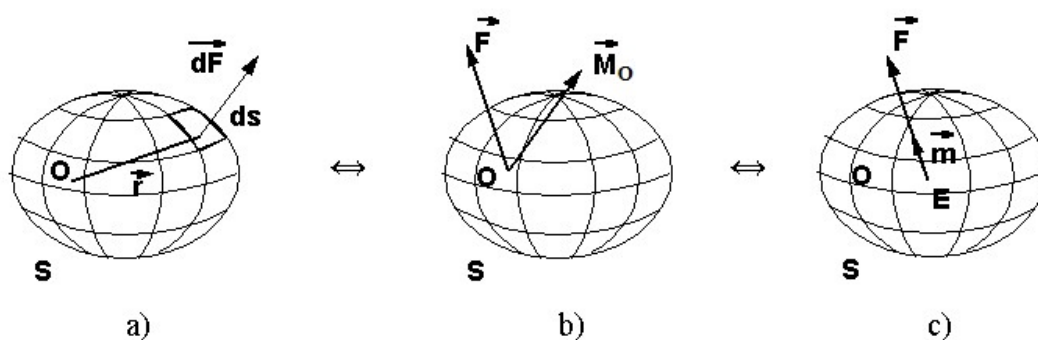


Figura 8.8: Reducción de un sistema de fuerzas distribuido de forma continua sobre una superficie.

En mecánica se plantea a menudo la cuestión de interpretar, de forma matemáticamente simple, cómo se produce la interacción por contacto entre dos sólidos, como ocurre, por ejemplo, cuando un taco golpea a una bola de billar, o cuando un sólido apoya sobre una superficie. En ambos casos el contacto no se produce solamente en un punto, sino en una cierta área de contacto S . Además, en general, no conocemos la forma en que se distribuyen las fuerzas de contacto sobre tal superficie S ni disponemos de modelos precisos que nos aproximen tal distribución.

Para resolver el problema asignamos a cada punto del área de contacto ds un vector fuerza $d\vec{F}$, que sabemos que se ha de comportar como vector deslizante, como está experimentalmente comprobado que sucede con las fuerzas aplicadas sobre un sólido rígido (principio de transmisibilidad de las fuerzas que actúan sobre un sólido). Elegimos un punto de referencia O , que en general y por simplicidad se tomará como perteneciente a la superficie S , y sustituimos el sistema de fuerzas de contacto distribuidas sobre S por su sistema equivalente en O , constituido por:

$$\vec{R} = \int_S d\vec{F} \quad \vec{M}_O = \int_S \vec{r} \times d\vec{F} \quad (8.8)$$

De esta manera hemos reducido la explicación de la interacción por contacto a la fuerza $\vec{R}$ aplicada en O y al momento $\vec{M}_O$, que son las dos únicas magnitudes que necesitamos utilizar en el tratamiento del problema y que no requieren, como se ha justificado, el conocimiento preciso de la distribución de fuerzas por contacto.

Aún se puede simplificar más el problema si reducimos el sistema a un punto E del eje central, en cuyo caso la interacción por contacto equivale al torsor del sistema aplicado en E y constituido por $\vec{R}$ y el vector momento mínimo $\vec{m} = \vec{M}_E$. Además, en la mayor parte de las situaciones que consideraremos el eje central cortará a la superficie S en un punto. Es más, generalmente trataremos problemas en los que el momento mínimo que representa la interacción por contacto es nulo y, en consecuencia, el sistema se reducirá únicamente a la resultante $\vec{R}$ aplicada en el punto del eje central que intersecta a la superficie de contacto. Se reduce así el estudio de fuerzas distribuidas, en general de forma complicada y desconocida, sobre un área S al caso más simple de tratar una fuerza $\vec{R}$ aplicada en un punto de la superficie de contacto.

8.7. Casos particulares de sistemas de fuerzas

8.7.1. Sistema de fuerzas concurrentes

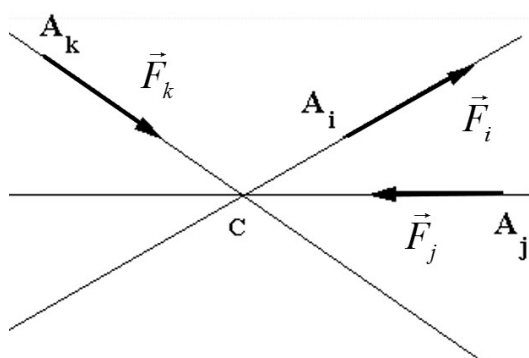


Figura 8.9: Sistema de fuerzas concurrente.

Un sistema de fuerzas (vectores deslizantes) es concurrente cuando las rectas soporte de todos los vectores fuerza del sistema pasan por un mismo punto (Fig. 8.9). Si este punto es el

punto C (de concurrencia), el momento de cada uno de los vectores del sistema con respecto a ese punto es nulo y, por tanto, lo será el momento resultante del sistema. Es decir, el sistema tendrá momento mínimo nulo. En general, el sistema tendrá resultante no nula y, el eje central será una recta paralela a la resultante que pase por el punto C .

Aplicando el teorema del cambio de polo, ec. [8.1], se puede deducir el teorema de Varignon:

“El momento resultante de un sistema de fuerzas (vectores deslizantes) concurrentes con respecto a un punto es igual al momento de la resultante supuestamente aplicada en el punto de concurrencia”.

8.7.2. Sistema de fuerzas paralelas

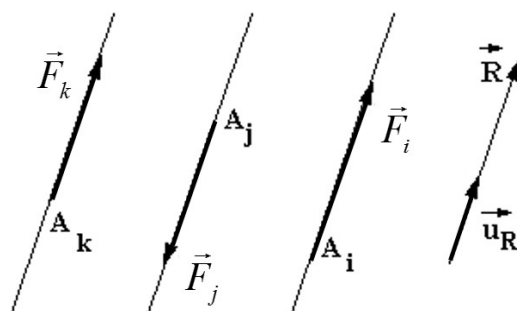


Figura 8.10: Sistema de fuerzas paralelas.

Un sistema de fuerzas (vectores deslizantes) es paralelo cuando las rectas soporte de todos los vectores del sistema son paralelas entre sí (Fig. 8.10). En general, el sistema tendrá resultante no nula. El momento mínimo del sistema será nulo, ya que el momento resultante del sistema con respecto a cualquier punto es perpendicular a la dirección a la que son paralelos los vectores del sistema y, por tanto, a la resultante. Como consecuencia de lo anterior, el momento resultante del sistema con respecto a un punto es igual al momento de la resultante aplicada en el eje central con respecto a dicho punto.

Centro de un sistema de fuerzas paralelo y ligado

Dado un sistema de N vectores fuerza paralelos y ligados $\{\vec{F}_i\}$ aplicados en los puntos A_i y cuya dirección viene determinada por el versor $\vec{u}$, el momento resultante del sistema respecto al origen de un triedro de referencia será:

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

y el momento con respecto a un punto cualquiera vendrá dado por el teorema del cambio de polo: $\vec{M}_P = \vec{M}_O + \vec{R} \times \vec{OP} = \vec{M}_O + \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \times \vec{OP}$

Como ya hemos visto, el momento mínimo es nulo y, por tanto, si el punto P es un punto del eje central, deberá cumplirse $\vec{M}_P = 0$. Es decir:

$$\sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \times \vec{OP} = 0$$

Sustituyendo $\vec{F}_i = F_i \vec{u}$ (donde F_i es la proyección sobre la recta orientada que definen los vectores paralelos, es decir, $F_i = \vec{F}_i \cdot \vec{u}$) se tiene:

$$\sum_{i=1}^n F_i \vec{r}_i \times \vec{u} + \vec{u} \times \sum_{i=1}^n F_i \vec{OP} = 0$$

Es decir

$$\left(\sum_{i=1}^n F_i \vec{r}_i - \sum_{i=1}^n F_i \vec{OP} \right) \times \vec{u} = 0 \quad (8.9)$$

Para que este producto vectorial sea cero, debe cumplirse:

$$\left(\sum_{i=1}^n F_i \vec{r}_i - \sum_{i=1}^n F_i \vec{OP} \right) = 0 \quad \text{o} \quad \left(\sum_{i=1}^n F_i \vec{r}_i - \sum_{i=1}^n F_i \vec{OP} \right) \parallel \vec{u} = 0 \quad (8.10)$$

Examinaremos ambos casos por separado.

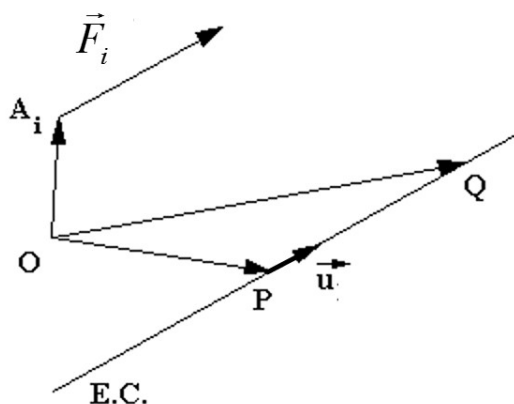


Figura 8.11: Eje central de un sistema de fuerzas paralelas.

a) Si $\sum_{i=1}^n F_i \vec{r}_i = \sum_{i=1}^n F_i \vec{OP}$ se puede despejar $\vec{OP}$:

$$\vec{OP} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n F_i}$$

Como P es un punto del eje central, la ecuación de este eje queda ahora perfectamente determinada (Fig. 8.11):

$$\vec{OQ} = \vec{OP} + \lambda \vec{u}$$

Observamos que si los vectores $\vec{F}_i$ son ligados y aplicados en los puntos A_i , el punto P queda perfectamente determinado. Este punto no depende de la orientación de los vectores del sistema (versor $\vec{u}$). Si variamos la orientación de los vectores ligados varía la dirección de la resultante y, en consecuencia, la del eje central, pero no varía el punto P que sigue siendo el mismo.

Este punto P es la intersección de los ejes centrales para distintas orientaciones del sistema de vectores paralelos y se denomina **CENTRO DEL SISTEMA** (a partir de este concepto se genera un método experimental para la determinación de centros de gravedad de sólidos).

b) Si $\left(\sum_{i=1}^n F_i \vec{r}_i - \sum_{i=1}^n F_i \vec{OP} \right) \parallel \vec{u} = 0$ se puede poner $\left(\sum_{i=1}^n F_i \vec{r}_i - \sum_{i=1}^n F_i \vec{OP} \right) = \mu \vec{u}$ siendo μ una constante cualquiera, de donde

$$\vec{OP} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \vec{r}_i - \mu \vec{u}}{\sum_{i=1}^n F_i}$$

y separando términos

$$\vec{OP} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n F_i} - \frac{\mu \vec{u}}{\sum_{i=1}^n F_i} \quad (8.11)$$

o lo que es lo mismo

$$\vec{OP} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n F_i} + \lambda \vec{u}$$

que es la ecuación del eje central. El primer sumando posiciona un punto del eje central que, como ya sabemos, es el centro del sistema si los vectores son ligados.

Centro de gravedad

A diferencia de una partícula material, un sólido rígido tiene dimensiones finitas. Su masa total M está distribuida, en general, sobre un cierto volumen V . Consideremos un sólido sometido a un campo gravitatorio $\vec{g}(\vec{r})$ que supondremos central con centro en el origen O , por sencillez, y calculemos la fuerza total que actúa sobre el sólido así como su recta soporte.

Si se considera al sólido formado por partículas de masa infinitesimal dm cuya posición respecto a O viene dada por el vector $\vec{r}$, el campo gravitatorio será diferente en el punto que ocupa cada una de ellas (Fig. 8.12). La dirección de $\vec{g}$ cambia para dos puntos que no pertenezcan a una misma recta que contenga al centro del campo O . El módulo de $\vec{g}$ cambia para dos puntos situados a diferente distancia de O .

La fuerza total que ejerce el campo gravitatorio sobre el sólido viene representada por el sistema de vectores deslizantes $\vec{g}dm$ distribuidos de forma continua en el volumen V . Su resultante, que llamaremos peso del sólido, es

$$\vec{P} = \int_M \vec{g}(\vec{r}) dm \quad (8.12)$$

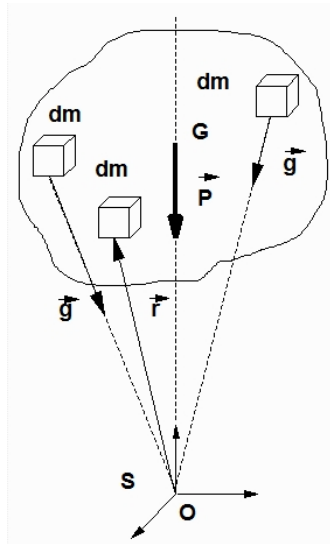


Figura 8.12: Peso de un sólido.

El sistema de vectores deslizantes considerado tiene momento mínimo nulo, ya que es concurrente en O . En consecuencia, el sistema se puede reducir a la resultante $\vec{P}$, aplicada únicamente en los puntos del eje central, que contiene al punto O . El eje central está definido por O y por la dirección de $\vec{P}$. La respuesta del sólido al campo gravitatorio $\vec{g}(\vec{r})$ está totalmente determinada por la resultante $\vec{P}$ aplicada en cualquiera de los puntos del eje central.

Si cambiamos la orientación del sólido respecto al campo gravitatorio, el valor del peso $\vec{P}$ cambiará en general y también lo hará su recta de aplicación.

La situación descrita es complicada, ya que obliga a realizar un cálculo del peso y de su recta soporte, en cada situación, para resolver cualquier problema de dinámica del sólido rígido (además, ambos cambian a lo largo del movimiento).

En la práctica totalidad de los problemas que pueden presentarse, las dimensiones del sólido suelen ser despreciables frente a las de la tierra, que representa el único campo de gravedad importante. En estas condiciones podemos simplificar el problema considerando el campo de gravedad terrestre uniforme y de valor igual al de la aceleración de la gravedad local.

Bajo el supuesto anterior, el sistema de fuerzas distribuidas constituye un sistema de vectores infinitesimales paralelos, cuyo centro G , que llamaremos centro de gravedad del sólido, viene dado por

$$\vec{r}_G = \frac{\int_M |\vec{g}| \vec{r} dm}{\int_M |\vec{g}| dm} \quad (8.13)$$

respecto a un sistema de referencia cualquiera. Para que la definición anterior sea válida es necesario considerar a los vectores $\vec{g}dm$ ligados a los puntos definidos por cada elemento dm (es decir, un vector de posición $\vec{r}$ fijo).

Con las aproximaciones y simplificaciones realizadas, el centro de gravedad de un sólido rígido, dado por la ecuación [8.13], coincide con su centro de masas. En efecto, si $\vec{g} = c\vec{t}\vec{e}$, entonces

$$\vec{r}_G = \frac{g \int_M \vec{r} dm}{g \int_M dm} = \frac{\int_M \vec{r} dm}{M} = \vec{r}_C$$

y el peso total, ecuación [8.12], es en este caso

$$\vec{P} = \vec{g} \int_M dm = \vec{g}M$$

y así se utilizará en las aplicaciones prácticas.

Conviene tener en cuenta, no obstante, que en general la recta soporte del peso no contiene al centro de masas, aunque la distancia entre ambos sea muy pequeña y despreciable para sólidos de dimensiones normales. Ello implica que la reducción del peso al centro de masas se traduce en la resultante $\vec{P}$ y en un momento $\vec{M}_C$ despreciable, pero no nulo. En situaciones en las que $\vec{M}_C$ sea el único momento que actúa, debe ser tenido en cuenta, ya que puede ser fuente de inestabilidades como sucede en el movimiento de satélites artificiales, por ejemplo.

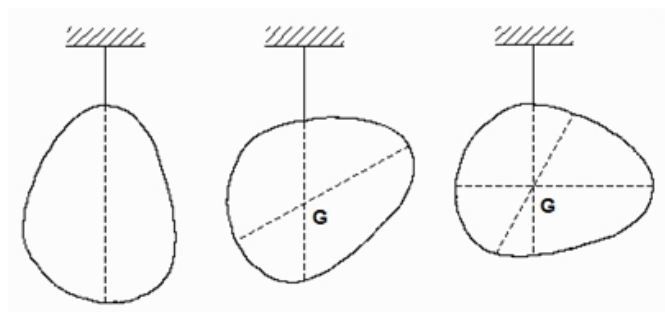


Figura 8.13: Determinación del centro de gravedad.

La aplicación de la ecuación [8.13] para el cálculo de centros de gravedad de sólidos reales puede ser complicada. Para un sólido rígido, la densidad es variable de unos puntos a otros y su contorno puede ser irregular, en el caso más general. Un procedimiento experimental simple para determinar centros de gravedad consiste en aplicar la propiedad de que el centro de un sistema de fuerzas paralelas ligadas representa la intersección de los ejes centrales que se obtienen por rotación global del correspondiente sistema de fuerzas deslizantes paralelas.

Así, si suspendemos un sólido rígido de diferentes puntos fijos, los sucesivos segmentos del sólido definidos por las distintas verticales trazadas desde esos puntos, deben de cortarse en el centro de gravedad (Fig. 8.13).

Como resumen final, el centro de masas es el punto adecuado para representar la fuerza total resultante $\vec{R}$ (que en el estudio de la dinámica llamaremos $\vec{F}$) que actúa sobre el sólido, que es la que impone su movimiento de traslación. El centro de gravedad es el punto donde se debe aplicar el peso del sólido. Consideraremos que ambos coinciden para las aplicaciones prácticas.

8.7.3. Sistema de fuerzas coplanarias

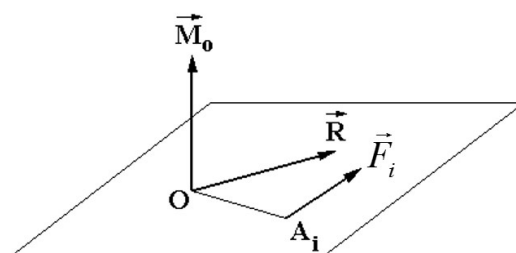


Figura 8.14: Reducción de un sistema de fuerzas coplanarias.

Un sistema de fuerzas (vectores deslizantes) es coplanario cuando todas las fuerzas están contenidas en un mismo plano (Fig. 8.14). En este caso el momento resultante del sistema con respecto a cualquier punto del plano será perpendicular al plano y, en consecuencia a la resultante que, en general, será no nula y estará también contenida en el mismo plano. La determinación gráfica del eje central es, en este caso muy sencilla. Se deja al lector como ejercicio.

8.8. Propiedades de un sólido rígido

Un sólido rígido es un caso especial ideal de sistema de partículas materiales, en el que cada dos partículas 1 y 2 cualesquiera están sometidas a ligaduras rígidas, de manera que la distancia entre ellas ($|\vec{r}_{12}| = \text{cte}$) no cambia independientemente del movimiento que siga el sólido o del sistema de fuerzas aplicadas sobre él (Fig. 8.15).

El sólido rígido supone un caso límite ideal y aproxima bastante bien la situación real de objetos rígidos, siempre que no nos preocupen las pequeñas deformaciones que se producen en la práctica bajo la acción de fuerzas o de pares y solo nos interese estudiar su movimiento. El estudio de las deformaciones producidas por fuerzas o por pares en sólidos elásticos corresponde a la teoría de la elasticidad y no nos ocuparemos aquí de ello.

Todos los teoremas estudiados en el capítulo 6 para un sistema de partículas son utilizables, debidamente adaptados para un sólido rígido. En el caso de que un sólido no esté sometido a más ligaduras que las internas, el número de grados de libertad para estudiar su movimiento es seis. Esta situación corresponde al estudio general del movimiento de un sólido en tres dimensiones que, como se vio, equivale a una traslación instantánea de uno de sus puntos (tres grados de libertad) más una rotación instantánea en torno a un eje que pase por ese punto (otros tres grados de libertad). Este caso general es bastante complejo de estudiar dinámicamente y no

nos ocuparemos de él más que de forma parcial. Solo haremos un estudio dinámico completo del movimiento plano.

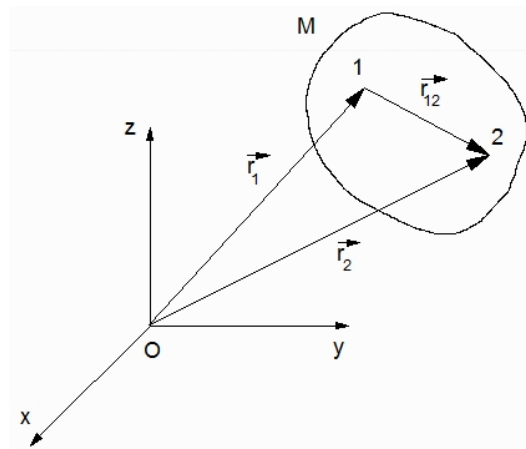


Figura 8.15: Entre dos cualesquiera puntos de un sólido la distancia es constante.

