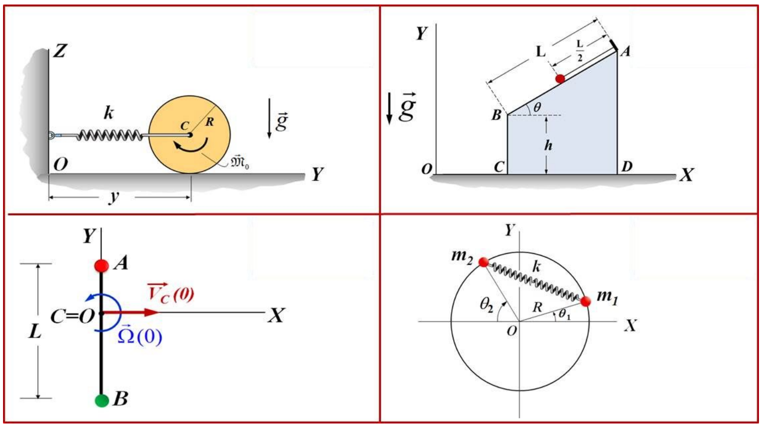
Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO

FÍSICA I

PROBLEMAS RESUELTOS

José Carlos JIMÉNEZ SÁEZ
Santiago RAMÍREZ DE LA PISCINA MILLÁN



4.- DINÁMICA DE LA PARTÍCULA

4 Dinámica de la Partícula

PROBLEMA RESUELTO 4.1.

Desde la superficie de la Tierra se lanza una pelota, verticalmente hacia arriba, con una velocidad inicial v_0 . La pelota está sometida a la acción de un viento que ejerce sobre ella una fuerza horizontal proporcional a su altura con respecto al suelo, siendo k la constante de proporcionalidad. Se pide:

1. Deducir las unidades de k en el SI.
2. Calcular, para un instante t, la posición de la pelota, su velocidad y su aceleración, dando las expresiones vectoriales en los tres casos.
3. Calcular las coordenadas del punto de máxima elevación y del punto de máximo alcance de la pelota.

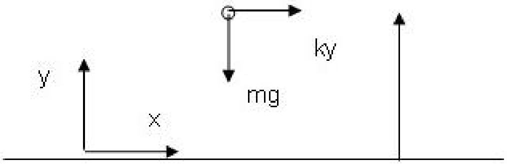
DATOS: $m = 0.1kg$ $\quad v_0 = 10m/s$ $\quad k = 0.4 unidades fundamentales SI$ $\quad g = 10m/s^2$

SOLUCIÓN 4.1.

Eje x horizontal, eje y vertical, lanzamiento desde el origen de coordenadas.

1) $F = ky \;\Rightarrow\; [k] = \frac{[F]}{[L]} \Rightarrow\; k \; se \; mide \; en \; \frac{N}{m}$

2) Condiciones iniciales: $t = 0 \begin{cases} x = 0 & y = 0 \\ v_x = 0 & v_y = v_0 \end{cases}$



a) según el eje y:

$$-mg = ma_y \;\Rightarrow\; a_y = -g \;\Rightarrow \int_{v_0}^{v_y} dv_y = \int_0^y -gdt \;\Rightarrow v_y = v_0 - gt \Rightarrow \int_0^y dy = \int_0^y (v_0 - gt)dt$$

$$y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

b) según el eje x:

$ky = ma_x \quad \Rightarrow \quad a_x = \frac{k}{m}y \quad \Rightarrow \quad a_x = \frac{k}{m}(v_0 t - \frac{1}{2}gt^2) \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \int\limits_0^{v_x} dv_x = \int\limits_0^t \frac{k}{m}(v_0 t - \frac{1}{2}gt^2)dt \Rightarrow \; v_x = \frac{k}{m}\int_0^t (v_0 t - \frac{1}{2}gt^2)dt = \frac{k}{m}\left[\frac{v_0 t^2}{2} - \frac{gt^3}{6}\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow \int\limits_0^x dx = \int_0^t v_x \, dt \Rightarrow x = \frac{k}{m}\int_0^t \left(\frac{v_0 t^2}{2} - \frac{gt^3}{6}\right) dt$

$$x = \frac{k}{m}\left(\frac{v_0 t^3}{6} - \frac{gt^4}{24}\right)$$

VECTOR DE POSICIÓN: $\vec{r} = \frac{k}{m}\left(\frac{v_0 t^3}{6} - \frac{gt^4}{24}\right)\vec{i} + \left(v_0 t - \frac{1}{2}gt^2\right)\vec{j}$

VECTOR VELOCIDAD: $\vec{v} = \frac{k}{m}\left(\frac{v_0 t^2}{2} - \frac{gt^3}{6}\right)\vec{i} + (v_0 - gt)\,\vec{j}$

VECTOR ACELERACIÓN: $\vec{a} = \frac{k}{m}\left(v_0 t - \frac{1}{2}gt^2\right)\vec{i} - g\,\vec{j}$

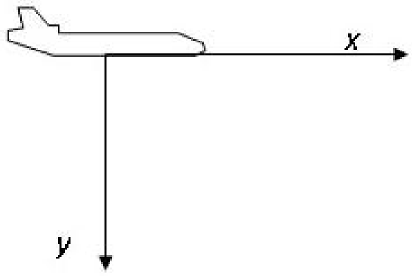
3)

La máxima elevación se calcula imponiendo $v_y = 0$
Máxima elevación (5, 50) m (en 1 segundo)

El máximo *alcance* se calcula imponiendo que $y = 0$
Máximo alcance (80/3,0) m (en 2 segundos)

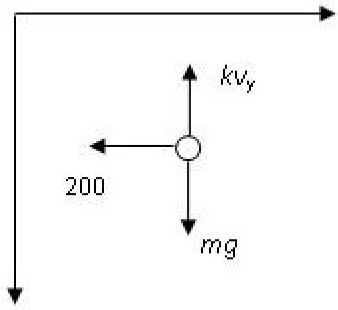
PROBLEMA RESUELTO 4.2.

Desde un avión con velocidad $\vec{v} = 166.67\vec{i} + 2.78\vec{j}\ (m/s)$ y coordenadas $x = 0$ e $y = 0$, según los ejes dibujados en la figura fijos a tierra, se lanza un paquete de masa $m = 100kg$ en el instante $t_0 = 0s$. La acción del viento se puede modelar por una fuerza $\vec{F} = -200\,\vec{i} - kv_y\,\vec{j}\ (N)$ siendo $k = 50Ns/m$, obtener su posición en el instante $t_1 = 100s$ en dichos ejes.



SOLUCIÓN 4.2.

Todas las magnitudes en unidades fundamentales SI.



Integramos las ecuaciones de movimiento en el eje x:

$$m\frac{dv_x}{dt} = -200 \rightarrow \int_{166.67}^{v_x} dv_x = \int_0^t -2dt \rightarrow$$

$$\rightarrow v_x - 166.67 = -2t \rightarrow \frac{dx}{dt} = 166.67 - 2t$$

$$\int_0^x dx = \int_0^t (166.67 - 2t)dt \rightarrow x = 166.67t - t^2$$

$$x(100) = 6666.7\ m$$

Integramos las ecuaciones de movimiento en el eje y:

$$m\frac{dv_y}{dt} = -kv_y + mg = -50v_y + m9.8 \rightarrow \int_{2.78}^{v_y} \frac{dv_y}{(19.6 - v_y)} = \int_0^t \frac{dt}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow -\ln(19.6 - v_y) + \ln(19.6 - 2.78) = \frac{t}{2} \rightarrow v_y - 19.6 = -16.82e^{-\frac{t}{2}} \rightarrow \frac{dy}{dt} = 19.6 - 16.82e^{-\frac{t}{2}}$$

$$\int_0^y dy = \int_0^t (19.6 - 16.82e^{-\frac{t}{2}})dt \rightarrow y = 19.6t - (-2)16.82\ e^{-\frac{t}{2}}\Big|_0^t = 19.6t + 33.64e^{-\frac{t}{2}} - 33.64$$

$$y(100) = 1926.35\ m$$

PROBLEMA RESUELTO 4.3.

