



RELATIVIDAD

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

CINEMÁTICA RELATIVISTA

TIEMPO PROPIO

TRANSFORMACIONES DE LORENTZ

CONTRACCIÓN DE LONGITUDES DE LORENTZ

DILATACIÓN DE TIEMPO DE LORENTZ

TRANSFORMACIÓN DE VELOCIDADES

DINÁMICA RELATIVISTA

SEGUNDA ECUACIÓN DE NEWTON

CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



INTRODUCCIÓN



Principio de Relatividad Clásico:

Cualquier fenómeno obedece leyes iguales en todos los sistemas de referencia inerciales.

Sin embargo, la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas en el vacío (c) no depende del sistema de referencia inercial.

En principio se pensó en que el vacío existía un sistema de referencia especial (el éter) en el que se violaba el principio de relatividad. Sin embargo, no se encontró, y por tanto, todo apuntaba a que la velocidad de la luz c era independiente del sistema de referencia.

Principio de Relatividad de Einstein:

Se debe cumplir el principio de relatividad clásico y c es constante para todo sistema inercial.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

3/20



CINEMÁTICA RELATIVISTA



Suceso:

Hecho que ocurre en un determinado lugar e instante (x, y, z, t) .

Intervalo entre sucesos:

$$\Delta s_{12} = ((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2)^{\frac{1}{2}}$$

Si los sucesos 1 y 2 son el paso de una onda a la velocidad de la luz y si medimos estos sucesos en dos sistemas de referencia inerciales S y S' , por el Principio de Relatividad de Einstein:

$$\Delta s_{12} = \Delta s'_{12}$$

Esta invariancia ocurre para cualquier par de sucesos, incluidos sucesos infinitamente próximos:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 = ds'^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - c^2 dt'^2$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

4/20



CINEMÁTICA RELATIVISTA



TIEMPO PROPIO

Tiempo propio:

Tiempo medido por un observador viajando a una cierta velocidad; y que por tanto permanece en reposo en S' (inercial o no).

Para el tiempo que mide el reloj se cumple:

$$dt' = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}; \quad dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = 0$$

Velocidad instantánea del reloj en S :

$$u^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}$$



CINEMÁTICA RELATIVISTA



TIEMPO PROPIO

Tiempo medido en S

$$dt' = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} = dt \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

Tiempo propio en S'

$$t'_2 - t'_1 = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} dt$$

El intervalo de tiempo en movimiento es menor:

Un reloj en movimiento atrasa respecto de un reloj en reposo.

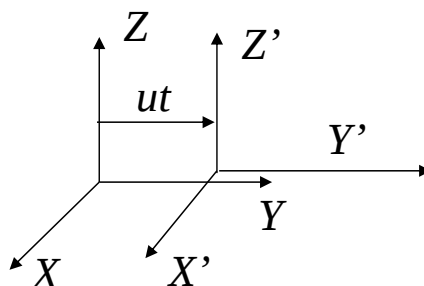
$$t'_2 - t'_1 < t_2 - t_1$$



CINEMÁTICA RELATIVISTA



TRANSFORMACIONES DE LORENTZ



S y S' son sistemas inerciales.

S' con velocidad $\vec{u} = u \vec{j}$ respecto a S .

$$dx = dx'; dz = dz' \quad i = \sqrt{-1}$$

$$\Delta s^2 = \Delta y^2 + \Delta \tau^2 = \Delta y'^2 + \Delta \tau'^2; \quad \tau = i ct, \quad \tau' = i ct'$$



CINEMÁTICA RELATIVISTA



TRANSFORMACIONES DE LORENTZ

La transformación que satisface lo anterior es una rotación en el plano (y, τ) :

$$y' = y \cos \phi + \tau \sin \phi$$

$$\tau' = \tau \cos \phi - y \sin \phi$$

$$\text{Para } y'=0: \quad \frac{y}{\tau} = -\tan \phi$$

$$y = ut = -\frac{i u \tau}{c} \quad \left. \vphantom{\frac{y}{\tau} = -\tan \phi} \right\} \tan \phi = i \frac{u}{c}$$

Transformaciones de Lorentz

$$\boxed{\begin{aligned} y' &= \frac{y - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}; & x &= x' \\ t' &= \frac{t - uy/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}; & z &= z' \end{aligned}}$$

