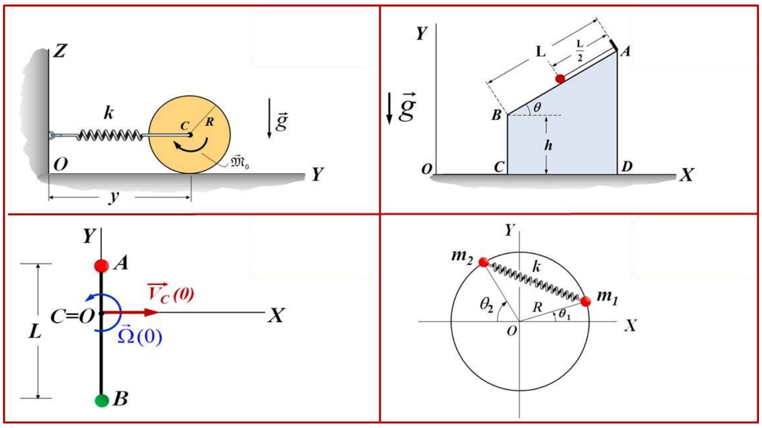
Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO

FÍSICA I

PROBLEMAS RESUELTOS

José Carlos JIMÉNEZ SÁEZ
Santiago RAMÍREZ DE LA PISCINA MILLÁN



5.- DINÁMICA DE SISTEMAS DE PARTÍCULAS

5 Dinámica de Sistemas de Partículas

PROBLEMA RESUELTO 5.1.

Un cañón, anclado en el extremo norte de una plataforma de $5m$ de longitud, que puede moverse libremente sobre una superficie horizontal, dispara balas que quedan empotradas en un blanco montado en el extremo sur de la plataforma. El cañón dispara una bala de $100g$ cada $0.1s$, con una velocidad de salida de $500m/s$.
El peso conjunto del cañón y la plataforma es de $10000kg$.

Calcular y dibujar:

1. Diagrama de velocidades de la plataforma, en función del tiempo.

2. Diagrama del espacio recorrido por la plataforma en función del tiempo.

SOLUCIÓN 5.1.

Velocidad y masa antes:

(cañón, plataforma y proyectil) $\quad V = 0 \qquad M = 10000.1kg$

Velocidad y masa después:

(proyectil) $\quad v_P = 500m/s \qquad m = 0.1kg$

(plataforma y cañón) $\quad v_1 \qquad M - m$

1) Conservación de la cantidad de movimiento dado que sólo actúan fuerzas interiores:

$$0 = MV = mv_P + (M - m)v_1 \Rightarrow v_1 = -v_P \frac{m}{M + m} \neq 0$$

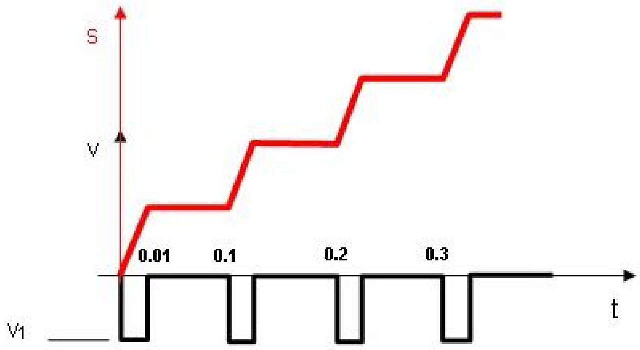
$v_1 < 0$ se mueve en retroceso.

En un sistema de referencia en la plataforma la bala se mueve con $v_p - v_1$ y debe recorrer una distancia $L = 5m$. El tiempo que tarda, despreciando el retroceso de la plataforma es

$$t = \frac{L}{v_P - v_1} \approx \frac{5}{500} = 0.01\, s$$

2) Cuando choca la bala con la plataforma (choque inelástico), cambia la velocidad de la plataforma, el cañón y el proyectil a v_2, de modo que por conservación de la cantidad de movimiento:

$$mv_P + (M - m)v_1 = Mv_2 \Rightarrow v_2 = 0$$



En la gráfica se muestra la velocidad en negro (curva de diente de sierra) y el espacio recorrido por la plataforma en rojo (curva de escalera) con tramos de subida lineales debidos a la velocidad constante.

PROBLEMA RESUELTO 5.2.

Dos masas, M_1 y M_2, apoyan sobre una superficie horizontal sin rozamiento y están unidas entre sí por un muelle de rigidez k y longitud natural l_0.

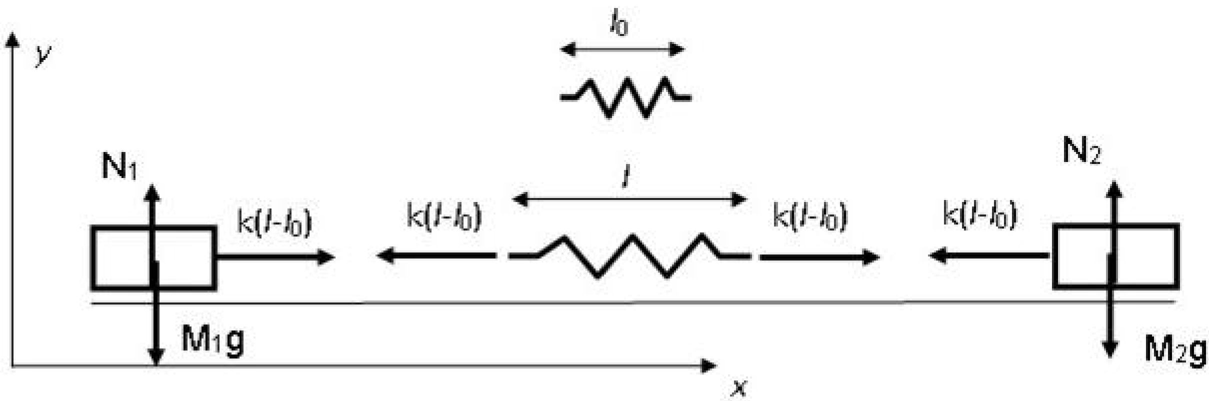
Abandonamos el sistema desde el reposo y con el muelle deformado, con una longitud total $l \neq l_0$.