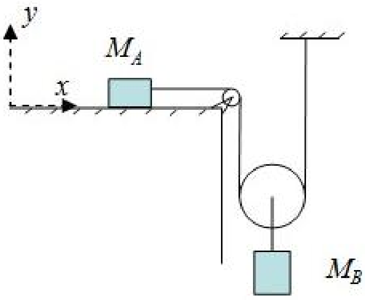
Un bloque de masa M_B desciende unido a una polea ideal. Uno de los extremos de la cuerda ideal que pasa por la polea se encuentra sujeto a un techo mientras que el otro se halla sujeto a otra masa M_A por medio de otra polea también ideal. La masa M_A apoya sobre una superficie con rozamiento (coeficiente de rozamiento dinámico μ_d). Se pide:

1. Aceleración de ambos bloques.

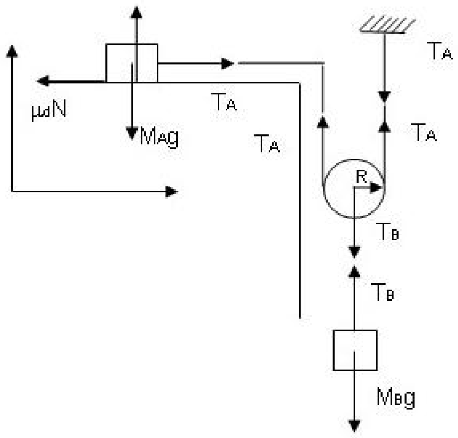
   Si el sistema parte del reposo:

2. Obtener la velocidad de los dos bloques en función del tiempo.

3. Distancia que se han movido los dos bloques al cabo de un tiempo t.



SOLUCIÓN 4.3.



Dibujamos el diagrama de fuerzas:

Las cuerdas son ideales (sin masa), por tanto, transmiten las tensiones. La polea es ideal (sin masa), por tanto, el momento respecto de su centro es cero, lo que implica que las tensiones al ejercerse a la misma distancia R de este punto son iguales: en el problema una es la debida al techo y la otra debida a la masa M_A.

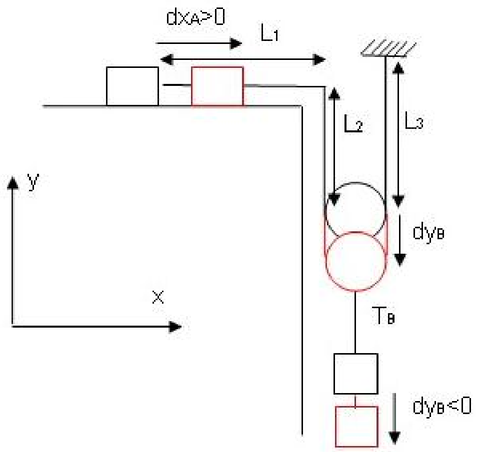
Ecuación de Newton en la polea: $2\ T_A - T_B = 0 \quad (1)$

Ecuaciones de Newton en la masa A: $\begin{cases} N - M_A g = 0 & (2) \\ T_A - \mu_d N = M_A a_A & (3) \end{cases}$

Ecuación de Newton en la masa B (ojo que a_B es positiva hacia arriba según los ejes utilizados): $T_B - M_B g = M_B a_B \quad (4)$

Nota: Se puede usar un sistema de referencia distinto para cada una de las masas.

Necesitamos una ecuación de ligadura para tener suficiente número de ecuaciones:



$$L_1 + L_2 + L_3 = cte$$

$$dL_1 + dL_2 + dL_3 = 0$$

$$dL_1 + 2dL_2 = 0$$

Tenemos que tener presente si la longitud de la cuerda aumenta o disminuye y si la posición de la partícula aumenta o disminuye:

$$\left.\begin{array}{l} dx_A = -dL_1 \\ dy_B = -dL_2 \end{array}\right\} - dx_A - 2dy_B = 0$$

$$-v_A - 2v_B = 0 \rightarrow -a_A - 2a_B = 0 \quad (5)$$

Resolviendo las ecuaciones (1), (2), (3), (4) y (5):

$$a_A = \frac{2(-M_B g + 2\mu_d M_A g)}{4M_A + M_B} = -2a_B$$

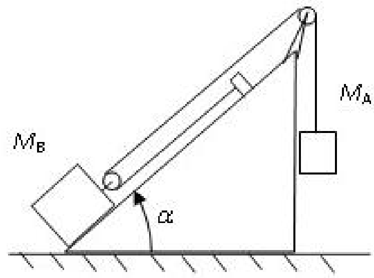
Integrando con las condiciones iniciales de reposo y colocando el origen del sistema de coordenadas en la posición inicial de la masa M_A:

$$\int_0^{v_A} dv_A = \int_0^t a_A dt \rightarrow v_A = a_A t \rightarrow \int_0^{x_A} dx_A = \int_0^t v_A dt \rightarrow x_A = \frac{1}{2} a_A t^2$$

Análogamente, colocando el origen en la posición inicial de la masa M_B: $y_B = -\frac{1}{2} a_B t^2$

PROBLEMA RESUELTO 4.4.

El sistema de la figura se abandona desde el reposo. No hay rozamiento y las poleas no tienen masa. El hilo inextensible está unido por uno de sus extremos a la masa M_A y por el otro a un punto fijo. Calcular, al cabo de $t_1 = 3s$, la tensión de las cuerdas, la velocidad de cada bloque y el espacio recorrido por cada uno.

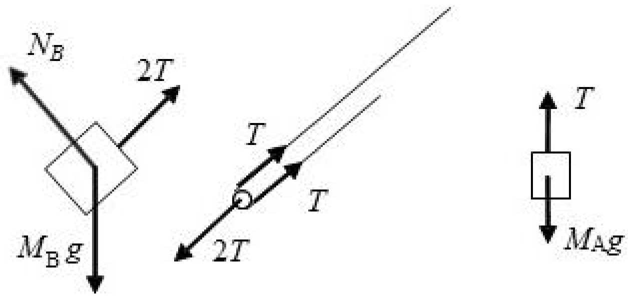


DATOS: $M_A = 600kg$ $M_B = 200kg$ $g = 9.8m/s^2$ $\alpha = 30º$

SOLUCIÓN 4.4.

Todas las magnitudes en unidades fundamentales SI.

Dibujamos los diagramas de fuerzas:



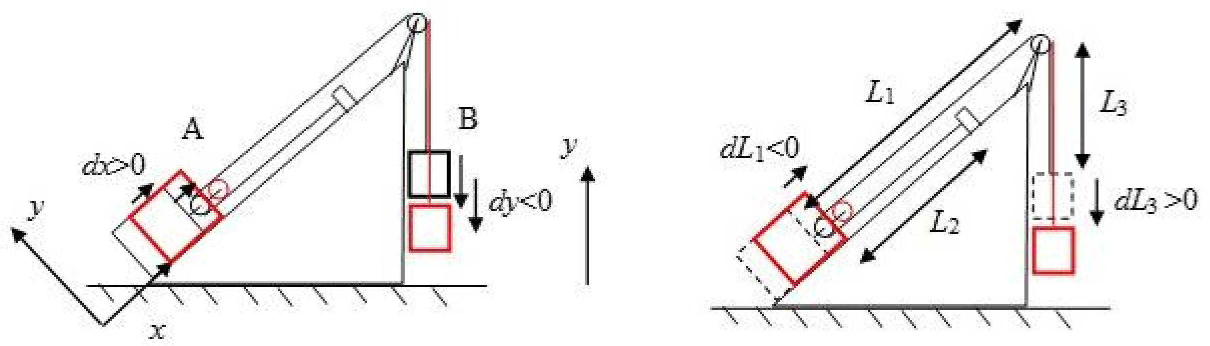
Ecuaciones de Newton para las masas A y B:

$$\begin{cases} -M_A\, g \operatorname{sen}\alpha + 2T = M_A\ a_A \\ -M_B\, g + T = M_B\ a_B \end{cases}$$