8.8.1. Movimiento plano de un sólido rígido

Decimos que un sólido rígido sigue un movimiento plano cuando las trayectorias de cada uno de sus puntos están contenidas en el mismo plano o en planos paralelos. Cualquier sección del sólido perteneciente a uno de estos planos paralelos en un cierto instante sigue contenida en él a lo largo del movimiento.

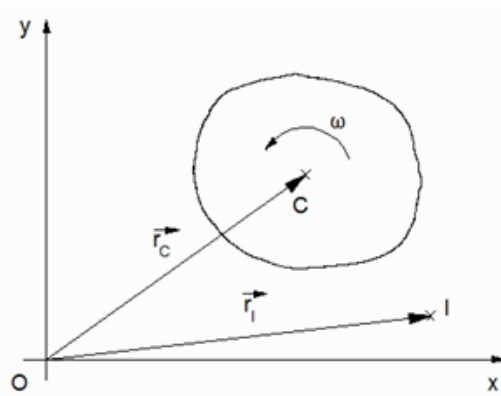


Figura 8.16: Sección central de un sólido, posición del CIR.

Si el movimiento plano de un sólido rígido es únicamente de traslación, la velocidad angular es nula ($\vec{\omega} = 0$), y el sólido equivale a una partícula material que sigue una trayectoria plana, ya que en este caso todos sus puntos se mueven de la misma forma y sus trayectorias son idénticas o paralelas. En este caso son suficientes dos grados de libertad para estudiar el movimiento. Definimos el plano del movimiento como el que contiene a la trayectoria del centro de masas, C , del sólido y la sección central como la intersección del sólido con el plano del movimiento (Fig. 8.16). En esta figura el plano del movimiento es el OXY y en ella se representada la sección central.

En el caso en que exista rotación, el vector velocidad angular $\vec{\omega}$ es perpendicular en todo instante al plano del movimiento ($\vec{\omega} = \omega \vec{k}$ en el caso de la Fig. 8.16). Como la velocidad de cada punto del sólido está contenida en un plano perpendicular a $\vec{\omega}$, entonces existe eje instantáneo de rotación, siempre que $\vec{\omega} \neq 0$, y es perpendicular al plano del movimiento. Se define el centro instantáneo de rotación, I , como la intersección del eje instantáneo de rotación con el plano del movimiento.

Para estudiar el movimiento plano de un sólido rígido es conveniente, por simplicidad, situarse en la sección central del sólido. Un caso particular de movimiento plano es el movimiento de un sólido rígido respecto a un eje fijo. En estas condiciones el centro instantáneo de rotación está determinado por la intersección del eje fijo con el plano del movimiento. El eje de rotación impone una interacción por contacto con el sólido sobre el que aparecerán, en general, fuerzas y pares de reacción.

8.8.2. Sistema de fuerzas aplicadas sobre un sólido rígido

Considérese un sólido rígido en un sistema inercial sometido a un conjunto de fuerzas como el de la Fig. 8.17. Se han representado el peso $\vec{P}$, aplicado en el centro de masas C , dos fuerzas directamente aplicadas, $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$, una fuerza de reacción en un apoyo, $\vec{R}$, y un par de fuerzas, de resultante nula y momento $\vec{M}$, no aplicado en ningún punto específico por ser un vector libre. Las únicas fuerzas aplicadas sobre un sólido rígido que tendremos que considerar son las exteriores, ya que se puede considerar que todas las fuerzas interiores, que imponen que no haya variación de la distancia entre cada dos partículas del sólido, cancelan estrictamente sus efectos dinámicos.

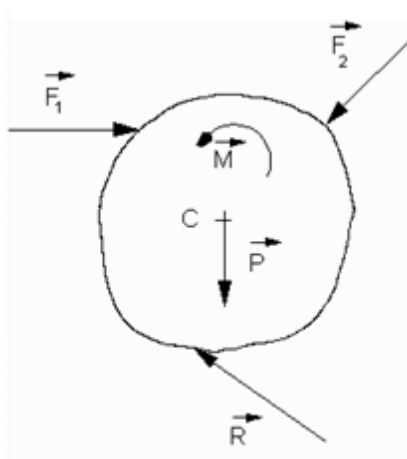


Figura 8.17: Diagrama del sólido libre.

A un diagrama como el de la Fig. 8.17 se le denomina diagrama de sólido libre o diagrama de fuerzas que actúan sobre el sólido. En él se representan **únicamente** las fuerzas y momentos aplicados, que sustituyen a los cuerpos o ligaduras con los que interacciona.

Las fuerzas que actúan sobre un sólido rígido cumplen:

1. El modelo de fuerza puntual. Como ya se indicó en el capítulo 2, a pesar de que muchas fuerzas se transmiten sobre una superficie de contacto, es posible reducirlas a una única fuerza,

o a una fuerza y un momento, con un punto de aplicación bien determinado.

2. La ley del paralelogramo de la suma vectorial. El efecto que producen varias fuerzas sobre un sólido es igual al que produce su suma vectorial, consideradas como sistema de vectores equivalente en cada punto.

3. El principio de transmisibilidad. El efecto de una fuerza sobre un sólido rígido no cambia si desplazamos el punto de aplicación a lo largo de su recta soporte.

Las tres condiciones anteriores implican que las fuerzas que actúan sobre un sólido rígido se comportan como un sistema de vectores deslizantes, al que llamaremos sistema de fuerzas aplicadas sobre el sólido rígido.

El sistema de fuerzas se puede reducir, en cada punto O , a un sistema equivalente simplificado constituido por la fuerza resultante, $\vec{F}$, y por el momento resultante, $\vec{M}_O$.

En la Fig. 8.18(a) se ha reducido el sistema de fuerzas de la Fig. 8.17 al centro de masas, cualitativamente. En la Fig. 8.18(b) se ha reducido a un punto del eje central, O , que se ha supuesto que ni siquiera pertenece al sólido.

La evolución dinámica del sólido rígido depende del sistema de fuerzas aplicado sobre él y los tres sistemas mostrados en la Fig. 8.17 y en las Figs. 8.18 (a) y (b) son equivalentes en este sentido. Como veremos, la dinámica del movimiento de traslación del sólido viene impuesta por la resultante $\vec{F}$ y la dinámica del movimiento de rotación por el momento resultante, $\vec{M}_C$, respecto al centro de masas (aunque no forzosamente).

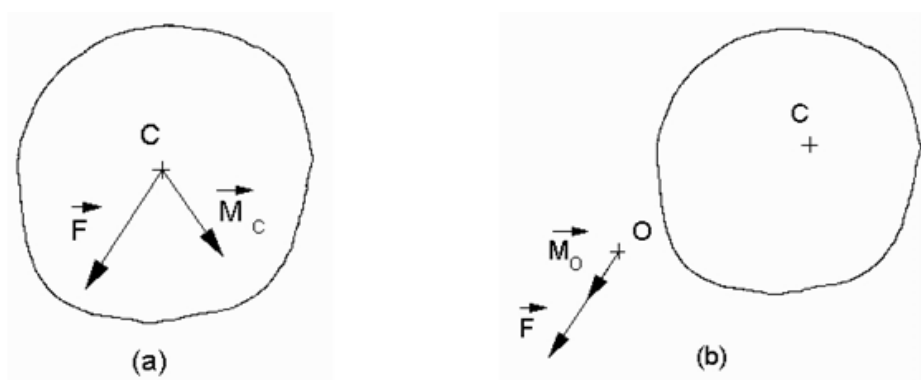


Figura 8.18: Reducción del sistema de fuerzas.

Así, en el caso de un sólido en movimiento de traslación, el sistema equivale únicamente a la resultante $\vec{F}$ aplicada en el centro de masas: el eje central del sistema de fuerzas debe contener al centro de masas y el momento mínimo ha de ser nulo.

En el caso de un sólido en rotación alrededor de un eje fijo que contenga al centro de masas la resultante del sistema de fuerzas ha de ser nula y el sistema equivale únicamente a un momento.

Para un sólido rígido en movimiento plano el momento mínimo es siempre nulo y el eje central está contenido en el plano del movimiento.

El caso particular de sistema de fuerzas nulo (resultante nula y momento resultante nulo) implica el equilibrio del sólido y se estudiará más adelante, en estática.

8.9. Movimiento del centro de masas de un sólido rígido

La ecuación [5.20] que explica el movimiento del centro de masas de un sistema de partículas es aplicable al caso de un sólido rígido. En efecto, a partir de la definición [6.2] se tiene

$$M\vec{r}_C = \int_M \vec{r} dm$$

referida a un sistema S , inercial o no. Dado que nos vamos a referir indistintamente a ambos tipos de sistemas no utilizaremos la notación con primas (') para distinguirlos. Derivando obtenemos:

$$M\vec{v}_C = \frac{d}{dt} \int_M \vec{r} dm = \int_M \frac{d\vec{r}}{dt} dm = \int_M \vec{v} dm$$

ya que la integral está extendida a puntos de masa infinitesimal, dm , constantes y, en consecuencia, la derivación no afecta más que al vector de posición $\vec{r}$.

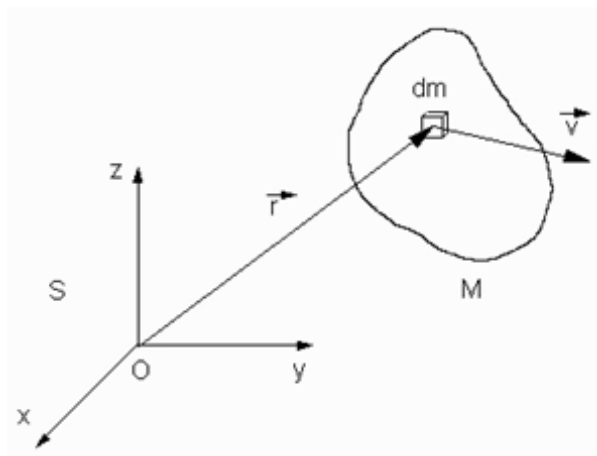


Figura 8.19: Diferencial de masa dm de un sólido y su velocidad $\vec{v}$.

El término $\vec{v}dm = d\vec{p}$ representa la cantidad de movimiento de la partícula dm (Fig. 8.19). Por definición (ec. [5.5]), la cantidad de movimiento del sólido rígido es

$$\vec{p} = \int_M d\vec{p} = \int_M \vec{v} dm$$

y resulta

$$\vec{p} = M\vec{v}_C \quad (8.14)$$

Derivando esta última expresión y teniendo en cuenta la ec. [5.20], válida para cualquier sistema de partículas materiales (en particular para un sólido rígido), resulta

$$\vec{F} + \vec{F}_I = M\vec{a}_C \quad (8.15)$$

donde $\vec{F}$ es la resultante de las fuerzas aplicadas sobre el sólido (solo exteriores, evidentemente) y $\vec{F}_I$ es la resultante de las fuerzas de inercia si el sistema S es no inercial. Obsérvese que hemos

cambiado la notación con primas por el uso de un subíndice (o superíndice) I para distinguir las magnitudes mecánicas características de los sistemas no inerciales.

Para un sistema S no inercial con aceleración del origen $\vec{a}_O$ y velocidad angular de giro $\vec{\Omega}$ (ambas respecto a un sistema inercial), y siendo el vector de posición del centro de masas $\vec{r}_C$ y su velocidad $\vec{v}_C$ en el sistema S , se verifica (ec. [5.21]) que el diferencial de fuerza de inercia que actúa sobre un diferencial de masa dm del sólido es:

$$d\vec{F}_I = -dm\vec{a}_O - dm\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) - dm \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{r} - 2dm\vec{\Omega} \times \vec{v} \quad (8.16)$$

Integrando y usando las propiedades del centro de masas queda:

$$\vec{F}_I = -M\vec{a}_O - M\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_C) - M \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{r}_C - 2M\vec{\Omega} \times \vec{v}_C \quad (8.17)$$

La expresión [8.15] es la ecuación del movimiento del centro de masas de un sólido rígido, e indica que el centro de masas se mueve como si fuese una partícula material, de masa igual a toda la masa M del sólido, que estuviera sometida a la resultante de las fuerzas de inercia $\vec{F}_I$ y de las fuerzas aplicadas sobre el sólido $\vec{F}$.

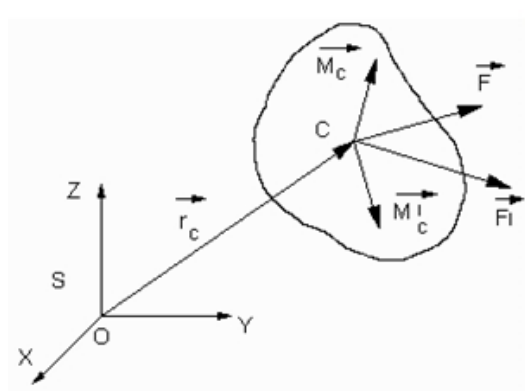


Figura 8.20: Fuerzas y momentos que permiten estudiar el movimiento de un sólido.

En el caso general, el sistema de fuerzas aplicadas, reducidas al centro de masas, viene representado por la resultante $\vec{F}$ y por el momento resultante $\vec{M}_C$. Como hemos visto, las fuerzas explican la traslación del centro de masas, siendo este punto privilegiado en tal sentido (ningún otro punto verifica una ecuación del tipo de la [8.15], en general). Más adelante, al estudiar el teorema del momento cinético, veremos que la resultante de momentos aplicados $\vec{M}_C$ y de inercia $\vec{M}_C^I$ explica la rotación propia instantánea del sólido, si bien en este caso pueden existir otros puntos aparte del centro de masas C válidos como referencia para estudiar tal rotación (Fig. 8.20).

En el supuesto de que la reducción del sistema de fuerzas al centro de masas venga dada únicamente por las fuerzas (es decir, si $\vec{M}_C + \vec{M}_C^I = 0$) entonces, en general, el sólido seguirá un movimiento de traslación y su estudio dinámico equivaldrá estrictamente al de una partícula material de masa M sometida a la fuerza $\vec{F} + \vec{F}_I$.

8.10. Impulso mecánico para un sólido rígido

La ecuación [8.15] se puede escribir como

$$(\vec{F} + \vec{F}_I)dt = d\vec{p}$$

que integrada entre dos instantes t_1 y t_2 resulta

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} (\vec{F} + \vec{F}_I) dt = \int_{t_1}^{t_2} d\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = M\vec{v}_{C2} - M\vec{v}_{C1}$$

y que es la expresión del teorema de la cantidad de movimiento para un sólido rígido.

Si la resultante de las fuerzas que actúan sobre el sólido es nula, entonces se conserva su cantidad de movimiento

$$\vec{F} + \vec{F}_I = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = cte \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_C = \overrightarrow{cte}$$

y el centro de masas sigue un movimiento rectilíneo uniforme. En este caso habrá una rotación en torno a un eje instantáneo que pase por el centro de masas, si $\vec{M}_C + \vec{M}_C^I \neq 0$; o bien el movimiento del sólido será de traslación, rectilíneo y uniforme, si $\vec{M}_C + \vec{M}_C^I = 0$ y el sólido inicialmente no gira.

8.11. Movimiento de un sólido rígido con un eje fijo en un sistema inercial

8.11.1. Movimiento del centro de masas

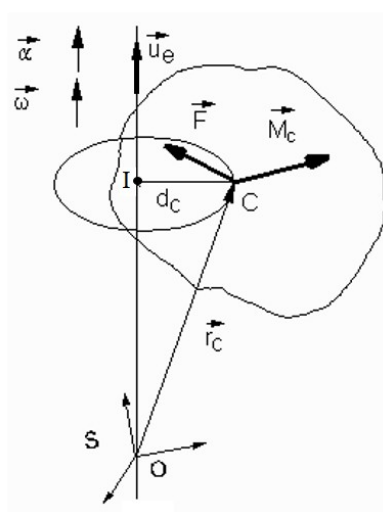


Figura 8.21: Movimiento del sólido con eje fijo en un sistema inercial.

Un caso particularmente sencillo de movimiento plano es el de un sólido que gira alrededor de un eje fijo e en un sistema inercial. Como se vio en el capítulo 7, en este caso el movimiento es de rotación con velocidad y aceleración angulares $\vec{\omega}$ y $\vec{\alpha}$ paralelas al eje. Orientamos el eje e mediante un vector unitario $\vec{u}_e$ dado por $\vec{u}_e = \vec{\omega} / |\vec{\omega}|$ definido salvo que $\vec{\omega} = 0$, en cuyo caso se define mediante el vector $\vec{\alpha}$ de la misma forma que se ha hecho con $\vec{\omega}$. El movimiento de cada punto del sólido será circular, en torno al eje de rotación. En particular, el centro de masas C seguirá una trayectoria circular de radio d_C (Fig. 8.21).

Sea O un punto fijo del eje, que adoptaremos como origen de un sistema de referencia inercial S , y sean $\vec{F}$ y $\vec{M}_C$ la reducción al centro de masas C del sistema de fuerzas aplicadas sobre el sólido. La resultante $\vec{F}$ debe explicar el movimiento de C de acuerdo con la ecuación [8.15], que es

$$\vec{F} = M\vec{a}_C$$

Según se vio en el apartado 2.7.2, la velocidad del centro de masas C que sigue un movimiento circular se puede expresar como

$$\vec{v}_C = \vec{\omega} \times \vec{r}_C$$

La cantidad de movimiento del sólido es

$$\vec{p} = M\vec{v}_C = M\vec{\omega} \times \vec{r}_C$$

y se verifica que

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = M\vec{a}_C = M\vec{\alpha} \times \vec{r}_C + M\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_C)$$

Proyectando la ecuación anterior según los ejes del triedro intrínseco para el movimiento de C se obtienen las componentes tangencial y normal de la fuerza resultante

$$\vec{F}_t = M\vec{\alpha} \times \vec{r}_C \quad \vec{F}_n = M\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_C)$$

La velocidad y la aceleración de cualquier otro punto del sólido se obtienen mediante los campos de velocidades y aceleraciones (ecs. [7.2] y [7.5]). En particular, para puntos del eje se tiene

$$\vec{v}_O = 0 \quad \vec{a}_O = 0 \quad \forall O \in \text{Eje}$$

En este caso es evidente que el eje instantáneo de rotación es el eje fijo e impuesto como condición. El centro instantáneo de rotación I es la intersección del eje de rotación con el plano del movimiento (Fig. 8.21).

8.11.2. Momento cinético

Para describir el movimiento del centro de masas nos hemos apoyado en que la velocidad angular de rotación $\vec{\omega}$ y la aceleración angular de rotación $\vec{\alpha}$ estaban determinadas, pero no disponemos aún de una ecuación dinámica que nos permita obtenerlas en función de las fuerzas y momentos aplicados. Esta ecuación nos la proporciona el teorema del momento cinético respecto al eje fijo e .

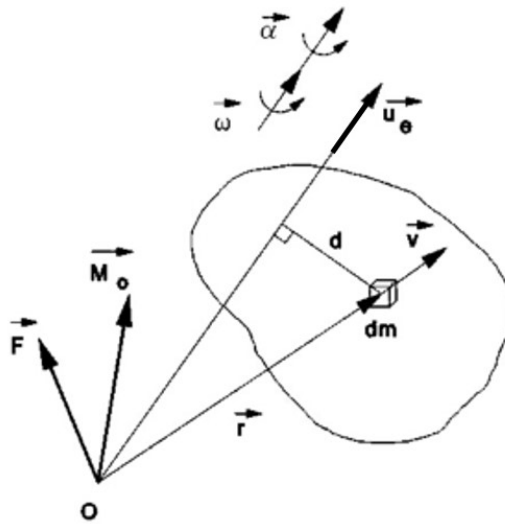


Figura 8.22: Reducción del sistema de fuerzas al punto O del eje y variables para el cálculo del momento cinético axial.

Sea O un punto fijo del eje de rotación y $\vec{F}$ y $\vec{M}_O$ la reducción al punto O del sistema de fuerzas aplicadas sobre el sólido (Fig. 8.22). El momento cinético de cada partícula dm respecto al eje es

$$dL_e = d\vec{L}_O \cdot \vec{u}_e$$

donde

$$d\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{v} dm = \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm = (r^2 \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) \vec{r}) dm$$

con lo que

$$dL_e = (r^2 (\vec{\omega} \cdot \vec{u}_e) - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) (\vec{r} \cdot \vec{u}_e)) dm$$

pero, teniendo en cuenta que

$$\omega = \vec{\omega} \cdot \vec{u}_e \quad \omega P_e(\vec{r}) = \vec{\omega} \cdot \vec{r} \quad P_e(\vec{r}) = \vec{r} \cdot \vec{u}_e$$

y que

$$r^2 - P_e^2(\vec{r}) = d^2$$

siendo d la distancia entre el dm y el eje e de unitario $\vec{u}_e$ (Fig. 8.22), se obtiene que

$$dL_e = \omega d^2 dm$$

Integrando para todos los elementos dm del sólido, resulta

$$L_e = \omega \int_M d^2 dm$$

ya que ω no depende de las variables de integración.