Determinar:

1. El diagrama de fuerzas que actúan sobre cada masa y sobre el muelle en el instante inicial.

2. La ecuación de la trayectoria de la masa M_2 relativa a la masa M_1 y su representación gráfica en función del tiempo.

SOLUCIÓN 5.2.



1) Si consideramos como nuestro sistema a las dos masas y al muelle no hay fuerzas exteriores en el eje x. Si el sistema son las dos masas las fuerzas del muelle son exteriores, sin embargo se anulan entre sí. Es decir, la situación dinámica es idéntica en los dos casos.

2) Para plantear las ecuaciones dinámicas debemos colocar un sistema de referencia para medir las coordenadas de las partículas.

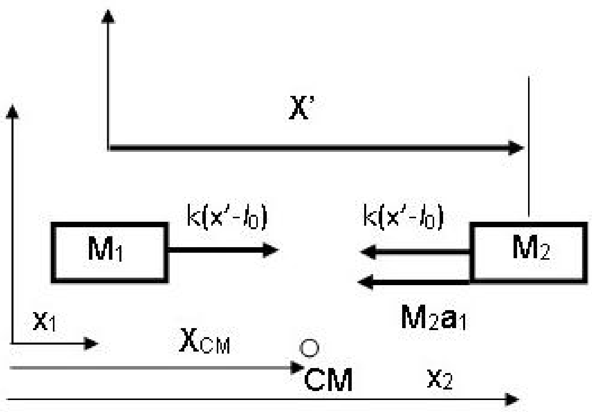
$\Sigma \vec{F}^{ext} = 0 \;\Rightarrow$ El CM permanece en reposo.

Por tanto, si se sabe la posición de una partícula en un sistema de referencia inmediatamente se sabe la de la otra, ya que, la x_{CM} permanece constante.

Es decir:

$$x_{CM} = \frac{x_1 M_1 + x_2 M_2}{M_1 + M_2} = cte \qquad (0)$$

Idéntica ecuación verifican las velocidades y las aceleraciones. No obstante, vamos a poner un sistema de referencia en una de las dos partículas dado que nos piden la posición relativa de una partícula respecto de la otra:



M_1 no tiene aceleración relativa: $k(x' - l_0) - M_1 a_1 = 0$ (1)

Movimiento de M_2 referido al sistema S' ligado a M_1:

$$-k(x' - l_0) - M_2 a_1 = M_2 a_2' = M_2 \frac{d^2 x'}{dt^2} \qquad (2)$$

Sustituimos a_1 obtenida de (1) en la ecuación (2), y operando llamando masa reducida a $\mu = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}$ y teniendo en cuenta que $\frac{d^2}{dt^2}(x' - l_0) = \frac{d^2 x'}{dt^2}$ obtenemos:

$$\frac{d^2(x' - l_0)}{dt^2} + \frac{k}{\mu}(x' - l_0) = 0$$

cuya solución es :

$$x' - l_0 = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{\mu}}\, t - \varphi\right)$$

La velocidad será:

$$\frac{dx'}{dt} = -A\sqrt{\frac{k}{\mu}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{\mu}}\, t - \varphi\right)$$

Las constantes A y φ se obtienen a partir de las condiciones iniciales:

$$t = 0; x'(0) = l; \left(\frac{dx'}{dt}\right)_{t=0} = 0$$

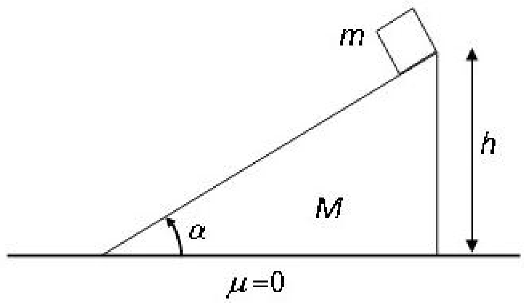
de donde resulta: $x' = l_0 + (l - l_0)\cos\sqrt{\frac{k}{\mu}}\, t$

En variables del sistema inercial tendríamos que: $x' = x_2 - x_1$ (3)

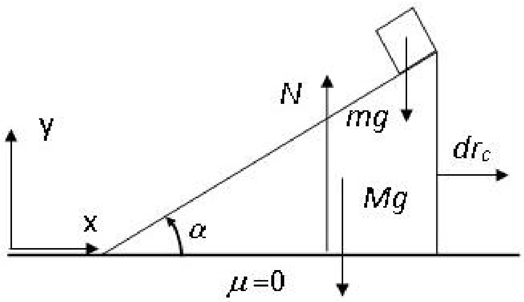
Usando las ecuaciones (0) y (3) se podrían obtener x_1 y x_2.

PROBLEMA RESUELTO 5.3.

El sistema de la figura consta de una cuña de masa M, lado vertical h e inclinación α, que apoya sin rozamiento sobre un suelo horizontal.
En la parte superior se sitúa un bloque de masa $m = M/4$ que puede deslizar sin rozamiento. El sistema se abandona desde el reposo.
Calcúlese la velocidad de la cuña cuando el bloque llega a su extremo inferior.



