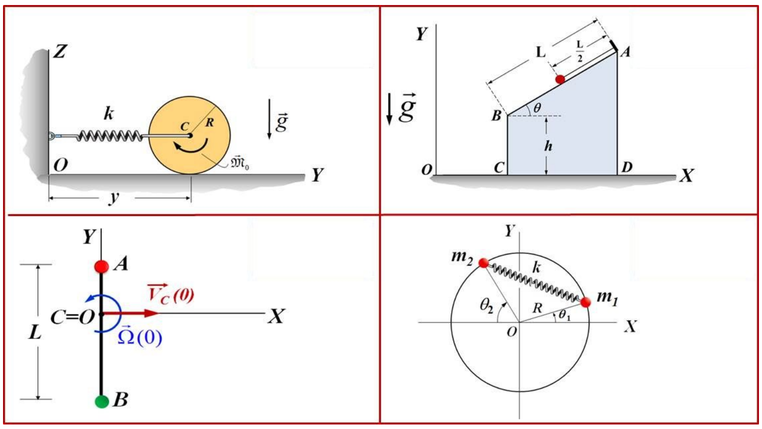
Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO

FÍSICA I

PROBLEMAS RESUELTOS

José Carlos JIMÉNEZ SÁEZ
Santiago RAMÍREZ DE LA PISCINA MILLÁN



2.- CINEMÁTICA DE LA PARTÍCULA

2 Cinemática de la Partícula

PROBLEMA RESUELTO 2.1.

En una carretera recta, justo en el instante que un coche arranca, una moto lo adelanta a una velocidad $v_0 = 45km/h$.

El movimiento del coche es el siguiente:

Durante la primera hora mantiene una aceleración constante hasta alcanzar los $90km/h$, velocidad que mantiene durante las 3 horas siguientes. A continuación frena con deceleración constante durante 1 hora hasta detenerse.

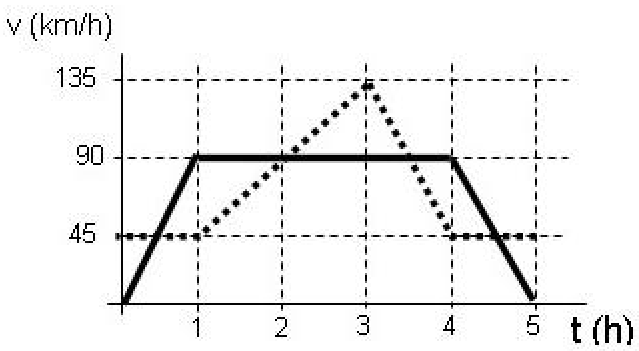
El movimiento de la moto es el siguiente:

Lleva velocidad constante durante la primera hora. En las dos horas siguientes se mueve con aceleración constante hasta alcanzar $135km/h$. Durante la cuarta hora frena con deceleración constante hasta $45km/h$. Entre la hora 4 y 5 mantiene esta velocidad de $45km/h$.

1. Dibujar, en los mismos ejes, la gráfica $v - t$ (velocidad-tiempo) para ambos vehículos.
2. Calcular los instantes de tiempo en los que el coche y la moto están emparejados.
3. Calcular el espacio recorrido por cada uno al cabo de las 5 horas.

SOLUCIÓN 2.1.

1)



2) Como $x = \int_0^t v\,dt + x_0$, suponiendo que ambas partículas parten del origen $x_0 = 0$, y recordando la interpretación gráfica de la integral como área encerrada debajo de la curva, se tiene que los instantes de tiempo en que coinciden en posición son aquellos en los que se igualan las áreas debajo de la curva.

De la gráfica se obtienen tales instantes, que son: t = 0, t = 1h, t = 3h, t = 4h, t = 5h

3) El espacio recorrido al cabo de 5 h es igual al área total encerrada bajo la curva:

Para el coche:

$$\frac{90\frac{km}{h}\times 1\,h}{2} + 90\frac{km}{h}\times 3\,h + \frac{90\frac{km}{h}\times 1\,h}{2} = 360\,km$$

Para la moto:

$$45\frac{km}{h}\times 1\,h + \frac{3\,h\times\,(135-45)\frac{km}{h}}{2}\times 1\,h + 3\,h\times\,45\frac{km}{h} +\,45\frac{km}{h}\times 1\,h\,= 360\,km$$

Si se prefiere una solución matemática al problema, se debería escribir la ecuación matemática de la velocidad y realizar la integración $x(t) = \int_{t_i}^{t} v\,dt + x(t_i)$ (unidades en km, h):

En el intervalo $t \in [0,1]$

$$\begin{array}{lll} v_c = 90\,t; & x_c = \frac{90}{2}\,t^2 & (x_c(1) = 45) \\ v_m = 45; & x_m = 45\,t & (x_m(1) = 45) \end{array}$$

En el intervalo $t \in [1,3]$ ¡Cuidado, integramos el tiempo entre 1 y t!

$$\begin{array}{lll} v_c = 90\,; & x_c = 90(t-1) + 45 & (x_c(3) = 225) \\ v_m = 45t; & x_m = \frac{45}{2}\,(t^2-1) + 45 & (x_m(3) = 225) \end{array}$$

En el intervalo $t \in [3,4]$
En el caso del coche no hace falta integrar pues la velocidad es la misma que entre [1,3]:

$$v_c = 90\,; \quad x_c = 90(t-1) + 45 \quad (x_c(4) = 315)$$

Integramos el tiempo entre 3 y t:

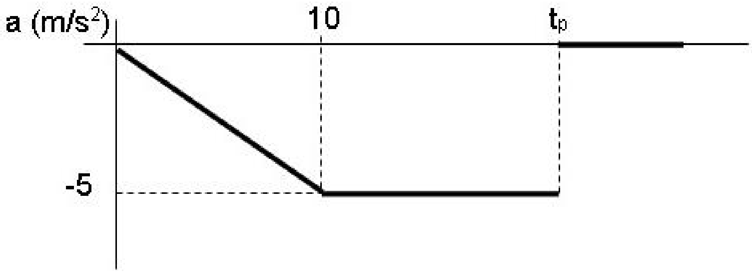
$$v_m = -90\,t + 405; \quad x_m = -\frac{90}{2}\,(t^2-9) + 405(t-3) + 225 \quad (x_m(4) = 315)$$

En el intervalo $t \in [4,5]$
Integramos el tiempo entre 4 y t,

$$\begin{array}{lll} v_c = -90\,t +\,450; & x_c = -\frac{90}{2}(t^2-16) + 450(t-4) + 315 & (x_c(5) = 360) \\ v_m = 45; & x_m = 45\,(t-4) + 315 & (x_m(5) = 360) \end{array}$$

PROBLEMA RESUELTO 2.2.

Un avión aterriza con una velocidad de $200 km/h$ y el piloto aplica los frenos en ese momento, produciendo una deceleración en el avión cuya representación en función del tiempo es la de la figura. En el instante t_p se para.



1. Representar los diagramas de velocidad y espacio recorrido en función del tiempo.
2. Calcular la distancia recorrida antes de pararse.

SOLUCIÓN 2.2.

Todas las magnitudes en unidades fundamentales SI.

Como es un movimiento unidimensional, prescindimos del carácter vectorial de las magnitudes que intervienen en el problema, limitándonos a trabajar con sus valores escalares.

Escribimos las ecuaciones que nos proporcionarán la aceleración en función del tiempo $a(t)$ y, para ello, basta con escribir las ecuaciones de las curvas (en este caso rectas) que nos proporciona la gráfica. En el caso de la recta inclinada, $a(t) = At$, verifica que $a(10) = -5 = 10A$, luego despejando $A = -0.5$

$$\mathrm{a(t)} = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}t & \forall t \in [0, 10] \\ -5 & \forall t \in [10, t_p] \\ 0 & \forall t \in [t_p, \infty] \end{cases}$$

Siendo t_p el instante en que se para.

