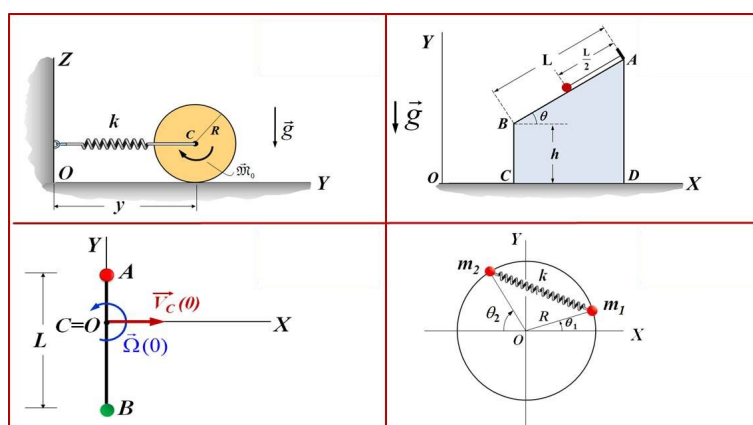


ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO

FÍSICA I

PROBLEMAS RESUELTOS

José Carlos JIMÉNEZ SÁEZ
Santiago RAMÍREZ DE LA PISCINA MILLÁN



6.- GEOMETRÍA DE MASAS

6

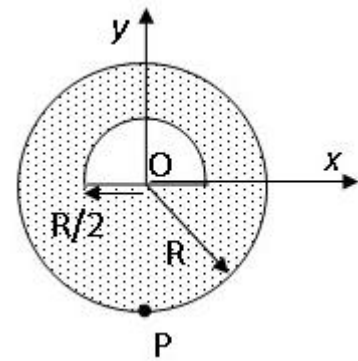
Geometría de Masas

PROBLEMA RESUELTO 6.1.

En la figura se indica la sección recta de un cilindro con un hueco, homogéneo, de masa M y radio exterior R .

Calcular:

1. Centro de masas.
2. Momento de inercia respecto de un eje que pasa por P y coincide con una generatriz.



DATOS: $M = 10kg$ $R = 0.2m$

SOLUCIÓN 6.1.

1) En primer lugar, calculamos la densidad del sólido dado que se utiliza tanto para el cálculo de su centro de masas como para el de los momentos de inercia.

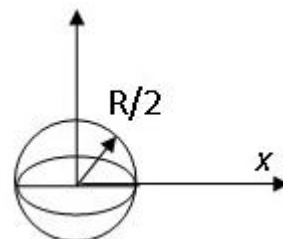
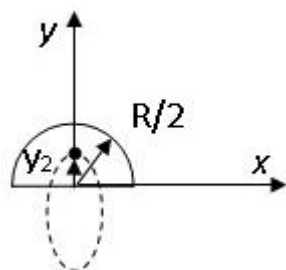
Utilizamos la fórmula que relaciona la densidad con la masa y el volumen suponiendo que ésta es constante, y por tanto:

$$\left. \begin{aligned} M &= \int_V \rho \, dV' = \rho \int_V dV' = \rho V \\ V &= \left[\pi R^2 - \frac{1}{2} \pi \left(\frac{R}{2} \right)^2 \right] L = \frac{7}{8} \pi R^2 L \end{aligned} \right\} \Rightarrow \rho = \frac{M}{\frac{7}{8} \pi R^2 L}$$

El centro de masas se encuentra en los planos de simetría del sólido.

De esta manera: $x_{CM} = 0$

Para determinar la posición del CM en el eje y , calculamos primero el centroide (que coincide con el CM al ser homogéneo) del semicírculo de radio $R/2$ usando el teorema de Guldin-Pappus:



El volumen al hacer girar en torno al eje Ox la superficie plana de la izquierda es igual al valor de dicha superficie multiplicada por $2\pi y_2$, siendo y_2 la posición en el eje Oy del centroide.

$$\frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^3 = \frac{\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2}{2} \cdot 2\pi y_2 \Rightarrow y_2 = \frac{2R}{3\pi}$$

Para obtener el CM de la figura completa de superficie S aplicamos la superposición. Para ello la figura se descompone en otras dos: un círculo de radio R , masa M_1 , superficie S_1 y centro de masas $y_1 = 0$ del cual hay que extraer (por este motivo su masa se multiplica por un signo menos) un semicírculo de superficie S_2 , masa M_2 y centro de masas y_2 .