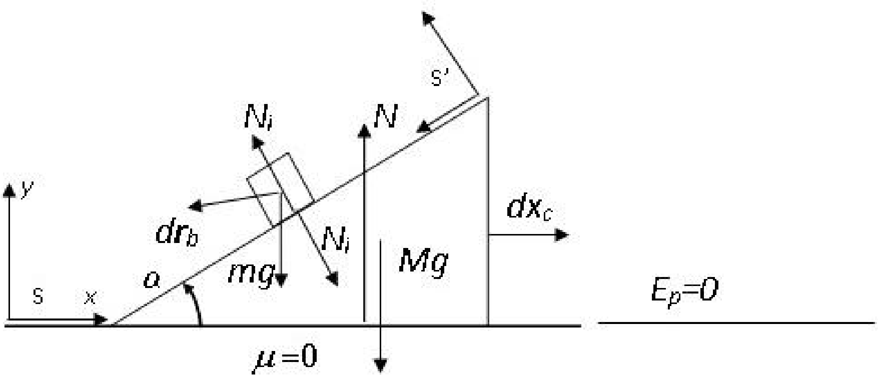
SOLUCIÓN 5.3.



Las fuerzas exteriores al sistema son los pesos y la normal, todos son verticales, por tanto, el centro de masas conserva su velocidad en el eje x, dado que esta era nula inicialmente lo seguirá siendo en todo instante. Sean v_b la velocidad del bloque y v_c la velocidad de la cuña en el instante final.
$W_1 = \int \vec{N} \cdot dx_c\vec{i} = 0$ dado que $\vec{N} \perp \vec{i}$

Consideremos un sistema S' ligado a la cuña y situado en su punto más alto. Por movimiento relativo, se tiene: $\vec{r}_b = x_c\vec{i} + h\vec{j} + \vec{r}' \rightarrow d\vec{r}_b = dx_c\vec{i} + d\vec{r}'$

Sea N_i la reacción entre el bloque y la cuña:
$W_2 = \int \vec{N}_i \cdot d\vec{r}_b + \int -\vec{N}_i \cdot dx_c\vec{i} = \int \vec{N}_i \cdot (dx_c\vec{i} + d\vec{r}') + \int -\vec{N}_i \cdot dx_c\vec{i} = 0$ ya que $\vec{N}_i \perp d\vec{r}'$ y en el sistema S' el desplazamiento es perpendicular al plano de la cuña.



Como las fuerzas interiores y exteriores no realizan trabajo se conserva la energía.

$$0 = E_c(2) + \underbrace{E_p(2)}_{0} - \underbrace{E_c(1)}_{0} - E_p(1) \rightarrow 0 = \frac{1}{2}mv_b^2 + \frac{1}{2}4mv_c^2 - mgh$$

Cuando el bloque llega al extremo inferior llega al nivel de energía potencial cero, y cuando bloque y cuña inician su movimiento la energía cinética es cero.

Como no hay fuerzas exteriores en la dirección horizontal se conserva la cantidad de movimiento del sistema, que es 0:

$\vec{r}_b = x_c\vec{i} + h\vec{j} + \vec{r'} \to \vec{v}_b = v_c\vec{i} + v'(-\cos\alpha\vec{i} - \text{sen}\alpha\vec{j})$

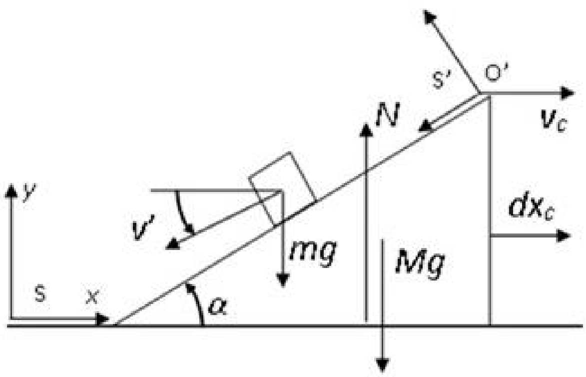
$0 = m\,(v_c - v'\cos\alpha) + 4mv_c \;\to 0 = -mv'\cos\alpha + 5mv_c \to \; v' = \frac{5v_c}{\cos\,\alpha}$

$\vec{v}_b = (v_c - \frac{5v_c}{\cos\,\alpha}\cos\alpha)\vec{i} - \frac{5v_c}{\cos\,\alpha}\sin\alpha\vec{j} = -4v_c\,\vec{i} - 5v_c\tan\alpha\vec{j} \to v_b = \sqrt{16v_c^2 + 25v_c^2\tan^2\alpha}$

Sustituyendo en la ecuación de la energía:

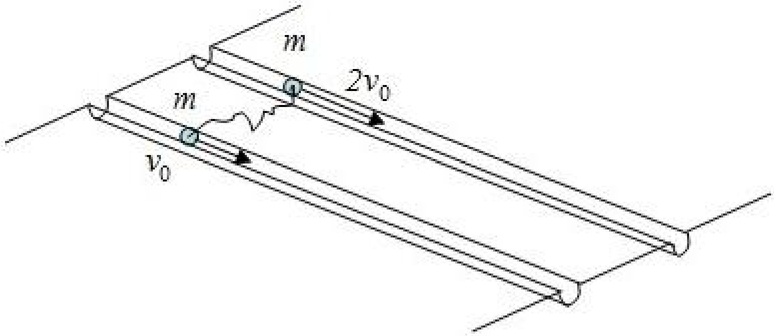
$$gh = \frac{1}{2}(16v_c^2 + 25v_c^2\tan^2\alpha) + \frac{1}{2}4v_c^2 \quad \Rightarrow \quad gh = 10v_c^2 + \frac{25}{2}v_c^2\tan^2\alpha$$

$$v_c = \sqrt{\frac{gh}{(10 + (25/2)\tan^2\alpha)}}$$



PROBLEMA RESUELTO 5.4.