Sustituyendo:

$$\begin{cases} -600g \operatorname{sen} 30º + 2T = 600\ a_A \\ -200g + T = 200\ a_B \end{cases}$$

Es fundamental la elección del sentido positivo de los ejes para determinar cuando los incrementos dx y dy son positivos o negativos:



Para calcular la relación entre aceleraciones: $L_1 + L_2 + L_3 = cte$

$dL_1 + dL_2 + dL_3 = 0 \rightarrow 2dL_1 + dL_3 = 0 \rightarrow 2(-dx) + (-dy) = 0$

$2(-dx) + (-dy) = 0 \rightarrow -2a_A - a_B = 0 \rightarrow a_A = -\frac{a_B}{2}$

Resolviendo el sistema se tiene: $a_A = g/14; \quad a_B = -g/7; \quad T = 1680\ N$

Al tratarse de un movimiento uniformemente acelerado (o retardado):

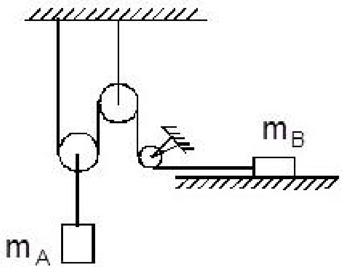
$$v = a_A t \rightarrow \begin{cases} v_A(t = 3s) = \frac{g}{14}3 = 2.1\ m/s \\ \\ v_B(t = 3s) = -\frac{g}{7}3 = -4.2\ m/s \end{cases}$$

El espacio recorrido por las masas es:

$$s = \frac{1}{2}a_A t^2 \rightarrow \begin{cases} \Delta x_A(t = 3s) = \frac{1}{2}\frac{g}{14}3^2 = 3.15\ m \\ \\ \Delta y_B(t = 3s) = -\frac{1}{2}\frac{g}{7}3^2 = -6.3\ m \end{cases}$$

PROBLEMA RESUELTO 4.5.

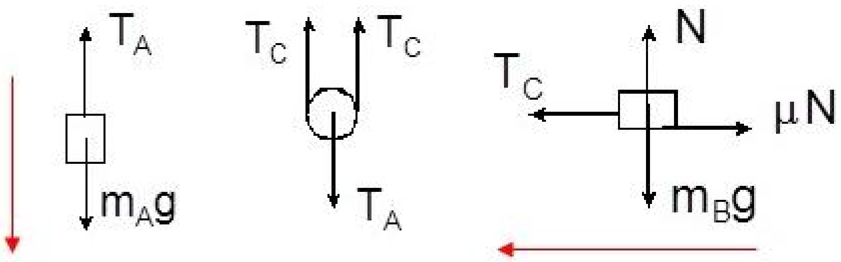
El sistema de la figura se abandona desde el reposo. Calcular la velocidad de la masa A al cabo de un tiempo $t = 1s$. Las poleas se suponen sin masa ni rozamiento y entre la masa B y el suelo existe rozamiento de coeficiente μ.



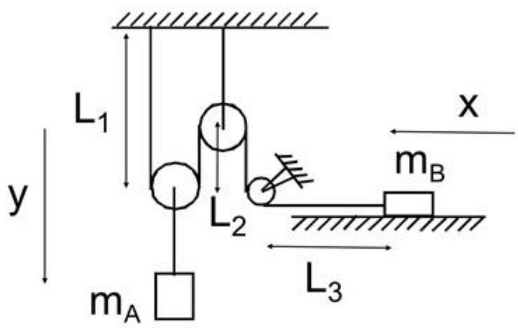
DATOS: $m_A = 40kg$ $m_B = 50kg$ $g = 9.8m/s^2$ $\mu = 0.3$

SOLUCIÓN 4.5.

Diagrama de fuerzas con las flechas rojas indicando el sentido positivo de los ejes:



Ecuaciones de Newton: $\begin{cases} m_A g - T_A = m_A a_A \\ 2T_C = T_A \\ T_C - \mu m_B g = m_B a_B \end{cases}$



Relacionamos las aceleraciones imponiendo que la longitud de la cuerda es constante:

$$m_A g - T_A = m_A a_A$$
$$2T_C = T_A$$
$$T_C - \mu m_B g = m_B a_B$$

La posición y de la masa A aumenta al aumentar la longitud L_1 y la posición x de la masa B disminuye al aumentar la longitud L_3: $\begin{cases} 2dy_A - dx_B = 0 \\ 2a_A = a_B \end{cases}$

Resolviendo el sistema de ecuaciones: $a_A = \frac{m_A g - 2\mu g m_B}{m_A + 4m_B} = 0.4\frac{m}{s^2}$

La velocidad al cabo de un segundo es:

$$v_A = a_A t = 0.4\frac{m}{s}$$

PROBLEMA RESUELTO 4.6.

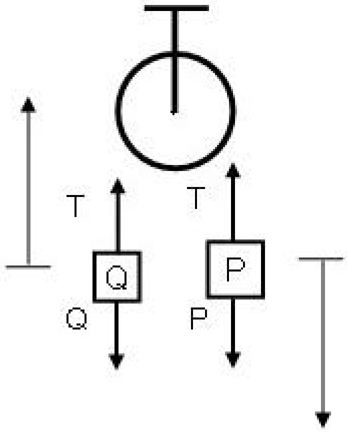
Dos pesos, P y Q, $P > Q$, están atados a los extremos de una cuerda inextensible y sin peso, contenida en un plano vertical y guiados por una polea de masa despreciable. Hállese:

1. Ecuación del movimiento de P suponiendo que parte del reposo.
2. Velocidad de P cuando ha recorrido una distancia h.
3. Tensión de la cuerda.
4. Ecuaciones de movimiento de P cuando la polea se desplaza hacia arriba con aceleración constante a_1.
5. Tensión en este caso.

SOLUCIÓN 4.6.

1) Realizamos el diagrama de fuerzas:

Elegimos dos sistemas de referencia con orientaciones de ejes diferentes, uno para cada partícula. Escribimos las ecuaciones de Newton de las dos partículas en sus respectivos sistemas de referencia y las integramos. Sea s la distancia que sube una masa y la distancia que baja la otra. La ligadura que establece la polea es que lo mismo que sube una masa baja la otra, esto hace que sus velocidades sean iguales y lo mismo se puede decir de las aceleraciones: $a_Q = a_P$. Tal y como se eligieron los sistemas de referencia las aceleraciones de las dos masas son las dos positivas o las dos negativas



$$\left.\begin{aligned} P - T &= \frac{P}{g}a \\ \\ T - Q &= \frac{Q}{g}a \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad a = \tfrac{P-Q}{P+Q}\, g \quad \Rightarrow v = \tfrac{P-Q}{P+Q}\, g\, t \rightarrow s = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{P-Q}{P+Q}\, g\, t^2$$

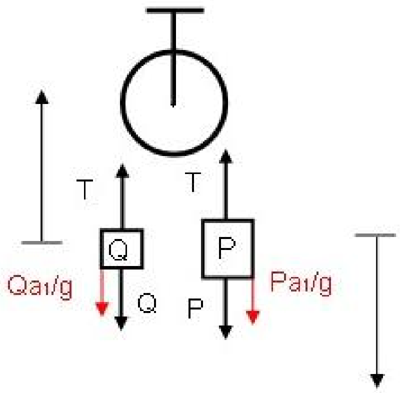
2) Eliminamos de las ecuaciones anteriores el tiempo (en este caso $s = h$). No olvidemos que se trata de un movimiento rectilíneo y uniforme.