Recordando la relación entre aceleración y velocidad $[v\,(t) \;=\; \int a\,(t)\;\; dt \,+\, C]$ y entre velocidad y espacio recorrido $[s\,(t) \;=\; \int v\,(t)\; dt + C]$, integramos dos veces para cada intervalo:

Intervalo 1

Las condiciones iniciales son: $\begin{cases} v\,(t=0) &= 200km.h^{-1} = 55.5m.s^{-1} \\ s\,(t=0) &= 0m \end{cases}$

$\forall t \in [0, 10]$

$\mathrm{a(t)} \;=\; -\tfrac{1}{2}\,t \;=\; \tfrac{dv}{dt} \quad\rightarrow\quad \int dv \;=\; -\tfrac{1}{2}\int t\,dt \quad\rightarrow v(t) \;=\; -\tfrac{1}{4}\,t^2 \;+\; C_1$

$v\,(\mathrm{t}=0) \;=\; 55.5\;\; ms^{-1} \;=\; C_1 \quad\rightarrow v(t) \;=\; -\tfrac{1}{4}\,t^2 \;+\; 55.5$

$$\left(\textit{También} \quad \int\limits_{55.5}^{v} dv = -\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{t} t\,dt \right)$$

$$v\,(\mathrm{t}) \;=\; -\frac{1}{4}\,t^2 + 55,5 \;=\; \frac{ds}{dt} \quad\rightarrow \int ds \;=\; -\frac{1}{4}\int t^2\,dt + \int 55.5\,dt \rightarrow s(t) \;=\; -\frac{1}{12}\,t^3 + 55.5\,t + C_2$$

$s\,(\mathrm{t}=0) \;=\; 0 \;=\; C_2 \quad\rightarrow s(t) \;=\; -\tfrac{1}{12}\,t^3 \;+\; 55.5\,t$

$$\left(\textit{También} \quad \int\limits_{0}^{s} ds = \int\limits_{0}^{t} (-\frac{1}{4}\,t^2 \;+\; 55.5)dt \right)$$

Intervalo 2

Necesitamos saber las condiciones iniciales del siguiente movimiento:

$$v\,(\mathrm{t}=10) \;=\; -\frac{1}{4}\,10^2 \;+\; 55.5 \;=\; 30.5\,ms^{-1}$$

$$s\,(\mathrm{t}=10) \;=\; -\frac{1}{12}\,10^3 \;+\; 55.5\,\cdot\,10 \;=\; 471.66\;m$$

$\forall t \in [10, t_p]$

$\mathrm{a(t)} \;=\; -\,5 \;=\; \dfrac{dv}{dt} \quad\rightarrow\quad \displaystyle\int dv \;=\; -\,5\int dt \quad\rightarrow v(t) \;=\; -\,5\,t \;+\; C_3$

$v\,(\mathrm{t}=10) \;=\; 30.5 \;=\; -\,50 \;+\; C_3 \quad\rightarrow C_3 \;=\; 80.5 \quad\rightarrow v(t) \;=\; -\,5\,t \;+\; 80.5$

$$\left(\textit{También} \quad \int\limits_{30.5}^{v} dv = \int\limits_{10}^{t} -5dt \right)$$

$$v(\mathrm{t}) = -5\,t + 80.5 = \frac{ds}{dt} \quad \rightarrow \quad \int ds = -5\int t\,dt + \int 80.5\,dt \quad \rightarrow s(t) =$$
$$= -\frac{5}{2}t^2 + 80.5\,t + C_4$$
$$s(\mathrm{t}=10) = 471.66 = -\frac{5}{2}10^2 + 80.5\cdot 10 + C_4 \quad \rightarrow C_4 = -88.3 \rightarrow$$
$$\rightarrow s(t) = -\frac{5}{2}t^2 + 80.5\,t - 88.3$$

$$\left(Tambi\acute{e}n \quad \int_{471.66}^{s} ds = \int_{10}^{t}(-5\,t + 80.5)dt\right)$$

Intervalo 3

A partir del instante t_p se para.

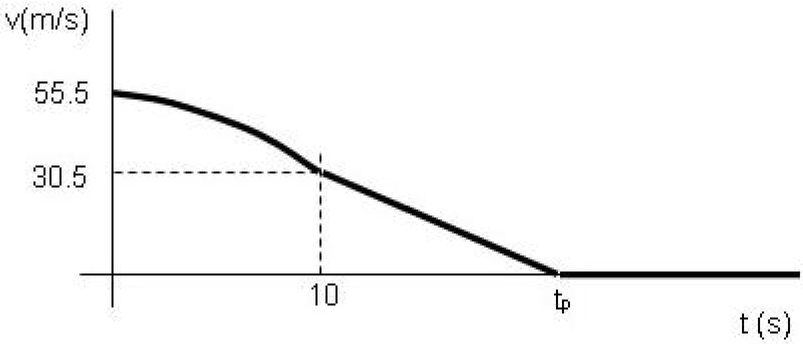
Del análisis de la expresión de la velocidad en el intervalo 3 podemos obtener el instante en que esto sucede:

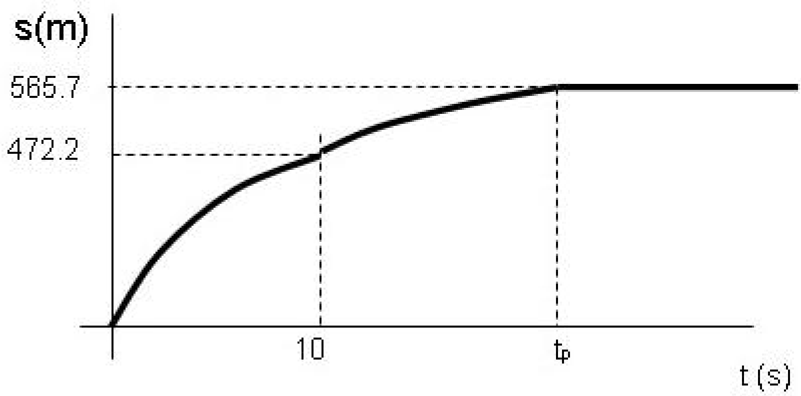
$v(t = t_p) = 0 = -5\,t_p + 80.5 \quad \rightarrow t_p = 16.1\,s$

Y sustituyendo en la expresión obtenida para $s(t)$ en el intervalo 2 obtenemos la distancia total recorrida:

$s(\mathrm{t}=16.1) = -\frac{5}{2}16.1^2 + 80.5\cdot 16.1 - 88.3 = 565.7\,m$

Gráficas





PROBLEMA RESUELTO 2.3.

La velocidad de una partícula en unidades fundamentales SI en función del tiempo es:

$$\vec{v}(t) = 2t\,\vec{i} + \sqrt{2t}\,\vec{j} - 8\,\vec{k}$$

Si en el instante inicial la partícula se encuentra sobre el eje Oz a una distancia de $16m$ del origen de coordenadas, calcular:

1. Tiempo t^* para el cual la partícula se encuentra en el plano Oxy.
2. Vector velocidad en t^*.
3. Vector aceleración en cualquier instante.
4. Distancia de la partícula al origen de coordenadas cuando $z = 0$.

SOLUCIÓN 2.3.

1) Determinamos por integración el vector de posición:

$$\int_{\vec{r}(t=0)}^{\vec{r}(t)} d\vec{r}(t) = \int_{t=0}^{t} \vec{v}(t)dt$$

que, con $\vec{r}(t=0) = \left(16\,\vec{k}\right)\; m$, queda

$$\vec{r}(t) = t^2\,\vec{i} + \frac{2t\sqrt{2t}}{3}\,\vec{j} + (16 - 8t)\,\vec{k}$$

Para calcular el tiempo que se pide, basta con anular la componente z: $t^* = 2s$

2) En el instante $t^* = 2s$:

$$\vec{v}(t=2) = \left(4\vec{i} + 2\vec{j} - 8\vec{k}\right) \quad \frac{m}{s}$$

3) Derivamos el vector velocidad:

$$\vec{a}(t) = 2\,\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2t}}\,\vec{j}$$

4) La distancia de la partícula al origen de coordenadas cuando $z = 0$ se calcula determinando el módulo del vector de posición cuando $t = 2s$:

$$\vec{r}(t=2) = \left(4\,\vec{i} + \frac{8}{3}\,\vec{j}\right)\; m$$

y su módulo

$$|\vec{r}(t=2)| = \frac{\sqrt{208}}{3}\; m$$

PROBLEMA RESUELTO 2.4.

El vector aceleración de una partícula material en función del tiempo en unidades fundamentales SI es

$$\vec{a}(t) = 4\,\vec{i} - \sqrt{2\,t}\,\vec{j}$$

Si en el instante inicial se encuentra sobre la parte positiva del eje Ox a una distancia de $2m$ del origen de coordenadas y dirigiéndose hacia él con una velocidad de $4m/s$, determinar, cuando ha transcurrido 1 segundo, las componentes tangencial y normal de su aceleración, expresadas de forma vectorial.

SOLUCIÓN 2.4.