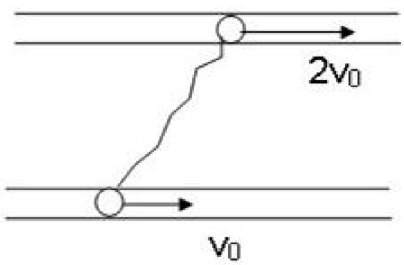
Dos partículas de masa m unidas por un hilo sin masa de longitud L se mueven sin rozamiento a lo largo de dos canales situados en el mismo plano horizontal y separados por una distancia mayor que la longitud de la cuerda, tal y como muestra la figura. Inicialmente, antes de que el hilo se tense, las velocidades de las bolas son $2v_0$ y v_0.

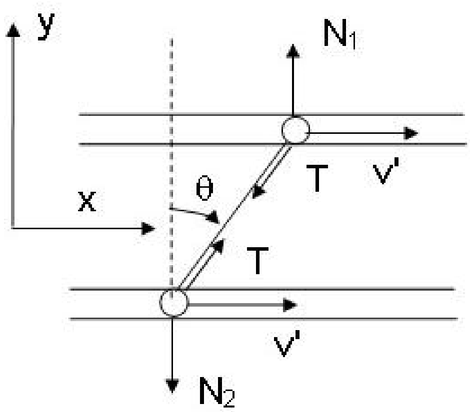


1. Obtener la velocidad del conjunto después de que el hilo se tense.
2. Obtener el momento cinético respecto del centro de masas justo antes de que el hilo se tense e indicar si se conserva.
3. Obtener la energía cinética justo antes de que el hilo se tense e indicar si se conserva.

Al cabo de un cierto tiempo después de que el hilo se tensó, una de las partículas decide aumentar su velocidad y se impulsa mediante una fuerza F que realiza un trabajo W. ¿Cuál es la nueva velocidad de las partículas después de realizar ese trabajo? Probar que la fuerza del hilo sobre las partículas no realiza trabajo sobre el sistema.

SOLUCIÓN 5.4.





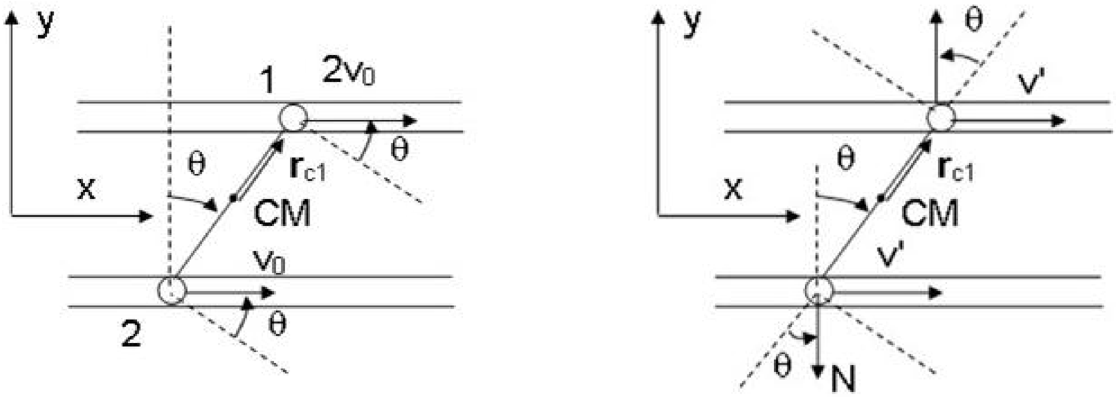
Sean N_1 y N_2 las reacciones de las partículas con el canal. Si consideramos como nuestro sistema el hilo, y las dos masas tendríamos que N_1 y N_2 son fuerzas externas y la tensión T debida al hilo es una fuerza interna. Si consideramos como nuestro sistema sólo las dos masas tendríamos que N_1, N_2 y T son fuerzas externas.

En el eje y se verifica: $\begin{cases} N_1 - T\cos\theta = 0 \\ -N_2 + T\cos\theta = 0 \end{cases}$ de donde se concluye que $N_1 = N_2$.

En el eje x se conserva la cantidad de movimiento del sistema dado que se anulan las fuerzas externas. De aquí deducimos la velocidad de las masas en el momento de tensarse el hilo v'.

$2mv_{CM} = m2v_0 + mv_0 = mv' + mv'$ de donde se deduce $v' = \frac{3}{2}v_0$

En la ecuación anterior se ha usado la ligadura del hilo que supone que después de que este se tensa obliga a las dos partículas a ir a la misma velocidad v'.



El CM del sistema se encuentra en la mitad del hilo por simetría. Eligiendo un eje con origen en la masa 2 y dirección y sentido el del hilo hacia la masa 1 se tendría $d_{CM} = \frac{1}{2m}(Lm+0m) = \frac{L}{2}$.

El momento cinético respecto del CM en el instante inicial se obtiene de la expresión:

$$\vec{L}_{CM} = \vec{r}_{c1} \times m\vec{v}_1 + \vec{r}_{c2} \times m\vec{v}_2 = (-\frac{L}{2}2v_0\cos\theta + \frac{L}{2}v_0\cos\theta)\vec{k}$$

Después de tensarse el hilo:

$$\vec{L}_{CM} = \vec{r}_{c1} \times m\vec{v}_1 + \vec{r}_{c2} \times m\vec{v}_2 = (-\frac{L}{2}v'\cos\theta + \frac{L}{2}v'\cos\theta)\vec{k}$$

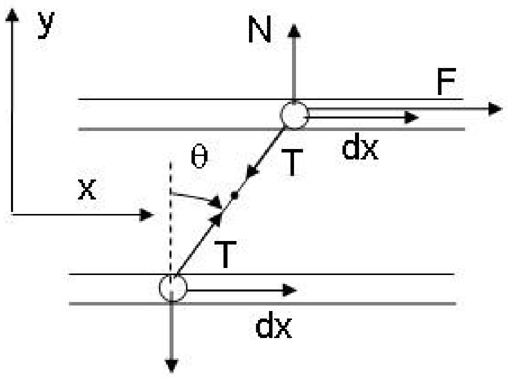
Sin embargo no se conserva puesto que las normales producen momento, no así las tensiones:

$$\vec{M}_{CM} = \vec{r}_{c1} \times \vec{N}_1 + \vec{r}_{c2} \times \vec{N}_2 = (\frac{L}{2}N\text{sen}\theta + \frac{L}{2}N\text{sen}\theta)\vec{k}$$

La energía cinética antes y después de que el hilo se tense es:

$$E_c = \frac{1}{2}m(2v_0)^2 + \frac{1}{2}mv_0^2; \quad E_c = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}mv'^2$$

Y no se conserva debido a la disipación en forma de calor debido a la elongación instantánea del hilo como consecuencia de las diferentes velocidades de las partículas.