$$v = \sqrt{2ah} \rightarrow v = \sqrt{2\,\frac{P-Q}{P+Q}\, g\, h}$$

3)

$$T = P - \frac{P}{g}a \quad \Rightarrow \quad T = P\left(1 - \frac{a}{g}\right) \to T = \frac{2PQ}{P+Q}$$

4)



La polea se desplaza ahora hacia arriba con aceleración a_1. Los sistemas de referencias antes dibujados tienen también esa aceleración, por tanto, en ellos aparecen fuerzas de inercia. El diagrama de fuerzas sería ahora el de la figura de la izquierda:

$$\left.\begin{aligned} P - T + \frac{P}{g}a_1 &= \frac{P}{g}a' \\ T - Q - \frac{Q}{g}a_1 &= \frac{Q}{g}a' \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad P - Q = \frac{P+Q}{g}a' - \frac{P-Q}{g}a_1 \quad \Rightarrow a' = \frac{P-Q}{P+Q}(g + a_1)$$

Integramos nuevamente: $s' = \frac{1}{2} \cdot \frac{P-Q}{P+Q}\,(g + a_1)\,t^2$

5)

$$T = P - \frac{P}{g}(a' - a_1) \ \to T = \frac{2PQ}{P+Q} \cdot \frac{a_1 + g}{g}$$

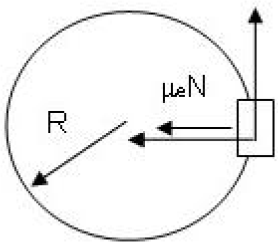
PROBLEMA RESUELTO 4.7.

Un vehículo (partícula puntual) de masa m describe una trayectoria circular de radio R a velocidad constante v. El coeficiente de rozamiento con el suelo tiene un valor μ_e.

1. Calcúlese la velocidad máxima que puede llevar el coche para que no patine.
2. Supóngase ahora que el vehículo se mueve por una curva peraltada un ángulo α respecto de la horizontal, obténgase la misma velocidad máxima.

SOLUCIÓN 4.7.

1) Dibujamos el diagrama de fuerzas sobre el coche en el primer caso. Escribimos las ecuaciones de Newton en la dirección normal, tangencial y binormal, es decir, usamos coordenadas intrínsecas. Suponemos que estamos en una situación en la que el coche está a punto de deslizar, con lo cual el rozamiento estático alcanza su valor máximo $\mu_e N$. Las ecuaciones de Newton en coordenadas intrínsecas establecen:



$\mu_e N = m a_n = m\frac{v^2}{R}$
$N - mg = 0$
Resolviendo: $v = \sqrt{\mu_e g R}$

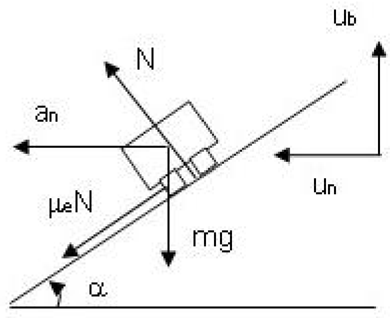
2) Dibujamos el diagrama de fuerzas sobre el coche en el caso de que se halle en una curva con peralte. La aceleración se dirige en la dirección normal a la trayectoria.

Escribimos las ecuaciones en la dirección perpendicular a la carretera (se pueden usar proyecciones en ejes distintos de los 3 perpendiculares):

$$N - mg\cos\alpha = m\frac{v^2}{R}\text{sen}\alpha$$

Escribimos las ecuaciones en la dirección normal a la trayectoria:

$$N\text{sen}\alpha + \mu_e N\cos\alpha = m\frac{v^2}{R}$$



Despejando:

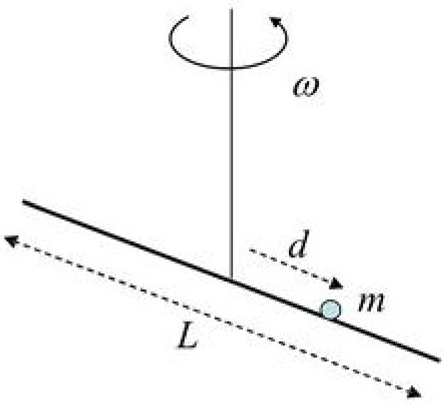
$$g\cos\alpha\text{sen}\alpha + \mu_e g\cos^2\alpha + \frac{v^2}{R}\text{sen}^2\alpha + \mu_e\frac{v^2}{R}\text{sen}\alpha\cos\alpha = \frac{v^2}{R}$$

$$g\cos\alpha\text{sen}\alpha + \mu_e g\cos^2\alpha = \frac{v^2}{R}(-\text{sen}^2\alpha - \mu_e\text{sen}\alpha\cos\alpha + 1)$$

$$v = \sqrt{\frac{Rg(\text{sen}\alpha + \mu_e\cos\alpha)}{(\cos\alpha - \mu_e\text{sen}\alpha)}}$$

PROBLEMA RESUELTO 4.8.

Un insecto de masa $m = 1g$ se mueve deslizando sin rozamiento sobre una barra de longitud $L = 2m$. La barra se halla suspendida del techo por un mecanismo que la sujeta en el centro y la mantiene horizontal. Este mecanismo la permite girar en torno a un eje que pasa por su centro y es perpendicular al plano horizontal con velocidad angular constante $\omega = 10rad.s^{-1}$. En el instante inicial el insecto se halla en el centro de la barra con velocidad $v_0 = 10m.s^{-1}$ relativa a la barra. Se pide integrando las ecuaciones dinámicas en sistemas no inerciales:



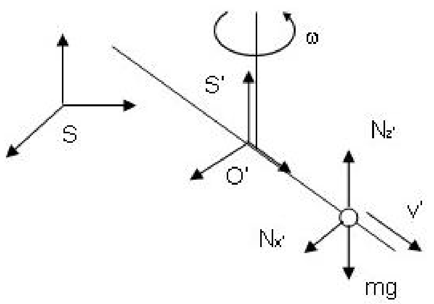
1. Velocidad del insecto relativa a la barra en función de la distancia que se ha alejado del centro de la barra.
2. Reacción que sufre en función de dicha distancia.
3. Ecuaciones paramétricas del movimiento en un sistema ligado a la barra.
4. Tiempo que tarda en llegar al extremo de la barra y velocidad con que lo hace relativa a la barra.

$$\text{Ayuda: } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(\sqrt{x^2+a^2}+x\right)+C$$

SOLUCIÓN 4.8.

Ponemos un sistema de referencia no inercial S' fijo a la barra y con su je OY' paralelo a ella. El sistema S' gira con la barra en torno a su eje OZ' y su origen O' está en su eje de giro situado en el centro de la barra. Dibujamos el diagrama de fuerzas reales y aplicamos la ecuación fundamental de la dinámica:

$$\vec{F}_{\text{Reales}} - m\vec{a}_{O'} - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\overrightarrow{O'P}) - m\vec{\alpha}\times\overrightarrow{O'P} - 2m\vec{\omega}\times\vec{v}' = m\vec{a}'$$



En este caso no existe aceleración angular $\vec{\alpha} = 0$ y $\vec{\omega} = \omega\vec{k}'$ constante (recuérdese que al ser el giro antihorario en torno al eje $\vec{k}'$, el giro es positivo). Además al colocar S' en el eje de giro $a_{\vec{O}'} = 0$.
La posición de la partícula viene dada por $\overrightarrow{O'P} = y'\vec{j}'$, y por tanto sólo existe velocidad en el eje $\vec{j}' : \vec{v} = v'\vec{j}'$.
Las fuerzas reales son la reacción de la barra y el peso.