Todas las magnitudes en unidades fundamentales SI.

$$\text{Condiciones Iniciales} \qquad t = 0 \rightarrow \begin{cases} Posici\acute{o}n \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \\ Velocidad \rightarrow \begin{cases} v_x = -4 \\ v_y = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Ecuaciones del movimiento

$$\mathrm{a_x}(\mathrm{t}) = 4 \quad \rightarrow v_{\mathrm{x}}(\mathrm{t}) - v_{\mathrm{x}}(0) = \int_0^t 4\,dt = 4\,t \quad \rightarrow v_{\mathrm{x}}(\mathrm{t}) = 4\,(t-1)$$

$$\mathrm{a_y}(\mathrm{t}) = -\sqrt{2\,t} \quad \rightarrow v_{\mathrm{y}}(\mathrm{t}) - v_{\mathrm{y}}(0) = \int_0^t -\sqrt{2\,t}\,dt = -\frac{2\sqrt{2}}{3}\,t^{3/2} \rightarrow v_{\mathrm{y}}(\mathrm{t}) = -\frac{2\sqrt{2}}{3}\,t^{3/2}$$

Es decir $\vec{v}(t) = (4t-1)\vec{i} - \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{\frac{3}{2}}\vec{j}$

En el instante de interés $(t = 1)$:

$$\vec{a}(1) = 4\,\vec{i} - \sqrt{2}\,\vec{j}$$

$$\vec{v}(1) = -\frac{2\sqrt{2}}{3}\,\vec{j}$$

Y por tanto: $\vec{u}_t = \frac{1}{|\vec{v}(1)|}\vec{v}(1) = -\vec{j}$

Y la componente de la aceleración tangencial la calculamos proyectando en este instante la aceleración total en la dirección y sentido del vector tangente $a_t = \vec{a}\cdot\vec{u}_t = \sqrt{2}$

Y le damos carácter vectorial con el vector unitario tangente: $\vec{a}_t = a_t\,\vec{u}_t = -\sqrt{2}\,\vec{j}$

Y el vector aceleración normal será la diferencia entre la aceleración total y la componente tangencial: $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n \rightarrow \vec{a}_n = \vec{a} - \vec{a}_t \rightarrow \vec{a}_n = 4\,\vec{i}$

PROBLEMA RESUELTO 2.5.

Un punto se mueve en un plano. Su vector de posición en unidades fundamentales SI en función del tiempo es:

$$\vec{r}(t) = 2t\,\vec{i} - t^2\,\vec{j}$$

Calcular:

1. Ecuación implícita de la trayectoria.
2. Componentes tangencial y normal del vector aceleración en función del tiempo.
3. Radio de curvatura de la trayectoria en función del tiempo.

SOLUCIÓN 2.5.

1) De las ecuaciones paramétricas obtenemos la trayectoria:

$$\left.\begin{aligned} x &= 2t \\ y &= -t^2 \end{aligned}\right\} \rightarrow t = \frac{x}{2} \rightarrow y = -\frac{x^2}{4}$$

2) Obtenemos la velocidad y la aceleración: $\vec{v}(t) = 2\,\vec{i} - 2t\,\vec{j}$ y $\vec{a}(t) = -2\,\vec{j}$

Obtenemos el vector unitario tangente normalizando la velocidad:

$$\vec{u}_t = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{\vec{i} - t\vec{j}}{\sqrt{1+t^2}}$$

La componente tangencial de la aceleración es:

$$a_t = \vec{a} \cdot \vec{u}_t = -2\,\vec{j} \cdot \frac{\vec{i} - t\,\vec{j}}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}$$

La componente normal de la aceleración es:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \sqrt{4 - \frac{4t^2}{1+t^2}} = \frac{2}{\sqrt{1+t^2}}$$

3) La componente de la aceleración normal se relaciona con el radio de curvatura:

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{4(1+t^2)}{\frac{2}{\sqrt{1+t^2}}} = 2\left(1+t^2\right)^{3/2}$$

PROBLEMA RESUELTO 2.6.

Un punto se mueve en un plano. Su vector de posición en unidades fundamentales SI en función del tiempo es:

$$\vec{r}(t) = 3t^2\,\vec{i} + 6t\,\vec{j}$$

Calcular:

1. Ecuación de la trayectoria.
2. Radio de curvatura de la trayectoria en función del tiempo.
3. Componentes tangencial y normal del vector aceleración en función del tiempo.

SOLUCIÓN 2.6.

1) De las ecuaciones paramétricas obtenemos la trayectoria:

$$\left.\begin{array}{r} x = 3t^2 \\ y = 6t \end{array}\right\} \rightarrow t = \frac{y}{6} \rightarrow y^2 = 12x \rightarrow y = \sqrt{12x}$$

2) Obtenemos la velocidad y la aceleración: $\vec{v} = 6t\,\vec{i} + 6\,\vec{j}$ y $\vec{a} = 6\,\vec{i}$

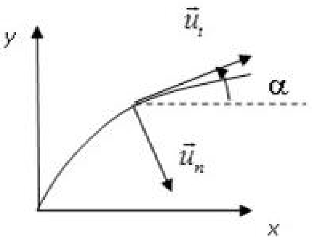
Obtenemos el vector unitario tangente normalizando la velocidad:

$$\vec{u}_t = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{t\,\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{1+t^2}}$$

También se podría obtener derivando la función y=y(x):

$$\vec{u}_t = cos\alpha\vec{i} + sen\alpha\vec{j} = \pm\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}(\vec{i} + tg\alpha\vec{j}) =$$

$$= \pm\frac{1}{\sqrt{1+(dy/dx)^2}}(\vec{i} + (dy/dx)\vec{j})$$



La elección del signo depende del sentido del movimiento en la curva.

$$\vec{u}_t = \frac{t\,\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{1+t^2}}$$

La componente tangencial de la aceleración es:

$$a_t = \vec{a} \cdot \vec{u}_t = 6\vec{i} \cdot \frac{t\,\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{6t}{\sqrt{1+t^2}}$$

La componente normal de la aceleración es:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \sqrt{36 - \frac{36t^2}{1+t^2}} = \frac{6}{\sqrt{1+t^2}}$$

La componente de la aceleración normal se relaciona con el radio de curvatura:

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{36(t^2+1)}{6\Big/\sqrt{1+t^2}} = 6\left(t^2+1\right)^{3/2}$$

3) $$a_t = \frac{6t}{\sqrt{1+t^2}} \qquad\qquad a_n = \frac{6}{\sqrt{1+t^2}}$$

PROBLEMA RESUELTO 2.7.

Una partícula recorre la rama positiva de la parábola $y = x^2$ (unidades fundamentales SI) partiendo del origen de coordenadas.

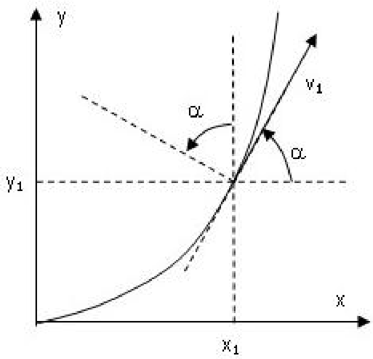
En un cierto instante t_1, su posición es $x_1 = \sqrt{2}\ m$, el módulo de la velocidad es $5m/s$ y su aceleración tangencial es $a_{t1} = 5\ cm/s^2$.

Calcular, en coordenadas cartesianas (todas las magnitudes en unidades fundamentales SI):

1. Vector velocidad en t_1.
2. Vector aceleración en t_1.

SOLUCIÓN 2.7.

1) La velocidad es:



$$\vec{v}_1 = v_1(cos\alpha\vec{i} + sen\alpha\vec{j}) = 5(cos\alpha\vec{i} + sen\alpha\vec{j})$$

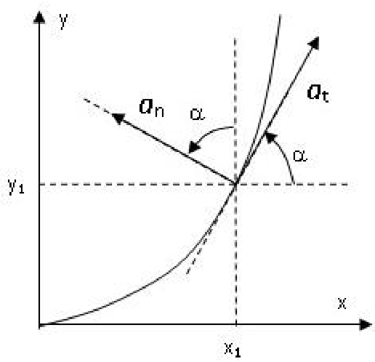
La tangente del ángulo que forma la recta pendiente se obtiene a partir de la derivada de la función y=y(x):

$$tg\alpha = \frac{dy}{dx} = 2x_1 = 2\sqrt{2}$$

$$cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{1}{3} \qquad sen\alpha = \sqrt{1-cos^2\alpha} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Sustituyendo: $\vec{v}_1 = \frac{5}{3}(\vec{i} + 2\sqrt{2}\vec{j}) \quad ms^{-1}$

2) La aceleración tangencial es igual a:



$$\vec{a}_t = 0.05(cos\alpha\vec{i} + sen\alpha\vec{j}) = 0.05(\frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\vec{j})$$

La aceleración normal es:

$$\vec{a}_n = \frac{{v_1}^2}{\rho}(-sen\alpha\vec{i} + cos\alpha\vec{j})$$

El radio de curvatura lo obtenemos de la expresión siguiente válida sólo para curvas planas:

$$\rho = \frac{\left(1+(dy/dx)^2\right)^{3/2}}{|d^2y/dx^2|} = \frac{(1+4x_1^2)^{3/2}}{2} = \frac{27}{2}$$

Sustituyendo: $\vec{a}_n = \frac{25}{27/2}(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j})$

PROBLEMA RESUELTO 2.8.