Una de las partículas empieza a impulsarse. Nos encontramos que durante ese tiempo las normales no realizan trabajo puesto que el desplazamiento es perpendicular a la fuerza. Tal y como suele ocurrir en los problemas en los que las partículas se hallan unidas por un hilo o una varilla, las fuerzas debidas a estos elementos no realizan trabajo, en concreto, el trabajo de las tensiones del hilo en este problema es 0. Sean T_1 y T_2 las tensiones sobre cada partícula:

$$\delta W = \vec{T}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \vec{T}_2 \cdot d\vec{r}_2 = -T\text{sen}\theta dx + T\text{sen}\theta dx = 0$$

Sólo realiza trabajo F y conocemos su valor W. Llamemos v'' a la velocidad que buscamos

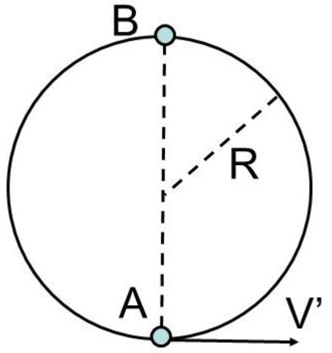
$$W = \int_{x_i}^{x_f} F dx = 2(\frac{1}{2}mv''^2) - 2(\frac{1}{2}mv'^2)$$

Despejamos la velocidad: $v'' = \sqrt{\frac{W}{m} + v'^2}$

PROBLEMA RESUELTO 5.5.

Dos partículas A y B de la misma masa M se encuentran sobre un aro ideal sin masa de radio R que apoya completamente sobre una superficie horizontal sin rozamiento. Inicialmente, las partículas se encuentran en reposo, situadas diametralmente opuestas (separadas $2R$). En un determinado instante, impulsándose sobre el aro, la partícula A comienza un movimiento con velocidad relativa V' relativa a éste. Se pide respecto a un sistema fijo:

1. La distancia entre ambas partículas en función del tiempo.
2. La velocidad angular de rotación del aro.
3. El valor de las fuerzas de interacción.
4. El tiempo que transcurre hasta que se alcanzan.
5. La energía mecánica aportada al sistema hasta ese instante.



SOLUCIÓN 5.5.

Las fuerzas de las partículas sobre los aros, $\vec{f}_A$ y $\vec{f}_B$ son las fuerzas exteriores del sistema de las partículas. Si aplicamos la ecuación de fuerzas a un aro sin masa tenemos que dicho aro sufre las reacciones de las anteriores, $-\vec{f}_A$ y $-\vec{f}_B$, por tanto, ambas fuerzas deben ser iguales y cambiadas de signo:

$$\vec{f}_B = -\vec{f}_A$$

Aplicando la ecuación de fuerzas al centro de masas de los dos insectos se tendrá que la aceleración de su centro de masas es cero, dado que la suma de las fuerzas anteriores es nula. Por tanto, la velocidad de su centro de masas se conserva igual al valor inicial cero.

Otro posible razonamiento es que, dado que la partícula A se impulsa sobre el aro, el sistema aro más partículas no tiene fuerzas exteriores, por tanto, conserva la velocidad de su centro de masas antes y en todo instante después del impulso. Es decir, que la velocidad del centro de masas de las dos partículas no cambia cuando la partícula A se impulsa, sigue siendo nula. En resumen que la posición del centro de masas permanece siempre en el origen y no se mueve de allí. Por tanto, en todo instante se verifica:

$$2M\vec{v}_C = \vec{0} = M\vec{v}_A + M\vec{v}_B \to \vec{v}_B = -\vec{v}_A$$

$$2M\vec{r}_C = \vec{0} = M\vec{r}_A + M\vec{r}_B \to \vec{r}_B = -\vec{r}_A$$

En este caso, el sistema fijo coincide con el sistema CM.

Aplicando la ecuación de momentos a un aro sin masa se tiene que:

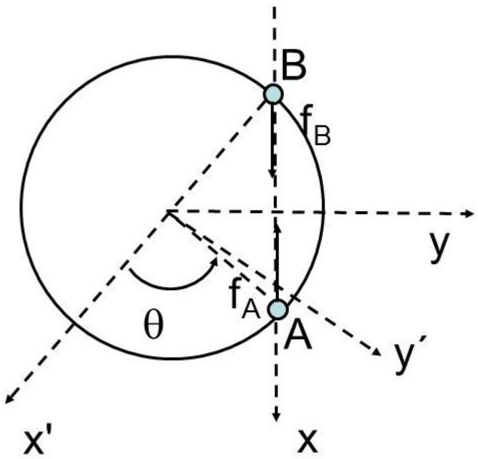
$$\vec{M}_C = \vec{0} = \vec{r}_B \times (-\vec{f}_B) + \vec{r}_A \times (-\vec{f}_A) = (\vec{r}_B - \vec{r}_A) \times \vec{f}_A = \vec{0} \to (\vec{r}_B - \vec{r}_A) \parallel \vec{f}_A$$

Y por las propiedades anteriores: $\vec{r}_B \parallel \vec{r}_A \parallel \vec{f}_A$

Es decir, que la fuerza de reacción es paralela al vector de posición de las partículas.

