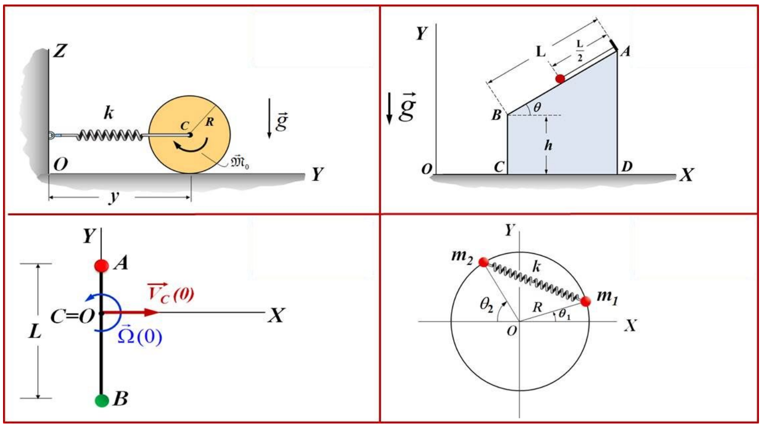
Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO

FÍSICA I

PROBLEMAS RESUELTOS

José Carlos JIMÉNEZ SÁEZ
Santiago RAMÍREZ DE LA PISCINA MILLÁN



1.- VECTORES

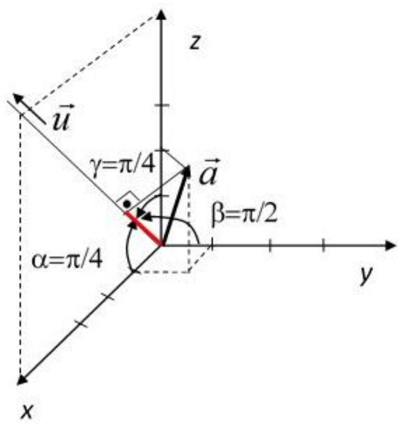
1 Vectores

PROBLEMA RESUELTO 1.1.

Hallar la proyección del vector $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ sobre la recta cuyos cosenos directores son $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ 0\ ,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

SOLUCIÓN 1.1.

Para hacer el dibujo de la recta, calculamos los ángulos directores:



$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \alpha = \pi/4\ rad$$

$$\cos\beta = 0 \rightarrow \beta = \pi/2\ rad$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \gamma = \pi/4\ rad$$

Calculamos el vector unitario $\vec{u}$ en la dirección de la recta de los cosenos directores:

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + 0\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}$$

La proyección de un vector se obtiene como el producto escalar con el unitario, esto es:

$$\mathrm{P}_u(\tilde{\mathrm{a}}) = \vec{a}\cdot\vec{u} = \left(\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + 0\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + 2\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

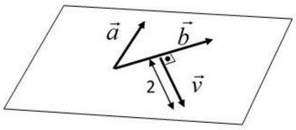
PROBLEMA RESUELTO 1.2.

Encontrar un vector de módulo 2 y que estando contenido en el plano que determinan los vectores $\vec{a} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$ y $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ sea perpendicular al vector $\vec{b}$

SOLUCIÓN 1.2.

Sea $\vec{v}$ el vector que tenemos que calcular. La condición de perpendicularidad con el vector $\vec{b}$ se escribe matemáticamente como $\vec{v} \cdot \vec{b} = 0$.

La longitud de este vector debe ser 2: $|\vec{v}| = 2$.



Si $\vec{v}$ se encuentra en el mismo plano que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ significa que es suma de dos vectores múltiplos de los anteriores: $\vec{v} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ donde λ y μ son incógnitas.
Sustituyendo los vectores tenemos:

$$\vec{v} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = (2\lambda + \mu)\vec{i} + (4\lambda + \mu)\vec{j} + (3\lambda + \mu)\vec{k}$$

Imponemos la condición de perpendicularidad haciendo el producto escalar:

$$\vec{v} \cdot \vec{b} = 9\lambda + 3\mu = 0 \Rightarrow \mu = -3\lambda$$

Por tanto, quedaría:

$$\vec{v} = (2\lambda + \mu)\vec{i} + (4\lambda + \mu)\vec{j} + (3\lambda + \mu)\vec{k} = -\lambda\vec{i} + \lambda\vec{j}$$