Una partícula que está, en el instante inicial, sobre el semieje negativo Oy sigue la trayectoria $x^2 + y^2 = 4\ m^2$. El espacio medido sobre ésta desde el punto inicial, en función del tiempo, es $s = 2t$ en unidades fundamentales SI. Se pide, en el instante $t = \frac{\pi}{4}\ s$,

1. Vectores posición, velocidad y aceleración.

2. Componentes tangencial y normal de la aceleración.

SOLUCIÓN 2.8.

Todas las magnitudes en unidades fundamentales SI

1) Los datos que nos proporciona el enunciado del problema son:

Trayectoria: $y = \sqrt{4 - x^2}$

Ley horaria: $s(t) = 2t$

Condiciones iniciales: $t = 0 \rightarrow Posición \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \ -2\ m \end{cases}$

Tenemos que relacionar las componentes del vector de posición con el tiempo y para ello hay que encontrar la relación entre esas componentes y el espacio recorrido sobre la trayectoria. Es decir, buscamos funciones del tipo $s(x)$ o $s(y)$.

Podemos utilizar la relación: $ds^2 \ = \ dx^2 \ + \ dy^2$

Dividiendo ó derivando por dx: $\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 \ = \ 1 \ + \ \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

Y la relación $\frac{dy}{dx}$ la obtenemos de la ecuación de la trayectoria: $\frac{dy}{dx} \ = \ \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$

Es decir $\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 \ = \ 1 \ + \ \frac{x^2}{4-x^2} \quad \rightarrow ds \ = \ \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\, dx$

Ahora podemos integrar para buscar la función $s(x)$:

$$\int_0^s ds \ = \ \int_0^x \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\, dx \quad \rightarrow s \ = \ 2\theta \quad con\ x = 2\, sen\theta$$

Y utilizando la ley horaria $s(t) = 2t$ podemos encontrar $x(t)$ que es una de las cosas que buscamos:

$$s \ = \ 2\theta \ = \ 2\,t \rightarrow x(t) \ = \ 2\, sen\, t$$

Y con la ecuación de la trayectoria, $y(t) = -2\cos t$, (el signo negativo se obtiene con las condiciones iniciales):

El vector de posición será: $\vec{r}(t) = 2\,sen\,t\,\vec{i} - 2\cos t\,\vec{j}$

Para: $t = \frac{\pi}{4}\ s$: $\begin{cases} x(t = \dfrac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\,m \\ y(t = \dfrac{\pi}{4}) = -\sqrt{2}\,m \end{cases}$

Una vez que tenemos el vector de posición en función del tiempo, también tenemos los vectores velocidad y aceleración sin más que derivar.

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= 2\cos t\,\vec{i} + 2\,sen\,t\,\vec{j} \\ \vec{a}(t) &= -2\,sen\,t\,\vec{i} + 2\cos t\,\vec{j} \end{aligned}$$

2) El vector unitario tangente se puede obtener a partir del vector velocidad ya que, es el unitario de este vector:

$$\vec{u}_t = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = cos t\,\vec{i} + sen t\,\vec{j}$$

La componente tangencial de la aceleración se obtiene proyectando el vector aceleración sobre la tangente, y el vector aceleración tangencial multiplicando este valor por el unitario tangente:

$$a_t = \vec{a} \cdot \vec{u}_t = 0 \quad \rightarrow \quad a_t = 0$$

Y la componente normal de la aceleración se obtiene de la relación entre el módulo de la aceleración y sus componentes tangencial y normal:

$$a^2 = {a_n}^2 + {a_t}^2 \rightarrow a_n = \sqrt{a^2 - {a_t}^2} = 2\ \frac{m}{s^2}$$

PROBLEMA RESUELTO 2.9.

Una partícula que está, en el instante inicial, en el origen de coordenadas con velocidad nula sigue la trayectoria $y = 4x^{3/2}$ (unidades fundamentales SI).

El espacio medido sobre ésta, en función del tiempo, es $s(t) = 3t^2$ expresado en unidades fundamentales SI. Se pide, en el instante $t = 5s$,

1. Vector de posición y velocidad.
2. Vector unitario tangente y normal.

SOLUCIÓN 2.9.

Todos los cálculos en unidades fundamentales SI.

1) Los datos que nos proporciona el enunciado del problema son:

La trayectoria es plana.

Trayectoria: $y = 4x^{3/2}$

Ley horaria: $s(t) = 3t^2$

Condiciones iniciales: $t = 0 \rightarrow \begin{cases} Posición \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ Velocidad \rightarrow \begin{cases} v_x = 0 \\ v_y = 0 \end{cases} \end{cases}$

Tenemos que relacionar las componentes del vector de posición con el tiempo y para ello hay que encontrar la relación entre esas componentes y el espacio recorrido sobre la trayectoria. Es decir, buscamos funciones del tipo $s(x)$ o $s(y)$.

Debemos utilizar la relación: $ds^2 = dx^2 + dy^2$

Dividiendo ó derivando por dx: $\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

Y la relación $\frac{dy}{dx}$ la obtenemos de la ecuación de la trayectoria: $\frac{dy}{dx} = 6\,x^{1/2}$

Es decir

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + 36\,x \quad \rightarrow ds = \sqrt{1 + 36\,x}\,dx$$

Ahora podemos integrar para buscar la función $s(x)$:

$$\int_0^s ds \;=\; \int_0^x \sqrt{1\,+\,36\,x}\,dx \quad \rightarrow s \;=\; \frac{(1\,+\,36\,x)^{3/2}}{54} - \frac{1}{54}$$

Y utilizando la ley horaria $s(t) = 3t^2$ podemos encontrar $x(t)$ que es una de las cosas que buscamos:

$$s \;=\; \frac{(1\,+\,36\,x)^{3/2}}{54} - \frac{1}{54} \;=\; 3\,t^2 \quad \rightarrow x(t) \;=\; \frac{(1\,+\,162\,t^2)^{2/3} - 1}{36}$$

Que para $t = 5s$ nos da el valor de la componente x del vector de posición en el instante de interés: $x(t = 5) = 7.03$.

Sustituyendo $x(t)$ para el instante $t = 5s$ en la ecuación de la trayectoria $y = 4x^{3/2}$ podemos encontrar $y(t)$.

En este caso basta con sustituir el valor numérico ya que sólo nos lo piden en ese instante.

$$y\,(t = 5) \;=\; 4 \cdot 7.03^{3/2} \;=\; 74.5 \text{ (unidades SI)}$$

En definitiva, $\vec{r}\,(t = 5) \;=\; 7.03\,\vec{i} + 74.5\,\vec{j}$ o si se prefiere en función del tiempo:

$$\vec{r}\,(t) \;=\; \frac{(1\,+\,162\,t^2)^{2/3} - 1}{36}\,\vec{i} + 4\left(\frac{(1\,+\,162\,t^2)^{2/3} - 1}{36}\right)^{3/2}\vec{j}$$

Una vez que tenemos el vector de posición en función del tiempo, también tenemos el vector velocidad sin más que derivar. A continuación se debe sustituir $t = 5s$ para calcular la velocidad en ese instante.

$$\vec{v}\,(t) \;=\; \frac{1}{36}\frac{2}{3}\left(1\,+\,162\,t^2\right)^{-1/3} 324t\,\vec{i} + 4\frac{3}{2}\left(\frac{(1\,+\,162\,t^2)^{2/3} - 1}{36}\right)^{1/2} \frac{1}{36}\frac{2}{3}\left(1\,+\,162\,t^2\right)^{-1/3} 324t\,\vec{j}$$

$$\vec{v}\,(t) \;=\; 6\left(1\,+\,162\,t^2\right)^{-1/3} t\,\vec{i} + 6\left(\left(1\,+\,162\,t^2\right)^{2/3} - 1\right)^{1/2} \left(1\,+\,162\,t^2\right)^{-1/3} t\,\vec{j}$$