$$y_{CM} = \frac{y_1 \cdot M_1 + y_2 \cdot (-M_2)}{M_1 - M_2} = \frac{y_1 \cdot \rho S_1 + y_2 \cdot (-\rho S_2)}{\rho S} = \frac{0 \cdot \pi R^2 - y_2 \cdot \frac{\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2}{2}}{\pi R^2 - \frac{\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2}{2}}$$

$$y_{CM} = -\frac{2R}{21\pi}$$

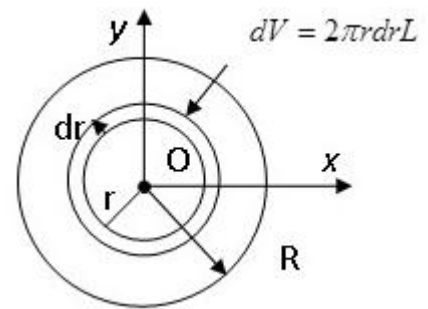
2) Si consideramos un cilindro macizo de radio R es fácil obtener su momento de inercia respecto del eje z que pasa por el punto O .

$$I_{Oz}^{(1)} = \int_0^R r^2 \rho dV = \int_0^R r^2 \rho 2\pi r L dr = \frac{1}{2} \pi L \rho R^4$$

Aplicamos de nuevo la superposición considerando que nuestra figura se compone de un cilindro completo de radio R al cual le quitamos un semicírculo de radio $R/2$.

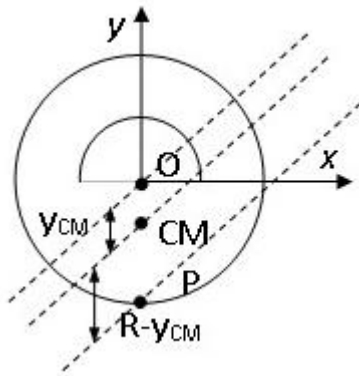
El momento de inercia del semicilindro de radio $R/2$ es la mitad del valor anterior, eso sí usando un valor del radio $R/2$:

$$I_{Oz}^{(2)} = \frac{\frac{1}{2}\pi L\rho(R/2)^4}{2}$$



$$I_{Oz} = I_{Oz}^{(1)} - I_{Oz}^{(2)} = \frac{1}{2}\pi L\rho R^4 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\pi L\rho\left(\frac{R}{2}\right)^4 = \frac{31}{64}\pi L\rho R^4 = \frac{31}{56}MR^2$$

Para calcular el momento de inercia respecto del punto P debemos aplicar el teorema de Steiner:



$$\left. \begin{aligned} I_{Oz} &= I_{CMz} + My_{CM}^2 \\ I_{Pz} &= I_{CMz} + M(R - y_{CM})^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_{Pz} = I_{Oz} + M[(R - y_{CM})^2 - y_{CM}^2] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_{Pz} = \left(\frac{31}{56} + 1 - \frac{4}{21\pi}\right)MR^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_{Pz} = \left(\frac{87}{56} - \frac{4}{21\pi}\right)MR^2$$

Sustituyendo valores numéricos:

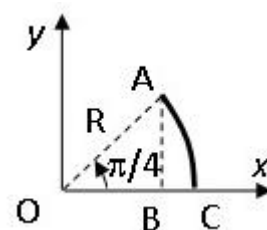
$$x_{CM} = 0 \text{ cm}$$

$$y_{CM} = -0.6 \text{ cm}$$

$$I_P = 0.597 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

PROBLEMA RESUELTO 6.2.

Calcular, utilizando los teoremas de Guldin, el área de revolución engendrada por el arco de circunferencia AC , de radio R y ángulo $\pi/4$, al girar alrededor del eje vertical AB .

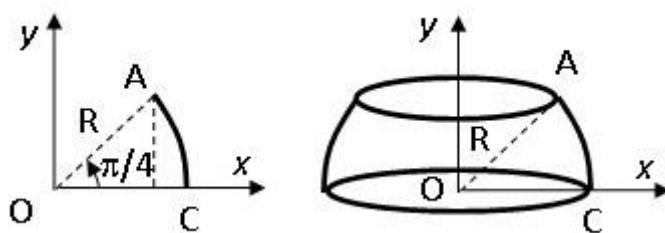


SOLUCIÓN 6.2.

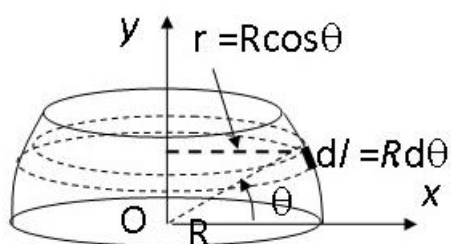
Aplicamos el teorema de Guldin-Pappus para obtener la posición x_G del centroide del arco AC en el sistema de ejes dado.