Operamos para obtener las ecuaciones según los tres ejes coordenados de S':

$$m\omega^2 y' = m\frac{dv'}{dt} = m\ddot{y}'$$
$$2m\omega v' + N_{x'} = 0$$
$$N_{z'} - mg = 0$$

El sistema S' sólo ve aceleración de la partícula en el eje y'. Resolvemos la primera de las ecuaciones (que no es un M.A.S.) aplicando la regla de la cadena:

$$\omega^2 y' = \frac{dv'}{dy'}\frac{dy'}{dt} \rightarrow \omega^2 y' = \frac{dv'}{dy'}v'$$

$$\int_0^{y'} \omega^2 y' dy' = \int_{v_0}^{v'} dv' v' \rightarrow v'^2 = \omega^2 y'^2 + {v_0}^2$$

La ecuación anterior es la ecuación de la energía cinética aplicada a un sistema no inercial ligado a la barra:

$$\frac{1}{2}mv'^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 y'^2 = \frac{1}{2}m{v_0}^2$$

Donde el término $-\frac{1}{2}m\omega^2 y'^2$ es el trabajo de la fuerza centrífuga (y que en el caso de $\vec{\omega}$ constante se podría considerar como una energía potencial centrífuga).

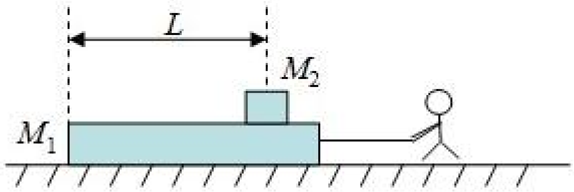
$$\frac{dy'}{dt} = \sqrt{{v_0}^2 + \omega^2 y'^2} \rightarrow \int_0^{y'} \frac{dy'}{\sqrt{{v_0}^2 + \omega^2 y'^2}} = \int_0^t dt \rightarrow \int_0^{y'} \frac{dy'}{\sqrt{\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 + y'^2}} = \int_0^t \omega dt$$

$$\ln\left(\sqrt{\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 + y'^2} + y'^2\right) - \ln\left(\frac{v_0}{\omega}\right) = \omega t$$

Se sustituye el valor de $y' = L/2$ para el cual la partícula llega al final de la barra para hacer los cálculos que nos piden.

PROBLEMA RESUELTO 4.9.

En el instante $t = 0$ un niño empieza a arrastrar al bloque de masa M_1 de la figura realizando una fuerza horizontal de valor T. Entre la masa M_1 y el suelo horizontal el coeficiente de rozamiento es μ. Al cabo de un tiempo t_C el bloque M_2 que se mueve con rozamiento sobre M_1 recorre la distancia L y cae al suelo.



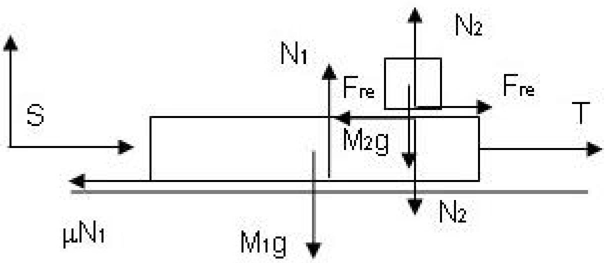
Calcular:

1. Mínimo valor del coeficiente de rozamiento estático entre M_1 y M_2 para que M_2 no se mueva respecto de M_1 y por tanto no caiga al suelo.

2. Valor del coeficiente de rozamiento dinámico entre M_1 y M_2.

SOLUCIÓN 4.9.

1) Dibujamos el diagrama de fuerzas en un sistema de referencia inercial S



Escribimos las ecuaciones de movimiento en cada uno de los ejes:

$$Masa\ M_1 \begin{cases} N_1 - M_1 g - N_2 = 0 \\ -F_{\mathrm{Re}} + T - \mu N_1 = M_1 a_1 \end{cases} \qquad Masa\ M_2 \begin{cases} N_2 - M_2 g = 0 \\ F_{\mathrm{Re}} = M_2 a_2 \end{cases}$$

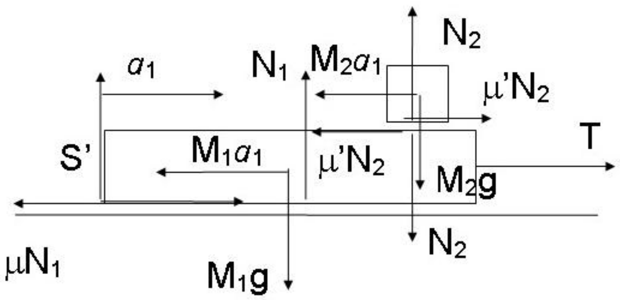
Como M_2 no se mueve respecto de M_1 ambos tienen la misma aceleración: $a_1 = a_2$

Resolvemos las ecuaciones y queda: $N_2 = M_2 g$; $\quad a_1 = \frac{T}{(M_1+M_2)} - \mu g = \frac{F_{\mathrm{Re}}}{M_2}$

Debe verificarse la ley del rozamiento estático:

$|F_{\mathrm{Re}}| \leqslant \mu_e N_2 \rightarrow \frac{T}{(M_1+M_2)} - \mu g \leqslant \mu_e g \rightarrow \mu_{e\ \text{mín}} = \frac{T}{g(M_1+M_2)} - \mu$

2) En la segunda parte del problema usaremos un sistema de referencia no inercial S' ligado al bloque M_1 dado que en él el movimiento de la masa M_2 es más fácil de describir. Llamaremos μ' al coeficiente de rozamiento que nos piden.



Las ecuaciones de movimiento en el sistema S' quedan de la siguiente manera::

$$Masa\ M_1 \begin{cases} N_1 - M_1 g - N_2 = 0 \\ -\mu' N_2 + T - \mu N_1 - M_1 a_1 = 0 \end{cases} \qquad Masa\ M_2 \begin{cases} N_2 - M_2 g = 0 \\ \mu' N_2 - M_2 a_1 = M_2 {a_2}' \end{cases}$$

Ahora la masa M_1 carece de aceleración dado que su movimiento se describe desde un sistema ligado a ella.

Resolviendo las ecuaciones queda:

$$\frac{d{v_2}'}{dt} = {a_2}' = g\left(1 + \frac{M_2}{M_1}\right)(\mu + \mu') - \frac{T}{M_1}$$

Integrando:

$$\int_0^{{v_2}'} d{v_2}' = \int_0^t {a_2}' dt \rightarrow \frac{dx'}{dt} = {v_2}' = {a_2}' t$$

Integrando nuevamente teniendo en cuenta que inicia su movimiento desde el extremo del bloque 1 y el origen de S' está en el otro extremo:

$$\int_L^{x'} dx' = \int_0^t {v_2}' dt \rightarrow x' = L + \frac{1}{2}{a_2}' t^2$$

Imponemos que llegue al otro extremo: $0 = L + \frac{1}{2}{a_2}' t_c^2$

De esta ecuación se despeja μ'.

PROBLEMA RESUELTO 4.10.

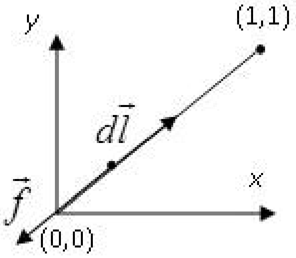
1. Una partícula se mueve a lo largo de la recta $x = y$ partiendo del origen y finalizando en el punto $(1, 1)$ sometido a una fuerza f tangente a la trayectoria de módulo constante y opuesta a su movimiento. Calcular el trabajo realizado por esta fuerza (integral de línea del campo vectorial $\vec{f}$).

2. Una partícula se mueve a lo largo de una circunferencia de radio R sometido a una fuerza f tangente a la trayectoria de módulo constante y opuesta a su movimiento. Calcular el trabajo realizado por esta fuerza en la curva definida por la circunferencia (circulación del campo vectorial $\vec{f}$).

3. Para la misma partícula anterior calcular el trabajo cuando la fuerza es: $\vec{F} = \frac{F_0}{R}(y\,\vec{i} - x\,\vec{j})$.