Usando el momento de inercia I_e del sólido con respecto al eje e que pasa por O se tiene

$$I_e = \int_M d^2 dm \quad (8.18)$$

con lo que

$$L_e = \omega I_e \quad (8.19)$$

Además, como el eje es fijo al sólido, I_e no depende del tiempo; es decir, tiene el mismo valor a lo largo del movimiento del sólido.

Aplicando el teorema del momento cinético respecto a un eje fijo para un sistema de partículas (ec. [5.36]), resulta

$$M_e = \frac{dL_e}{dt} = I_e \frac{d\omega}{dt} = I_e \alpha \quad (8.20)$$

donde $M_e = \vec{M}_O \cdot \vec{u}_e$ y $\alpha = \vec{\alpha} \cdot \vec{u}_e$.

Como el eje de rotación es fijo, $\vec{\alpha}$ queda determinada por su proyección sobre él (α) que viene dada por la ecuación [8.20], y ω se obtiene por integración a partir de α .

En el caso general ni $\vec{L}_O$ ni $\vec{M}_O$ están contenidos en el eje de rotación (es decir, $|L_e| = |\vec{L}_O \cdot \vec{u}_e| \neq |\vec{L}_O|$, e igual para $\vec{M}_O$). Las componentes de $\vec{M}_O$ según el plano perpendicular al eje se interpretan como pares de reacción que actúan sobre el sólido debidos a su interacción con el eje. En cualquier caso, el movimiento de rotación del sólido, caracterizado por ω y α , se debe únicamente a las proyecciones sobre el eje fijo: L_e y M_e .

Si el momento resultante respecto al eje es nulo, entonces se conserva el momento cinético respecto al eje y la velocidad angular de rotación es constante:

$$M_e = 0 \Rightarrow \alpha = 0, \quad \omega = cte, \quad L_e = cte$$

En este caso la resultante de las fuerzas, $\vec{F}$, será nula si el centro de masas está contenido en el eje (el CM está fijo); y no nula, aunque perpendicular al eje, en caso contrario (el CM ejecuta un movimiento circular en este caso).

8.11.3. Péndulo físico

El péndulo físico consiste en un sólido rígido que puede moverse en torno a un eje horizontal ideal (sin momento de fricción). En la Fig. 8.23 se representa la sección central del sólido, sometido a dos fuerzas, el peso aplicado en el centro de masas y la reacción $\vec{R}$ en el punto O del eje de rotación. En la posición representada $\vec{u}_t$ y $\vec{u}_n$ son los unitarios de las direcciones tangente y normal del movimiento circular de radio OC del centro de masas C . No se dibujan los momentos de reacción sobre el eje ya que no influyen en el movimiento.

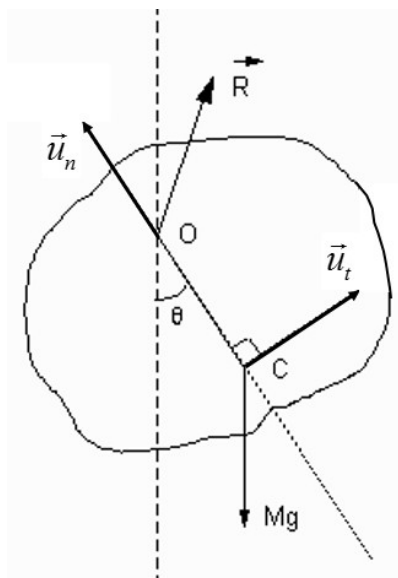


Figura 8.23: Péndulo físico.

El problema plantea un único grado de libertad. La variable más adecuada para determinar la posición del sólido en cada instante es el ángulo θ que forma el segmento OC con la vertical (medido positivo en el sentido antihorario). Aplicando el teorema del momento cinético respecto al eje de rotación (ec. [8.20], con $\vec{u}_e$ positivo hacia afuera de la hoja), y llamando r_C a la distancia entre O y C , obtenemos

$$-Mgr_C \sin \theta = I_e \alpha = I_e \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

es decir

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{Mgr_C}{I_e} \sin \theta = 0$$

que es la ecuación diferencial característica de un péndulo físico ideal. Es una ecuación no lineal cuya solución es algo complicada. Para pequeñas oscilaciones (θ pequeño) podemos utilizar la aproximación

$$\sin \theta \approx \theta$$

con lo que la ecuación se hace lineal

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{Mgr_C}{I_e} \theta = 0$$

y es característica de un movimiento armónico simple (aunque en este caso en la variable θ), de periodo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_e}{Mgr_C}}$$

cuya solución general es

$$\theta = \theta_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \varphi\right)$$

La amplitud del movimiento viene dada por θ_0 y la posición inicial por la fase inicial φ . La velocidad angular y la aceleración angular de rotación son

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{d\theta}{dt} = -\frac{2\pi}{T}\theta_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \varphi\right) \\ \alpha &= \frac{d\omega}{dt} = -\frac{4\pi^2}{T^2}\theta_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \varphi\right) = -\frac{4\pi^2}{T^2}\theta\end{aligned}$$

Las componentes de la reacción $\vec{R}$, según las direcciones tangente y normal del movimiento del centro de masas, usando la ec. [8.15] vienen dadas en función de θ por

$$\begin{aligned}R_t &= M\left(g - \frac{4\pi^2}{T^2}r_C\right)\theta \\ R_n &= Mg\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) + M\frac{4\pi^2}{T^2}r_C(\theta_0^2 - \theta^2)\end{aligned}$$

en la aproximación de pequeñas oscilaciones.

El péndulo físico se reduce al péndulo matemático si $I_e = Mr_C^2$ (que corresponde a una masa puntual M situada en C). En este caso el periodo vale

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r_C}{g}}$$

como es fácil comprobar.

8.12. Momento cinético de un sólido rígido

8.12.1. Momento cinético en el movimiento general

Como se ha visto, la velocidad de un punto de referencia de un sólido es la magnitud cinemática característica de su traslación instantánea, mientras que dinámicamente caracterizamos tal traslación mediante su cantidad de movimiento $\vec{p} = m\vec{v}_C$ (sección 8.9).

De forma análoga, para describir cinemáticamente la rotación instantánea del sólido rígido empleamos la velocidad angular $\vec{\omega}$. El momento cinético, $\vec{L}_Q$, respecto a ciertos puntos de referencia Q caracteriza dinámicamente tal rotación instantánea.

Sea un sólido rígido de masa M y un sistema de referencia S que puede ser inercial o no. Un punto del sólido, Q , nos sirve como referencia para describir la traslación instantánea respecto a S mediante su velocidad $\vec{v}_Q$ y su aceleración $\vec{a}_Q$. La rotación instantánea viene dada entonces por el vector velocidad angular $\vec{\omega}$. El eje instantáneo de rotación y deslizamiento está definido por Q y $\vec{\omega}$.

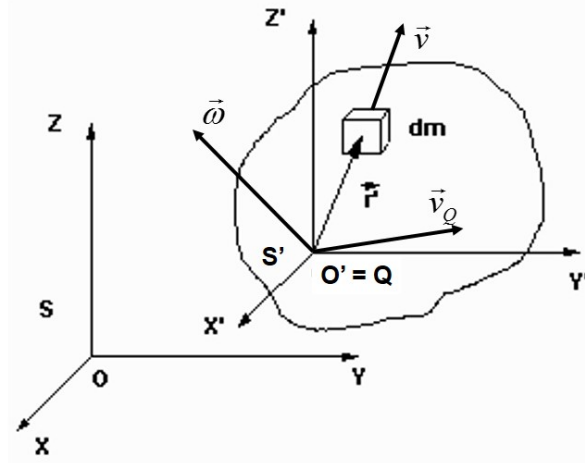


Figura 8.24: Sistema de referencia S' en traslación respecto al sistema S (inercial o no).

Sea $S'(O'X'Y'Z')$ un sistema de referencia con centro en $O'=Q$ y en movimiento de traslación respecto a S (Fig. 8.24). El momento cinético de un elemento de masa muy pequeño dm del sólido rígido respecto a O' en el sistema de referencia S es

$$d\vec{L}_Q = \vec{r}' \times dm\vec{v}$$

La velocidad absoluta, en el sistema S , del elemento dm viene dada por el campo de velocidades:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}' + \vec{v}_Q$$

luego

$$d\vec{L}_Q = dm\vec{r}' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + dm\vec{r}' \times \vec{v}_Q = dm \left[r'^2\omega - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}')\vec{r}' \right] + dm\vec{r}' \times \vec{v}_Q \quad (8.21)$$

donde el primer término es el momento cinético calculado en el sistema S' (y por tanto, considerando que el dm tiene la velocidad $\vec{v}' = \vec{\omega} \times \vec{r}'$ que mide este sistema) y que llamaremos:

$$d\vec{L}'_Q = dm \left[r'^2\omega - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}')\vec{r}' \right]$$

Los vectores $\vec{\omega}$ y $\vec{r}'$ se representan en componentes de S y S' de la misma forma, ya que son dos sistemas de ejes paralelos en todo instante

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k} = \omega_x \vec{i}' + \omega_y \vec{j}' + \omega_z \vec{k}'$$

$$\vec{r}' = x' \vec{i}' + y' \vec{j}' + z' \vec{k}' = x' \vec{i} + y' \vec{j} + z' \vec{k}$$

con lo que las componentes de $d\vec{L}'_Q$ (en componentes de S' y S) vienen dadas por

$$(dL'_Q)_{x'} = (y'^2 + z'^2)\omega_{x'}dm - x'y'\omega_{y'}dm - x'z'\omega_{z'}dm$$

$$(dL'_Q)_{y'} = -x'y'\omega_{x'}dm + (x'^2 + z'^2)\omega_{y'}dm - y'z'\omega_{z'}dm$$

$$(dL'_Q)_{z'} = -x'z'\omega_{x'}dm - y'z'\omega_{y'}dm + (x'^2 + y'^2)\omega_{z'}dm$$

Integrando estas ecuaciones para todos los puntos del sólido rígido y teniendo en cuenta que $\omega_{x'}$, $\omega_{y'}$, y $\omega_{z'}$ son independientes de las variables de integración, resulta

$$\begin{aligned} L'_{Qx'} &= \omega_{x'} \int_M (y'^2 + z'^2)dm - \omega_{y'} \int_M x'y'dm - \omega_{z'} \int_M x'z'dm \\ L'_{Qy'} &= -\omega_{x'} \int_M x'y'dm + \omega_{y'} \int_M (x'^2 + z'^2)dm - \omega_{z'} \int_M y'z'dm \\ L'_{Qz'} &= -\omega_{x'} \int_M x'z'dm - \omega_{y'} \int_M y'z'dm + \omega_{z'} \int_M (x'^2 + y'^2)dm \end{aligned}$$

y, recordando las definiciones de momentos de inercia respecto a un eje y de productos de inercia vistas en la sección 6.2, se obtiene

$$\begin{pmatrix} L'_{Qx'} \\ L'_{Qy'} \\ L'_{Qz'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{Qx'} & -P_{Qx'y'} & -P_{Qx'z'} \\ -P_{Qx'y'} & I_{Qy'} & -P_{Qy'z'} \\ -P_{Qx'z'} & -P_{Qy'z'} & I_{Qz'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{x'} \\ \omega_{y'} \\ \omega_{z'} \end{pmatrix} \quad (8.22)$$

es decir,

$$\vec{L}'_Q = \bar{I}'_Q \cdot \vec{\omega} \quad (8.23)$$

que expresa la relación entre la velocidad angular instantánea de rotación $\vec{\omega}$ y el momento cinético respecto a Q en componentes del sistema S' .

Es importante tener en cuenta que al estar S' en movimiento de traslación, el sólido rígido tiene respecto a él un movimiento de rotación idéntico al que tiene respecto al sistema S . En consecuencia, los momentos y productos de inercia que aparecen en las ecuaciones [8.22] son funciones del tiempo en S' , lo mismo que la velocidad angular $\vec{\omega}(t)$. Por tanto, la representación matricial del tensor de inercia $\bar{I}'_Q(t)$ cambia en S' en cada instante de tiempo. Esto puede hacer complicado el manejo de la expresión [8.23]. Para evitarlo, definamos un sistema de referencia S_L , ligado al sólido, con origen en Q (Fig. 8.25).

Al estar ligado al sólido, la distribución de masas de éste en el sistema S_L permanece constante a lo largo del movimiento. Los vectores $\vec{\omega}$ y $\vec{r}_L = \vec{r}'$ (posición de un elemento dm genérico del sólido) son idénticos en S' y en S_L , pero sus componentes son diferentes.

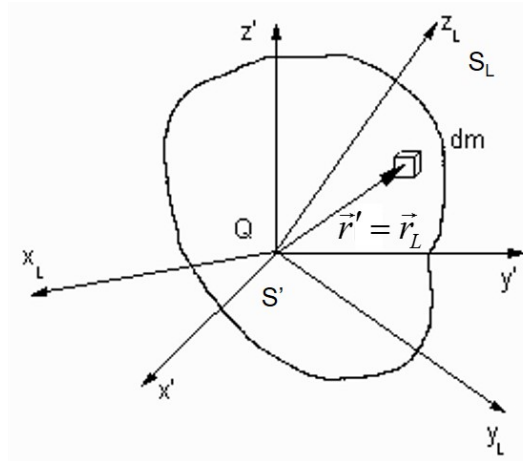


Figura 8.25: Sistema de referencia S_L ligado al sólido.

En el sistema de referencia S_L los vectores $\vec{\omega}$ y $\vec{r}_L$ tendrán por componentes

$$\vec{\omega} = \omega_{x_L} \vec{i}_L + \omega_{y_L} \vec{j}_L + \omega_{z_L} \vec{k}_L$$

$$\vec{r}' = \vec{r}_L = x_L \vec{i}_L + y_L \vec{j}_L + z_L \vec{k}_L$$

Repitiendo el proceso que llevó a deducir la ecuación [8.23], se tiene que en componentes del sistema S_L la ecuación

$$d\vec{L}'_Q = dm \left[r'^2 \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}') \vec{r}' \right]$$

se convierte en

$$\begin{pmatrix} L'_{Qx_L} \\ L'_{Qy_L} \\ L'_{Qz_L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{Qx_L} & -P_{Qx_L y_L} & -P_{Qx_L z_L} \\ -P_{Qx_L y_L} & I_{Qy_L} & -P_{Qy_L z_L} \\ -P_{Qx_L z_L} & -P_{Qy_L z_L} & I_{Qz_L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{x_L} \\ \omega_{y_L} \\ \omega_{z_L} \end{pmatrix} \quad (8.24)$$

con la diferencia de que ahora tanto los momentos de inercia como los productos de inercia son constantes a lo largo del movimiento del sólido.

En forma resumida, la ecuación [8.24] se escribe

$$\vec{L}'_Q = \bar{I}_Q^L \cdot \vec{\omega} \quad (8.25)$$

donde $\bar{I}_Q^L$ es el tensor de inercia en el punto Q en componentes del sistema S_L , y que por tanto no depende del tiempo, a diferencia de $\vec{\omega}(t)$ que sí que lo sigue haciendo. La ecuación [8.23] es formalmente idéntica a la [8.25], sin embargo, las ecuaciones [8.22] y [8.24] son diferentes, ya que expresan $\vec{L}'_Q$, ω e $\bar{I}_Q$ en componentes. Las componentes cambian al cambiar de sistema de referencia, pero los vectores y el tensor de inercia siguen siendo los mismos (entendiendo que el tensor esté siempre referido al mismo punto Q). En definitiva las ecs. [8.23] y [8.25] se escriben más correctamente como:

$$\vec{L}'_Q = \vec{I}_Q \cdot \vec{\omega} \quad (8.26)$$

ya que según hemos visto un tensor se comporta de manera análoga a un vector en lo relativo a su expresión en distintos sistemas de coordenadas.

Si el punto Q es el centro de masas C del sólido, entonces las ecuaciones [8.24] y [8.26] toman la forma

$$\begin{pmatrix} L'_{Cx_L} \\ L'_{Cy_L} \\ L'_{Cz_L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{Cx_L} & -P_{Cx_Ly_L} & -P_{Cx_Lz_L} \\ -P_{Cx_Ly_L} & I_{Cy_L} & -P_{Cy_Lz_L} \\ -P_{Cx_Lz_L} & -P_{Cy_Lz_L} & I_{Cz_L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{x_L} \\ \omega_{y_L} \\ \omega_{z_L} \end{pmatrix} \quad (8.27)$$

$$\vec{L}'_C = \vec{I}_C \cdot \vec{\omega} \quad (8.28)$$

donde $\vec{I}_C$ representa el tensor de inercia en C . En este caso el sistema S' es el sistema centro de masas. En general $\vec{L}'_Q$ y $\vec{\omega}$ **no** son vectores paralelos. Representando la ecuación [8.24] en ejes principales de inercia resulta

$$\begin{pmatrix} L'_{Qx_L} \\ L'_{Qy_L} \\ L'_{Qz_L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{Qx_L} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Qy_L} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Qz_L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{x_L} \\ \omega_{y_L} \\ \omega_{z_L} \end{pmatrix} \quad (8.29)$$

$$\vec{L}'_Q = I_{Qx_L} \omega_{x_L} \vec{i}_L + I_{Qy_L} \omega_{y_L} \vec{j}_L + I_{Qz_L} \omega_{z_L} \vec{k}_L$$

con $I_{Qx_L} \neq I_{Qy_L} \neq I_{Qz_L}$, lo que corrobora que $\vec{L}'_Q$ y $\vec{\omega}$ tengan direcciones diferentes. Sin embargo, en el caso de que el sólido sea esférico los tres momentos de inercia son iguales, $I_{Qx_L} = I_{Qy_L} = I_{Qz_L} = \lambda$, y la ec. [8.29] se reduce a

$$\vec{L}'_Q = \lambda \vec{\omega}$$

en cuyo caso ambos vectores son paralelos.

Si el sólido rígido sigue un movimiento plano siempre podemos situarnos en sistemas de referencia en los que sea más simple representar el plano del movimiento y la dirección de $\vec{\omega}$ haciendo, por ejemplo, que coincidan los ejes z de los sistemas S_L y S con la dirección de la velocidad angular:

$$\vec{\omega} = \omega \vec{k}_L = \omega \vec{k}$$

con lo que el plano del movimiento estará determinado por $z=z_C=cte$. En este caso la ecuación [8.24] se reduce a

$$\begin{pmatrix} L'_{Qx_L} \\ L'_{Qy_L} \\ L'_{Qz_L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{Qx_L} & -P_{Qx_Ly_L} & -P_{Qx_Lz} \\ -P_{Qx_Ly_L} & I_{Qy_L} & -P_{Qy_Lz} \\ -P_{Qx_Lz} & -P_{Qy_Lz} & I_{Qz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \quad (8.30)$$

$$\vec{L}'_Q = -P_{Qx_Lz} \omega \vec{i}_L - P_{Qy_Lz} \omega \vec{j}_L + I_{Qz} \omega \vec{k}$$

De nuevo se observa que $\vec{L}'_Q$ **no** es paralelo a $\vec{\omega}$, en general, incluso en el caso de movimiento plano. Sin embargo, aquí no es necesario exigir que el sólido sea esférico para que se cumpla esa condición. Basta imponer que el sólido tenga la suficiente simetría para que $P_{Qx_Lz} = P_{Qy_Lz} = 0$ (el plano OXY sea un plano de simetría), y resulte de la ecuación [8.30] que

$$\vec{L}'_Q = I_{Qz}\vec{\omega} \quad (8.31)$$

es decir, $\vec{L}'_Q$ es paralelo a $\vec{\omega}$ en tal supuesto, expresión que será además la que utilizaremos habitualmente en aplicaciones prácticas. Cuando el sólido presenta dicho plano de simetría, el eje ortogonal OZ es un eje principal, y a la inversa.