Falta imponer que su longitud es 2:

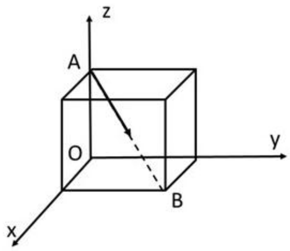
$$2 = |\vec{v}| = \sqrt{\lambda^2 + \lambda^2} = \sqrt{2\lambda^2} = \sqrt{2}\,|\lambda| \rightarrow |\lambda| = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Por tanto, dado que $\lambda = \pm\sqrt{2}$, las posibles soluciones son:

$$\vec{v} = -\sqrt{2}\vec{i} + \sqrt{2}\vec{j} \quad o \quad \vec{v} = \sqrt{2}\vec{i} - \sqrt{2}\vec{j}$$

PROBLEMA RESUELTO 1.3.

El vector $\vec{v}$ de la figura, de módulo $|\vec{v}| = \frac{1}{2}$, está contenido en la diagonal AB de un cubo de arista unidad. Calcular la proyección de $\vec{v}$ sobre la recta que pasa por el origen y tiene cosenos directores $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$



SOLUCIÓN 1.3.

Las coordenadas de los puntos A y B son: A(0,0,1) y B(1,1,0).
El vector AB es: $\overrightarrow{AB} = (\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$
El unitario es entonces:

$$\vec{u}_{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$$

De manera que el vector $\vec{v}$ es:

$$\vec{v} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$$

El versor de la recta es:

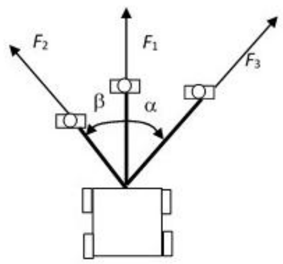
$$\vec{u}_r = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{k})$$

La proyección sobre la recta será entonces:

$$proy_{\vec{u}_r}\vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}_r = 0$$

PROBLEMA RESUELTO 1.4.

Tres personas tratan de mover un coche con las ruedas orientadas en la dirección vertical. Para ello se necesita una fuerza mínima de $F_{min} = 1000kN$. La primera persona tira en la dirección del movimiento ejerciendo siempre una fuerza $F_1 = 100kN$, la segunda formando un ángulo β con esta dirección y la tercera un ángulo α.



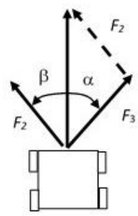
1. Si los ángulos son $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$, ¿qué fuerza deben ejercer ambas personas para mover el coche de manera que el módulo de la resultante de ambas sea mínima?

2. Si la tercera persona realiza una fuerza constante de valor $F_3 = 500kN$ manteniendo un ángulo $\alpha = \frac{\pi}{4}$ respecto de la dirección de desplazamiento, ¿cómo debe variar la segunda persona su fuerza para que el módulo de la resultante siga siendo mínima?

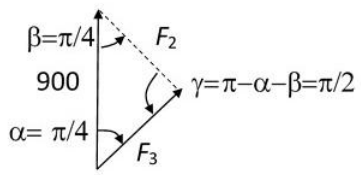
SOLUCIÓN 1.4.

1) Entre las personas 2 y 3 deben ejercer una fuerza vertical mínima de: $F_{min} - F_1 = 900kN$

La fuerza resultante suma de ambas es mínima si se dirige en el sentido vertical. Por la regla del paralelogramo los dos vectores fuerza deben ser tales que su resultante sea vertical



Debemos resolver un triángulo, para ellos usamos la regla de senos para calcular F_2 y F_3.