2)

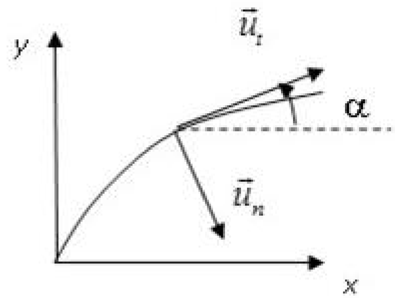
1ª forma (válida sólo en movimientos planos):

A partir de la ecuación de la trayectoria encontrando la pendiente en el punto considerado (el vector unitario de la recta pendiente es el unitario tangente):

$$\vec{u}_t = \cos\alpha\vec{i} + \text{sen}\alpha\vec{j} = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\text{tg}^2\alpha}}(1\vec{i} + \text{tg}\alpha\vec{j}) = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}(\vec{i} + \frac{dy}{dx}\vec{j})$$

Dado que la partícula se aleja del origen el signo correcto es el de componente y positivo:

$$\vec{u}_t = \frac{1}{\sqrt{1+6x^{1/2}}}(\vec{i} + 6x^{1/2}\vec{j})$$



El unitario normal es perpendicular $\vec{u}_t \cdot \vec{u}_n = 0$ con componente y negativa dada la forma de la curva (para obtenerlo basta con intercambiar las componentes x e y y hacer el cambio apropiado de signo en una de ellas):

$$\vec{u}_n = \frac{1}{\sqrt{1+6x^{1/2}}}(6x^{1/2}\vec{i} - \vec{j})$$

2ª forma:

El vector unitario tangente se puede obtener a partir del vector velocidad, ya que, es el unitario de este vector: $\vec{u}_t = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

A continuación se busca un unitario $\vec{u}_n$ perpendicular a éste: $\vec{u}_t \cdot \vec{u}_n = 0$ de la misma manera que se hizo en el apartado anterior.

PROBLEMA RESUELTO 2.10.

Las ecuaciones paramétricas del movimiento de una partícula son:

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t cos\alpha \\ y(t) = v_0 t \\ z(t) = v_0 t sen\alpha - \dfrac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

XOY es el plano horizontal, v_0 y α son constantes y t es el tiempo.

Calcular:

1. Tiempo t^* para el cual la velocidad es horizontal.
2. Vector velocidad en t^*.
3. Vector aceleración en cualquier instante.
4. Distancia de la partícula al origen de coordenadas cuando $z = 0$.

SOLUCIÓN 2.10.

1) Calculamos la componente z de la velocidad y la igualamos a 0:

$$v_z(t) = v_0 sen\alpha - g t^* = 0 \rightarrow t^* = \frac{v_0 sen\alpha}{g}$$

2) Derivamos las componentes cartesianas del vector de posición: $\begin{cases} v_x(t) = v_0 cos\alpha \\ v_y(t) = v_0 \\ v_z(t) = v_0 sen\alpha - g t \end{cases}$

En el instante $t = t^*$ se tiene: $\vec{v}(t) = v_0 cos\alpha \vec{i} + v_0 \vec{j}$

3) Derivamos las componentes cartesianas del vector velocidad: $\begin{cases} a_x(t) = 0 \\ a_y(t) = 0 \\ a_z(t) = -g \end{cases}$

4) La distancia de la partícula al origen de coordenadas se calcula:

$$d = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2}$$

Necesitamos conocer su valor en el instante en que $z = 0$.

$$z(t_1) = v_0 t_1 sen\alpha - \frac{1}{2} g {t_1}^2 = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{2v_0 sen\alpha}{g}$$

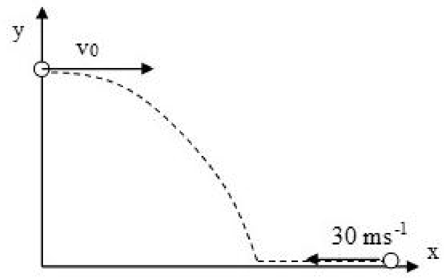
Sustituyendo: $\begin{cases} x(t) = v_0 t_1 cos\alpha = v_0 \dfrac{2v_0 sen\alpha}{g} cos\alpha \\ y(t) = v_0 t_1 = v_0 \dfrac{2v_0 sen\alpha}{g} \end{cases}$

Sustituyendo otra vez:

$$d = \sqrt{x(t_1)^2 + y(t_1)^2 + z(t_1)^2} = \frac{v_0^2}{g} 2sen\alpha\sqrt{1 + cos^2\alpha}$$

PROBLEMA RESUELTO 2.11.

Desde la terraza de un edificio de $125m$ de altura se efectúa un disparo horizontal contra un objetivo que se acerca moviéndose sobre el terreno con movimiento rectilíneo uniforme y dirigiéndose hacia la base del edificio. Si en el instante del disparo el objetivo se encuentra a $0.5km$ de la base del edificio y moviéndose con una velocidad de $108km/h$, determinar la velocidad de salida del proyectil para que se produzca el impacto con el objetivo.



SOLUCIÓN 2.11.

Todas las cantidades en unidades fundamentales SI.

Movimiento del proyectil

Condiciones iniciales: $t = 0 \rightarrow \begin{cases} Posición \rightarrow \begin{cases} x_P = 0 \\ y_P = 125 \end{cases} \\ Velocidad \rightarrow \begin{cases} v_{Px} = v_0 \\ v_{Py} = 0 \end{cases} \end{cases}$

Ecuaciones del movimiento

$$\mathrm{a_{Px}}(\mathrm{t}) = 0 \rightarrow v_{\mathrm{Px}}(\mathrm{t}) - v_0 = \int_0^t \mathrm{a_{Px}}(\mathrm{t})\, dt = 0 \rightarrow v_{\mathrm{Px}}(\mathrm{t}) = v_0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x_P(\mathrm{t}) - 0 = \int_0^t v_{\mathrm{Px}}(\mathrm{t})\, dt = v_0\, t \rightarrow x_P(\mathrm{t}) = v_0\, t$$

$$\mathrm{a_{Py}}(\mathrm{t}) = -g \rightarrow v_{\mathrm{Py}}(\mathrm{t}) - 0 = \int_0^t \mathrm{a_{Py}}(\mathrm{t})\, dt = -g\, t \rightarrow v_{\mathrm{Py}}(\mathrm{t}) = -g\, t \rightarrow$$

$$\rightarrow y_P(\mathrm{t}) - 125 = \int_0^t v_{\mathrm{Py}}(\mathrm{t})\, dt = -\frac{1}{2}\, g\, t^2 \rightarrow y_P(\mathrm{t}) = -\frac{1}{2}\, g\, t^2 + 125$$

Y las ecuaciones paramétricas de su trayectoria son: $\begin{cases} x_P(\mathrm{t}) = v_0\, t \\ y_P(\mathrm{t}) = 125 - \dfrac{1}{2}\, g\, t^2 \end{cases}$

Movimiento del objetivo

$$\mathrm{a}_0(\mathrm{t}) = 0 \to v_0(\mathrm{t}) - (-30) = \int_0^t \mathrm{a}_0(\mathrm{t})\,dt = 0 \to v_0(\mathrm{t}) = -30 \to$$

$$\to x_0(\mathrm{t}) - 500 = \int_0^t v_0(\mathrm{t})\,dt = -30\,t \to x_0(\mathrm{t}) = -30\,t + 500$$

Y las ecuaciones paramétricas de su trayectoria son $x_0(\mathrm{t}) = 500 - 30\,t$

Llamando t_i al instante del impacto, necesariamente $y_P(t_i) = 0$ y de esta condición se obtiene $t_i = \sqrt{\frac{250}{g}} = 5s \quad \left(con\ g = 10\frac{m}{s^2}\right)$

Además para que el impacto exista, en ese instante $x_P(t_i) = x_0(t_i)$.

Así, $5v_0 = 350$, es decir $v_0 = 70m/s$.

PROBLEMA RESUELTO 2.12.

Desde el origen de coordenadas del sistema de la figura (eje OX en la superficie terrestre, eje OY vertical) y en el instante $t = 0$, se lanza un proyectil de masa m con velocidad inicial v_0 que forma un ángulo α con la horizontal. Se sabe que la altura máxima (y_{max}) es igual a la mitad del alcance (x_{max}). Deducir:

1. Expresiones de la trayectoria, altura máxima y alcance.
2. Valor del ángulo de disparo.
3. Expresión del tiempo t_1 transcurrido desde $t = 0$ hasta que el proyectil colisiona con una masa M soltada en $t = 0$ desde un punto de coordenadas $(x_{max}/4, H)$ sin velocidad inicial.
4. Altura H desde la que se debe soltar la masa M para que haya choque.