Puesto que la única ecuación dinámica de que disponemos para caracterizar la traslación de un sólido rígido es la del movimiento del centro de masas [8.15], es normal referir el momento cinético al centro de masas, aunque no siempre es necesario ni lo más simple. En tal supuesto, utilizaremos las ecuaciones [8.27] y [8.28]. En el caso de movimiento plano con simetrías, las ecs. [8.29] y [8.30] referidas al CM se representan de la siguiente forma,

$$L'_{Cx_L} = -P_{Cx_Lz}\omega = 0; \quad L'_{Cy_L} = -P_{Cy_Lz}\omega = 0; \quad L'_{Cz} = I_{Cz}\omega \quad (8.32)$$

es decir,

$$\vec{L}'_C = I_{Cz}\vec{\omega} \quad (8.33)$$

Finalmente, diremos que el momento cinético respecto a un punto Q calculado en el sistema S (la velocidad de los dm se mide en este sistema) se obtiene por (ec. [8.21]):

$$\vec{L}_Q = \vec{L}'_Q + M\vec{QC} \times \vec{v}_Q = \vec{I}_Q \cdot \vec{\omega} + M\vec{QC} \times \vec{v}_Q \quad (8.34)$$

donde no se ha escrito el tensor en componentes de ningún sistema de ejes en concreto ($\vec{I}_Q^L$ o $\vec{I}_Q$). Si se quiere relacionar el momento cinético en un punto genérico Q con el del centro de masas aplicamos el teorema de König:

$$\vec{L}_Q = \vec{L}_C + \vec{QC} \times M\vec{v}_C$$

8.12.2. Teorema del momento cinético

En el caso general de movimiento de un sólido rígido se verifica el teorema del momento cinético que se vio para un sistema de partículas materiales, tanto respecto a un punto en un sistema de referencia inercial (ec. [5.37]) como respecto a un punto en un sistema no inercial (ec. [5.40]). Utilizaremos esta última ecuación al ser más general y no usaremos la notación con primas para el sistema S ya que puede confundirse con el sistema usado en el apartado anterior (8.12.1). De esta manera se tiene:

$$\left(\frac{d\vec{L}_Q}{dt} \right)_S = -\vec{v}_Q \times M\vec{v}_C + \vec{M}_Q + \vec{M}_Q^I \quad (8.35)$$

En esta ecuación $\vec{M}_Q^I$ es el momento de las fuerzas de inercia y $\vec{M}_Q$ el momento de las fuerzas aplicadas al sólido (exteriores en un sistema de partículas). Derivamos en la expresión del momento cinético para un sólido $\vec{L}_Q$ (ec. [8.34]) teniendo en cuenta que es más fácil hacerlo en el sistema S_L propio del sólido pues en él la distribución de masas es constante. El resultado es:

$$\left(\frac{d\vec{L}_Q}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\vec{L}'_Q}{dt}\right)_{S_L} + \vec{\omega} \times \vec{L}'_Q + M(\vec{\omega} \times \vec{Q}\vec{C}) \times \vec{v}_Q + M\vec{Q}\vec{C} \times \vec{a}_Q \quad (8.36)$$

donde se ha usado que: $\left(\frac{d\vec{Q}\vec{C}}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\vec{Q}\vec{C}}{dt}\right)_{S_L} + \vec{\omega} \times \vec{Q}\vec{C} = \vec{\omega} \times \vec{Q}\vec{C}$.

El teorema del momento cinético que se suele manejar corresponde a puntos en los que las expresiones anteriores se simplifican notablemente, esto es, puntos fijos (sin velocidad ni aceleración) o el centro de masas. En este caso el teorema queda, teniendo en cuenta que el momento cinético en S y S' (sistema con centro Q en traslación respecto de S) es idéntico:

$$\vec{L}_Q = \vec{L}'_Q + M\vec{Q}\vec{C} \times \vec{v}_Q = \vec{L}'_Q \quad (8.37)$$

$$\left(\frac{d\vec{L}_Q}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\vec{L}'_Q}{dt}\right)_{S_L} + \vec{\omega} \times \vec{L}'_Q = \vec{M}_Q + \vec{M}_Q^I \quad (8.38)$$

Por tanto:

$$\left(\frac{d\vec{L}_Q}{dt}\right)_{S_L} + \vec{\omega} \times \vec{L}_Q = \vec{M}_Q + \vec{M}_Q^I \quad (8.39)$$

O también teniendo en cuenta que el tensor de inercia es constante en S_L :

$$\vec{I}_Q^L \cdot \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{S_L} + \vec{\omega} \times (\vec{I}_Q \cdot \vec{\omega}) = \vec{M}_Q + \vec{M}_Q^I$$

Desarrollando estas ecuaciones en ejes principales de inercia donde el tensor es diagonal, y por tanto,

$$\vec{L}_Q = I_{Qx_L} \omega_{x_L} \vec{i}_L + I_{Qy_L} \omega_{y_L} \vec{j}_L + I_{Qz_L} \omega_{z_L} \vec{k}_L$$

se llega a las llamadas ecuaciones de Euler para el sólido (con Q siendo un punto fijo o el centro de masas) expresadas en componentes del sistema ligado al sólido S_L :

$$\begin{aligned} I_{Qx_L} \frac{d\omega_{x_L}}{dt} + (I_{Qz_L} - I_{Qy_L}) \omega_{z_L} \omega_{y_L} &= M_{Qx_L} + M_{Qx_L}^I \\ I_{Qy_L} \frac{d\omega_{y_L}}{dt} + (I_{Qx_L} - I_{Qz_L}) \omega_{x_L} \omega_{z_L} &= M_{Qy_L} + M_{Qy_L}^I \\ I_{Qz_L} \frac{d\omega_{z_L}}{dt} + (I_{Qy_L} - I_{Qx_L}) \omega_{y_L} \omega_{x_L} &= M_{Qz_L} + M_{Qz_L}^I \end{aligned} \quad (8.40)$$

Finalmente indicaremos como se calcula la resultante de momentos de fuerzas de inercia $\vec{M}_Q^I$. Esta magnitud representa el momento total, respecto a Q , de las fuerzas de inercia que actúan sobre cada diferencial de masa, dm , del sólido situado en un punto $\vec{r}$:

$$\vec{M}_Q^I = \int_M (\vec{r} - \vec{r}_Q) \times d\vec{F}_I$$

donde el $d\vec{F}_I$ viene dado por la expresión [8.16].

En el caso general de un sistema de referencia con un movimiento cualquiera de traslación más rotación, la forma que adopta $\vec{M}_Q^I$ es muy complicada. Un caso particularmente sencillo y útil en muchas ocasiones se da cuando el sistema no inercial S está en movimiento de traslación. En este supuesto solo existe la fuerza de inercia debido a la aceleración del origen del sistema $\vec{a}_O$:

$$d\vec{F}_I = -dm\vec{a}_O$$

y, en consecuencia

$$\vec{M}_Q^I = - \int_M (\vec{r} - \vec{r}_Q) \times dm\vec{a}_O = -M(\vec{r}_C - \vec{r}_Q) \times \vec{a}_O$$

donde $\vec{r}_C$ representa el vector de posición del centro de masas en el sistema S .

8.12.3. Teorema del momento cinético en el movimiento plano

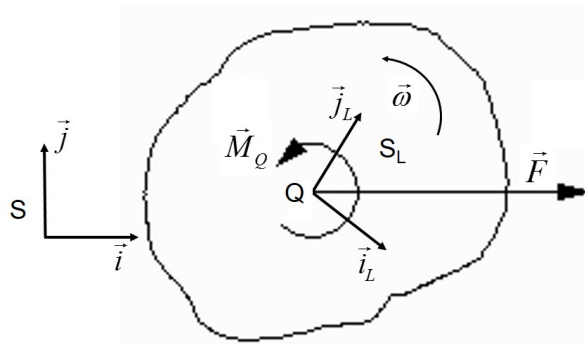


Figura 8.26: Sólido rígido en movimiento plano, reducción de fuerzas y sistema S_L ligado al sólido.

Sea un sólido rígido en movimiento plano (Fig. 8.26). Para evitar la dependencia con el tiempo de los productos y momentos de inercia, definamos un sistema de referencia no inercial (en general) ligado al sólido, S_L , de ejes $QX_L Y_L Z_L$, con origen en Q (punto fijo o el CM) y con vectores unitarios $\vec{i}_L, \vec{j}_L, \vec{k}_L$ siendo $\vec{k}_L$ paralelo a la velocidad angular y al eje OZ del sistema S .

El momento cinético respecto a Q en este nuevo sistema toma la forma

$$\vec{L}_Q = -P_{Qx_Lz}\omega\vec{i}_L - P_{Qy_Lz}\omega\vec{j}_L + I_{Qz}\omega\vec{k} \quad (8.41)$$

con P_{Qx_Lz} , P_{Qy_Lz} , I_{Qz} independientes del tiempo.

Teniendo en cuenta que el sistema de referencia S_L tiene la misma velocidad angular de rotación $\vec{\omega}$ que el sólido rígido, se verifica que

$$\left(\frac{d\vec{L}_Q}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\vec{L}_Q}{dt}\right)_{S_L} + \vec{\omega} \times \vec{L}_Q$$

donde

$$\left(\frac{d\vec{L}_Q}{dt}\right)_{S_L} = -P_{Qx_Lz}\frac{d\omega}{dt}\vec{i}_L - P_{Qy_Lz}\frac{d\omega}{dt}\vec{j}_L + I_{Qz}\frac{d\omega}{dt}\vec{k}$$

y

$$\vec{\omega} \times \vec{L}_Q = \omega\vec{k} \times \vec{L}_Q = P_{Qy_Lz}\omega^2\vec{i}_L - P_{Qx_Lz}\omega^2\vec{j}_L$$

Recordando que la aceleración angular del sólido es

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\vec{k} = \alpha\vec{k}$$

idéntica en los dos sistemas (S y S_L), y sustituyendo en la ecuación [8.35], resulta

$$\vec{M}_Q + \vec{M}_Q^I = (-P_{Qx_Lz}\alpha + P_{Qy_Lz}\omega^2)\vec{i}_L + (-P_{Qy_Lz}\alpha - P_{Qx_Lz}\omega^2)\vec{j}_L + I_{Qz}\alpha\vec{k} \quad (8.42)$$

es decir

$$\begin{aligned} M_{Qx_L} + M_{Qx_L}^I &= -P_{Qx_Lz}\alpha + P_{Qy_Lz}\omega^2 \\ M_{Qy_L} + M_{Qy_L}^I &= -P_{Qy_Lz}\alpha - P_{Qx_Lz}\omega^2 \\ M_{Qz} + M_{Qz}^I &= I_{Qz}\alpha \end{aligned} \quad (8.43)$$

En el caso general de movimiento plano, este puede mantenerse solo si se comunican al sólido los momentos en x e y necesarios para satisfacer las ecs. [8.43]. En particular, si el eje de rotación es un eje fijo en S (Q se toma sobre el eje fijo), interaccionará con el sólido comunicándole esos momentos de reacción.

Sin embargo, si el sólido presenta suficientes simetrías en el sistema S_L como para anular los productos de inercia de la ec. [8.43], entonces el momento cinético se expresa como

$$\vec{L}_Q = I_{Qz}\omega\vec{k}$$

y las ecuaciones [8.43] se reducen a

$$\begin{aligned}
M_{Qx_L} + M_{Qx_L}^I &= 0 \\
M_{Qy_L} + M_{Qy_L}^I &= 0 \\
M_{Qz} + M_{Qz}^I &= I_{Qz}\alpha
\end{aligned}
\tag{8.44}$$

que serán las que utilicemos en la mayor parte de las aplicaciones prácticas. En este supuesto no son siempre necesarios los momentos aplicados en x e y para que se mantenga el movimiento plano, pudiendo ser cero si se trata de un sistema inercial. La rotación del sólido viene dinámicamente determinada solo por el momento en z .

8.13. Ecuaciones de la dinámica del movimiento plano

Para resolver un problema de movimiento plano del sólido rígido es necesario conocer todas las fuerzas y pares que actúan sobre él a lo largo del movimiento. Para ello, como se dijo, es muy útil representar el diagrama del sólido libre. El sistema de fuerzas aplicadas se reduce a la resultante $\vec{F}$, invariante, y al momento resultante respecto a un punto Q , $\vec{M}_Q$, que cambia al cambiar de punto, en cada instante de tiempo. En la Fig. 8.26 se representa la sección central de un sólido en movimiento plano y la reducción del sistema de fuerzas que actúan sobre él. El momento resultante respecto a Q , $\vec{M}_Q$, en el caso indicado es perpendicular a la sección central.

Para obtener la solución completa al movimiento del sólido es necesario conocer, además, las condiciones iniciales, dadas en componentes del sistema S por

$$\vec{r}_{C_0} = \vec{r}_C(t=0) = x_{C_0}\vec{i} + y_{C_0}\vec{j}; \quad \vec{v}_{C_0} = \vec{v}_C(t=0) = v_{Cx_0}\vec{i} + v_{Cy_0}\vec{j} \tag{8.45}$$

para el movimiento del centro de masas (aunque también pueden estar referidas a otro punto cualquiera del sólido y usar el campo de velocidades (ec. [7.2]) para obtener los valores en el centro de masas); y por

$$\vec{\omega}_0 = \vec{\omega}(t=0) = \omega_0\vec{k} = \omega_0\vec{k}_L \tag{8.46}$$

para la velocidad angular de rotación.

A partir de estos datos podemos resolver, en principio, las ecuaciones dinámicas del movimiento plano. La resultante de fuerzas aplicadas y de inercia determina el movimiento del centro de masas a través de la ec. [8.15] que en este caso toma la forma (en componentes del sistema S):

$$\begin{aligned}
F_x + F_{Ix} &= Ma_{Cx} \\
F_y + F_{Iy} &= Ma_{Cy}
\end{aligned}
\tag{8.47}$$

y los momentos dinámicos aplicados y de inercia respecto al punto Q determinan el movimiento de rotación (en componentes del sistema S_L):

$$\begin{aligned}
 M_{Qx_L} + M_{Qx_L}^I &= -P_{Qx_Lz}\alpha + P_{Qy_Lz}\omega^2 \\
 M_{Qy_L} + M_{Qy_L}^I &= -P_{Qy_Lz}\alpha - P_{Qx_Lz}\omega^2 \\
 M_{Qz} + M_{Qz}^I &= I_{Qz}\alpha
 \end{aligned}
 \tag{8.48}$$

Las tres ecuaciones están referidas a unos ejes $QX_LY_LZ_L$ correspondientes al sistema S_L , con origen en un punto Q ligado al sólido. En particular siempre se puede elegir el centro de masas $Q=C$ o un punto fijo. Obsérvese que el eje z coincide para el sistema S y S_L .

El problema que se presenta al intentar resolver las ecuaciones anteriores es que necesitamos conocer la posición relativa del sólido, y por tanto, del sistema de referencia $QX_LY_LZ_L$, respecto del sistema S para así poder determinar cuáles son las proyecciones de los momentos, excepto para las componentes en el eje z . Existen, no obstante, dos casos simples que son los que consideraremos para aplicaciones prácticas:

a) Cuando existe un eje de rotación real fijo respecto de un sistema de referencia inercial S . Nos encontramos entonces en el caso de movimiento de un sólido con un eje fijo, ya estudiado en la sección 8.11. Las componentes M_{Qx_L} y M_{Qy_L} que aparecen en las dos primeras ecs. [8.48] las proporciona la interacción del sólido con el eje mediante pares de reacción, lo que permite que el movimiento plano continúe.

b) Cuando el sólido tiene la simetría necesaria para que $P_{x_Cz} = P_{y_Cz} = 0$ en el sistema S_L . En este supuesto, solo es necesario considerar la última ecuación [8.48] y el movimiento plano puede continuar indefinidamente como en el caso anterior.

Las ecuaciones diferenciales [8.47] y [8.48], junto con las condiciones iniciales [8.45] y [8.46], permiten determinar la posición y velocidad del centro de masas y la velocidad angular del sólido para todo instante de tiempo en los dos casos a) y b) considerados. Mediante las expresiones de los campos de velocidades y aceleraciones para distintos puntos del sólido (ecs. [7.2] y [7.5]) se puede obtener, a partir de estas soluciones, la velocidad y la aceleración de cualquier punto del sólido en cada instante.

En los casos en los que las ligaduras que condicionan el movimiento del sólido se traduzcan en fuerzas y momentos de reacción aplicados sobre él, éstos se introducen como incógnitas en las ecuaciones [8.47] y [8.48]. En estas condiciones puede ser necesario utilizar además las expresiones del campo de velocidades y de aceleraciones incluyendo en ellas cinemáticamente tales ligaduras con objeto de tener más ecuaciones para poder eliminar dichas incógnitas, es decir, las fuerzas y momentos de reacción.

8.14. Trabajo y energía mecánica para un sólido rígido

8.14.1. Energía cinética de un sólido rígido

En este apartado vamos a calcular la energía cinética de un sólido rígido en movimiento general en un sistema S que puede ser inercial o no. Para ello haremos uso del sistema ligado

al sólido S_L con origen en un punto A de vector de posición $\vec{r}_A$ (Fig. 8.27). Consideremos un diferencial de masa dm genérico del sólido de vector de posición $\vec{r}'$ en S ($\vec{r}' = \vec{r}_L$ en S_L) y velocidad $\vec{v}$. Usando el campo de velocidades podemos expresar la velocidad de este diferencial en función de la velocidad del punto A , $\vec{v}_A$, y la velocidad angular $\vec{\omega}$ del sólido, se tiene:

$$\vec{v} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_A) = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}' \quad (8.49)$$

Utilizando la fórmula anterior y haciendo uso de las propiedades del producto escalar y del centro de masas, podemos obtener la energía cinética del sólido

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} \int_M dm v^2 = \frac{1}{2} \int_M dm (\vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}') \cdot (\vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}') = \\ &= \left(\int_M dm \right) \frac{v_A^2}{2} + \vec{v}_A \cdot (\vec{\omega} \times (\int_M dm \vec{r}')) + \int_M \frac{dm}{2} |\vec{\omega} \times \vec{r}'|^2 = \\ &= \frac{1}{2} M v_A^2 + M \vec{v}_A \cdot (\vec{\omega} \times \overrightarrow{AC}) + \int_M \frac{dm}{2} |\vec{\omega} \times \vec{r}'|^2 \end{aligned}$$

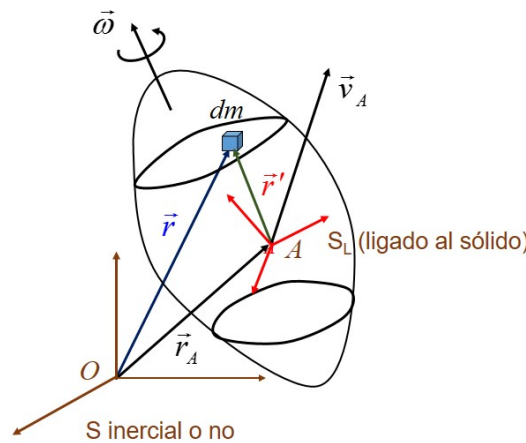


Figura 8.27: Posición de un diferencial de masa dm en el sistema S y en el sistema S_L ligado al sólido.

Sea $\vec{D}$ el vector: $\vec{D} = \vec{\omega} \times \vec{r}' = \vec{v} - \vec{v}_A$, usando la propiedad cíclica del producto mixto, ec. [1.11], se tiene:

$$|\vec{\omega} \times \vec{r}'|^2 = \vec{D} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}') = \vec{\omega} \cdot (\vec{r}' \times \vec{D}) = \vec{\omega} \cdot (\vec{r}' \times (\vec{v} - \vec{v}_A))$$

Con lo cual la energía cinética del sólido resulta ser:

$$E_c = \frac{1}{2} M v_A^2 + M \vec{v}_A \cdot (\vec{\omega} \times \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \left(\int_M dm (\vec{r}' - \vec{r}_A) \times (\vec{v} - \vec{v}_A) \right) \quad (8.50)$$

Para simplificar el cálculo de la expresión anterior vamos a considerar dos situaciones únicamente, la de un punto en reposo $\vec{v}_A = 0$ y la del centro de masas $A=C$. La energía cinética en ambas situaciones se obtendría a partir de:

$$E_c = \frac{1}{2} M v_A^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \left(\int_M dm (\vec{r} - \vec{r}_A) \times (\vec{v} - \vec{v}_A) \right) \quad (8.51)$$

En el caso de un punto en reposo mediante:

$$E_c = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \left(\int_M dm (\vec{r} - \vec{r}_A) \times \vec{v} \right) = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}_A \quad (8.52)$$

En el caso del centro de masas por:

$$E_c = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \left(\int_M dm (\vec{r} - \vec{r}_C) \times (\vec{v} - \vec{v}_C) \right) = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \left(\int_M dm (\vec{r} - \vec{r}_C) \times \vec{v} \right) \quad (8.53)$$

donde se ha tenido en cuenta que: $\int_M dm (\vec{r} - \vec{r}_C) \times \vec{v}_C = 0$ pues $\int_M dm \vec{r} = M \vec{r}_C$. Con lo cual queda:

$$E_c = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}_C \quad (8.54)$$

que es el llamado teorema de König.