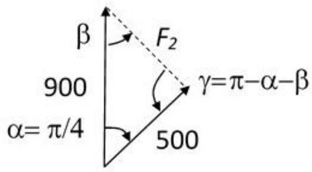


$$\frac{900}{sen\,(\pi/2\,)} = \frac{F_2}{sen(\pi/4\,)} \Rightarrow F_2 = 900 sen(\pi/4\,) = 636.40\ kN$$

y como $\gamma = \pi - \alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$,

$$\frac{900}{sen\,(\pi/2\,)} = \frac{F_3}{sen(\pi/4\,)} \Rightarrow F_3 = 900 sen(\pi/4\,) = 636.40\ kN$$

2) El triángulo que debemos resolver en este caso es el siguiente:



El valor de la fuerza F_2 se obtiene aplicando el teorema del coseno:
$F_2 = \sqrt{500^2 + 900^2 - 2 \cdot 500 \cdot 900 \cos(\pi/4)} = 650.85\ kN$
El ángulo β se obtiene por el teorema del seno:

$$\frac{500}{sen\beta} = \frac{F_2}{sen(\pi/4)} \Rightarrow sen\beta = \frac{500}{650.85} sen(\pi/4) = 0.543 \Rightarrow \beta = 32.9^o$$

PROBLEMA RESUELTO 1.5.

Dados los vectores $\vec{a}(0,0,x)$ y $\vec{b}(1,0,y)$, calcular x e y para que el producto escalar $\vec{a}\cdot\vec{b}$ valga 10 y los vectores formen un ángulo de $\pi/3$ rad.

SOLUCIÓN 1.5.

Realizamos matemáticamente el producto escalar: $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0\cdot 1 + 0\cdot 0 + x\cdot y = x\,y$
El ángulo de dos vectores se calcula también a partir del producto escalar:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,\left|\vec{b}\right|} = \frac{xy}{\sqrt{x^2}\sqrt{1^2+y^2}} = \frac{xy}{|x|\,\sqrt{1^2+y^2}}$$

Como $cos(\pi/3) = 1/2$ tendremos la ecuación:

$$\frac{1}{2} = \frac{xy}{|x|\,\sqrt{1+y^2}}$$

Resolviendo la ecuación anterior, tomando cuadrados a ambos lados de la misma:

$$1+y^2 = 4y^2 \Rightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Como el producto escalar debe valer 10 tenemos:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x\,y = x\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 10 \Rightarrow x = \mp\frac{30}{\sqrt{3}} = \mp 10\sqrt{3}$$

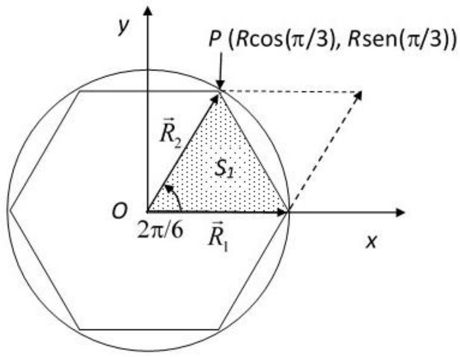
PROBLEMA RESUELTO 1.6.

Deducir, por métodos vectoriales, la superficie de un hexágono regular inscrito en una circunferencia de radio R.

SOLUCIÓN 1.6.

El hexágono se compone de 6 triángulos equiláteros, por tanto: $S = 6\ S_1$
El área de un triángulo equilátero se puede obtener a partir del producto vectorial de dos de sus lados, ya que es la mitad del área del paralelogramo que forman.

$$S_1 = \frac{1}{2}\left|\vec{R}_1 \times \vec{R}_2\right|$$



Falta por escribir el valor de los vectores $\vec{R}_1$ y $\vec{R}_2$. La circunferencia tiene radio R, por tanto, la longitud o módulo de ambos es R. Debemos obtener un vector unitario o versor en la dirección de ambos. En el caso del vector $\vec{R}_1$ es fácil puesto que va en la dirección del eje x, en el caso del vector $\vec{R}_2$ usamos el vector $\overrightarrow{OP}$:

$$\overrightarrow{OP} = R\cos(\pi/3)\vec{i} + R\mathrm{sen}(\pi/3)\vec{j}$$

Con $\vec{u}_1 = \vec{i}$ y $\vec{u}_2 = \frac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|} = \frac{R\cos(\pi/3)\vec{i}+R\mathrm{sen}(\pi/3)\vec{j}}{R} = \cos(\pi/3)\vec{i} + \mathrm{sen}(\pi/3)\vec{j}$,tenemos:

$\vec{R}_1 = R\ \vec{u}_1 = R\ \vec{i}$
$\vec{R}_2 = R\ \vec{u}_2 = R\ (\cos(\pi/3)\vec{i} + \mathrm{sen}(\pi/3)\vec{j}) = R\frac{1}{2}\vec{i} + R\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$

Realizamos las operaciones:

$$\vec{R}_1 \times \vec{R}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ R & 0 & 0 \\ R/2 & R\sqrt{3}/2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2}R^2\vec{k}$$

Y sustituyendo:

$$S = 6\ S_1 = 3\left|\vec{R}_1 \times \vec{R}_2\right| = \frac{3\sqrt{3}}{2}R^2$$

PROBLEMA RESUELTO 1.7.