SOLUCIÓN 2.12.

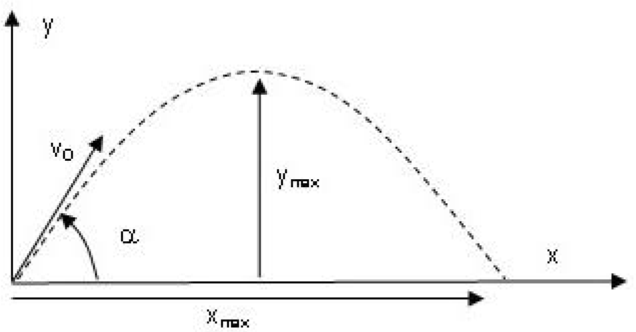
1) Las ecuaciones paramétricas de la trayectoria son (véase apuntes):

$$(1) \quad x = v_0 cos\alpha \, t$$

$$(2) \quad y = v_0 sen\alpha \, t - \frac{1}{2}gt^2$$

Despejando el tiempo en la ecuación (1) y sustituyéndolo en la (2), se obtiene la trayectoria:

$$y = x \, tg\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2}(1 + tg^2\alpha)$$



La altura máxima se obtiene imponiendo $v_y = 0$ ($v_y = v_0 sen\alpha - gt$), despejando el tiempo y sustituyéndolo en la ecuación (2):

$$y_{max} = \frac{v_0^2 sen^2\alpha}{2g}$$

El alcance se obtiene imponiendo $y = 0$, despejando el tiempo y sustituyéndolo en la ecuación (1):

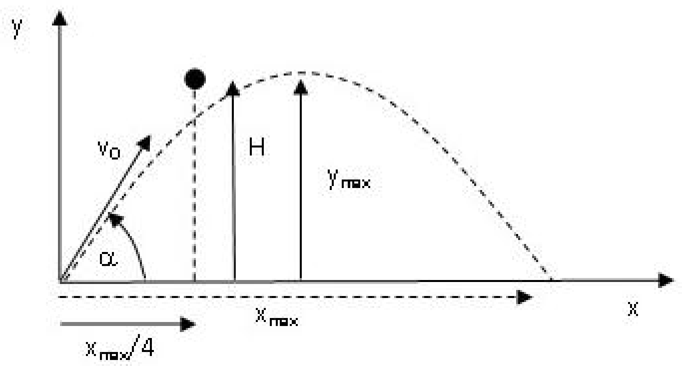
$$x_{max} = \frac{v_0^2 sen2\alpha}{g}$$

2) Imponiendo que la altura máxima es la mitad del alcance como dice el enunciado:

$$y_{max} = \frac{v_0^2 sen^2\alpha}{2g} = \frac{1}{2}x_{max} = \frac{2v_0^2 sen\alpha cos\alpha}{2g} \Rightarrow tg\alpha = 2$$

3) La distancia horizontal recorrida por el proyectil $x = v_0 cos\alpha\ t$ debe ser igual a 1/4 del alcance máximo:

$$v_0 cos\alpha\ t_1 = \frac{1}{4}x_{max} = \frac{2v_0^2 sen\alpha cos\alpha}{4g} \Rightarrow t_1 = \frac{v_0 sen\alpha}{2g}$$



4) La posición y del proyectil en el instante t_1 es:

$$y = v_0 sen\alpha\ t_1 - \frac{1}{2}g{t_1}^2 = v_0 sen\alpha \frac{v_0 sen\alpha}{2g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0 sen\alpha}{2g}\right)^2 = \frac{3}{8}\frac{v_0^2 sen^2\alpha}{g}$$

La ecuación paramétrica de una partícula en caída libre con velocidad inicial nula es:

$$a_y = 0 \rightarrow \int_0^{v_y} dv_y = \int_0^t -gdt \rightarrow v_y = -gt \rightarrow \int_H^y dy = \int_0^t -gtdt \rightarrow y_M = H - \frac{1}{2}gt^2$$

El proyectil y la masa deben coincidir en el instante t_1 en un punto y del espacio:

$$y = \frac{3}{8}\frac{v_0^2 sen^2\alpha}{g} = y_M = H - \frac{1}{2}gt_1^2 = H - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0 sen\alpha}{2g}\right)^2$$

$$H = \frac{3}{8}\frac{v_0^2 sen^2\alpha}{g} + \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0 sen\alpha}{2g}\right)^2 = \frac{v_0^2 sen^2\alpha}{2g} = y_{max}$$

PROBLEMA RESUELTO 2.13.

Un avión en vuelo horizontal, rectilíneo y uniforme a velocidad v_A y altura H dispara un misil con velocidad v'_M relativa al avión y según su misma dirección y sentido contra un barco que navega en ese instante con velocidad v_{0B} y tiene una aceleración dada por la expresión $a_B = a_0 - kv_B$ en la misma dirección y sentido que el avión, siendo a_0 y k constantes y v_B la velocidad del barco en cualquier instante.

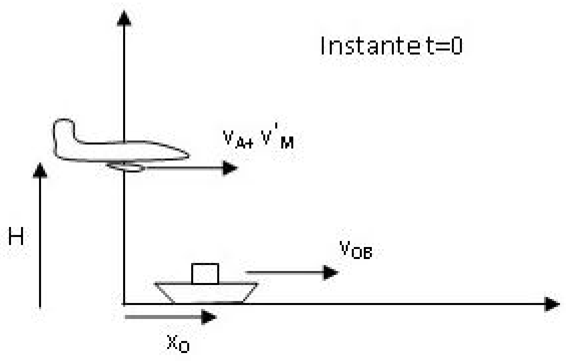
1. Calcular en función de los datos del problema (v_A, v'_M, v_{0B}, k, H) la distancia del barco a la que el avión debe efectuar el disparo para acertar en el blanco..

2. Determinar en función de los datos del problema el ángulo α de picado del avión en el momento del disparo para que el tiempo de vuelo del misil se reduzca a la mitad del calculado en el apartado anterior. Calcular en este caso la nueva distancia a la que ha de efectuarse el disparo para que se produzca impacto. (Supóngase que el movimiento de picado del avión es rectilíneo con velocidad v_A y altura H en el momento del disparo y que el movimiento del barco es el definido anteriormente).

SOLUCIÓN 2.13.

1) **Movimiento del misil**

Condiciones iniciales:



$$t = 0 \rightarrow \begin{cases} Posición \rightarrow \begin{cases} x_M = 0 \\ y_M = H \end{cases} \\ Velocidad \rightarrow \begin{cases} v_{Mx} = v_A + v'_M \\ v_{My} = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Ecuaciones del movimiento

$$\mathrm{a_{Mx}}(\mathrm{t}) = 0 \rightarrow v_{\mathrm{Mx}}(\mathrm{t}) - (v_A + v'_M) = \int_0^t \mathrm{a_{Mx}}(\mathrm{t})dt = 0 \rightarrow x_M(\mathrm{t}) = \int_0^t v_{\mathrm{Mx}}(\mathrm{t})dt = (v_A + v'_M)\,t$$

$$\mathrm{a_{My}}(\mathrm{t}) = -g \rightarrow v_{\mathrm{My}}(\mathrm{t}) = \int_0^t \mathrm{a_{My}}(\mathrm{t})dt = -gt \rightarrow y_M(\mathrm{t}) - H = \int_0^t v_{\mathrm{My}}(\mathrm{t})dt = -\frac{1}{2}gt^2$$

Movimiento del barco

Condiciones iniciales: $t = 0 \rightarrow \begin{cases} Posición \rightarrow x_B = x_0 \\ Velocidad \rightarrow v_B = v_{0B} \end{cases}$

$\mathrm{a_B}(\mathrm{t}) = a_0 - k\,v_B(\mathrm{t}) \quad \rightarrow \int_{v_{0B}}^{v_B} \frac{dv_\mathrm{B}}{a_0 - k\,v_B} = \int_0^t dt \quad \rightarrow$