En ambos casos se puede escribir que la energía cinética se obtiene a partir del momento cinético mediante la expresión

$$E_c = \frac{1}{2} M v_A^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}_A \quad (8.55)$$

8.14.2. Teorema de la energía cinética para el centro de masas

De manera idéntica a como se tenía en un sistema de partículas se verifica el teorema de la energía cinética para el centro de masas. Consideremos un sólido sometido a una fuerza resultante $\vec{F}$ y a una fuerza de inercia resultante $\vec{F}_I$ (Fig. 8.28), se tiene que la velocidad del centro de masas v_C del sólido verifica el teorema de la energía cinética para el centro de masas (ec. [5.64]):

$$W_{CM} + W_{CM}^I = \int_{\vec{r}_{C1}}^{\vec{r}_{C2}} (\vec{F} + \vec{F}_I) \cdot d\vec{r}_C = \frac{1}{2} M v_C^2(2) - \frac{1}{2} M v_C^2(1) \quad (8.56)$$

Es decir, el trabajo de la resultante de fuerzas aplicadas y de inercia cambia la energía cinética de una partícula puntual con la masa del sólido situada en su centro de masas.

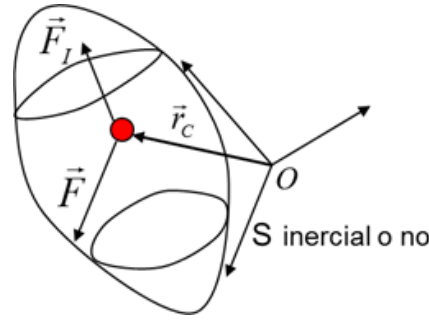


Figura 8.28: Resultante de fuerzas aplicadas y de inercia actuando sobre el centro de masas.

8.14.3. Teorema de la energía cinética

En este apartado vamos a deducir el teorema de la energía cinética de un sólido rígido en un sistema S (que puede ser inercial o no) usando un punto A del sólido que, o bien es fijo o bien es el centro de masas del sólido. Al final del apartado veremos que esta limitación no resta generalidad a la aplicación del teorema. El sólido rígido tiene una velocidad angular $\vec{\omega}$ y un momento cinético $\vec{L}_A$ en dicho punto. Derivando la ec. [8.55] válida para puntos en reposo y el centro de masas, se tiene:

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} M v_A^2 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \right)_S \cdot \vec{L}_A + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \left(\frac{d\vec{L}_A}{dt} \right)_S \quad (8.57)$$

Obsérvese que un punto fijo es un punto continuamente en reposo, por tanto, para dicho punto: $\frac{1}{2} M \frac{dv_A^2}{dt} = 0$, cosa que puede no ser cierta para un punto en reposo. Para simplificar la expresión anterior usaremos nuevamente el sistema S_L ligado al sólido:

$$\vec{\omega} \cdot \left(\frac{d\vec{L}_A}{dt} \right)_S = \vec{\omega} \cdot \left[\left(\frac{d\vec{L}_A}{dt} \right)_{S_L} + \vec{\omega} \times \vec{L}_A \right] = \vec{\omega} \cdot \left(\frac{d\vec{L}_A}{dt} \right)_{S_L} \quad (8.58)$$

Vamos a representar las componentes del tensor de inercia (calculado en el punto A en el sistema S_L) de la forma $\bar{I}_{Aij}^L$ y a desarrollar el término previo teniendo en cuenta el valor del momento cinético, ecs. [8.26] y [8.37], ($\vec{L}_A = \vec{L}'_A = \bar{I}_A^L \cdot \vec{\omega}$):

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \cdot \left(\frac{d\vec{L}_A}{dt} \right)_{S_L} &= \sum_i \omega_i \left(\frac{dL_{A,i}}{dt} \right)_{S_L} = \sum_i \omega_i \sum_j \bar{I}_{Aij}^L \left(\frac{d\omega_j}{dt} \right)_{S_L} = \sum_i \sum_j \omega_i \bar{I}_{Aij}^L \left(\frac{d\omega_j}{dt} \right)_{S_L} = \\ &= \sum_j \left(\frac{d\omega_j}{dt} \right)_{S_L} \sum_i \bar{I}_{Aij}^L \omega_i = \sum_j \left(\frac{d\omega_j}{dt} \right)_{S_L} \sum_i \bar{I}_{Aij}^L \omega_i = \sum_j \left(\frac{d\omega_j}{dt} \right)_{S_L} L_{A,j} = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \right)_{S_L} \cdot \vec{L}_A \end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta que el tensor es simétrico y sus términos constantes en el tiempo. Llegamos pues a la siguiente expresión:

$$\vec{\omega} \cdot \left(\frac{d\vec{L}_A}{dt} \right)_S = \vec{\omega} \cdot \left(\frac{d\vec{L}_A}{dt} \right)_{S_L} = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \right)_{S_L} \cdot \vec{L}_A = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \right)_S \cdot \vec{L}_A \quad (8.59)$$

Sustituyendo queda:

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} M v_A^2 \right) + \vec{\omega} \cdot \left(\frac{d\vec{L}_A}{dt} \right)_S \quad (8.60)$$

Aplicando el teorema del momento cinético en un punto fijo o el centro de masas (ec. [8.35]) se tiene:

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} M v_A^2 \right) + \vec{\omega} \cdot (\vec{M}_A + \vec{M}_A^I)$$

Integrando queda:

$$\Delta E_c = \Delta \left(\frac{1}{2} M v_A^2 \right) + \int_{t_1}^{t_2} \vec{\omega} \cdot (\vec{M}_A + \vec{M}_A^I) dt \quad (8.61)$$

Vamos a considerar separadamente los dos supuestos iniciales. Para un punto fijo A (es decir, continuamente en reposo) tendríamos:

$$\Delta E_c = \int_{t_1}^{t_2} \vec{\omega} \cdot (\vec{M}_A + \vec{M}_A^I) dt = W + W_I \quad (8.62)$$

Es decir, los cambios en la energía cinética se deben al trabajo del momento en el punto fijo de las fuerzas aplicadas y de inercia.

Para el centro de masas, usando el teorema de la energía cinética en el centro de masas (ec. [8.56]), quedaría:

$$\begin{aligned} \Delta E_c &= \int_{\vec{r}_{C1}}^{\vec{r}_{C2}} (\vec{F} + \vec{F}_I) \cdot d\vec{r}_C + \int_{t_1}^{t_2} \vec{\omega} \cdot (\vec{M}_C + \vec{M}_C^I) dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} (\vec{F} + \vec{F}_I) \cdot \vec{v}_C dt + \int_{t_1}^{t_2} \vec{\omega} \cdot (\vec{M}_C + \vec{M}_C^I) dt = W + W_I \end{aligned} \quad (8.63)$$

Es decir, los cambios en la energía cinética se deben al trabajo del momento en el centro de masas de fuerzas aplicadas y de inercia más el trabajo de la resultante de las mismas fuerzas sobre dicho punto.

En ciertas ocasiones es más fácil calcular el trabajo en un punto P distinto a los anteriores. En esos casos usamos una fórmula equivalente obtenida mediante el teorema de cambio de polo y el campo de velocidades del sólido. Consideremos un sistema inercial, a sabiendas que el desarrollo para uno no inercial es análogo con solo incluir las fuerzas y momentos de inercia, a partir de la expresión [8.63] se tiene:

$$\Delta E_c = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot (\vec{v}_P + \vec{\omega} \times \vec{PC}) dt + \int_{t_a}^{t_b} \vec{\omega} \cdot (\vec{M}_P + \vec{F} \times \vec{PC}) dt$$

Simplificando queda:

$$\Delta E_c = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v}_P dt + \int_{t_1}^{t_2} \vec{\omega} \cdot \vec{M}_P dt + \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\vec{F} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{PC}) + \vec{\omega} \cdot (\vec{F} \times \vec{PC})}_{\vec{0}} dt$$

Por tanto, en su forma general el teorema de la energía cinética en un punto P genérico tendría una forma equivalente a los dos casos anteriores:

$$\Delta E_c = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v}_P dt + \int_{t_1}^{t_2} \vec{\omega} \cdot \vec{M}_P dt = W \quad (8.64)$$

Incluso el cálculo del trabajo se puede hacer cambiando cada dt de punto P de referencia, siempre y cuando se conozcan todos los parámetros de la ecuación anterior. Por ejemplo, en rodadura se puede calcular el trabajo a partir del punto de apoyo del sólido que es diferente en cada instante.

También cabe preguntarse si esta expresión es equivalente al teorema de la energía cinética (ec. [5.47]) que se tenía en un sistema de partículas. Utilizaremos nuevamente un sistema inercial para demostrarlo. Partiendo de la ecuación:

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} M v_C^2 \right) + \vec{\omega} \cdot \vec{M}_C \quad (8.65)$$

Utilizando la definición de momento, siendo $\vec{r}'$ el vector de posición con origen en el centro de masas de un diferencial de masa sometido a un diferencial de fuerza $d\vec{F}$, se tiene:

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} M v_C^2 \right) + \vec{\omega} \cdot \int_M \vec{r}' \times d\vec{F}$$

Aplicando la propiedad cíclica del producto mixto (ec. [2.11]) y el campo de velocidades (ec. [8.49]) tenemos:

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} M v_C^2 \right) + \int_M d\vec{F} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}') = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} M v_C^2 \right) + \int_M d\vec{F} \cdot (\vec{v} - \vec{v}_C)$$

Usando el teorema de la energía cinética en el centro de masas queda:

$$\Delta E_c = \int_{\vec{r}_{C1}}^{\vec{r}_{C2}} \vec{F} \cdot d\vec{r}_C + \int \int_M d\vec{F} \cdot (d\vec{r} - d\vec{r}_C)$$

Y simplificando llegamos finalmente a la expresión:

$$\Delta E_c = \int_M \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{F} \cdot d\vec{r} = W \quad (8.66)$$

Esta ecuación es análoga al trabajo en un sistema de partículas [5.45], salvo por el hecho de que en el sólido el sistema de fuerzas es distribuido:

$$W = \sum_{i=1}^N \int_{\vec{r}_{i1}}^{\vec{r}_{i2}} \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i \quad (8.67)$$

Finalmente, indicaremos que el teorema de conservación de la energía cinética de un sólido establece que si no se realiza trabajo sobre éste, su energía cinética se conserva. Esto es, si $W + W_I = 0$, la energía cinética permanece constante.

8.14.4. Energía potencial de un sólido rígido en el campo de gravedad terrestre

Para toda fuerza conservativa que actúe sobre un sólido rígido, el trabajo realizado por ella se puede expresar como la variación de la energía potencial asociada, cambiada de signo. En el caso habitual de que el sólido se mueva en las proximidades de la superficie de la tierra se encontrará sometido a la acción del campo de gravedad terrestre $\vec{g}$, que consideraremos uniforme en general y que se traduce en una resultante $M\vec{g}$, el peso, aplicada en el centro de gravedad. Como se vio en la sección 8.7.2, se puede considerar que el centro de gravedad y el centro de masas C coinciden para la gran mayoría de las aplicaciones prácticas y nos referiremos en lo sucesivo al centro de masas únicamente.

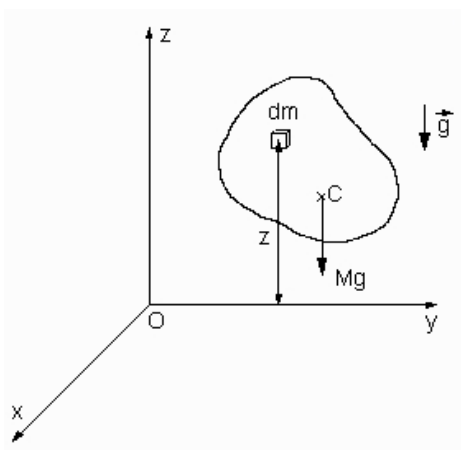


Figura 8.29: Sólido rígido en el campo gravitatorio.

La energía potencial asociada al campo uniforme $\vec{g}$ para un sólido rígido es fácil de calcular. Sea un elemento diferencial de masa dm (Fig. 8.29). Su energía potencial gravitatoria viene dada por

$$dE_p = gzdm$$

si adoptamos como nivel de referencia de energía potencial nula el plano horizontal $z=0$ de un cierto sistema de ejes $OXYZ$. La energía potencial gravitatoria total del sólido con esta referencia se obtiene por integración

$$E_p = \int_M dE_p = g \int_M zdm$$

que, recordando la definición de centro de masas, se puede escribir como

$$E_p = Mgz_C \quad (8.68)$$

donde z_C determina la posición del centro de masas. Por tanto, la energía potencial gravitatoria de un sólido rígido es igual a la que tendría toda la masa M del sólido si estuviera concentrada en el centro de masas.

8.14.5. Teorema de la energía mecánica para un sólido rígido

Sea un sólido rígido cuyo movimiento está referido a un sistema S . El sistema de fuerzas aplicado sobre él en un intervalo de tiempo entre t_1 y t_2 equivale en un punto P cualquiera a la resultante $\vec{F}$ y al momento resultante $\vec{M}_P$. En el caso general actuarán sobre el sólido tanto fuerzas de tipo conservativo como de tipo disipativo, de forma que

$$\vec{F} = \vec{F}_C + \vec{F}_D \quad \vec{M}_P = \vec{M}_{PC} + \vec{M}_{PD}$$

y el trabajo total, en el intervalo considerado, se puede separar en tres términos, conservativo, disipativo y de inercia:

$$W = W_C + W_D + W_I$$

siendo

$$W_C = \int_1^2 \vec{F}_C \cdot d\vec{r}_P + \int_1^2 \vec{M}_{PC} \cdot \vec{\omega} dt = E_p(1) - E_p(2)$$

donde E_p representa la energía potencial total del sólido rígido, suma de las energías potenciales de las distintas fuerzas conservativas a que está sometido.

Teniendo en cuenta la expresión anterior y el teorema de la energía cinética (ec. [8.64]) se obtiene

$$W_D + W_I = (E_c(2) + E_p(2)) - (E_c(1) + E_p(1))$$

siendo $E = E_c + E_p$ la energía mecánica del sólido. Es decir

$$W_D + W_I = E(2) - E(1) \quad (8.69)$$

que es la expresión del teorema de la energía mecánica para un sistema de partículas, aplicable, evidentemente, para el caso particular de un sólido rígido.

Si el trabajo debido a fuerzas disipativas y de inercia es nulo ($W_D + W_I = 0$) se mantiene constante la energía mecánica del sólido.

8.14.6. Trabajo y energía cinética para un sólido rígido en movimiento plano

Trabajo de las fuerzas que actúan sobre el sólido

En el capítulo 4 se definió el trabajo realizado por una fuerza a lo largo de una trayectoria Γ como

$$W_F = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

lo que representa una definición completa para su aplicación a una partícula material, cuyo comportamiento dinámico está totalmente caracterizado por la resultante $\vec{F}$ de las fuerzas aplicadas sobre ella.

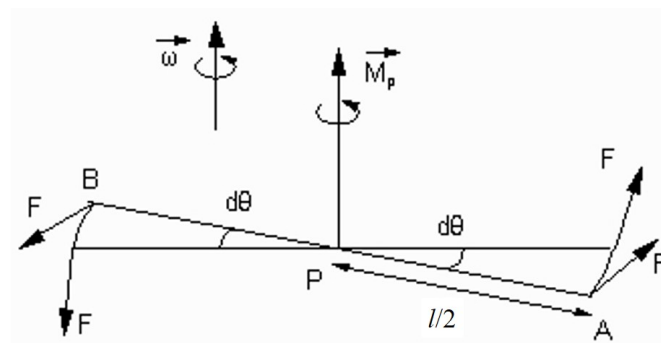


Figura 8.30: Trabajo de un par en el movimiento plano.

Sin embargo, en el caso de un sólido rígido, el comportamiento dinámico no depende solo de la resultante $\vec{F}$, sino también del momento resultante $\vec{M}_P$ respecto a un punto de referencia P . Para obtener una expresión completa del trabajo realizado por el sistema de fuerzas aplicadas al sólido necesitamos hallar la expresión del trabajo realizado por el momento resultante $\vec{M}_P$.

Como un momento dinámico equivale a un par de fuerzas, hallemos en primer lugar el trabajo infinitesimal realizado por un par de fuerzas cuyo momento es $\vec{M}_P$ (Fig. 8.30) cuando las dos fuerzas $\vec{F}$ y $-\vec{F}$ producen un giro del sólido de valor $d\theta$ y la distancia entre su punto de aplicación es l . El trabajo que se realiza es

$$\delta W_{M_P} = \frac{1}{2} F l d\theta + \frac{1}{2} F l d\theta = F l d\theta = M_P d\theta \quad (8.70)$$

que también se puede poner como

$$\delta W_{M_P} = M_P \frac{d\theta}{dt} dt = M_P \omega dt = \vec{M}_P \cdot \vec{\omega} dt \quad (8.71)$$

siempre que la velocidad angular $\vec{\omega}$ del sólido sea paralela a $\vec{M}_P$.

Si $\vec{M}_P$ y $\vec{\omega}$ son paralelos en todo instante, entonces el trabajo realizado por $\vec{M}_P$ en el intervalo finito entre t_1 y t_2 viene dado por

$$W_{M_P} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_P \cdot \vec{\omega} dt \quad (8.72)$$

En el caso de que $\vec{M}_P$ y $\vec{\omega}$ no sean paralelos (Fig. 8.31) siempre podemos descomponer $\vec{M}_P$ en dos términos

$$\vec{M}_P = \vec{M}_{P\parallel} + \vec{M}_{P\perp}$$

uno paralelo a $\vec{\omega}$ y otro perpendicular. $\vec{M}_{P\perp}$ no realiza trabajo, pues equivale a un par de fuerzas cuyos puntos de aplicación no se desplazan por efecto de la rotación $\vec{\omega}$. Resulta

$$\delta W_{M_P} = \vec{M}_{P\parallel} \cdot \vec{\omega} dt = \vec{M}_P \cdot \vec{\omega} dt$$

luego en el caso general la expresión del trabajo en un intervalo finito entre t_1 y t_2 también se puede poner en la forma dada por la ec. [8.71].

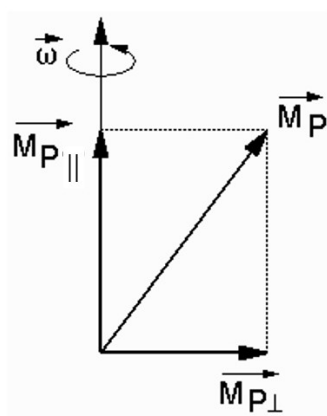


Figura 8.31: Descomposición del momento en dos vectores: uno paralelo y otro perpendicular a la velocidad angular.

Para obtener el trabajo total de las fuerzas aplicadas sobre el sólido se debe elegir un punto P de referencia cuya trayectoria respecto a un sistema de referencia inercial S venga dada por Γ_P y respecto al que el sistema de fuerzas se reduzca a la resultante $\vec{F}$ y al momento resultante $\vec{M}_P$. El trabajo total en un desplazamiento finito del sólido entre dos instantes t_1 y t_2 es

$$W = \int_{\Gamma_P} \vec{F} \cdot d\vec{r}_P + \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_P \cdot \vec{\omega} dt \quad (8.73)$$

Considerando las fuerzas de inercia si estuviésemos en un sistema no inercial la expresión sería:

$$W + W_I = \int_{1\Gamma}^2 (\vec{F} + \vec{F}_I) \cdot d\vec{r}_P + \int_{t_1}^{t_2} (\vec{M}_P + \vec{M}_P^I) \cdot \vec{\omega} dt$$

Si cambiamos de punto de referencia el trabajo toma el mismo valor, de ahí que en la notación de W no se haga referencia al punto. Si el punto de referencia es el centro de masas, la ecuación anterior se expresa

$$W + W_I = \int_{1\Gamma}^2 (\vec{F} + \vec{F}_I) \cdot d\vec{r}_C + \int_{t_1}^{t_2} (\vec{M}_C + \vec{M}_C^I) \cdot \vec{\omega} dt$$

y la potencia total desarrollada por el sistema de fuerzas que actúan sobre el sólido vendría dada por

$$P = \frac{\delta(W + W_I)}{dt}$$

Energía cinética de un sólido rígido en movimiento plano

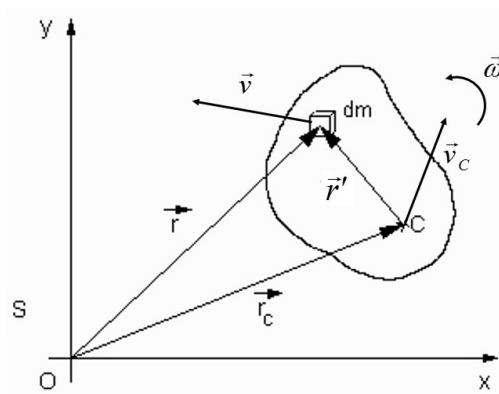


Figura 8.32: Variables para deducir el teorema de la energía cinética en el movimiento plano.