Sea S la superficie de revolución de la figura derecha y L la longitud del arco AC de la figura izquierda.

Se verifica:



$$S = L \cdot 2\pi x_G \rightarrow \pi R^2 \sqrt{2} = \frac{\pi}{4} R \cdot 2\pi x_G \Rightarrow x_G = \frac{2R\sqrt{2}}{\pi}$$



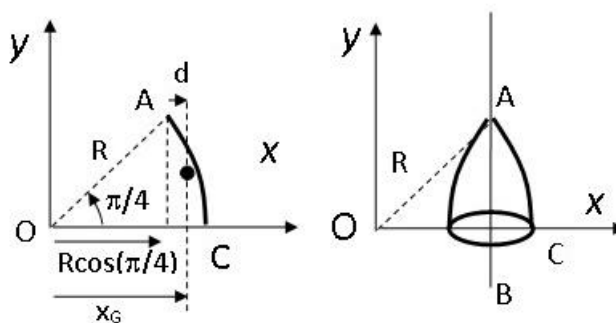
Donde hemos tenido en cuenta que la longitud del arco AB es:

$$L = \int_0^{\pi/4} dl = \int_0^{\pi/4} R d\theta = \frac{\pi}{4} R$$

Y la superficie de esfera que abarca al girar en torno al eje y es:

$$S = \int_0^L 2\pi r dl = \int_0^{\pi/4} 2\pi R \cos \theta R d\theta = 2\pi R^2 \sin \theta \Big|_0^{\pi/4} = \pi R^2 \sqrt{2}$$

Sin embargo, el eje de giro es AB y no el eje y del sistema de referencia. Por tanto, hacemos girar el arco AC respecto del nuevo eje lo cual genera una superficie de área A (figura de la derecha) para aplicar otra vez el teorema de Guldin-Pappus. Obsérvese que ahora la distancia del centroide al eje de giro no es x_G , sino d (véase la siguiente figura).



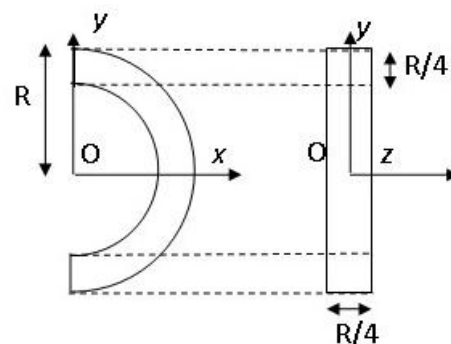
$$A = L 2\pi d = \frac{\pi}{4} R \cdot 2\pi \left(x_G - R \underbrace{\cos \frac{\pi}{4}}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \right) \Rightarrow A = \frac{\pi^2 R^2 \sqrt{2}}{4} \left(\frac{4}{\pi} - 1 \right)$$

PROBLEMA RESUELTO 6.3.

En la figura se muestra un semianillo homogéneo, de masa M y de sección recta cuadrada de lado $e = R/4$.

Calcular:

1. La posición del centro de masas.
2. El momento de inercia respecto del eje OZ , en función de M y R .

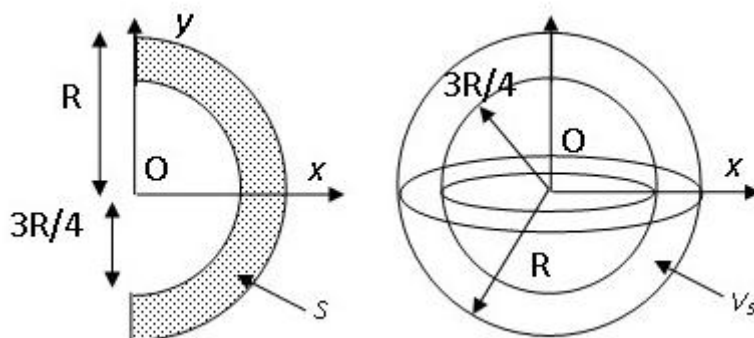


SOLUCIÓN 6.3.

1) El plano Oxy y el Oxz son planos de simetría del sólido, por tanto, en ellos se halla el centro de masas del mismo: $y_G = 0$; $z_G = 0$.

Para calcular la posición del centro de masas a lo largo de la dirección x asimilamos nuestro sólido tridimensional con una superficie plana homogénea, y calculamos el centroide de esta última.

Sea V_S el volumen que genera la superficie plana homogénea de área S al girar en torno al eje Oy .