El único posible movimiento para el sistema es que la partícula esté sometida en todo instante a una fuerza sobre el eje x que mantenga el vector de posición de la partícula sobre ese eje. De esta manera, ambos vectores son siempre paralelos.

En la figura se observa cómo el aro gira, para visualizar ese movimiento hemos colocado un sistema S' ligado a él, y además las dos partículas mantienen en todo instante la posición de su centro de masas en el origen. La partícula A se desplaza sobre el aro, pero la B es fija. Definimos el ángulo de giro θ de la partícula A que coincide con el ángulo de giro del sistema S'.



Aplicamos la conservación del momento cinético en el centro de masas al sistema de partículas más el aro. Al no haber fuerzas exteriores en este sistema, no hay momento en el centro de masas y se conserva el momento cinético. La velocidad inicial de las partículas es nula, por tanto, el valor inicial del momento cinético respecto del CM es cero. Si $\vec{r}'_A$ y $\vec{r}'_B$ son los vectores de posición de las partículas en S' (con origen O') se tiene, por movimiento relativo:

$$\begin{cases} \vec{v}_A = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}'_A \\ \vec{v}_B = \vec{v}_{O'} + \vec{V}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'_B \end{cases}$$

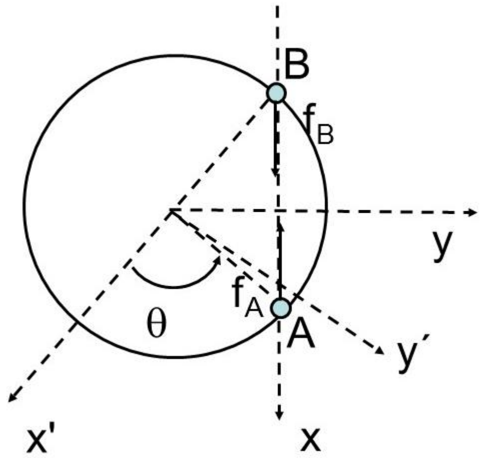
$$\vec{r} = \vec{r}_A - \vec{r}_B = \vec{r}'_A - \vec{r}'_B \rightarrow \vec{r}_A = -\vec{r}_B = \tfrac{1}{2}\vec{r}$$

Imponiendo: $\vec{0} = \vec{L}_C = \vec{r}_A \times M\vec{v}_A + \vec{r}_B \times M\vec{v}_B = \frac{1}{2}\vec{r} \times M(\vec{V}' + \vec{\omega} \times \vec{r}) = L_C\vec{k}$

Usando los unitarios de polares en el sistema S':

$$\vec{V}' = V'\vec{u}'_\theta = V'(\cos\theta\vec{j}' - \sin\theta\vec{i}')$$
$$\vec{r}'_A = R\vec{u}'_r = R(\cos\theta\vec{i}' + \sin\theta\vec{j}')\ ; \quad \vec{r}'_B = -R\vec{i}'$$
$$\vec{\omega} = \omega\vec{k}$$

La ecuación anterior queda: $0 = L_C = RV' + RV'\cos\theta + \omega r^2 \quad (1)$



La partícula A describe un movimiento circular uniforme sobre el aro, de esta manera y teniendo en cuenta que el ángulo inicial de giro es cero para el instante que consideramos como $t = 0s$ (instante en el que inicia A su movimiento):

$$V' = R\frac{d\theta}{dt} \rightarrow \theta = \frac{V'}{R}t$$

Calculando el vector $\vec{r} = (R + R\cos\theta)\vec{i}' + R\sin\theta\vec{j}'$ y su módulo $r^2 = 2R^2(1+\cos\theta)$.

Sustituyendo en la ecuación (1) queda: $\omega = -\frac{V'}{2R}$

Además: $r^2 = 2R^2(1+\cos(\frac{V'}{R}t)) \rightarrow \vec{r} = 2R\cos(\frac{V'}{2R}t)\vec{i}$

Para calcular el tiempo que tardan en juntarse imponemos que el ángulo girado sea π:

$$\pi = \frac{V'}{R}t_c \rightarrow t_c = \frac{\pi R}{V'}$$

Aplicamos las ecuaciones de movimiento y operamos para obtener la ecuación que verifica la posición relativa de las partículas:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{f}_B = M_B\ddot{\vec{r}}_B \\ \vec{f}_A = M_A\ddot{\vec{r}}_A \end{array}\right\} \rightarrow \frac{\vec{f}_A}{M_A} - \frac{\vec{f}_B}{M_B} = \ddot{\vec{r}}_A - \ddot{\vec{r}}_B = \ddot{\vec{r}} \rightarrow \vec{f}_A = \mu\ddot{\vec{r}}, \quad \mu = \frac{M_A M_B}{M_A + M_B}$$

μ es lo que se llama masa reducida. Haciendo cálculos queda: $\vec{f}_A = -\frac{M}{4}\frac{V'^2}{R}\cos(\frac{V'}{2R}t)\vec{i} = -\vec{f}_B$
Para calcular la energía aportada calculamos el trabajo realizado por las fuerzas $\vec{f}_A$ y $\vec{f}_B$.
Teniendo en cuenta que: $d\vec{r}_A = dx_A\vec{i} = -d\vec{r}_B = -dx_B\vec{i} = (dr/2)\vec{i}$

$$W_A + W_B = \int_{\vec{r}_{A_0}}^{\vec{r}_A} \vec{f}_A \cdot d\vec{r}_A + \int_{\vec{r}_{B_0}}^{\vec{r}_B} \vec{f}_B \cdot d\vec{r}_B = \Delta E_C$$

$$\int_{\vec{r}_{A_0}}^{\vec{r}_A} \vec{f}_A \cdot d\vec{r}_A = -\int_{x_A=R}^{x_A=0} \frac{M}{4}\frac{V'^2}{R}\frac{r}{2R}dx_A = -\int_{x_A=R}^{x_A=0} \frac{M}{4}\frac{V'^2}{R^2}x_A dx_A = M\frac{V'^2}{8}$$

$$\int_{\vec{r}_{B_0}}^{\vec{r}_B} \vec{f}_B \cdot d\vec{r}_B = M\frac{V'^2}{8} \rightarrow \Delta E_C = M\frac{V'^2}{4}$$

PROBLEMA RESUELTO 5.6.