Dado un sólido rígido en movimiento plano, respecto a un sistema de referencia S , la energía cinética de una partícula dm viene dada por (Fig. 8.32)

$$dE_c = \frac{1}{2} v^2 dm$$

y la energía cinética total es

$$E_c = \frac{1}{2} \int_M v^2 dm \quad (8.74)$$

Seleccionando como punto de referencia el centro de masas C del sólido, la velocidad del dm se puede poner como

$$\vec{v} = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

siendo $\vec{v}_C$ la velocidad de C en S , $\vec{\omega}$ la velocidad angular instantánea de rotación del sólido ($\vec{\omega} = \omega \vec{k}$ en el movimiento plano y según los ejes elegidos) y $\vec{r}'$ el vector de posición relativa del dm respecto a C .

Multiplicando escalarmente la expresión anterior por sí misma, resulta

$$v^2 = v_C^2 + (\vec{\omega} \times \vec{r}')^2 + 2(\vec{v}_C \times \vec{\omega}) \cdot \vec{r}'$$

y sustituyéndola en la ec. [8.74] se obtiene

$$E_c = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} \int_M (\vec{\omega} \times \vec{r}')^2 dm + \int_M (\vec{v}_C \times \vec{\omega}) \cdot \vec{r}' dm$$

El último término de esta expresión es nulo ya que aparece en él la posición $\vec{r}'_C$ del centro de masas relativa al sistema centro de masas, es decir

$$\vec{r}'_C = \frac{1}{M} \int_M \vec{r}' dm = 0$$

evidentemente.

Teniendo en cuenta que $(\vec{\omega} \times \vec{r}')^2$ es un escalar que vale lo mismo en S y en el sistema ligado al sólido S_L , podemos calcular su valor en el sistema S_L en el que los vectores $\vec{r}'$ y $\vec{\omega}$ se representan por $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$ y $\vec{r}' = \vec{r}_L = x_L \vec{i}_L + y_L \vec{j}_L + z_L \vec{k}$ con lo que

$$(\vec{\omega} \times \vec{r}')^2 = (-\omega y_L \vec{i}_L + \omega x_L \vec{j}_L)^2 = \omega^2 (x_L^2 + y_L^2)$$

y resulta

$$E_c = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} \omega^2 \int_M (x_L^2 + y_L^2) dm$$

que, recordando la definición de momento de inercia respecto a un eje, equivale a

$$E_c = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} I_{Cz} \omega^2 \quad (8.75)$$

La ecuación anterior no es sino la expresión del teorema de König adaptada al caso de un sólido rígido en movimiento plano. El primer término del segundo miembro representa la energía cinética de traslación del sólido concentrada toda la masa en el centro de masas; el segundo representa la energía cinética de rotación en torno a un eje perpendicular al plano del movimiento y que pasa por el centro de masas.

Si referimos el movimiento del sólido al centro instantáneo de rotación, I , la expresión [8.74] se reduce a

$$E_c = \frac{1}{2} I_{Iz} \omega^2 \quad (8.76)$$

siendo I_{Iz} el momento de inercia respecto de un eje perpendicular al plano del movimiento que pasa por I . Respecto a I el sólido solo tiene movimiento de rotación.

En el caso general de movimiento plano solo es posible expresar la energía cinética de un sólido rígido mediante ecuaciones tan simples como [8.75] y [8.76] refiriéndola a C o a I , respectivamente.

Como ya hemos visto, para un sólido rígido en movimiento general la energía cinética toma la forma (ec. [8.55]):

$$E_c = \frac{1}{2} M v_Q^2 + \frac{1}{2} \vec{L}_Q \cdot \vec{\omega}$$

siendo Q un punto en reposo o el centro de masas. Se propone como ejercicio comprobar que la expresión anterior se reduce a [8.75] y [8.76] para el caso del movimiento plano.

Teorema de la energía cinética para el movimiento plano de un sólido rígido

Considérese un sólido rígido en movimiento plano respecto a un sistema de referencia S y sean $\vec{F}$ y $\vec{M}_C$ la reducción al centro de masas del sistema de fuerzas aplicadas sobre el sólido. Para un intervalo de tiempo entre t_1 y t_2 durante el cual el centro de masas se desplaza a lo largo de una trayectoria Γ entre dos puntos 1 y 2, se verifica que el trabajo total de las fuerzas que actúan sobre el sólido es igual a

$$\begin{aligned} W + W_I &= \int_{1r}^2 (\vec{F} + \vec{F}_I) \cdot d\vec{r}_C + \int_{t_1}^{t_2} (\vec{M}_C + \vec{M}_C^I) \cdot \vec{\omega} dt = \int_{1r}^2 M \frac{d\vec{v}_C}{dt} \cdot d\vec{r}_C + \int_{t_1}^{t_2} I_{Cz} \vec{\omega} \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} dt = \\ &= M \int_1^2 \vec{v}_C \cdot d\vec{v}_C + I_{Cz} \int_1^2 \vec{\omega} \cdot d\vec{\omega} = M \int_1^2 d\left(\frac{1}{2} v_C^2\right) + I_{Cz} \int_1^2 d\left(\frac{1}{2} \omega^2\right) = \\ &= \left(\frac{1}{2} M v_{C2}^2 + \frac{1}{2} I_{Cz} \omega_2^2\right) - \left(\frac{1}{2} M v_{C1}^2 + \frac{1}{2} I_{Cz} \omega_1^2\right) \end{aligned}$$

es decir

$$W + W_I = E_c(2) - E_c(1) \quad (8.77)$$

lo que significa que el trabajo total de las fuerzas que actúan sobre el sólido (incluyendo las fuerzas de inercia $\vec{F}_I$ y los momentos de inercia $\vec{M}_C^I$ si el sistema es no inercial) en un intervalo es igual a la variación de su energía cinética en ese intervalo.

Para la demostración se ha utilizado la reducción del sistema de fuerzas al centro de masas del sólido, no obstante el trabajo así calculado vale lo mismo si se reduce el sistema a cualquier otro punto del sólido (ec. [8.64]).

8.15. Dinámica del movimiento plano de rodadura

Considérese que el sólido rígido se encuentra (en un sistema inercial S) sometido a un sistema de fuerzas como el indicado en la Fig. 8.33, donde además del peso Mg y de la reacción en el punto P de apoyo, actúan otras fuerzas que se reducen en el centro de masas a una fuerza horizontal (elegida así por simplicidad), F , y a un par de momento dinámico m_C cuya dirección es perpendicular al plano del movimiento. Consideraremos además que el plano OXY es un plano de simetría del sólido para que $P_{Q_{xz}}=P_{Q_{yz}}=0$ en S_L y sólo debemos usar la última ec. [8.48].

Para resolver el problema es necesario conocer además el estado cinemático del sólido en un cierto instante de tiempo o, lo que es lo mismo, las condiciones iniciales dadas por

$$v_{C0} = v_C(t=0) \quad \omega_0 = \omega(t=0)$$

lo que nos permite distinguir entre dos posibilidades que estudiaremos a continuación.

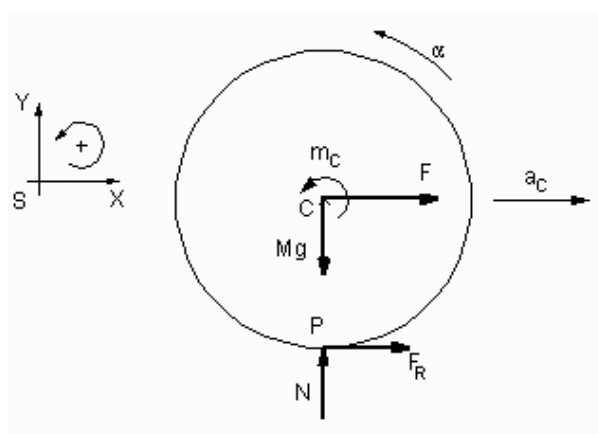


Figura 8.33: Sistema de fuerzas aplicadas a un sólido en rodadura pura en un sistema inercial.

8.15.1. Rodadura sin deslizamiento en el instante inicial

En este supuesto se ha de cumplir que

$$v_{C0} = -\omega_0 R$$

o, equivalentemente, que $v_P(t=0)=0$. La cuestión es si el sistema de fuerzas aplicadas sobre el sólido va a permitir que el estado inicial de rodadura sin deslizamiento se mantenga con continuidad para instantes posteriores o no. Para saberlo supongamos que sí que se va a mantener la rodadura pura y resolvamos el problema para este caso.

La condición dinámica básica en que se traduce que el apoyo P esté instantáneamente en reposo consiste en que la fuerza de rozamiento F_R es estática en tal caso y que las componentes N y F_R de la reacción en el apoyo que actúa sobre el sólido son dos incógnitas del problema, relacionadas entre sí mediante

$$|F_R| \leq \mu_e N \quad \text{es decir} \quad -\mu_e N \leq F_R \leq \mu_e N \quad (8.78)$$

donde μ_e representa el coeficiente de rozamiento estático entre el sólido y la superficie de apoyo.

Las ecuaciones dinámicas del movimiento del centro de masas respecto a un sistema inercial S vienen dadas por

$$F + F_R = Ma_C \quad (8.79)$$

$$N - Mg = 0 \quad (8.80)$$

en nuestro caso.

El teorema del momento cinético respecto al centro de masas nos proporciona una tercera ecuación

$$m_C + F_R R = I_C \alpha \quad (8.81)$$

siendo I_C el momento de inercia del sólido respecto a un eje perpendicular al plano del movimiento y que pasa por el centro de masas (se ha supuesto implícitamente que el sólido está referido a ejes principales de inercia o bien que existe un eje real capaz de proporcionar los pares de reacción M_x y M_y necesarios para que se mantenga el movimiento plano).

Dado que en rodadura sin deslizamiento la aceleración del punto de contacto P tiene una dirección que contiene al centro de masas (ec. [7.22]) se puede plantear, alternativamente, el teorema del momento cinético en el punto P en su forma conocida, ya que, $\overrightarrow{MPC} \times \vec{a}_P = 0$ (se deja como ejercicio para el lector probar esto para lo cual deberá usar las ecs. [8.35] y [8.36]), y resulta

$$m_C - F_R R = I_P \alpha \quad (8.82)$$

siendo ahora I_P el momento de inercia del sólido respecto a un eje perpendicular al plano del movimiento y que pasa por P .

Solo tres de las cuatro ecuaciones que van de la [8.79] hasta la [8.82] son independientes. En el caso general de que tanto F como m_C sean funciones de la posición, de la velocidad y del tiempo disponemos de un sistema de tres ecuaciones diferenciales acopladas que puede ser complicado de resolver.

En el caso más sencillo de que F y m_C sean constantes, entonces tanto la aceleración del centro de masas, a_C , como la aceleración angular de rotación, α , serán también constantes en las condiciones que estamos considerando. Además, en el supuesto de rodadura sin deslizamiento verifican la condición [7.21]

$$a_C = -\alpha R \quad (8.83)$$

válida en este caso, ya que al asumir que hay rodadura sin deslizamiento con continuidad se debe de cumplir que tanto v_C como ω sean derivables respecto al tiempo.

Las incógnitas del problema son a_C , α , F_R y N y disponemos de cuatro ecuaciones independientes, tres que podemos elegir entre la [8.79] y la [8.81] siendo la cuarta la [8.83], luego el problema está resuelto. Pero ¿es correcta la hipótesis de que se mantiene la rodadura sin deslizamiento? Para contestar a esta pregunta verificamos la condición [8.78] ahora que F_R y N son conocidas. Si se cumple que la suposición de rodadura sin deslizamiento con continuidad es correcta, el problema queda resuelto. En particular, si

$$|F_R| = \mu_e N$$

diremos que el sólido está en rodadura sin deslizamiento límite.

Sin embargo, si no se cumple [8.78], es decir, si

$$|F_R| > \mu_e N$$

entonces no existe suficiente fricción entre el sólido y la superficie para que el apoyo pueda continuar siendo estático (el valor anterior no está permitido para la fuerza de rozamiento estático). En este caso el sólido comienza a deslizarse y la fuerza de rozamiento en el apoyo pasa a ser de tipo dinámico. Este supuesto requiere replantear y resolver el problema con la certeza, ahora, de cuál va a ser la situación dinámica del movimiento, y lo analizaremos en la siguiente posibilidad (sec. 8.15.2).

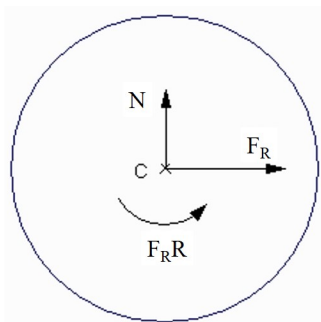


Figura 8.34: Reducción del sistema de fuerzas al centro de masas.

El movimiento de rodadura pura, fundamento de la rueda, proporciona una ventaja esencial respecto a cualquier situación similar de fricción o deslizamiento que consiste en que en rodadura la reacción en el apoyo no trabaja y no disipa energía mecánica. En efecto, la reacción se puede reducir al centro de masas C , que es el punto cuya trayectoria es más simple (rectilínea), mediante una fuerza con dos componentes, N y F_R , y un par de momento $F_R R$ (Fig. 8.34).

El trabajo elemental δW_R de la reacción en un desplazamiento dx_C del centro de masas, correspondiente a una variación infinitesimal del tiempo dt , viene dado por (ec. [8.64])

$$\delta W_R = F_R dx_C + F_R R \omega dt$$

pero como (ec. [7.19])

$$dx_C = v_C dt \quad \text{y} \quad v_C = -\omega R$$

en rodadura sin deslizamiento, resulta

$$\delta W_R = F_R R(\omega - \dot{\omega})dt = 0$$

La componente normal de la reacción no trabaja porque es perpendicular al desplazamiento y el trabajo de la fuerza de rozamiento se cancela con el trabajo del par que crea respecto al centro de masas, debido a la condición de rodadura pura. El trabajo total de la reacción es nulo en este caso.

8.15.2. Rodadura con deslizamiento desde el instante inicial

Supongamos que el diagrama de sólido libre es el mismo que el mostrado en la Fig. 8.33 salvo por lo que se refiere a la fuerza de rozamiento F_R y consideremos los siguientes casos

1) $v_P(t=0) > 0$ ($v_{C0} > -\omega_0 R$), o bien $v_P(t=0) = 0$ pero $\vec{a}_P = a_{Px}\vec{i} + \omega^2 R\vec{j}$ con $a_{Px} > 0$. El diagrama de sólido libre se muestra en la Fig. 8.35(a).

2) $v_P(t=0) < 0$ ($v_{C0} < -\omega_0 R$), o bien $v_P(t=0) = 0$ pero $\vec{a}_P = a_{Px}\vec{i} + \omega^2 R\vec{j}$ con $a_{Px} < 0$. El diagrama de sólido libre se muestra en la Fig. 8.35(b).

Como se ve, la fuerza de rozamiento dinámica se opone a la velocidad de fricción del punto de contacto P si no es nula y a la componente horizontal de la aceleración del punto P si su velocidad es nula.

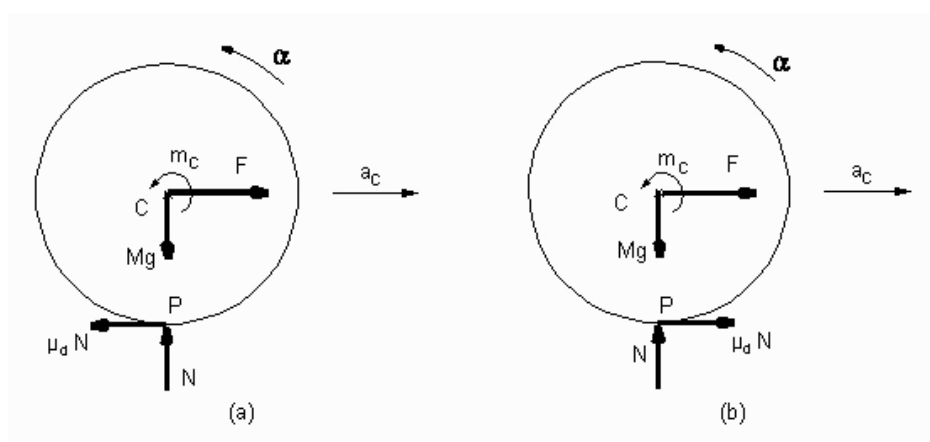


Figura 8.35: Sistema de fuerzas aplicadas a un sólido en movimiento de rodadura con deslizamiento.

En el caso de rodadura con deslizamiento, la aceleración del centro de masas y la aceleración angular están desacopladas y no se verifica ninguna ecuación como la [8.83]. Tampoco es posible tomar como referencia el punto de apoyo P para la aplicación del teorema del momento cinético. No obstante, el problema tiene solución, ya que la reacción en el apoyo plantea ahora una única incógnita, N . Las ecuaciones del movimiento son

$$\begin{aligned} F \mp \mu_d N &= M a_C \\ N - Mg &= 0 \\ m_C \pm \mu_d N R &= I_C \alpha \end{aligned} \quad (8.84)$$

correspondiendo el signo superior al caso (1) y el inferior al caso (2). Las tres ecuaciones independientes [8.84] permiten obtener las tres incógnitas a_C , α y N .

8.15.3. Resistencia a la rodadura

Si tiene un sólido de sección circular que se mueve rodando sin deslizar en contacto con una superficie horizontal, sometido únicamente a la acción de su peso y a la reacción en el apoyo, sin que actúen más fuerzas sobre él, el diagrama de fuerzas es el mostrado en la Fig. 8.36.

Aplicando el teorema del momento cinético respecto al punto P , se obtiene

$$\sum M_P = I_P \alpha \Rightarrow 0 = I_P \alpha$$

de donde se deduce que

$$\alpha = 0 \Rightarrow \omega = cte$$

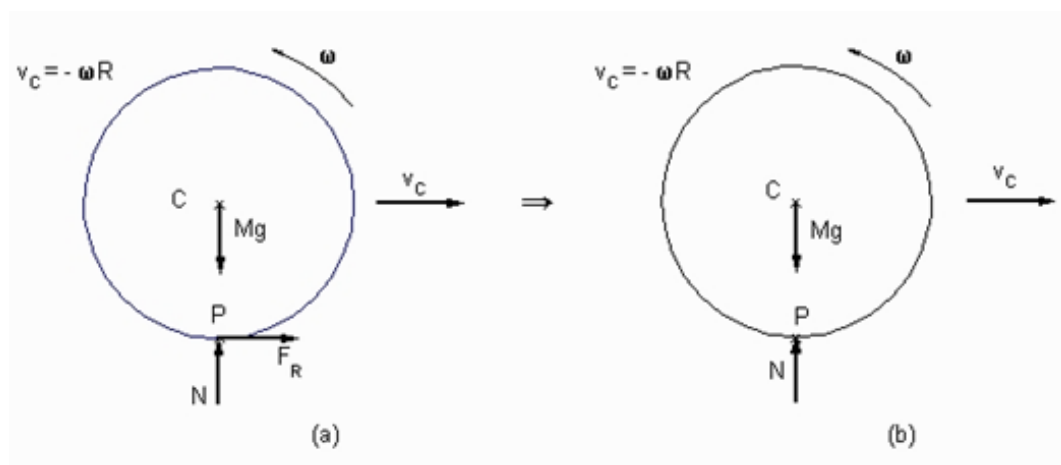


Figura 8.36: Sistema de fuerzas aplicada a un sólido en movimiento de rodadura pura.

El teorema del momento cinético respecto al centro de masas conduce a

$$\sum M_C = I_C \alpha \Rightarrow F_R R = 0 \Rightarrow F_R = 0$$

que indica que la fuerza de rozamiento estática en el apoyo P se acopla a valor cero (recuérdese que F_R ha de cumplir que $-\mu_e N \leq F_R \leq \mu_e N$, estando permitido, en consecuencia, el valor $F_R=0$). La ecuación del movimiento del centro de masas según la dirección horizontal, OX , conduce a

$$\sum F_x = M a_C \Rightarrow F_R = M a_C = 0$$

de donde $v_C = cte$.