Dados los vectores $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{b} = -\vec{i} - \vec{k}$ y $\vec{c} = -\vec{j} - \vec{k}$ aplicados en los puntos A(0,0,1), B(0,1,0) y C(1,0,0) respectivamente, se pide:

1. Valor de la resultante.
2. Momento resultante respecto del punto P(1,1,1).
3. Momento con respecto al origen de coordenadas.
4. Momento respecto al eje que pasa por el origen de ecuación x=y=2z.

SOLUCIÓN 1.7.

1. La resultante se obtiene sumando los tres vectores:

$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{i} - \vec{j}) + (-\vec{i} - \vec{k}) + (-\vec{j} - \vec{k}) = -2\vec{j} - 2\vec{k}$$

2. El momento resultante se calcula sumando los momentos de todos los vectores:

$$\vec{M}_P = \overrightarrow{PA} \times \vec{a} + \overrightarrow{PB} \times \vec{b} + \overrightarrow{PC} \times \vec{c}$$

$$\vec{M}_P = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2\vec{k}$$

3. Para obtener el momento de los tres vectores respecto del origen de coordenadas aplicamos el teorema de cambio de polo:

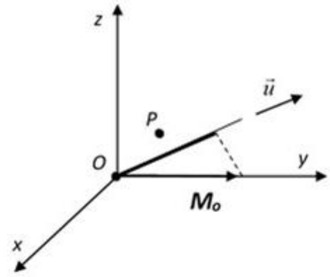
$$\vec{M}_O = \vec{M}_P + \overrightarrow{OP} \times \vec{R} = 2\vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 2\vec{k} + 2\vec{j} - 2\vec{k} = 2\vec{j}$$

4. Obtenemos en primer lugar el unitario del eje. Para ello necesitamos conocer dos puntos de éste. Uno es el (0,0,0) y otro por ejemplo el (2,2,1) (debe verificar la ecuación x=y=2z).

$$\vec{u} = \frac{(2,2,1) - (0,0,0)}{|(2,2,1) - (0,0,0)|} = \frac{(2,2,1)}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{1}{3}(2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k})$$

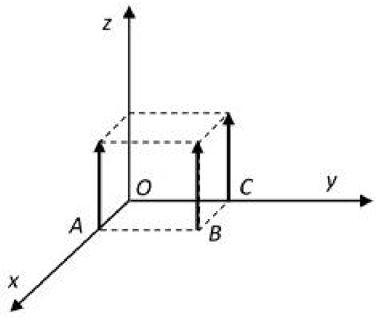
El momento respecto al eje se obtiene proyectando el valor del momento respecto de un punto del eje (en nuestro caso sólo vale O ($\vec{M}_O$), no vale P ($\vec{M}_P$) puesto que no está en el eje) en la dirección del versor $\vec{u}$:

$$m_e = \vec{M}_O \cdot \vec{u} = 2\vec{j} \cdot \frac{1}{3}(2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}) = \frac{4}{3}$$



PROBLEMA RESUELTO 1.8.

Los tres vectores de la figura coinciden con las aristas de un cubo de arista unidad. Calcular los puntos del espacio respecto a los cuales el momento resultante de los tres vectores es nulo.



SOLUCIÓN 1.8.