Aplicamos el segundo teorema de Guldin-Pappus para obtener la posición x_G del centroide en el sistema de ejes dado:

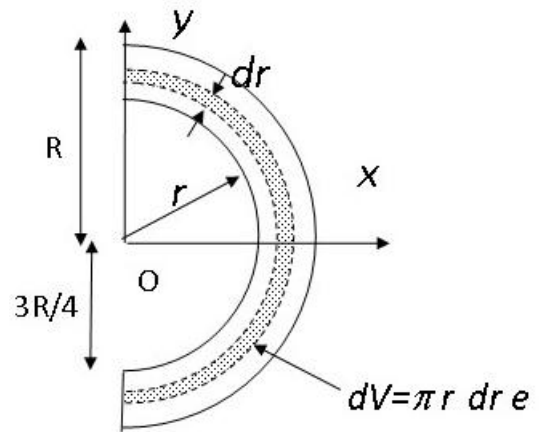
$$V_S = S \cdot 2\pi x_G \rightarrow \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi \left(\frac{3R}{4}\right)^3 = \left[\frac{\pi R^2}{2} - \frac{\pi \left(\frac{3R}{4}\right)^2}{2} \right] \cdot 2\pi x_G$$

Despejando: $x_G = \frac{37R}{21\pi}$

La masa del sólido al ser homogéneo es igual al producto de la densidad por el volumen:

$$M = \int_V \rho dV' = \rho V = \rho e S = \rho \frac{R}{4} \left[\frac{\pi R^2}{2} - \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{3R}{4} \right)^2 \right] = \rho \frac{R}{4} \cdot \frac{\pi R^2}{2} \cdot \frac{7}{16}$$

El momento de inercia respecto del eje z que pasa por el origen se puede calcular a partir de un diferencial de volumen $dV = \pi r e dr$ (véase figura)



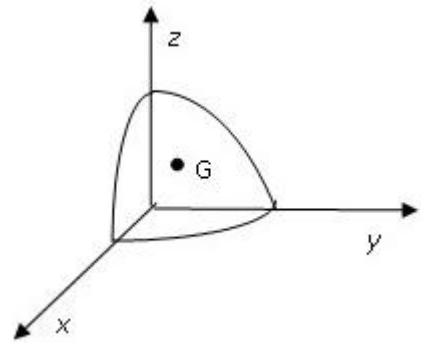
$$\begin{aligned} I_{Oz} &= \int_{3R/4}^R r^2 dm = \int_{3R/4}^R r^2 \rho dV = \int_{3R/4}^R r^2 \rho \pi r e dr = \\ &= \pi \rho \frac{R}{4} \int_{3R/4}^R r^3 dr = \pi \rho \frac{R}{4} \cdot \frac{R^4}{4} \left(1 - \frac{3^4}{4^4} \right) \end{aligned}$$

$$I_{Oz} = \pi \rho \frac{R}{4} \cdot \frac{R^2}{2} \cdot \frac{R^2}{2} \cdot \frac{175}{256} \Rightarrow I_{Oz} = \frac{25}{32} M R^2$$

PROBLEMA RESUELTO 6.4.

Para un octavo de esfera homogénea de radio R y densidad ρ , tomando ejes cartesianos que coincidan con diámetros de la esfera, calcular:

1. La posición del centro de masas.
2. El momento de inercia respecto de los ejes del sistema de referencia.

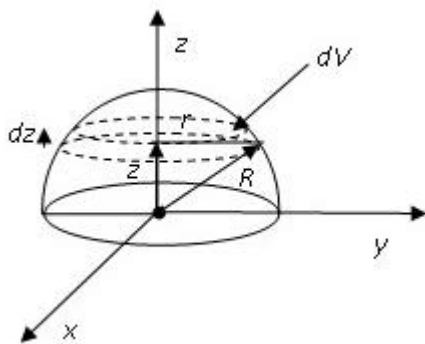


SOLUCIÓN 6.4.