En el supuesto considerado el sólido mantiene su movimiento de rodadura pura indefinidamente, con velocidad del centro de masas y velocidad angular de rotación constantes

y relacionadas por $v_C = -\omega R$. Si no existiese rozamiento el resultado sería el mismo, pero en este caso $F_R = 0$ vendría impuesto como condición desde el principio, mientras que si existe rozamiento, que es el caso considerado, el acoplamiento de F_R a valor nulo es una consecuencia de que el movimiento sea de rodadura pura.

A la misma conclusión se puede llegar a partir del teorema de la energía cinética. Como ya se indicó en el apartado 8.15.1, la reacción en el apoyo no trabaja en rodadura sin deslizamiento. La energía potencial gravitatoria tampoco cambia al ser la superficie horizontal, por tanto, tampoco realiza trabajo. En consecuencia, el trabajo total del sistema de fuerzas aplicadas sobre el sólido es nulo y su energía cinética constante. Expresando la energía cinética respecto al centro instantáneo de rotación se deduce que

$$E_c = \frac{1}{2} I_P \omega^2 = cte \quad \Rightarrow \quad \omega = cte$$

y por la condición de rodadura sin deslizamiento

$$v_C = -\omega R = cte \quad \Rightarrow \quad a_C = 0 \quad \Rightarrow \quad F_R = 0$$

que es el mismo resultado que habíamos obtenido por el procedimiento anterior.

Este resultado choca con la experiencia cotidiana, en la que los sólidos de sección circular que ruedan sin deslizar sobre una superficie horizontal acaban por detenerse, si bien pueden rodar a lo largo de una distancia apreciablemente grande. La razón de este desacuerdo se debe a que el modelo que hemos estudiado es teórico e ideal por dos motivos esenciales: se ha supuesto que la sección central del sólido es perfectamente circular y que la superficie de apoyo es perfectamente plana. Ello implica que la sección central apoya en un único punto P .

En la práctica no existen sólidos perfectamente rígidos ni de contorno exactamente circular, como tampoco hay superficies de apoyo estrictamente planas. En consecuencia el apoyo de la sección central no se produce solamente en un punto sino en una zona de contacto, debido a las deformaciones y a las irregularidades del sólido y de la superficie.

Como consecuencia, el punto P donde la reacción se reduce a una única fuerza, de componentes N y F_R , se desplaza y no está ya en la misma vertical que contiene al centro de masas.

En estas circunstancias es necesario aplicar una fuerza horizontal F , que por sencillez la consideraremos aplicada en la recta soporte que contiene al centro de masas (Fig. 8.37), para que el sólido mantenga su movimiento de rodadura sin deslizamiento con aceleración nula ($a_C = 0$ y $\alpha = 0$) y con velocidad constante ($v_C = -\omega R = cte$). Las ecuaciones dinámicas del movimiento son, en este caso,

$$\begin{aligned} \sum F_x &= Ma_C &\Rightarrow & F - F_R = 0 \\ \sum F_y &= 0 &\Rightarrow & N - Mg = 0 \\ \sum M_C &= I_C \alpha &\Rightarrow & N\delta - F_R R = I_C \alpha \end{aligned}$$

siendo δ la distancia entre la recta soporte de la componente normal de la reacción y la vertical que pasa por el centro de masas C , cuyo valor, a partir del sistema de ecuaciones anterior, viene

dato por

$$\delta = \frac{F_R}{Mg} R \quad (8.85)$$

y tiene dimensiones de longitud, como es inmediato comprobar.

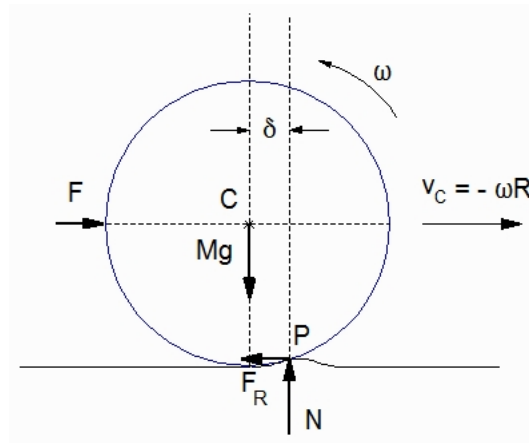


Figura 8.37: Sistema de fuerzas aplicadas a un sólido en movimiento de rodadura pura con resistencia a la rodadura.

A δ se le denomina **coeficiente de resistencia a la rodadura** y depende, esencialmente, de las propiedades elásticas de los materiales en contacto (sólido y superficie), siempre que se consideren grados de acabado uniformes y razonablemente buenos, tanto para la superficie exterior del sólido como para la superficie de apoyo.

El modelo explicado, que nos ha llevado a definir el coeficiente δ de resistencia a la rodadura, aproxima bien ciertas situaciones reales, tales como el movimiento de ruedas de tren sobre raíles, pero tiene fuertes limitaciones en otros casos, como, por ejemplo, en el movimiento de ruedas de automóvil sobre firme irregular o en mal estado.

8.15.4. Rotación de pivotamiento

Consideremos un sólido que puede girar en torno a un eje OZ perpendicular a la superficie de apoyo. Si el eje de rotación es fijo y contiene al centro de masas, entonces $a_C = 0$ y $v_C = 0$ (el centro de masas permanece fijo). Suponemos además que el plano CXY es un plano de simetría tal que $P_{CxLz} = P_{CyLz} = 0$ para que solo debamos usar la última ec. 8.48.

Si no existe rozamiento entre el cilindro y la superficie de apoyo y el eje de rotación es ideal, entonces el cilindro continuará moviéndose con la velocidad angular inicial ω_0 indefinidamente.

Si existe rozamiento, de coeficiente dinámico μ , aparece un par de resistencia al pivotamiento M . Para evaluarlo en este ejemplo, dividamos el cilindro en elementos cilíndricos infinitesimales de radio R y espesor dr , situados cada uno a una distancia r del eje de rotación (Fig. 8.38). El momento dinámico dM creado por dos elementos simétricos respecto al eje de rotación es:

$$dM = -2\mu r dN$$

siendo dN la reacción normal que actúa sobre el elemento cilíndrico infinitesimal

$$dN = gdm = g\rho dv = \pi g\rho R^2 dr$$

con densidad ρ constante, en el supuesto de que el sólido sea homogéneo.

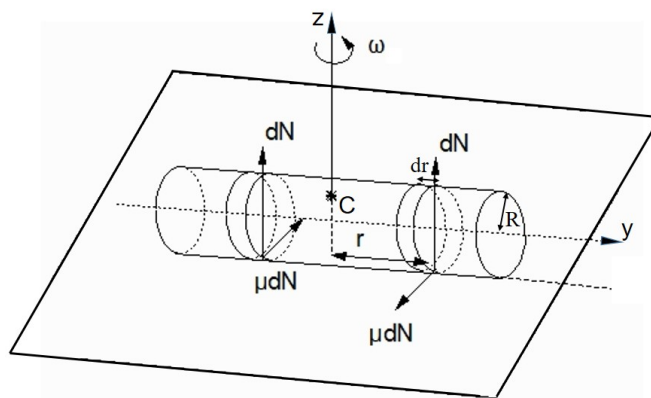


Figura 8.38: Resistencia al pivotamiento.

El momento dinámico total lo obtenemos por integración

$$M = \int dM = -2\pi\mu g\rho R^2 \int_0^{H/2} r dr = -\frac{1}{4}\pi\mu g\rho R^2 H^2$$

siendo H la longitud del cilindro, y como

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{M}{\pi R^2 H}$$

resulta

$$M = -\frac{1}{4}\mu mgH$$

El cilindro acaba deteniéndose al cabo de un tiempo

$$t = \frac{I_e \omega_0}{M}$$

siendo I_e el momento de inercia respecto al eje de giro.

El resultado se ha obtenido de forma relativamente sencilla, al producirse el apoyo entre cilindro y superficie a lo largo de la generatriz del cilindro y al haberlo considerado ideal (es decir, al tratar el apoyo como un segmento recto de longitud H).

En el caso de una esfera ideal que tenga una rotación de pivotamiento apoyando sobre una superficie horizontal perfectamente plana, el apoyo se produce solo en un punto y el movimiento de rotación no se detendrá nunca, aunque exista rozamiento. Sin embargo, para esferas y

superficies de apoyo reales existen deformaciones que hacen que el apoyo se produzca en una cierta área ΔS (Fig. 8.39), lo que origina que aparezca un par de resistencia al pivotamiento M , más difícil de calcular teóricamente en este caso, ya que no conocemos la forma de ΔS .

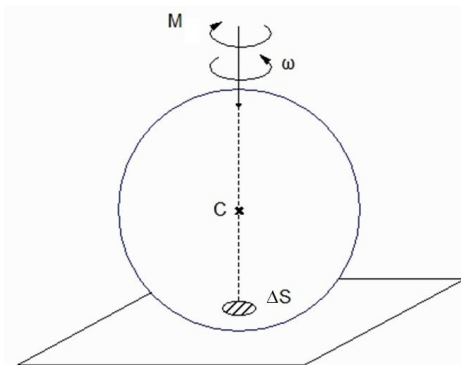


Figura 8.39: Resistencia al pivotamiento.

Se puede evaluar experimentalmente M de forma similar a como hacíamos para el coeficiente de resistencia a la rodadura. Para ello, apliquemos, respecto al eje de pivotamiento, el par M' necesario para que la esfera gire pivotando con velocidad angular constante ω .

En este caso su aceleración angular será nula ($\alpha=0$) y se cumple que

$$\sum M_{eje} = 0 \quad \Rightarrow \quad M' - M = 0 \quad \Rightarrow \quad M' = M$$

y el par de resistencia al pivotamiento será igual a M' .

El par de resistencia al pivotamiento para el caso considerado depende de las propiedades elásticas de la esfera y de la superficie de apoyo. Una vez determinado nos permite calcular el tiempo que tardará en detenerse la esfera si su velocidad angular inicial de pivotamiento es ω_0 y no actúa ningún par además de M , y resulta

$$t = \frac{I_e \omega_0}{M}$$

siendo I_e el momento de inercia de la esfera respecto al eje de pivotamiento.

8.16. Introducción a la estática

La estática se ocupa de estudiar las condiciones bajo las cuales los sistemas mecánicos están en equilibrio. En este capítulo nos referiremos únicamente a equilibrio de tipo mecánico, situación que indica que el estado de movimiento del sistema debe de permanecer invariable indefinidamente. Las condiciones de equilibrio podrán ser diferentes en algunos aspectos según el sistema que consideremos (partícula material, sistema de partículas o sólido rígido), si bien conviene recordar que los cuerpos reales tienen dimensiones y se amoldan en mayor medida al modelo de sólido rígido que al de partícula material. En consecuencia, es la estática del sólido rígido la que presenta un mayor interés para aplicaciones prácticas.

Decimos que una partícula material está en equilibrio respecto a un sistema de referencia inercial cuando la resultante de las fuerzas que actúan sobre ella es igual a cero ($\vec{F} = 0$). No se debe confundir el estado de equilibrio con el de reposo. Así, una partícula en equilibrio se comporta como una partícula libre y estará en movimiento rectilíneo uniforme respecto a un sistema inercial cualquiera, aunque siempre es posible elegir sistemas de referencia inerciales respecto a los cuales se encuentre en reposo.

Es posible generalizar la definición de equilibrio al caso de sistemas no inerciales. Diremos que una partícula material se encuentra en equilibrio dinámico respecto a un sistema de referencia no inercial S' cuando la suma de las fuerzas que actúan sobre ella y de las fuerzas de inercia se anula ($\vec{F} + \vec{F}' = 0$). Ello implica movimiento rectilíneo uniforme de la partícula relativo al sistema S' (o reposo relativo, como caso particular).

8.17. Condiciones de equilibrio para un sólido rígido

Diremos que un sólido rígido está en equilibrio respecto a un sistema de referencia S cuando la resultante de las fuerzas $\vec{F}_j$ aplicadas sobre él es nula y cuando el momento resultante respecto a un punto cualquiera Q (que es la suma de los momentos de las fuerzas aplicadas $\vec{F}_j$, respecto al punto Q , más los momentos $\vec{m}_k$ de los pares directamente aplicados) es también nulo, es decir:

$$\begin{aligned}\vec{F}_I + \vec{F} &= \vec{F}_I + \sum_j \vec{F}_j = 0 \\ \vec{M}_Q^I + \vec{M}_Q &= \vec{M}_Q^I + \sum_j \overrightarrow{QA_j} \times \vec{F}_j + \sum_k \vec{m}_k = 0\end{aligned}\tag{8.86}$$

siendo A_j un punto cualquiera de la recta soporte de $\vec{F}_j$. Si el sistema de referencia es no inercial en la formula anterior se deben incluir las fuerzas de inercia $\vec{F}_I$ y los momentos de inercia $\vec{M}_Q^I$.

Dado que el conjunto de las fuerzas aplicadas sobre un sólido rígido se comporta como un sistema de vectores deslizantes, las condiciones de equilibrio [8.86] implican que el sistema de fuerzas que actúan sobre el sólido debe equivaler a un sistema nulo.

El estado cinemático compatible con las condiciones de equilibrio para un sólido es más complejo de estudiar que el correspondiente a una partícula material. En particular, las condiciones [8.86] son compatibles con el sólido rígido en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme de traslación, pero existen otras posibilidades, que entran dentro del estudio del movimiento general de un sólido libre y que escapan a los fines y al nivel de este curso. Por ello, de ahora en adelante entenderemos que un sólido en equilibrio se encuentra en reposo respecto al sistema de referencia, y solo consideraremos el caso de sistemas inerciales.

8.18. El método general de la estática

Para resolver un problema de equilibrio del sólido rígido según el método general de la estática es necesario tener en cuenta tres etapas sucesivas.

1) Representar gráficamente el diagrama de sólido libre.

Consiste en dibujar sobre el contorno del sólido el conjunto de las fuerzas y pares que actúan sobre él. Es conveniente proceder con orden, representando gráficamente:

a) el peso, aplicado en el centro de gravedad (salvo en el supuesto teórico de sólido de masa nula o en el de sólido no sometido a ningún campo gravitatorio).

b) las fuerzas y pares directamente aplicados, que en general serán datos del problema.

c) las fuerzas y pares de reacción, que representan la interacción del sólido con otros sólidos o sistemas con los que se encuentra en contacto y que constituyen las ligaduras. Generalmente son incógnitas del problema.

En el diagrama de sólido libre no deben dibujarse los otros sistemas que constituyen las ligaduras indicadas. Su efecto sobre el sólido queda representado por las reacciones. Sí se puede representar alguna cota o algún ángulo, siempre que contribuyan a una mayor claridad. Los módulos de las distintas fuerzas y de los distintos momentos deben dibujarse de forma que guarden aproximadamente una misma escala respecto a sus valores estimados.

2) Plantear las ecuaciones de la estática.

Consiste en incluir todas las fuerzas y pares aplicados sobre el sólido y representados en el diagrama de sólido libre en las ecuaciones [8.86]. Para ello es conveniente definir un sistema de ejes $OXYZ$ y un sentido de rotaciones con claridad y de forma adecuada a la naturaleza de cada problema concreto. La segunda de las ecuaciones [8.86] solo puede ser utilizada una vez para un punto P de libre elección. Si intentamos emplearla de nuevo para un punto diferente P' no nos proporcionará ninguna nueva ecuación independiente.

3) Resolver las ecuaciones de la estática.

Las ecuaciones [8.86] equivalen, en el caso más general, a seis ecuaciones escalares para cada sólido rígido en equilibrio y no permiten, por lo tanto, resolver más de seis incógnitas escalares. Si el número de incógnitas es igual al número de ecuaciones independientes el problema está resuelto (salvo dificultades matemáticas), pero si es mayor no tiene solución por el método indicado y decimos que es un problema estáticamente indeterminado (existen otros métodos que permiten resolver total o parcialmente un gran número de problemas estáticamente indeterminados, pero no los consideraremos aquí).

Cuando el sólido tiene un apoyo con rozamiento es posible en ocasiones resolver la situación límite de equilibrio aunque el problema sea estáticamente indeterminado para otras posiciones diferentes, incluyendo la condición de fuerza de rozamiento límite que nos proporciona una nueva ecuación

$$|F_{RL}| = \mu_e N$$

donde F_{RL} es la componente tangencial y N la componente normal de la fuerza de reacción en el apoyo. Como datos del problema pueden existir incluso otros tipos de condiciones límite que nos proporcionen ecuaciones adicionales en ciertos casos, como, por ejemplo, la condición límite de vuelco para un sólido que apoye mediante una cierta área de contacto o la tensión máxima que puede soportar un hilo que sujeta al sólido.

8.19. Ligaduras: Reacciones en apoyos

Las ligaduras y apoyos comúnmente utilizados en mecánica aplicada se suelen modelizar y sustituir por fuerzas y pares de reacción de interpretación simple. En la Fig. 8.40 y en la Fig. 8.41 se representan algunos de los casos más habituales, correspondientes a los supuestos mono y bidimensional para el equilibrio de un sólido en un plano (fuerzas de reacción con dirección definida o contenidas en un plano definido y momentos perpendiculares a una dirección o al plano en cuestión). En la Fig. 8.42 y en la Fig. 8.43 se representan los casos habituales correspondientes a equilibrio del sólido en el espacio, es decir, en tres dimensiones.

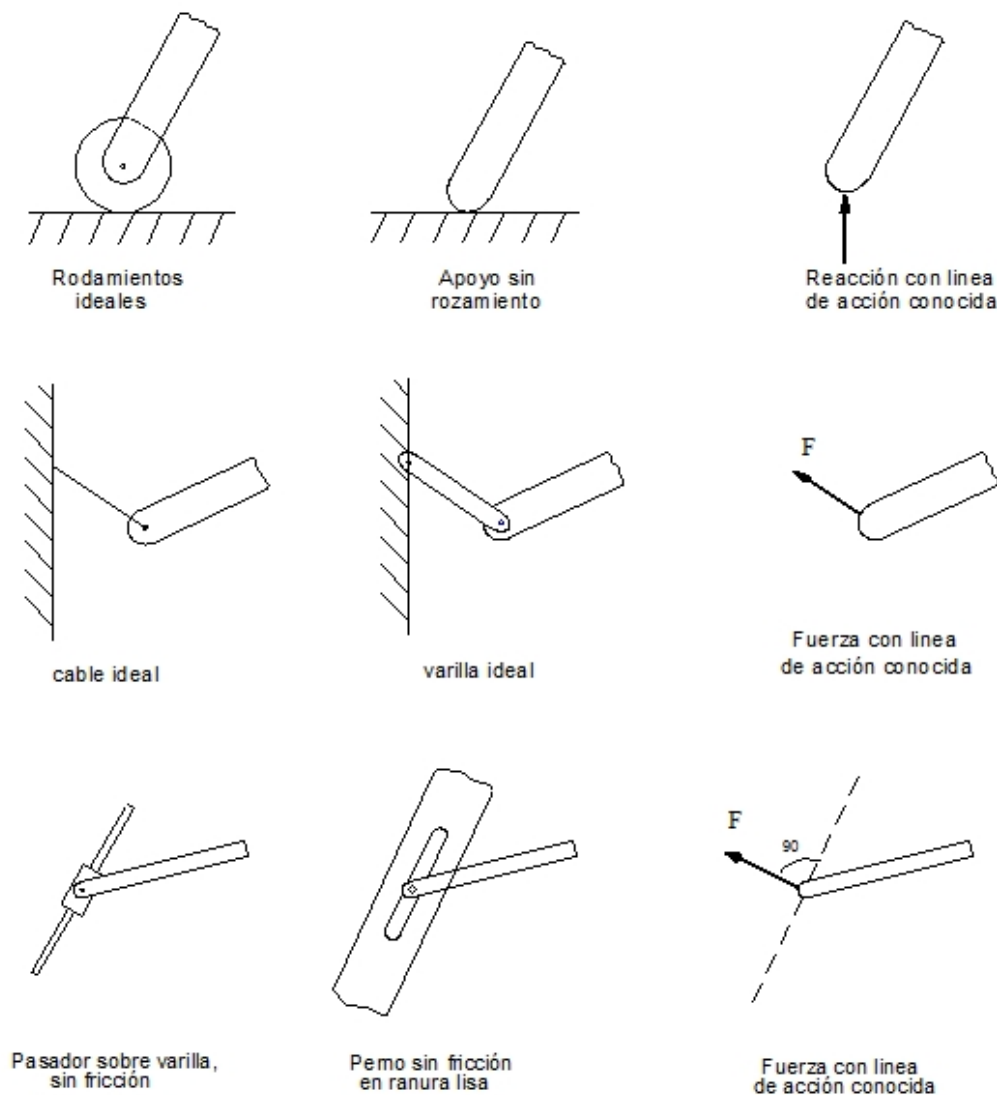


Figura 8.40: Reacciones en apoyos 2D.