SOLUCIÓN 4.10.

1) Para calcular la circulación se puede utilizar un parámetro t que describa la trayectoria:



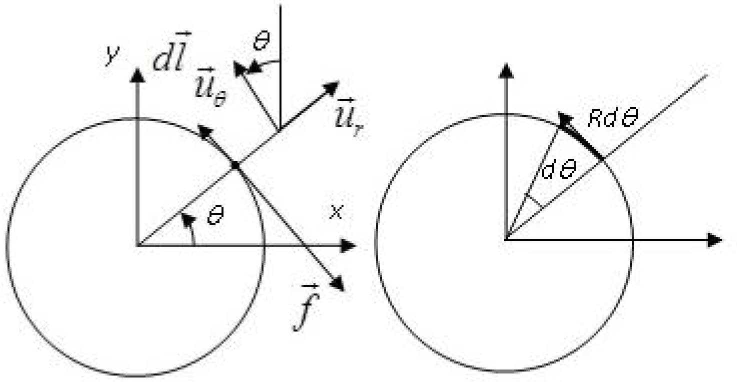
El módulo de la fuerza debe ser f: $\vec{f} = -f\frac{(\vec{i}+\vec{j})}{\sqrt{2}}$

La trayectoria es: $\left.\begin{array}{l} x = t \\ y = t \end{array}\right\} \; t \in (0, 1)$

$$W = \int \vec{f} \cdot \, d\vec{l} = \int \vec{f} \cdot \, (dx\vec{i} + dy\vec{j}) = \int (-\frac{f}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{f}{\sqrt{2}}\vec{j}) \cdot \, (dt\vec{i} + dt\vec{j})$$

$$W = \int_0^1 -\frac{2f}{\sqrt{2}}dt = -\frac{2f}{\sqrt{2}}\, t]_0^1 = -\frac{2f}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}f$$

2) La circulación en una circunferencia se calcula usando un vector unitario $\vec{u}_\theta$ que describa con más facilidad la trayectoria, en concreto, el diferencial de longitud.

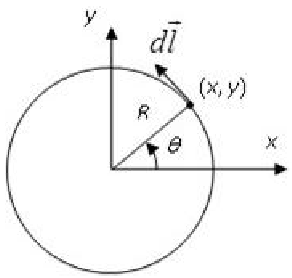


$$W = \int \vec{f} \cdot \, d\vec{l} = \int_0^{2\pi} (-f\,\vec{u}_\theta) \cdot Rd\theta\,\vec{u}_\theta = -fR\,\theta]_0^{2\pi} = -fR2\pi$$

3) Calcular el trabajo de la fuerza: $\vec{F} = \frac{F_0}{R}(y\,\vec{i} - x\,\vec{j})$ a lo largo de una circunferencia.

$$\left.\begin{array}{r} sen\theta = \frac{y}{R} \\ \cos\theta = \frac{x}{R} \end{array}\right\} \rightarrow \vec{F} = \frac{F_0}{R}(R\text{sen}\theta\,\vec{i} - R\text{cos}\theta\,\vec{j}) = F_0(\text{sen}\theta\,\vec{i} - \text{cos}\theta\,\vec{j})$$

$$d\vec{l} = Rd\theta\vec{u}_\theta = Rd\theta(-\text{sen}\theta\,\vec{i} + \text{cos}\theta\,\vec{j})$$

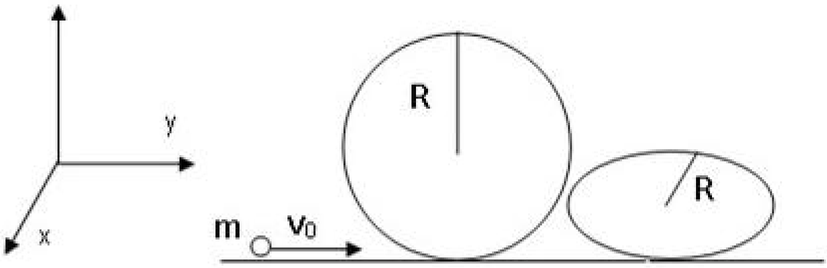


$$W = \int \vec{F} \cdot\ d\vec{l} = \int_0^{2\pi} -(F_0\text{sen}^2\theta\ + F_0\text{cos}^2\theta) \cdot Rd\theta$$

$$W = \int_0^{2\pi} -F_0Rd\theta\ = -2\pi RF_0$$

PROBLEMA RESUELTO 4.11.

Un carrito de feria de masa m, asimilable a una partícula puntual, describe dos lazos circulares uno vertical y otro horizontal por su parte interior, tal y como se muestra en la figura. El primer lazo de radio R es el vertical y lo describe sin rozamiento entrando en él con una velocidad inicial v_0. El segundo también de radio R es el horizontal y en él existe rozamiento dinámico con coeficiente μ_d. (Suponemos que en este segundo lazo la reacción es tal que compensa el peso de la partícula y evita su caída). En el resto de tramos no hay rozamiento.



Obténgase:

1. Velocidad con la que llega al punto más alto del primer lazo.
2. Valor mínimo de la velocidad inicial v_0 necesario para que no pierda contacto con la circunferencia en el primer lazo.
3. Velocidad de entrada al segundo lazo.
4. Módulo de la velocidad en función del tiempo en el segundo lazo suponiendo que entra en él en un tiempo $t = 0s$ en la aproximación $v_0 >> \sqrt{gR}$.

SOLUCIÓN 4.11.

1) Por conservación de la energía:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mg2R \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 - g4R}$$

2) El punto más desfavorable del lazo vertical es el más alto pues en él la velocidad es menor. Cuando pierde contacto $N = 0$. En ese momento:

$$N + mg = m\frac{v^2}{R} \quad N = 0 \Rightarrow v = \sqrt{gR}$$

Como $v = \sqrt{v_0^2 - g4R}$, se tiene que la velocidad mínima es: $v_0 = \sqrt{5gR}$

3) Por conservación de la energía: v_0.

4) $\begin{cases} N_{xy} = m\frac{v^2}{R} \\ N_z - mg = 0 \end{cases}$

$-\mu_d N = -\mu_d\sqrt{N_{xy}^2 + N_z^2} = -\mu_d\sqrt{N_{xy}^2 + m^2g^2} = m\frac{dv}{dt}$

$-\mu_d\sqrt{m^2v^4/R^2 + m^2g^2} = m\frac{dv}{dt} \rightarrow -\frac{\mu_d}{R}\sqrt{v^4 + R^2g^2} = \frac{dv}{dt}$

$\int\limits_0^t -\frac{\mu_d}{R}dt = \int\limits_{v_0}^{v} \frac{dv}{\sqrt{v^4+R^2g^2}} \approx \int\limits_{v_0}^{v} \frac{dv}{v^2} = -\frac{1}{v} + \frac{1}{v_0}$

$$v \approx \frac{1}{\frac{\mu_d}{R}t + \frac{1}{v_0}}$$

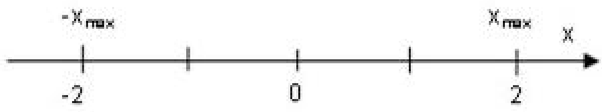
PROBLEMA RESUELTO 4.12.

Un punto móvil describe un movimiento vibratorio armónico simple, sobre el eje x, alrededor del origen.

Se sabe que $\ddot{x} = -2x$, y que para $t = 0$, $v_0 = 0$, $y\, x_0 = -2$ (unidades fundamentales SI).

Calcular: periodo, frecuencia angular, amplitud, fase inicial, ecuación horaria y velocidad del movimiento.

SOLUCIÓN 4.12.