1) Por simetría en el caso de una semiesfera de masa M_s , la posición en z del centro de masas, z_s , se halla a la misma altura que el de un octavo de esfera z_o :

$$z_s = \frac{(M_s/4)z_o + (M_s/4)z_o + (M_s/4)z_o + (M_s/4)z_o}{M_s} = z_o$$

El cálculo del centro de masas de una semiesfera es más sencillo por simetría: $z_s = \frac{\int z \, dm}{M_s}$



El diferencial de volumen que se encuentra a una distancia z es el siguiente:

$$dm = \rho \, dV = \rho \pi r^2 dz = \rho \pi (R^2 - z^2) dz$$

Y la masa de la semiesfera es:

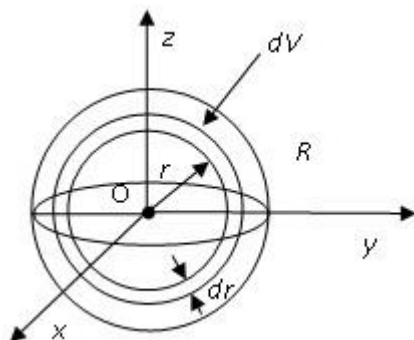
$$M_s = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi \rho R^3$$

Con lo cual sustituyendo e integrando:

$$z_s = \frac{\int_0^R z \rho \pi (R^2 - z^2) dz}{\frac{2}{3} \pi \rho R^3} = \frac{3}{8} R = z_o$$

2) El único momento de inercia factible de calcular por integración es el momento de inercia de una esfera respecto de su centro:

$$I_O = \int_0^R r^2 \rho dV = \int_0^R r^2 \rho 4\pi r^2 dr = \frac{4}{5} \pi \rho R^5$$



Este momento de inercia es la suma de ocho momentos de inercia iguales correspondientes cada uno de ellos a un octavo de esfera.

$$I_O^{(o)} = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{5} \pi \rho R^5$$

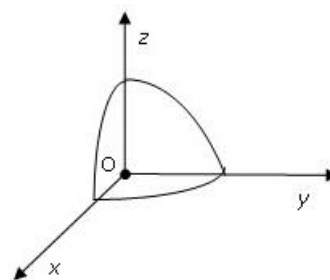
Aplicamos las propiedades de los momentos de inercia para calcular el momento de inercia respecto de un eje del sistema de referencia.

Por simetría, el momento de inercia respecto del eje x es idéntico al momento de inercia respecto del eje y y al momento de inercia respecto del eje z .

$$I_{Ox} = I_{Oy} = I_{Oz}$$

Además se verifica: $2I_O = I_{Ox} + I_{Oy} + I_{Oz}$

Con lo cual: $I_{Ox}^{(o)} = \frac{2}{3} I_O^{(o)} = \frac{1}{15} \pi \rho R^5$



Expresando el momento de inercia en función de la masa: $M_o = \frac{1}{8} \rho \frac{4}{3} \pi R^3 \Rightarrow \rho = \frac{6M_o}{\pi R^3}$

Sustituyendo: $I_{Ox}^{(o)} = \frac{1}{15} \pi \rho R^5 = \frac{2}{5} M_o R^2$

Nota:

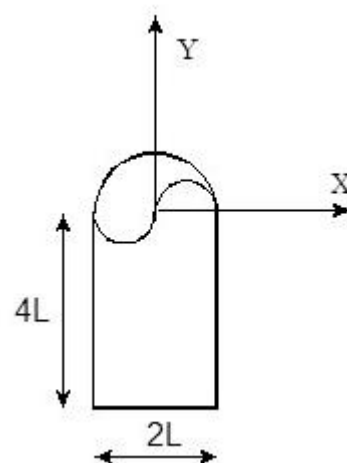
Para una esfera de masa M el momento de inercia respecto del eje x valdría: $I_O = \frac{4}{5} \pi \rho R^5$

$$\begin{cases} I_O = \frac{4}{5} \pi \rho R^5 \\ M = \rho \frac{4}{3} \pi R^3 \Rightarrow \rho = \frac{3M}{4\pi R^3} \\ I_{Ox} = \frac{2}{3} I_O = \frac{8}{15} \pi \rho R^5 = \frac{2}{5} M R^2 \end{cases}$$

Obsérvese que es idéntico al de un octavo de esfera con la salvedad de que las masas en una y otra fórmulas son diferentes, una es la de un octavo de esfera y la otra la de una esfera.

PROBLEMA RESUELTO 6.5.

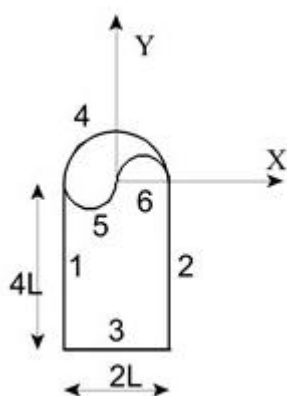
Determinar la posición del centro de masas del sólido plano de la figura, formado por varillas de sección despreciable y masa total M , así como su momento de inercia respecto al eje OZ .



SOLUCIÓN 6.5.

CENTRO DE MASAS

Obtenemos las longitudes de todas las varillas.