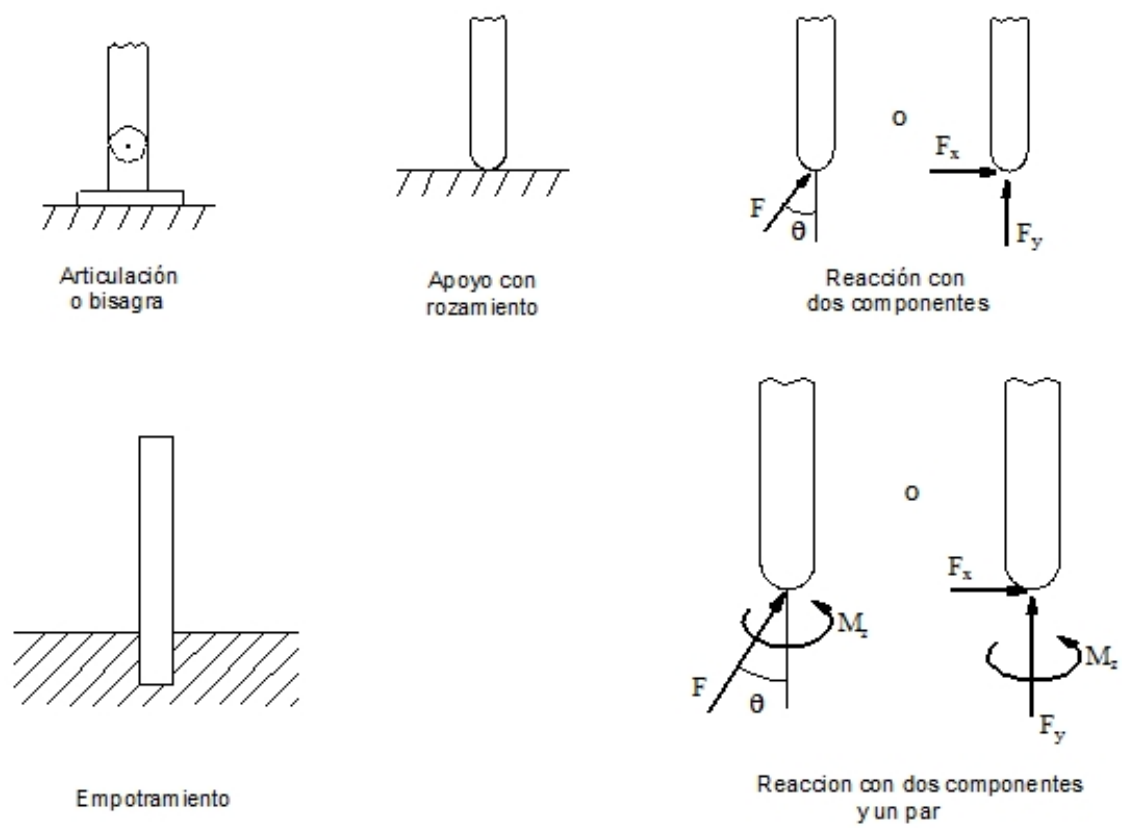


Figura 8.41: Reacciones en apoyos 2D.

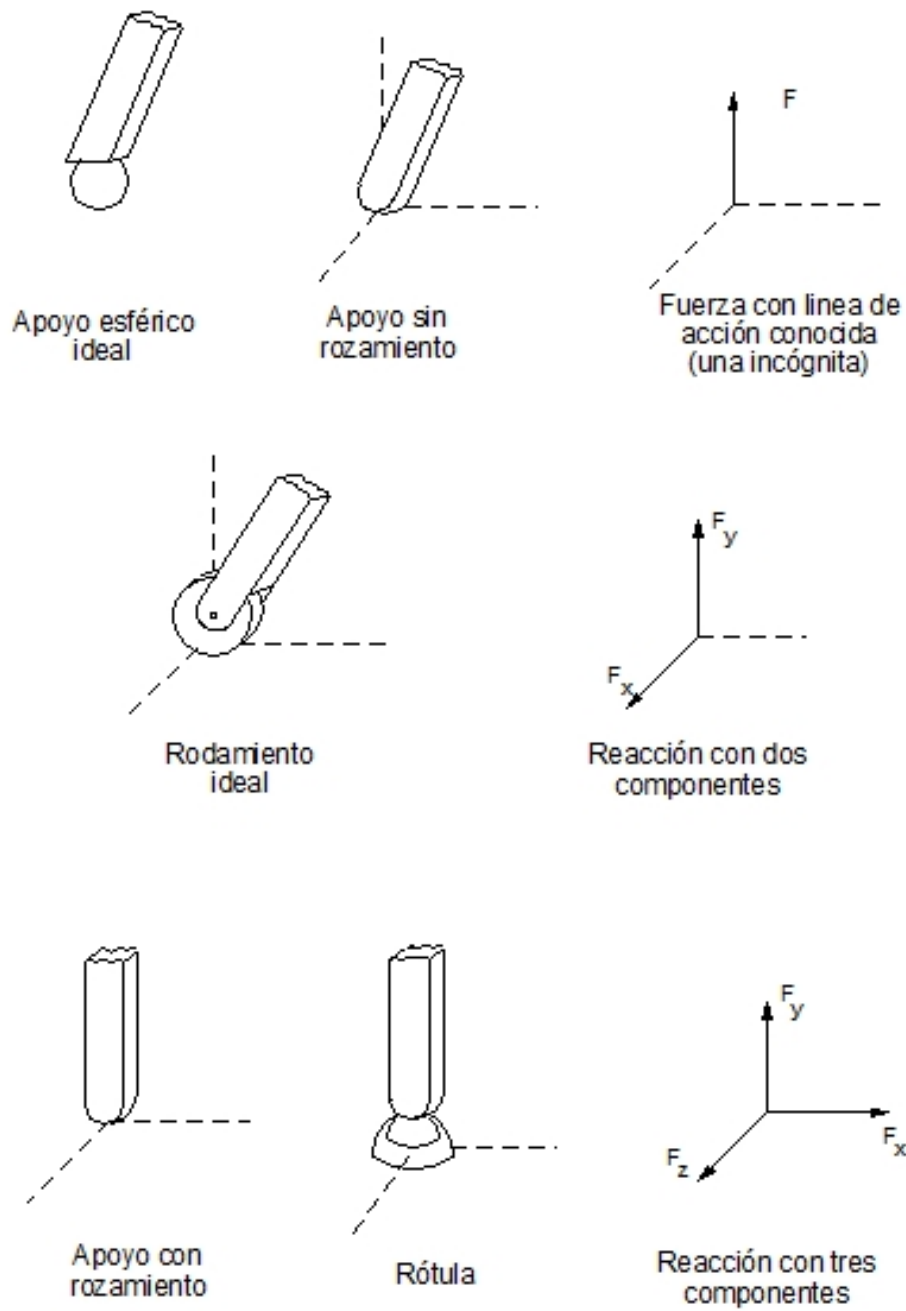


Figura 8.42: Reacciones en apoyos 3D.

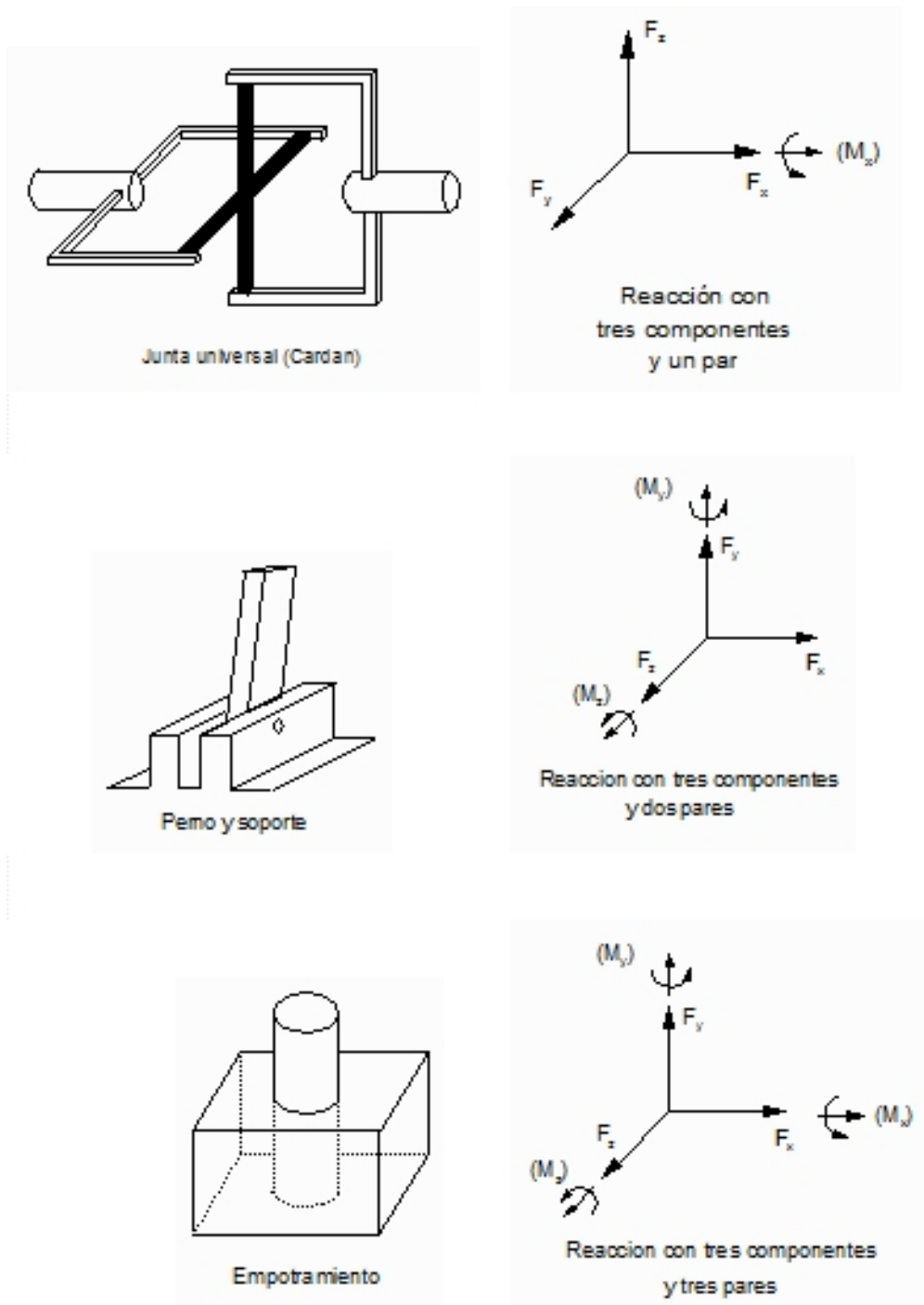


Figura 8.43: Reacciones en apoyos 3D.

8.20. Equilibrio del sólido rígido en un plano

Consideraremos aquí el caso en el que todas las fuerzas aplicadas sobre el sólido están contenidas en el mismo plano (que habitualmente contiene al centro de masas) y todos los momentos tienen dirección perpendicular a dicho plano. En estas condiciones el diagrama de sólido libre es bidimensional en lo concerniente a las fuerzas aplicadas y las ecuaciones de la estática [8.86] equivalen a tres ecuaciones escalares

$$\begin{aligned} F_x &= \sum_j F_{xj} = 0 \\ F_y &= \sum_j F_{yj} = 0 \\ M_{Qz} &= \left(\sum_j \overrightarrow{QA_j} \times \vec{F}_j \right) \cdot \vec{k} + \sum_k \vec{m}_k \cdot \vec{k} = 0 \end{aligned} \quad (8.87)$$

donde se ha supuesto que todas las fuerzas están contenidas en un plano $z=cte$ de un sistema de referencia inercial S y que todos los momentos tienen, en consecuencia, dirección paralela al eje OZ .

Este supuesto permite resolver un máximo de tres incógnitas escalares si no se imponen condiciones adicionales que puedan ser plasmadas en ecuaciones.

En el apartado 8.13 se estudiaron las ecuaciones dinámicas del movimiento plano del sólido rígido, ecs. [8.47] y [8.48], que nos permiten analizar, en este caso particular, el estado cinemático compatible con las condiciones [8.87].

Al ser $\vec{F} = 0$ la aceleración del centro de masas debe de ser nula ($\vec{a}_C = 0$) y su movimiento será rectilíneo y uniforme, o bien estará en reposo, respecto al sistema inercial S . De $M_{Qz}=0$ se deduce que la aceleración angular del sólido ha de ser nula ($\vec{\alpha} = \alpha \vec{k} = 0$) y su velocidad angular constante ($\vec{\omega} = \omega \vec{k} = 0$).

Las dos primeras ecuaciones [8.48] se reducen en este caso a las siguientes

$$\begin{aligned} M_{Cx_L} &= P_{Cy_Lz} \omega^2 \\ M_{Cy_L} &= -P_{Cx_Lz} \omega^2 \end{aligned}$$

referidas aquí al centro de masas C y en componentes del sistema S_L , pero como las condiciones de equilibrio imponen que $M_{Cx}=M_{Cy}=0$ (en componentes del sistema S), entonces la velocidad angular ha de ser nula ($\omega=0$) si los productos de inercia son distintos de cero.

Si el sólido presenta simetrías suficientes para que $P_{Cy_Lz}=P_{Cx_Lz}=0$ en S_L , el momento cinético respecto al centro de masas C en este sistema se expresa en tal caso, recordando que $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$, como

$$\vec{L}_C = \vec{I}_C^L \cdot \vec{\omega} = I_{Cz} \omega \vec{k}$$

y el teorema del momento cinético conduce a

$$\vec{M}_C = \frac{d\vec{L}_C}{dt} = I_{Cz} \frac{d\omega}{dt} \vec{k}$$

siendo las componentes de $\vec{M}_C$ según los ejes CX y CY nulas en todo instante para el caso de movimiento plano que estamos considerando.

En el supuesto de sólido rígido en equilibrio $\vec{M}_C = 0$ lo que implica que

$$\frac{d\omega}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = cte$$

y el sólido simétrico se mantendrá con un movimiento de rotación uniforme al mismo tiempo que su centro de masas sigue un movimiento rectilíneo uniforme respecto al sistema inercial S . El caso particular de reposo corresponde a $v_C=0$ y $\omega=0$ para el sólido en equilibrio.

En resumen, las condiciones de equilibrio [8.87] implican que la cantidad de movimiento del sólido $\vec{p} = M\vec{v}_C$ sea constante y que el momento cinético del sólido sea también constante respecto a cualquier punto fijo o el CM . Si el sólido no es simétrico, entonces las condiciones de equilibrio implican que su momento cinético y su velocidad angular han de ser nulos.

Un ejemplo de lo anterior lo constituye el movimiento de rodadura pura de un sólido de sección circular cuya sección central es un plano de simetría y que apoya en equilibrio sobre una superficie horizontal sometido únicamente a su peso y a la reacción en el apoyo. Otro ejemplo es el de una peonza simétrica, como la mostrada en la Fig. 8.44. Teniendo en cuenta el diagrama de fuerzas representado, se verifican las condiciones de equilibrio [8.86] y el centro de masas se mantendrá en reposo al mismo tiempo que el sólido gira en torno a un eje vertical con velocidad angular constante, indefinidamente.

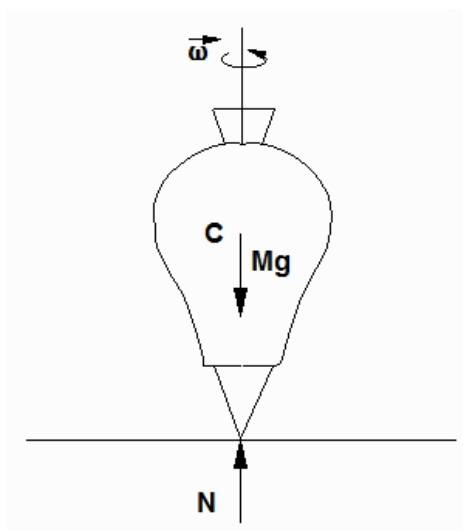


Figura 8.44: Peonza simétrica en equilibrio.

El caso general de estudio del movimiento en tres dimensiones de un sólido simétrico en equilibrio es bastante más complejo que el analizado aquí para el caso de movimiento plano.

8.21. Casos particulares simples en estática del sólido rígido

8.21.1. Sólido sometido a dos fuerzas

En este caso la primera ecuación [8.86] implica que las dos fuerzas han de tener el mismo módulo, la misma dirección y sentido opuesto. Si el sólido tiene masa y está sometido al campo de gravedad terrestre una de las fuerzas ha de ser el peso y en consecuencia la dirección de la otra fuerza aplicada ha de ser vertical, de sentido opuesto al del peso y contener al centro de masas.

8.21.2. Sólido sometido a tres fuerzas

La primera ecuación [8.86], $\vec{F} = 0$, exige aquí que las tres fuerzas sean coplanarias, luego estamos en el caso contemplado por las ecuaciones [8.87]. La última de las ecuaciones se escribe, en este caso, como

$$M_{Qz} = \left(\sum_{j=1}^3 \overrightarrow{QA_j} \times \vec{F}_j \right) \cdot \vec{k} = 0 \quad (8.88)$$

ya que el sólido está sometido solo a las tres fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_3$ y no hay que considerar pares directamente aplicados.

Para que el sólido esté en equilibrio existen únicamente dos posibilidades: que las tres fuerzas sean paralelas o que las tres fuerzas sean concurrentes.

En efecto, supongamos que las fuerzas son paralelas y veamos si tal situación es compatible con el equilibrio. Elijamos un sistema de referencia $OXYZ$ adecuado y situemos el punto de aplicación de cada una de ellas (A_1 , A_2 y A_3) en el eje OX , según se indica en la Fig. 8.45 (recordemos que las fuerzas aplicadas sobre un sólido son vectores deslizantes).

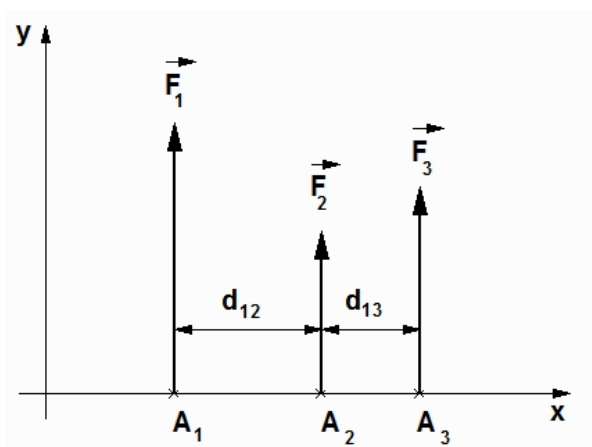


Figura 8.45: Sólido sometido a tres fuerzas coplanarias paralelas.

Aplicando la ecuación [8.88] al punto $Q = A_1$ se obtiene que

$$\overrightarrow{A_1 A_2} \times \vec{F}_2 + \overrightarrow{A_1 A_3} \times \vec{F}_3 = 0$$

que implica que:

$$d_{12} |\vec{F}_2| = d_{13} |\vec{F}_3|$$

independientemente del valor de $\vec{F}_1$ (que solo ha de verificar que $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$). Existen infinitos valores de F_1 , F_3 , d_{12} y d_{13} que verifican la ecuación anterior y, por lo tanto, las condiciones de equilibrio se pueden cumplir si las tres fuerzas son paralelas.

Supongamos ahora que las tres fuerzas no son paralelas. En este caso, al ser coplanarias, dos de ellas, por ejemplo, $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$, serán concurrentes en un punto que llamaremos P . Apliquemos la ecuación [8.88] respecto al punto P . Resulta

$$\overrightarrow{PA_1} \times \vec{F}_1 + \overrightarrow{PA_2} \times \vec{F}_2 + \overrightarrow{PA_3} \times \vec{F}_3 = 0$$

pero como $\overrightarrow{PA_1} \parallel \vec{F}_1$ y $\overrightarrow{PA_2} \parallel \vec{F}_2$ se verifica que

$$\overrightarrow{PA_1} \times \vec{F}_1 = \overrightarrow{PA_2} \times \vec{F}_2 = 0$$

con lo que se ha de cumplir

$$\overrightarrow{PA_3} \times \vec{F}_3 = 0$$

lo que implica, en el caso general, que $\overrightarrow{PA_3} \parallel \vec{F}_3$, es decir, que la recta soporte de $\vec{F}_3$ también contenga al punto P . Luego las tres fuerzas han de ser concurrentes en el punto P .