El movimiento armónico simple lineal verifica la ecuación:

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 x$$

De aquí se tiene que la ecuación diferencial del movimiento armónico simple: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

De esta ecuación se puede deducir inmediatamente la pulsación del movimiento:

$$\omega^2 = 2 \rightarrow \omega = \sqrt{2}\, rad/s$$

El periodo se obtiene a partir de la pulsación: $\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow T = \pi\sqrt{2}\ s$

La frecuencia es la inversa del periodo: $\nu = \frac{1}{T} \rightarrow \nu = \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\ s^{-1}$

La ecuación paramétrica del movimiento armónico simple es: $x = Acos(\omega t - \varphi)$

Y la velocidad: $v = -\omega Asen(\omega t - \varphi)$

A partir de las condiciones iniciales $t = 0$, $v_0 = 0$, $y\, x_0 = -2$ se debe calcular la amplitud A y la fase inicial φ.

$$\left.\begin{array}{l} -2 = Acos(-\varphi) \\ 0 = -\sqrt{2}Asen(-\varphi) \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} -2 = Acos\varphi \\ 0 = \sqrt{2}Asen\varphi \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} A = 2 \\ \varphi = \pi \end{array}$$

Sustituyendo:

$$x = 2cos(\sqrt{2}t - \pi)$$

$$v = -2\sqrt{2}sen(\sqrt{2}t - \pi)$$

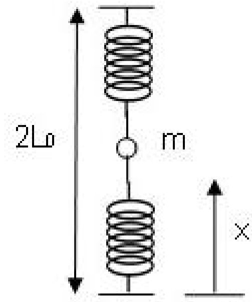
PROBLEMA RESUELTO 4.13.

Una partícula de masa m se halla unida a dos muelles ideales iguales, de longitud natural L_0 y constante elástica k cada uno. El conjunto se sitúa sobre la vertical a la superficie terrestre según se indica en la figura. Se pide:

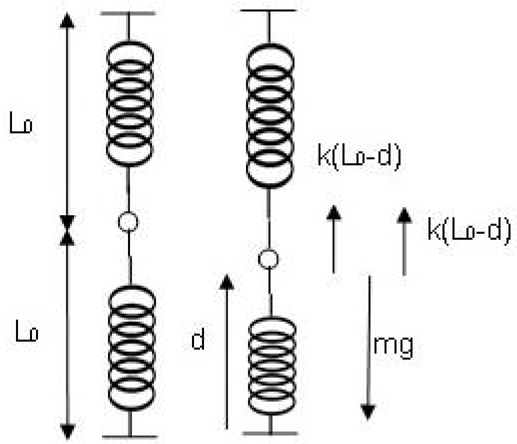
1. Calcular la distancia d en la cual el sistema se encuentra en su posición de equilibrio.
2. Hallar las ecuaciones diferenciales de movimiento.
3. Obtener las ecuaciones de movimiento en los dos casos siguientes.

   a) A partir de la posición de equilibrio se desplaza la masa una distancia vertical $L_0 + d$ hacia arriba y se suelta.

   b) En la posición de equilibrio se la comunica una percusión de valor $\vec{P} = -P\vec{i}$.



SOLUCIÓN 4.13.



Dibujamos el diagrama de fuerzas en equilibrio. Para dibujar la fuerza de los muelles tenemos que comparar la posición del sistema en equilibrio con la posición del sistema con los muelles sin estirar.

$$2k(L_0 - d) - mg = 0$$

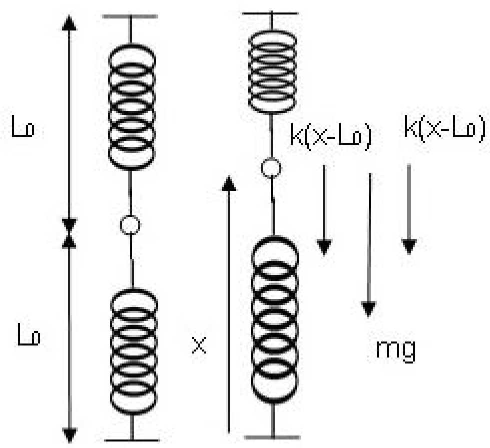
$$d = L_0 - \frac{mg}{2k}$$

En la situación dinámica suponemos que la masa se encuentra en una posición genérica x que comparamos con la situación de los muelles sin estirar:

$$-2k(x - L_0) - mg = m\ddot{x}$$

$$\frac{2k}{m}L_0 - g - \frac{2k}{m}x = \ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{2k}{m}x = \frac{2k}{m}L_0 - g$$



$$\ddot{x} + \frac{2k}{m}x = \frac{2kd}{m} (Ecuación\ diferencial\ del\ M.A.S.)$$

La solución se escribe directamente: una función armónica en la que la frecuencia angular es $\omega = \sqrt{2k/m}$ más un término constante C que verifique la ecuación anterior, llamada ecuación no homogénea.

$$x = A\cos(\omega t + B) + C$$

$$v = -A\omega \text{sen}(\omega t + B)$$

Si sustituimos en la ecuación no homogénea y despejamos obtenemos que $C = d$.

(Nota: La ecuación homogénea $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ tiene de solución $x = A\cos(\omega t + B)$)

Falta calcular A y B a partir de las condiciones iniciales del movimiento.

<u>Caso 3.a</u>

En este caso se tiene que $x(0) = L_0 + d$ y $v(0) = 0$. Sustituyendo:

$$L_0 + d = A\cos(B) + d$$
$$0 = -A\omega \text{ sen}(B)$$

Resolviendo queda: $B = 0$ y $A = L_0$.

<u>Caso 3.b</u>

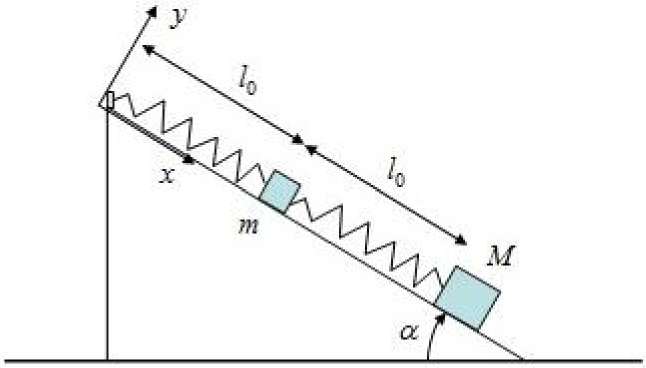
En este caso se tiene que $x(0) = d$ y $v(0) = -P/m$. Sustituyendo:

$$d = A\cos(B) + d$$
$$-\frac{P}{m} = -A\omega \text{ sen}(B)$$

Resolviendo queda que: $B = \pi/2$ y $A = P/(m\omega)$.

PROBLEMA RESUELTO 4.14.

Se dispone de una cuña con un ángulo de inclinación α que permanece fija sobre la superficie terrestre. Sobre la cuña se sitúa una masa m unida a dos muelles iguales de constante elástica k y longitud natural l_0. El muelle superior se halla unido por el otro extremo a la cuña. El inferior a otra partícula de masa M que permanece fija.



Se pide:

1. Posición de equilibrio del sistema medida en el sistema de referencia de la figura.

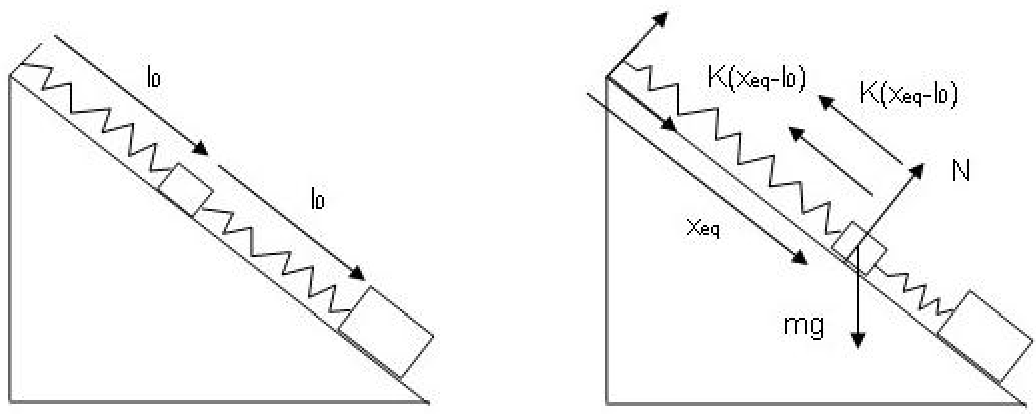
   Situada la masa m en la posición de equilibrio:

2. Calcular la velocidad inicial que se le debe comunicar para que llegue justo a la posición de la masa M sin llegar a chocar con ella.