Para $c \rightarrow \infty$ se tiene la transformación de Galileo característica de la mecánica clásica:

$$y' = y - ut; \quad t' = t$$

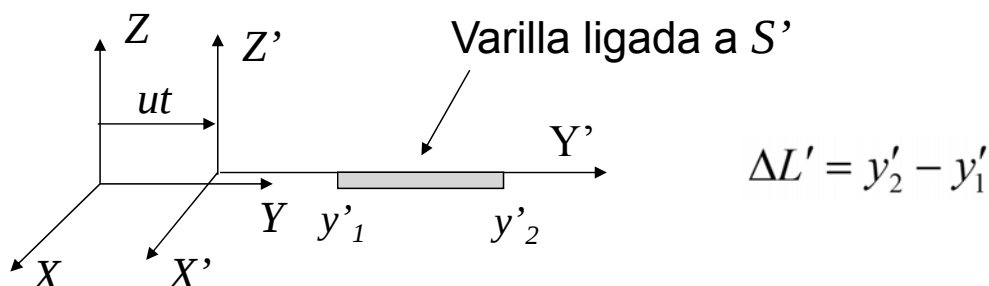


CINEMÁTICA RELATIVISTA



CONTRACCIÓN DE LONGITUDES DE LORENTZ

La contracción de Lorentz es un efecto relativista que consiste en la contracción de la longitud de un cuerpo en la dirección del movimiento uniforme de éste.



En S se han de medir ambos extremos en el mismo instante:

$$\Delta L = y_2 - y_1, \quad \Delta t = t_2 - t_1 = 0$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

9/20



CINEMÁTICA RELATIVISTA



CONTRACCIÓN DE LONGITUDES DE LORENTZ

La longitud en el sistema S es menor

$$y'_2 - y'_1 = \frac{y_2 - y_1 - u(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \rightarrow \Delta L' = \frac{\Delta L}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

Si la varilla está en reposo en S (en S' debemos medir en el mismo instante $\Delta t' = 0$):

$$\Delta L' = \frac{\Delta L - u\Delta t}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}; 0 = \Delta t - u\Delta L / c^2 \rightarrow \Delta L = \frac{\Delta L'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

Ecuación simétrica

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

10/20



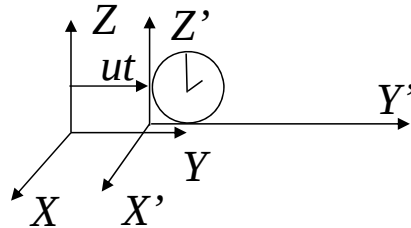
CINEMÁTICA RELATIVISTA



DILATACIÓN DE TIEMPOS DE LORENTZ

La dilatación del tiempo es el fenómeno relativista por el cual un observador verifica que el reloj de otro observador en movimiento uniforme (un reloj físicamente idéntico al suyo) está marcando el tiempo a un ritmo menor que el que mide su reloj.

Consideremos un reloj en reposo en S' y dos sucesos con un $\Delta t'$ en $\Delta y' = 0$:



$$0 = \Delta y - u\Delta t; \quad \Delta t' = \frac{\Delta t - u\Delta y / c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \rightarrow \Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - u^2/c^2}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

11/20

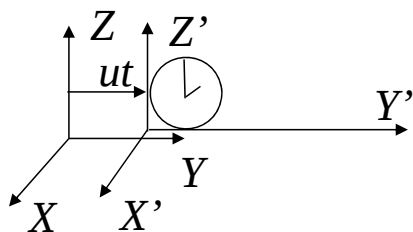


CINEMÁTICA RELATIVISTA



DILATACIÓN DE TIEMPOS DE LORENTZ

El intervalo de tiempo en el sistema S' en movimiento es menor



$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - u^2/c^2}$$

También se obtiene de esta ecuación con $u = cte$

$$t'_2 - t'_1 = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} dt$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

12/20

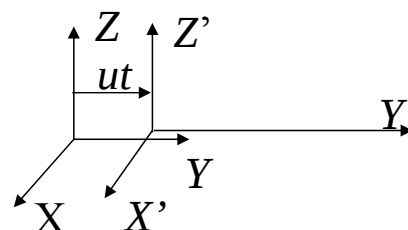


CINEMÁTICA RELATIVISTA



TRANSFORMACIÓN DE VELOCIDADES

$$y' = \frac{y - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}; \quad t' = \frac{t - uy/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$



Diferenciando obtenemos la velocidad de una partícula:

$$v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{v_y - u}{1 - uv_y/c^2}$$

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = v_x \frac{\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - uv_y/c^2}$$

$$v'_z = \frac{dz'}{dt'} = v_z \frac{\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - uv_y/c^2}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