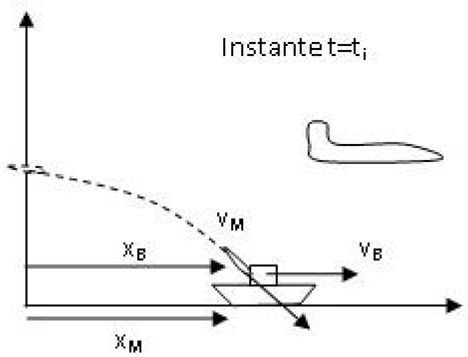
$\rightarrow \quad -\frac{1}{k} Ln \frac{a_0 - k\,v_B}{a_0 - k\,v_{0B}} = t \quad \rightarrow \quad a_0 - k\,v_B = (a_0 - k\,v_{0B})\,e^{-kt}$

Despejando: $v_\mathrm{B}(\mathrm{t}) = \frac{a_0}{k}\left(1 - e^{-kt}\right) + v_{0B}\,e^{-kt}$

Integrando otra vez: $\int_{x_0}^{x_B} dx_\mathrm{B} = \frac{a_0}{k}\int_0^t \left(1 - e^{-kt}\right) dt + v_{0B}\int_0^t e^{-kt}\,dt$

Despejando: $x_\mathrm{B}(\mathrm{t}) = x_0 + \frac{a_0}{k}\,t + \frac{a_0}{k^2}\left(e^{-kt} - 1\right) + \frac{v_{0B}}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)$

Llamando t_i al instante del impacto, necesariamente $y_M(\mathrm{t} = \mathrm{t}_i) = \mathrm{H} - \frac{1}{2}\,g\,t^2 = 0$ y de esta condición se obtiene $t_i = \sqrt{\frac{2H}{g}}$.
Además para que el impacto exista, en ese instante $x_M = x_B$.



Así, se tiene:

$$(v_\mathrm{A} + v'_\mathrm{M})\sqrt{\frac{2H}{g}} = x_0 + \frac{a_0}{k}\sqrt{\frac{2H}{g}} + \frac{a_0}{k^2}\left(e^{-\sqrt{\frac{2H}{g}}t} - 1\right) + \frac{v_{0B}}{k}\left(1 - e^{-k\sqrt{\frac{2H}{g}}}\right)$$

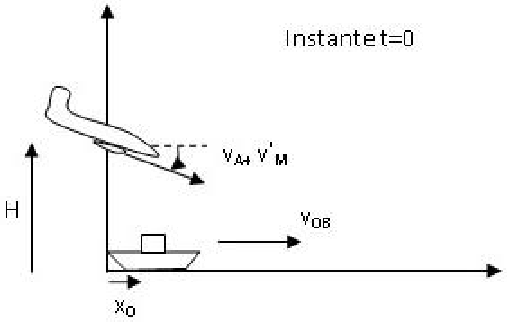
es decir,

$$x_0 = (v_\mathrm{A} + v'_\mathrm{M})\sqrt{\frac{2H}{g}} - \frac{a_0}{k}\sqrt{\frac{2H}{g}} + \frac{a_0}{k^2}\left(1 - e^{-\sqrt{\frac{2H}{g}}t}\right) - \frac{v_{0B}}{k}\left(1 - e^{-k\sqrt{\frac{2H}{g}}}\right)$$

y sustituyendo los datos del problema se obtiene $x_0 = 4826m$.

2) El movimiento del barco es el mismo y para el misil cambian las condiciones iniciales de velocidad.

Condiciones iniciales:



$$t = 0 \rightarrow \begin{cases} Posición \rightarrow \begin{cases} x_M = 0 \\ y_M = H \end{cases} \\ Velocidad \rightarrow \begin{cases} v_{Mx} = (\text{v'}_M + v_A) \cos\alpha \\ v_{My} = -(\text{v'}_M + v_A)\, sen\alpha \end{cases} \end{cases}$$

Y las ecuaciones del movimiento se obtienen integrando como en el caso anterior:

$$\mathrm{a_{Mx}}(\mathrm{t}) = 0 \rightarrow v_{\mathrm{Mx}}(\mathrm{t}) - (v_A + v'_M)\cos\alpha = \int_0^t \mathrm{a_{Mx}}(\mathrm{t})\, dt = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow x_M(\mathrm{t}) = \int_0^t v_{\mathrm{Mx}}(\mathrm{t})\, dt = (v_A + v'_M)\cos\alpha\, t$$

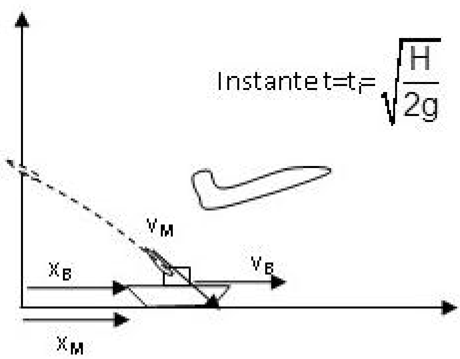
$$\mathrm{a_{My}}(\mathrm{t}) = -g \rightarrow v_{\mathrm{My}}(\mathrm{t}) + (v_A + v'_M)\, sen\alpha = \int_0^t \mathrm{a_{My}}(\mathrm{t})\, dt = -g\, t \rightarrow$$
$$\rightarrow y_M(\mathrm{t}) - H = \int_0^t v_{\mathrm{My}}(\mathrm{t})\, dt = -(v_A + v'_M)\, sen\alpha\, t - \tfrac{1}{2}\, g\, t^2 \rightarrow$$
$$\rightarrow y_M(\mathrm{t}) = H - (v_A + v'_M)\, sen\alpha\, t - \tfrac{1}{2}\, g\, t^2$$

Con las nuevas condiciones el instante del impacto según el enunciado será $t_i = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{H}{2g}}$

Y aplicando las condiciones para que exista el impacto, es decir, $y_M(t_i) = 0$ y $x_M(t_i) = x_B(t_i)$, se obtiene:

$$H - (v_A + v'_M)\, sen\alpha \sqrt{\tfrac{H}{2g}} - \tfrac{1}{2}\, g \left(\sqrt{\tfrac{H}{2g}}\right)^2 = 0$$

$$sen\alpha = 0.3 \rightarrow \alpha = arcsen 0.3 = \; = 0.305 rad$$

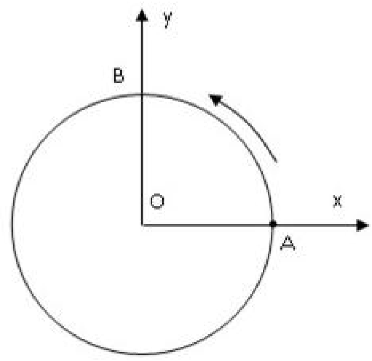


$$(v_A + v'_M)\cos\alpha \sqrt{\frac{H}{2g}} = x_0 + \frac{a_0}{k}\sqrt{\frac{H}{2g}} + \frac{a_0}{k^2}\left(e^{-k\sqrt{\frac{H}{2g}}} - 1\right) + \frac{v_{0B}}{k}\left(1 - e^{-k\sqrt{\frac{H}{2g}}}\right)$$

Y la distancia entre barco y avión en el instante del disparo $x_0 = 2304m$.

PROBLEMA RESUELTO 2.14.

Una partícula se mueve a lo largo de una circunferencia de radio R, en el sentido indicado, partiendo del reposo desde el punto A.
El espacio recorrido en función del tiempo es $s = kt^2$(k constante).
Calcular la velocidad en B y las expresiones vectoriales del vector de posición y del vector velocidad en función del tiempo.



SOLUCIÓN 2.14.

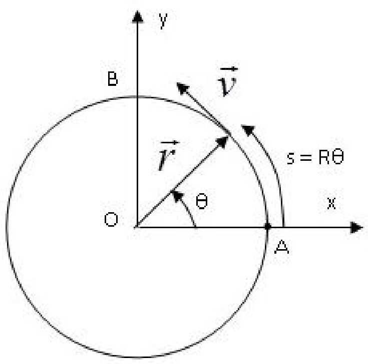
La velocidad y camino recorrido en el punto A es cero: $v_A = 0$, $s(A) = 0$.