Longitudes:

$$\begin{aligned} L_1 = L_2 &= 4L & L_3 &= 2L \\ L_4 &= \pi L & L_5 = L_6 &= \pi L/2 \end{aligned}$$

$$\text{Longitud Total: } L_T = 2L(3 + \pi)$$

Calculamos los centros de masas de cada varilla en el sistema de referencia de la figura (únicamente interesa la coordenada y_C de cada elemento ya que la x_C del sólido completo es 0 por simetría).

$$y_{C1} = y_{C2} = -2L \quad y_{C3} = -4L \quad y_{C4} = 2L/\pi \quad y_{C5} = -y_{C6} = -L/\pi$$

Aplicamos las propiedades de superposición:

$$L_T \cdot y_C = 4L(-2L) + 4L(-2L) + 2L(-4L) + \pi L(2L/\pi) + \pi L/2(-L/\pi) + \pi L/2(L/\pi)$$

$$y_C = \frac{-11L}{3 + \pi}$$

MOMENTO DE INERCIA respecto a Oz

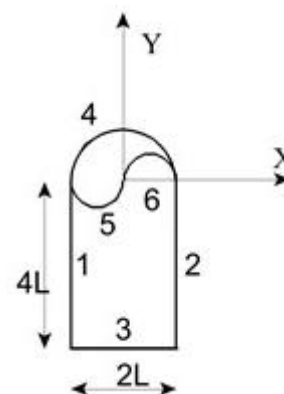
Momento de inercia de una **varilla de longitud L y masa M** respecto a un eje perpendicular a ella y que pasa por su centro de masas: $ML^2/12$.

Momento de inercia de una **varilla circular (un anillo) de radio R y masa M** respecto a un eje perpendicular y que pasa por su centro: MR^2 .

Momento de inercia de una **varilla circular (un anillo) de radio R y masa M** respecto a un eje perpendicular y que pasa por la varilla (trasladamos el del centro a una distancia R por Steiner): $MR^2 + MR^2 = 2MR^2$.

Utilizando estos resultados obtenemos el momento de inercia de una varilla semicircular (un semianillo) de radio R y masa M respecto a un eje perpendicular y que pasa por su centro: MR^2 y respecto a un eje paralelo y que pasa por su circunferencia, y por lo tanto la atraviesa: $2MR^2$.

(Sería la mitad de los anteriores para la misma masa, como la masa se hace la mitad quedaría idéntico valor)



Momento de inercia de las **varillas rectas**:

$I_1 = I_2 = (\lambda 4L)(4L)^2/12 + (\lambda 4L)(5L^2)$, donde $(\lambda 4L)$ es la masa de las varillas 1 y 2, $(4L)$ su longitud y $(5L^2)$ es la distancia al cuadrado entre su centro de masas y el punto O , origen del sistema de referencia.

$I_3 = (\lambda 2L)(2L)^2/12 + (\lambda 2L)(16L^2)$, donde $(\lambda 2L)$ es la masa de las varillas 3, $(2L)$ su longitud y $(16L^2)$ es la distancia al cuadrado entre su centro de masas y el punto O , origen del sistema de referencia.

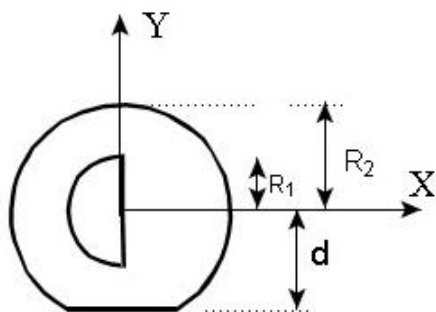
$I_4 = (\lambda \pi L)L^2$ aplicando la expresión calculada arriba para un semianillo respecto de un eje que pasa por su centro.

$I_5 = I_6 = 2(\lambda \pi L/2)(L/2)^2$ aplicando la expresión calculada arriba para un semianillo respecto de un eje perpendicular que lo atraviesa.

Sumando todos y sustituyendo $\lambda = M/L_T$, se obtiene:

$$I_{Oz} = \frac{(224 + 9\pi)}{(36 + 12\pi)} ML^2$$

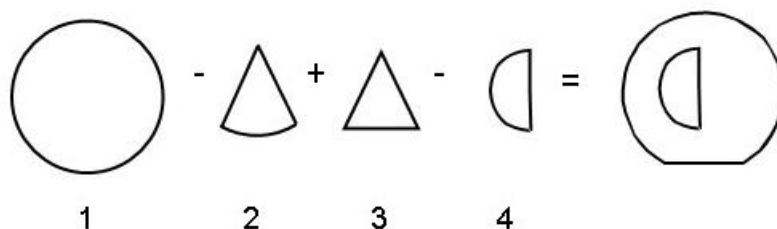
PROBLEMA RESUELTO 6.6.