Calculamos el momento respecto de un punto, por ejemplo, el O:

$$\vec{M}_O = \overrightarrow{OA} \times \vec{k} + \overrightarrow{OC} \times \vec{k} + \overrightarrow{OB} \times \vec{k}$$

$$\vec{M}_O = \vec{i} \times \vec{k} + \vec{j} \times \vec{k} + (\vec{i} + \vec{j}) \times \vec{k} = (2\vec{i} + 2\vec{j}) \times \vec{k} = 2\vec{i} - 2\vec{j}$$

La resultante de los tres vectores es: $\vec{R} = 3\vec{k}$

Por el teorema de cambio de polo, buscamos un punto P cuyo momento sea 0:

$$\vec{M}_O = \vec{M}_P + \overrightarrow{OP} \times \vec{R} = \overrightarrow{OP} \times \vec{R} = (x_p\vec{i} + y_p\vec{j} + z_p\vec{k}) \times 3\vec{k}$$

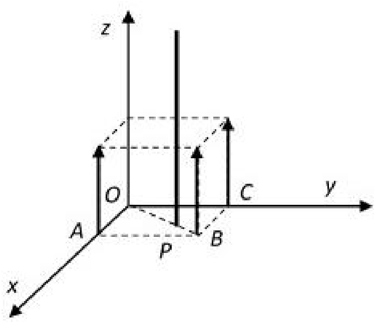
$$\vec{M}_O = 3y_p\vec{i} - 3x_p\vec{j}$$

Igualando

$2 = 3y_p \Rightarrow y_p = \dfrac{2}{3}$

$-2 = -3x_p \Rightarrow x_p = \dfrac{2}{3}$

z_p puede ser cualquiera.



Por tanto, la solución es una recta paralela a la resultante que pase por (2/3,2/3,0). En general, el momento en dos puntos P y Q tal que el segmento que los une es paralelo a la resultante no cambia de valor ya que $\overrightarrow{QP} \parallel \vec{R} \quad y \quad \vec{M}_Q = \vec{M}_P + \overrightarrow{QP} \times \vec{R} = \vec{M}_P$

PROBLEMA RESUELTO 1.9.

1) Dado el vector de posición $\vec{r}(t) = (3\cos\ 4t)\vec{i} + 5t^3\vec{j}$, de un punto móvil respecto a OXYZ fijos, hallar la derivada primera (vector velocidad) y segunda (vector aceleración) de esta función vectorial.

2) Dado el vector velocidad $\vec{v}(t) = (3\cos\ 4t)\vec{i} + 5t^3\vec{j}$, de un punto móvil respecto a OXYZ fijos, hallar la integral indefinida (vector de posición) de esta función vectorial. Obtener la integral definida si el punto se encuentra en el instante t=0 en la posición (1,1).

SOLUCIÓN 1.9.

1) La derivada de una función vectorial se hace derivando todas sus componentes cartesianas:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(3\cos 4t)}{dt}\vec{i} + \frac{d(5t^3)}{dt}\vec{j} = -12\ \mathrm{sen}4t\ \vec{i} + 15t^2\vec{j}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(-12\ \mathrm{sen}4t)}{dt}\vec{i} + \frac{d(15t^2)}{dt}\vec{j} = -48\ \cos4t\ \vec{i} + 30t\ \vec{j}$$

2) La integral indefinida de un función vectorial se hace integrando todas sus componentes cartesianas:

$$\vec{r} = \int \vec{v}\ dt = \int 3\cos 4t\ dt\ \vec{i} + \int 5t^3 dt\ \vec{j} = \left(\frac{3}{4}\mathrm{sen}4t + C_x\right)\ \vec{i} + \left(\frac{5}{4}t^4 + C_y\right)\vec{j}$$

C_x y C_y se calculan a partir de unos valores iniciales de posición, es decir, el valor de la posición en un determinado instante.

En la integral definida tenemos límites de integración, además $\vec{r}_0$ es la posición inicial (1,1):

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \int_0^t \vec{v}\ dt = \int_0^t 3\cos 4t\ dt\ \vec{i} + \int_0^t 5t^3 dt\ \vec{j}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \int_0^t 3\cos 4t\ dt\ \vec{i} + \int_0^t 5t^3 dt\ \vec{j} = 1\vec{i} + 1\vec{j} + \frac{3}{4}\mathrm{sen}4t\Big|_0^t\ \vec{i} + \frac{5}{4}t^4\Big|_0^t\ \vec{j}$$

$$\vec{r} = (1 + \frac{3}{4}\mathrm{sen}4t)\vec{i} + (1 + \frac{5}{4}t^4)\vec{j}$$