La velocidad en módulo se obtiene derivando el camino recorrido: $v = \frac{ds}{dt} = 2kt$

Imponemos que debe recorrer un cuarto circunferencia para llegar a B para obtener el tiempo que tarda:

$$s(B) = \frac{\pi R}{2} = kt_B^2 \quad \Rightarrow \quad t_B = \sqrt{\frac{\pi R}{2k}}$$

El modulo de la velocidad en ese punto es entonces: $v(B) = \sqrt{2k\pi R}$



Como la trayectoria es circular el camino recorrido coincide con el arco de circunferencia: $s = R\theta$

De aquí se puede obtener la variación del ángulo con el tiempo:

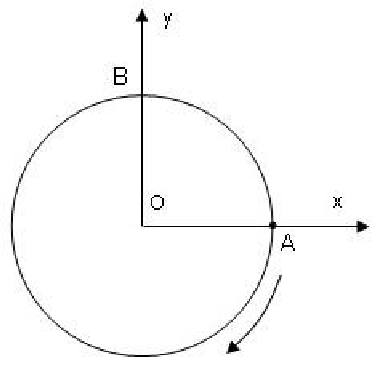
$$s = R\theta = kt^2 \quad \Rightarrow \quad \int_0^\theta d\theta = \int_0^t \frac{kt^2}{R} dt \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{k}{R}t^2$$

$$\vec{r} = R\cos\theta\,\vec{i} \; + \; R\,sen\,\theta\,\vec{j} \quad \Rightarrow \quad \vec{r}(t) = R\cos\left(\frac{k}{R}t^2\right)\vec{i} \; + \; R\,sen\left(\frac{k}{R}t^2\right)\vec{j}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = -2kt\,sen\left(\frac{k}{R}t^2\right)\vec{i} \; + \; 2kt\cos\left(\frac{k}{R}t^2\right)\vec{j}$$

PROBLEMA RESUELTO 2.15.

Una partícula recorre la circunferencia de radio 8m de la figura en el sentido indicado.
El espacio recorrido en función del tiempo en unidades fundamentales SI es: $s(t) = \pi\sqrt{4+t}$
Si en el instante $t = 5s$ la partícula pasa por el punto A, calcular el tiempo que tarda en llegar a B, el módulo de la velocidad en B y las expresiones vectoriales del vector de posición y del vector velocidad en función del tiempo.



SOLUCIÓN 2.15.

Todas las magnitudes en unidades fundamentales SI.

Para $t = 5s$ el espacio recorrido sobre la trayectoria es $s(A) = s(t = 5) = 3\pi m$. Cuando pasa por el punto B el espacio recorrido sobre la trayectoria es $s(B) = 3\pi + \frac{3\pi}{2} = \frac{9\pi}{2}\ m$.

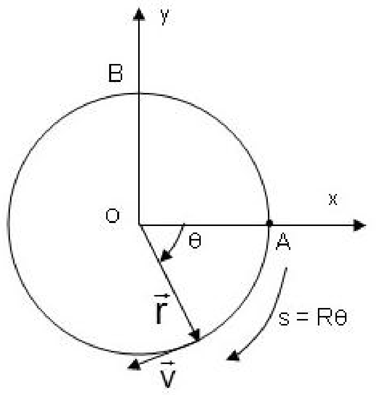
Con la ley horaria obtenemos el instante en que pasa por B:

$$s(B) = \frac{9\pi}{2} = \pi\sqrt{4+t_B} \quad \to \quad t_B = \frac{81}{4}\ s$$

El tiempo que tarda en llegar de A a B será la diferencia: $t_{AB} = t_B - t_A = \frac{61}{4}\ s$

Derivando la ley horaria: $v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = \frac{\pi}{2\sqrt{4+t}}$

Y la velocidad en B: $v(t_B) = \frac{\pi}{\sqrt{97}}\ \frac{m}{s}$



Como la trayectoria es circular el camino recorrido coincide con el arco de circunferencia, y teniendo en cuenta que cuando pasa por A ya ha recorrido $3\pi\, m$, $s(\theta) = 3\pi + 8\theta$

De aquí se puede obtener la variación del ángulo con el tiempo:

$$3\pi + 8\theta = \pi\sqrt{4+t} \quad \to \quad \theta(t) = \frac{\pi\sqrt{4+t} - 3\pi}{8} \quad (t \geqslant 5)$$

Y como:

$$\vec{r}(\theta) = 8\,cos\,\theta\,\vec{i}\; - \;8\,sen\,\theta\,\vec{j}$$

Entonces:

$$\vec{r}(t) = 8\,cos\left(\frac{\pi\sqrt{4+t} - 3\pi}{8}\right)\,\vec{i}\; - \;8\,sen\left(\frac{\pi\sqrt{4+t} - 3\pi}{8}\right)\,\vec{j} \quad (t \geqslant 5)$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = -\frac{\pi}{2\sqrt{4+t}}\,sen\left(\frac{\pi\sqrt{4+t} - 3\pi}{8}\right)\,\vec{i}\; + \;\frac{\pi}{2\sqrt{4+t}}\,cos\left(\frac{\pi\sqrt{4+t} - 3\pi}{8}\right)\,\vec{j} \quad (t \geqslant 5)$$

PROBLEMA RESUELTO 2.16.

Un barco navega sobre aguas planas turbulentas. La velocidad del agua, en coordenadas polares, con respecto a un sistema absoluto fijo, es $\vec{v_A} = -Ar\vec{u_r} + B\vec{u_\theta}$, siendo A y B constantes positivas.

Inicialmente el barco se encuentra en el punto de coordenadas $(r_0, 0)$.

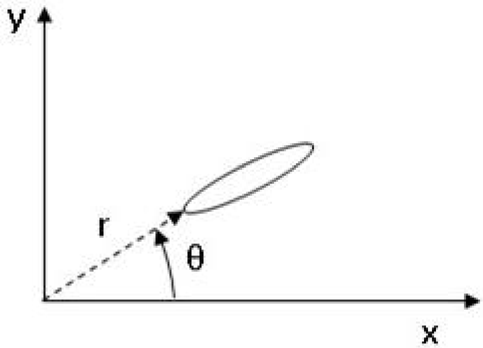
Con objeto de alejarse del origen de coordenadas, el barco mantiene en todo instante una velocidad $\vec{v'} = V\vec{u_r}$ relativa al agua, de forma que su aceleración relativa al agua es prácticamente nula.

Hállese:

1. La velocidad absoluta del barco, en función del tiempo, expresada en coordenadas polares.
2. El valor mínimo de V necesario para que el barco se aleje del origen de coordenadas.
3. La aceleración absoluta del barco, en coordenadas polares, en función de la distancia al origen.

SOLUCIÓN 2.16.

1) La velocidad absoluta del barco es: $\vec{v} = \vec{v'} + \vec{v}_A = (V - Ar)\vec{u}_r + B\vec{u}_\theta$



La velocidad en polares es: $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\theta\vec{u}_\theta$

Igualando:

$$\dot{r} = V - ar$$
$$r\dot{\theta} = B$$

$$\int_{r_0}^{r} \frac{dr}{V - ar} = \int_0^t dt \rightarrow -\frac{1}{A}\ln\frac{V - Ar}{V - Ar_0} = t \rightarrow V - Ar = (V - Ar_0)e^{-At}$$

$$r = \frac{V}{A} + (r_0 - \frac{V}{A})e^{-At}$$
$$\dot{r} = (V - r_0 A)e^{-At}$$

Sustituyendo:

Para $t \to \infty$ se tiene: $\begin{cases} r \to \dfrac{V}{A} \\ \dot{r} \to 0 \end{cases}$

Que es una trayectoria circular de radio V/A y velocidad de módulo B.

$$\vec{v} = (V - r_0 A)e^{-At}\,\vec{u}_r + B\vec{u}_\theta$$

2) El barco se aleja si $\dot{r} > 0 \to V > r_0 A$

Al cabo de un tiempo $t \to \infty$ el barco se acercará a la posición $r \to \frac{V}{A}$.

3) La aceleración en polares es:

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{u}_\theta$$

Aplicamos la regla de la cadena para obtener las derivadas:

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{dr}\frac{dr}{dt} = \dot{r}\frac{d\dot{r}}{dr} = -(V - Ar)A$$

$$r\dot{\theta}^2 = \frac{(r\dot{\theta})^2}{r} = \frac{B^2}{r}$$

$$r\ddot{\theta} = r\frac{d\dot{\theta}}{dt} = r\frac{d\dot{\theta}}{dr}\dot{r} = r\dot{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{B}{r}\right) = -r(V - Ar)Br^{-2} = -\frac{(V - Ar)B}{r}$$

La aceleración queda: $\vec{a} = \left[-\frac{B}{r} - A(V - Ar)\right]\vec{u}_r + \frac{B(V-Ar)}{r}\vec{u}_\theta$

Para $t \to \infty$ se tiene: $\begin{cases} a_\theta \to 0 \\ a_r \to -\dfrac{B^2}{r_0} \end{cases}$

Que corresponde a una trayectoria circular de radio V/A y velocidad de módulo B.