Dos bolas de billar idénticas, de masa M y radio R, se mueven con velocidades $v_A = 8m/s$ y $v_B = 4m/s$ en el mismo sentido.

Las direcciones de las velocidades están separadas entre sí una distancia R y son paralelas.

Después del choque, el módulo de la velocidad de la bola A es $v'_A = 5.4m/s$.

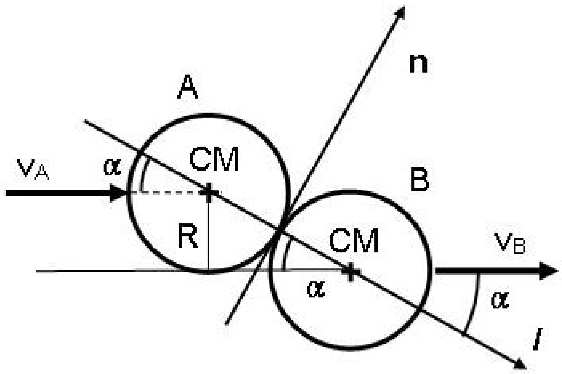
Calcular las velocidades finales de ambas bolas y el valor del coeficiente de restitución.

¿Qué porcentaje de la energía cinética inicial ha sido disipado en el choque?

SOLUCIÓN 5.6.

Calculamos la inclinación de la línea de choque (t) respecto de la dirección de movimiento de las bolas:

$$\alpha = \arcsin \frac{R}{2R} \rightarrow \alpha = 30^{\text{o}}$$



Sea $\vec{n}$ la dirección normal a la dirección de la línea de choque. Según la dirección normal $\vec{n}$ cada bola conserva su velocidad y, por tanto, su cantidad de movimiento después de la colisión es:

$$\begin{cases} v'_{An} = v_A sen\alpha = 4\,m/s \\ v'_{Bn} = v_B sen\alpha = 2\,m/s \end{cases}$$

Según la línea de choque se conserva la cantidad de movimiento total del sistema:

$$M\ v_A \cos\alpha + M\ v_B \cos\alpha = M\ v'_{Al} + M\ v'_{Bl}$$

$$(v_A + v_B)\cos\alpha = v'_{Al} + v'_{Bl} \quad (1)$$

Además se verifica:

$$(v'_A)^2 = (v'_{Al})^2 + (v'_{An})^2 \rightarrow v'_{Al} = 3.63\,m/s$$

Despejamos en la ecuación de conservación del momento (1) y se tiene: $v'_{Bl} = 6.76\, m/s$

Obtenemos la velocidad de la bola B después de la colisión:

$$v'_B = \sqrt{{v'_{Bl}}^2 + {v'_{Bn}}^2} \rightarrow v'_B = 7.05\, m/s$$

Calculamos el coeficiente de restitución:

$$e = \frac{v'_{Bl} - v'_{Al}}{v_{Al} - v_{Bl}} = \frac{v'_{Bl} - v'_{Al}}{(v_A - v_B)\cos\alpha} \rightarrow e = 0.90$$

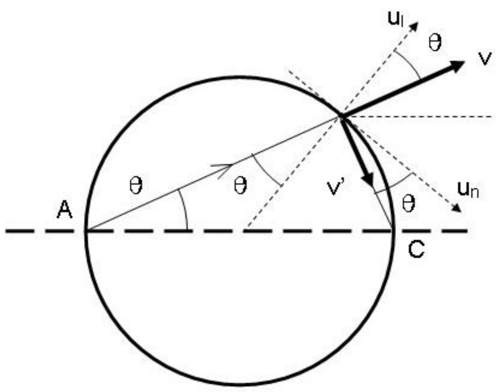
La energía cinética disipada en el choque es:

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} M \left(v'_A\right)^2 + \frac{1}{2} M \left(v'_A\right)^2 - \underbrace{(\frac{1}{2} M v_A^2 + \frac{1}{2} M v_B^2)}_{E_c}$$

Y el porcentaje es: $100(\Delta E_c / E_c)$

PROBLEMA RESUELTO 5.7.

En una mesa de billar circular y horizontal, se observa que cuando se lanza una bola desde un punto A de su periferia, entre todas las posibles trayectorias, existe una que forma un ángulo θ con el diámetro que pasa por A (sea AC tal diámetro) tal que la bola, después de chocar en la banda, rebota hasta chocar en el punto C diametralmente opuesto a A.



Calcular el coeficiente de restitución entre la bola y la banda.

SOLUCIÓN 5.7.