Determinar la posición del centro de masas del sólido homogéneo de la figura formado por una placa circular a la que le faltan los dos trozos indicados y cuya masa total es M , así como su momento de inercia respecto al eje OZ .

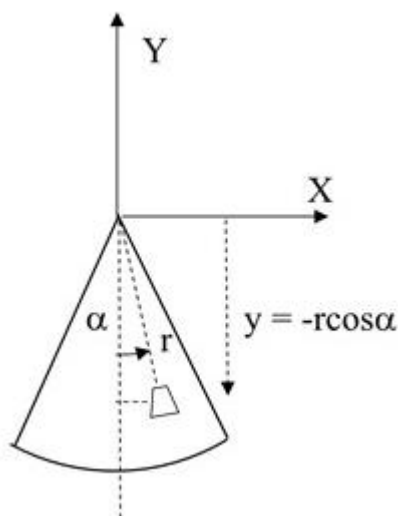
SOLUCIÓN 6.6.

Obtenemos los resultados pedidos combinando los siguientes sólidos.



Refiriendo los centros de masas de cada superficie a los ejes indicados:

$$\begin{aligned} x_{C1} &= 0 & y_{C1} &= 0 \\ x_{C2} &= 0 & y_{C2} &= -2R_2 \frac{\sin \varphi}{3\varphi} \quad \text{siendo } \varphi = \arccos(d/R_2) \\ x_{C3} &= 0 & y_{C3} &= -2d/3 \\ x_{C4} &= -4R_1/3\pi & y_{C4} &= 0 \end{aligned}$$



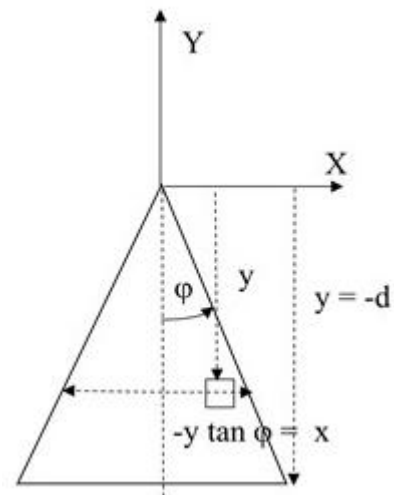
En el caso 2 se obtiene por integración:

$$\begin{aligned} y_{C2} &= \frac{\int y dS_2}{S_2} = \frac{\int_0^{R_2} \int_{-\varphi}^{\varphi} (-r \cos \alpha) (r d\alpha dr)}{\int_0^{R_2} \int_{-\varphi}^{\varphi} r d\alpha dr} \\ y_{C2} &= \frac{\int_0^{R_2} r^2 dr \int_{-\varphi}^{\varphi} (-\cos \alpha) d\alpha}{\int_0^{R_2} r dr \int_{-\varphi}^{\varphi} d\alpha} \end{aligned}$$

En el caso 3 se obtiene por integración:

$$y_{C3} = \frac{\int y dS_3}{S_3} = \frac{\int y dy dx}{\int dy dx}$$

$$y_{C3} = \frac{\int_{-d}^0 y dy \int_{y \tan \varphi}^{(-y) \tan \varphi} dx}{\int_{-d}^0 dy \int_{y \tan \varphi}^{(-y) \tan \varphi} dx}$$



La superficie de los sólidos anteriores es:

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \pi (R_2)^2 \\ S_2 &= \varphi (R_2)^2 \\ S_3 &= d R_2 \operatorname{sen} \varphi \\ S_4 &= \pi (R_1)^2 / 2 \end{aligned} \right\} \text{La superficie total es: } S_T = S_1 - S_2 + S_3 - S_4$$

La posición del centro de masas del sólido será:

$$x_C = \frac{x_{C1}S_1 - x_{C2}S_2 + x_{C3}S_3 - x_{C4}S_4}{S_T}$$

$$y_C = \frac{y_{C1}S_1 - y_{C2}S_2 + y_{C3}S_3 - y_{C4}S_4}{S_T}$$

$$x_C = \frac{(-\pi (R_1)^2 / 2) \cdot (-4R_1 / 3\pi)}{S_T}$$

$$y_C = \frac{(-\varphi (R_2)^2) \cdot (-2 R_2 \operatorname{sen} \varphi / 3\varphi) + (d R_2 \operatorname{sen} \varphi) \cdot (-2d / 3)}{S_T}$$

El momento de inercia también lo calculamos por composición. Escribimos los momentos de inercia individuales respecto al eje Oz y luego sumamos o restamos convenientemente.