3. Si existe rozamiento de coeficiente μ qué trabajo realizaría dicha fuerza en el movimiento del apartado 2.

SOLUCIÓN 4.14.

Realizamos el diagrama de fuerzas en equilibrio, para lo cual comparamos esta situación con la del sistema cuando los muelles están sin estirar:



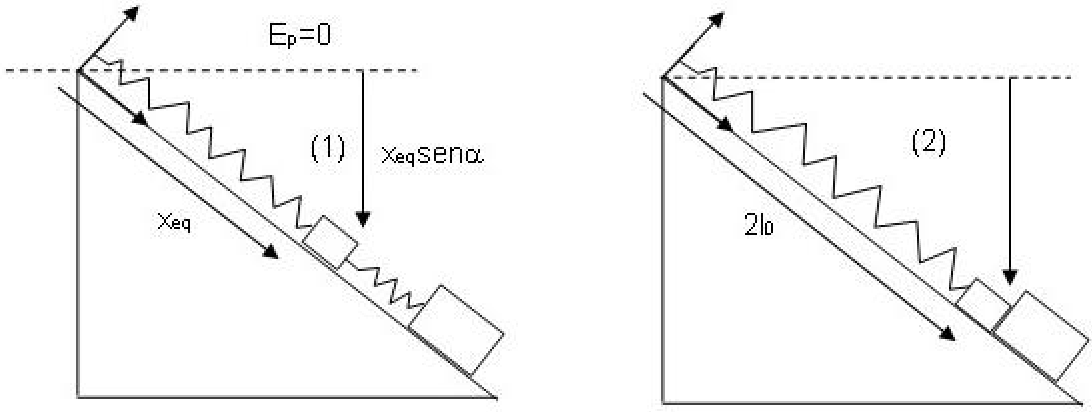
Las ecuaciones de la estática en el sistema de referencia dibujado son las siguientes:

$$N - mg\cos\alpha = 0$$
$$-2k(x_{eq} - l_0) + mg\text{sen}\alpha = 0$$

Resolviendo las ecuaciones queda:

$$x_{eq} = l_0 + \frac{mg\text{sen}\alpha}{2k}$$

Tomamos como referencia de energías potenciales la parte más alta de la cuña.



De esta manera la energía potencial gravitatoria de la masa m será negativa. Para que llegue a la posición de M sin chocar debe llegar con velocidad nula.

Sea v_1 la incógnita del problema:

$E(1) = -mg\text{sen}\alpha x_{eq} + 2\frac{1}{2}k(x_{eq} - l_0)^2 + \frac{1}{2}mv_1^2$

$E(2) = -mg\text{sen}\alpha 2l_0 + 2\frac{1}{2}k(2l_0 - l_0)^2$

En ausencia de fuerzas disipativas se conserva la energía mecánica $E(1) = E(2)$. De esta ecuación se despeja v_1. Recordemos que la normal no realiza trabajo dado que es una fuerza perpendicular al desplazamiento.

Si existe rozamiento dinámico entonces: $W_D = E(2) - E(1)$.

El trabajo en este caso sería igual a:

$$W_D = \int_{x_{eq}}^{2l_0} -\mu N\vec{i} \cdot dx\vec{i} = -\,\mu mg\cos\alpha(2l_0 - x_{eq})$$

PROBLEMA RESUELTO 4.15.

Una partícula material de masa m se mueve bajo el efecto de una fuerza $\vec{F} = -k\vec{r}$, siendo $\vec{r}$ el vector de posición de la partícula en un determinado sistema de referencia. La partícula ocupa en el instante inicial, $t = 0$, la posición $(x_0, 0)$ y se mueve con una velocidad $(0, v_0)$.

Se pide determinar:

1. Las ecuaciones paramétricas del movimiento de la partícula.
2. La trayectoria seguida por ésta.
3. El impulso comunicado por la fuerza desde el instante inicial $t = 0$ hasta un instante genérico t.
4. El trabajo producido por la fuerza entre el instante inicial $t = 0$ y uno genérico t.

SOLUCIÓN 4.15.

1) Las ecuaciones dinámicas del movimiento en coordenadas cartesianas son:

$$\vec{F} = -k\vec{r} = -kx\vec{i} - ky\vec{j} \rightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = -kx \\ m\ddot{y} = -ky \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \ddot{x} + \dfrac{k}{m}x = 0 \\ \ddot{y} + \dfrac{k}{m}y = 0 \end{cases}$$

Obtenemos las ecuaciones de un movimiento armónico simple. La solución se toma de la forma:

$$\begin{aligned} &x = A\cos(\omega t + B)\,; \quad v_x = -A\omega\sin(\omega t + B) \\ &y = C\cos(\omega t + D)\,; \quad v_y = -C\omega\sin(\omega t + D) \\ &\omega = \sqrt{k/m} \end{aligned}$$

Y las constantes A, B, C y D se calculan imponiendo las condiciones iniciales en las cuatro ecuaciones anteriores:

$\vec{r}(t = 0) = (x_0, 0)$ y $\vec{v}(t = 0) = (0, v_0)$

$$\begin{aligned} x &= x_0\cos(\omega t) \\ y &= \frac{v_0}{\omega}\cos(\omega t - \pi/2) = \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t) \end{aligned}$$

2) Elevando al cuadrado y sumando podemos eliminar el parámetro tiempo para calcular la ecuación de la trayectoria:

$$\frac{x^2}{x_0^2} + \frac{y^2}{(v_0/\omega)^2} = 1$$

3) Calculamos el impulso mecánico entre dos instantes: $\vec{I} = I_x\vec{i} + I_y\vec{j}$

$$I_x = \int_0^t F_x(t)dt = \int_0^t -kxdt = \int_0^t -kx_0\cos(\omega t)dt = -\sqrt{mk}x_0\sin(\omega t)$$
$$I_y = \int_0^t F_y(t)dt = \int_0^t -kydt = \int_0^t -k(v_0/\omega)sin(\omega t)dt = mv_0(1 - cos(\omega t))$$

4) Obtenemos el trabajo de esta fuerza conservativa:

$$W = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}\cdot(dx\vec{i} + dy\vec{j}) = \int_{x_0}^{x} -kxdx + \int_0^y -kydy$$

Al ser conservativa no hace falta especificar una trayectoria particular o concreta ($x = x(t)$ e $y = y(t)$) entre los puntos inicial $(x_0, 0)$ y final (x, y). En este caso se supone que ha sido una quebrada formada por los segmentos: $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}$ para $t \in (x_0, x)$ y $\begin{cases} x = x \\ y = t \end{cases}$ para $t \in (0, y)$.

$$W = \frac{1}{2}k(x_0^2 - x^2 - y^2)$$

De la misma manera se puede obtener la energía potencial de la que deriva suponiendo el origen de energías en el punto inicial:

$$E_p = \underbrace{E_p(x_0, 0)}_{0} - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}\cdot(dx\vec{i} + dy\vec{j}) = \int_{x_0}^{x} -kxdx + \int_0^y -kydy$$
$$E_p = \frac{1}{2}k(x_0^2 - x^2 - y^2)$$

Se puede comprobar que: $\vec{F} = -\frac{\partial}{\partial x}E_p\vec{i} - \frac{\partial}{\partial y}E_p\vec{j}$