La línea de choque se encuentra en la dirección normal a la banda: (La mesa de billar no tiene velocidad ni antes ni después de la colisión).

$$e = -\frac{v'_l}{v_l} = \frac{v'\, sen\theta}{v\, \cos\theta} = \frac{v'}{v}\, tg\theta \quad (1)$$

Hemos tenido en cuenta que la proyección de v' en la dirección de la línea de choque es negativa. En la dirección normal se conserva la cantidad de movimiento de la partícula. En la línea de choque actúa la percusión interna mesa-bola, sin embargo no se conserva la cantidad de movimiento del sistema puesto que la mesa sufre una fuerza externa necesaria para evitar que se ponga en movimiento. No olvidemos que la mesa carece de velocidad antes y después de la colisión.

$$eje\ \vec{u}_n : \quad m\, v\, sen\theta = m\, v'\, \cos\theta \rightarrow \ \frac{v'}{v} = tg\theta \quad (2)$$

$$eje\ \vec{u}_l : \quad P_{ext} = (-m\, v'\, sen\theta) - (m\, v\, \cos\theta)$$

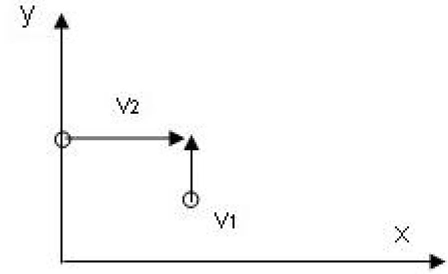
Al igual que antes debe tenerse cuidado con las proyecciones positivas y negativas.

De las ecuaciones (1) y (2) se obtiene: $e = tg^2\theta$

PROBLEMA RESUELTO 5.8.

Dos partículas puntuales, 1 y 2, de masa M se mueven sin rozamiento sobre una superficie horizontal. La bola 2 se mueve con velocidad $4\vec{i}ms^{-1}$ y la bola 1 con velocidad $2\vec{j}ms^{-1}$ de manera que su colisión es inminente. Suponiendo una colisión central con coeficiente de restitución $e = 0.5$, obténganse:

1. Los vectores unitarios de la línea de choque y de la línea normal.
2. Velocidades de las bolas después de la colisión.



SOLUCIÓN 5.8.

Obtenemos la línea de choque:

$$\vec{u}_l = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{|\vec{v}_2 - \vec{v}_1|} = \frac{4\vec{i} - 2\vec{j}}{\left|4\vec{i} - 2\vec{j}\right|} = \frac{4\vec{i} - 2\vec{j}}{\sqrt{16+4}} = \frac{1}{\sqrt{20}}(4\vec{i} - 2\vec{j}) = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\vec{i} - \vec{j})$$

La línea normal debe ser perpendicular $\vec{u}_n.\vec{u}_l = 0$

$$\vec{u}_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\vec{i} + 2\vec{j})$$

Proyectamos las velocidades en la línea normal. Estas se conservan en la colisión, ya que así lo hace el momento lineal de cada partícula.

$$\begin{cases} v_{1n} = \vec{v}_1 \cdot \vec{u}_n = 2\vec{j} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(\vec{i} + 2\vec{j}) = \frac{1}{\sqrt{5}}4 = v'_{1n} \\ v_{2n} = \vec{v}_2 \cdot \vec{u}_n = 4\vec{i} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(\vec{i} + 2\vec{j}) = \frac{1}{\sqrt{5}}4 = v'_{2n} \end{cases}$$

Proyectamos las velocidades en la línea de choque.

$$\begin{cases} v_{1l} = \vec{v}_1 \cdot \vec{u}_l = 2\vec{j} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(2\vec{i} - \vec{j}) = -\frac{1}{\sqrt{5}}2 \\ v_{2l} = \vec{v}_2 \cdot \vec{u}_l = 4\vec{i} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(2\vec{i} - \vec{j}) = \frac{1}{\sqrt{5}}8 \end{cases}$$

El momento lineal del sistema se conserva en esta dirección.

$$Mv_{1l} + Mv_{2l} = Mv'_{1l} + Mv'_{2l} \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{\sqrt{5}}2 + \frac{1}{\sqrt{5}}8 = v'_{1l} + v'_{2l}$$

$$v'_{1l} + v'_{2l} = \frac{1}{\sqrt{5}}6$$

Aplicamos la ecuación del coeficiente de restitución:

$$e = -\frac{v'_{1l} - v'_{2l}}{v_{1l} - v_{2l}} = -\frac{v'_{1l} - v'_{2l}}{-2\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}8} = -\frac{v'_{1l} - v'_{2l}}{-\frac{10}{\sqrt{5}}} = \frac{v'_{1l} - v'_{2l}}{\frac{10}{\sqrt{5}}} = \frac{1}{2}$$

$$v'_{1l} - v'_{2l} = \frac{5}{\sqrt{5}}$$

Resolvemos el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas para obtener v'_{1l} y v'_{2l}:

$$v'_{1l} = \frac{11}{2\sqrt{5}} \quad v'_{2l} = \frac{1}{2\sqrt{5}}$$

Obtenemos las velocidades vectoriales después de la colisión:

$$\vec{v}_1 = v'_{1l}\vec{u}_l + v'_{1n}\vec{u}_n = \frac{11}{2\sqrt{5}}\vec{u}_l + \frac{4}{\sqrt{5}}\vec{u}_n = \frac{11}{2\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{5}}(2\vec{i} - \vec{j}) + \frac{4}{\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{5}}(\vec{i} + 2\vec{j})$$

$$\vec{v}_2 = v'_{2l}\vec{u}_l + v'_{2n}\vec{u}_n = \frac{1}{2\sqrt{5}}\vec{u}_l + \frac{4}{\sqrt{5}}\vec{u}_n = \frac{1}{2\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{5}}(2\vec{i} - \vec{j}) + \frac{4}{\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{5}}(\vec{i} + 2\vec{j})$$

Finalmente:

$$\vec{v}_1 = \frac{11}{10}(2\vec{i} - \vec{j}) + \frac{8}{10}(\vec{i} + 2\vec{j}) = \frac{30}{10}\vec{i} + \frac{5}{10}\vec{j} = 3\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$$

$$\vec{v}_2 = \frac{1}{10}(2\vec{i} - \vec{j}) + \frac{8}{10}(\vec{i} + 2\vec{j}) = \frac{10}{10}\vec{i} + \frac{15}{10}\vec{j} = \vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j}$$