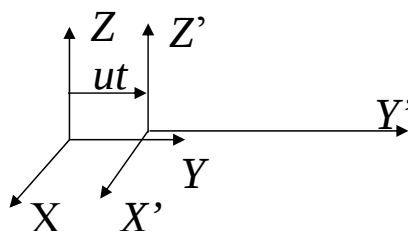
13/20



CINEMÁTICA RELATIVISTA



TRANSFORMACIÓN DE VELOCIDADES



Supongamos que la partícula se mueve con $v'_y = u = a c$:

$$ac = \frac{v_y - ac}{1 - acv_y/c^2} \rightarrow ac - a^2v_y = v_y - ac \rightarrow v_y = \frac{2ac}{1 + a^2}$$

Si $a=1$ se tiene que $v_y = v'_y = c$, por tanto, es constante para todo sistema inercial. El resultado clásico sería: $v_y = 2u$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

14/20



DINÁMICA RELATIVISTA



La cantidad de movimiento de una partícula se define como:

Masa en reposo $\rightarrow$ $\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m \vec{v}$ $\leftarrow$ Masa relativista

El cambio en la energía de una partícula sobre la que actúa una fuerza $\vec{F}$:

$$dE = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{r}$$



DINÁMICA RELATIVISTA



Integrando tenemos:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Esta energía incluye la energía cinética y la energía de la masa en reposo

Para velocidades no relativistas ($v \ll c$): $E = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \dots$

Energía en reposo $\rightarrow$

Para un partícula con velocidad v :

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2} = \sqrt{v^2 - c^2} dt = \sqrt{1 - v^2/c^2} ic dt$$

$$c, m_0, ds = \sqrt{1 - v^2/c^2} dt$$

$$\tau = ict$$

son invariantes en las transformaciones de Lorentz



DINÁMICA RELATIVISTA



El momento y la energía en función de posición y tiempo son:

$$\vec{p} = \left(\frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) d\vec{r}$$

$$\frac{E}{c^2} = \left(\frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) dt$$

Por tanto: $(p_x, p_y, p_z, E/c^2)$ se transforma igual que (x, y, z, t) o
 $(p_x, p_y, p_z, iE/c)$ se transforma igual que $(x, y, z, \tau = ict)$

Cuadrivectores momento y coordenadas

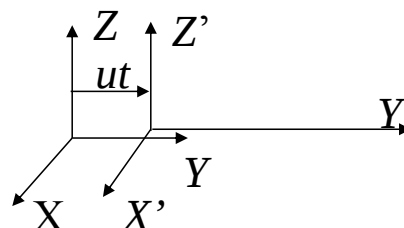


DINÁMICA RELATIVISTA



$$y' = \frac{y + iu(ict)/c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}; \quad x = x'$$

$$ict' = \frac{ict - iuy/c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}; \quad z = z'$$



$$p'_y = \frac{p_y + iu(iE/c)/c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}; \quad p_x = p'_x$$

$$iE'/c = \frac{iE/c - iup_y/c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}; \quad p_z = p'_z$$

$(p_x, p_y, p_z, iE/c)$ se transforma igual que $(x, y, z, \tau = ict)$



DINÁMICA RELATIVISTA



SEGUNDA ECUACIÓN DE NEWTON

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) \vec{v}$$

Fuerza y aceleración no son paralelas

$$\vec{F} = m_0 \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Expresión clásica

Si el módulo de la velocidad de la partícula $\vec{v}$ es cte:

$$\vec{F} = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Si la dirección de $\vec{v}$ es cte:

$$\vec{F} = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{dv}{dt} \vec{u} + \frac{m_0 v^2 / c^2}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} \frac{dv}{dt} \vec{u} = \frac{m_0}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} \frac{d\vec{v}}{dt}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

19/20



DINÁMICA RELATIVISTA



CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

Las componentes del campo electromagnético también se transforman al pasar de un sistema de referencia inercial S a otro S' .

La aproximación no relativista es:

Si la velocidad de S' es $\vec{u}$ respecto de S y $u \ll c$:

$$\vec{B}' \simeq \vec{B}$$

$$\vec{E}' \simeq \vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}$$

Este resultado no es nuevo puesto que como una carga q en reposo en S' ($\vec{v}' = 0$) y en presencia de un campo eléctrico $\vec{E}'$ sufre la fuerza de Coulomb: $\vec{F} = q\vec{E}'$

La misma carga q desde S está sometida a la fuerza de Lorentz ($\vec{v} = \vec{u}$):

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

20/20