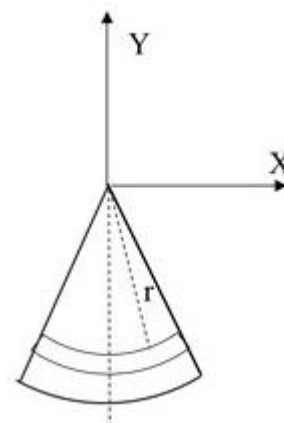
Para el círculo:

$$I_1 = \frac{\sigma \pi (R_2)^2 (R_2)^2}{2}$$

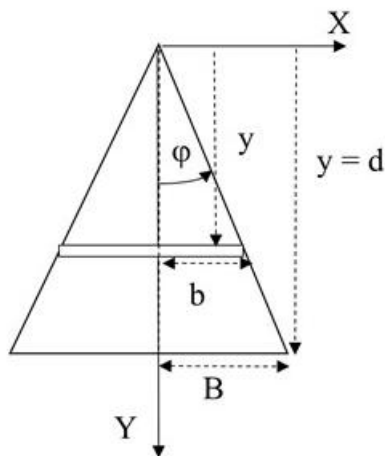
Para el sector circular de arco 2φ se tiene por integración:

$$I_2 = \int \sigma r^2 dS_2 = \int_0^{R_2} r^2 (2\varphi r dr)$$

$$I_2 = \frac{\sigma \varphi (R_2)^2 (R_2)^2}{2}$$



Para el triángulo hallamos los momentos respecto a los planos Oxz y Oyz para sumarlos y obtener el momento de inercia respecto al eje z .



Tomamos un elemento diferencial como el que se indica, situado a una distancia y del plano Oxz , de espesor dy y longitud $2b$.

Para facilitar los cálculos cambiamos de sentido el eje Y .

$$ds = \sigma 2b dy$$

$$\frac{y}{b} = \frac{d}{B} \quad \text{siendo } B = R_2 \sin \varphi$$

$$I_{xz} = \int_0^d y^2 \sigma 2b dy = \frac{2B\sigma}{d} \int_0^d y^3 dy = \frac{B\sigma d^3}{2}$$

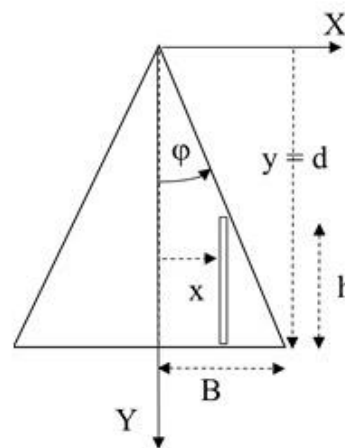
Tomamos un elemento diferencial como el que se indica, situado a una distancia x del plano Oyz , de espesor dx y longitud h .

$$ds = \sigma h dx$$

$$\frac{h}{B-x} = \frac{d}{B} \quad \text{siendo } B = R_2 \sin \varphi$$

$$I_{yz} = 2 \int_0^B x^2 \sigma h dx = \frac{2\sigma d}{B} \int_0^B x^2 (B-x) dx = \frac{B^3 \sigma d}{6}$$

$$I_3 = I_{xz} + I_{yz}$$

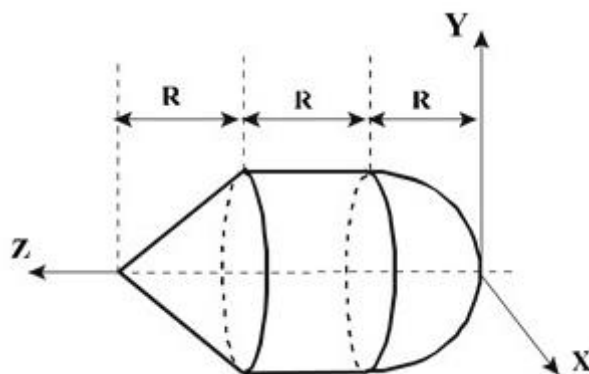


Para un semicírculo: $I_4 = \frac{\sigma \pi (R_1)^4}{4}$

El momento de inercia buscado es $I_1 - I_2 + I_3 - I_4$ teniendo en cuenta que $\sigma = M/S_T$.

PROBLEMA RESUELTO 6.7.

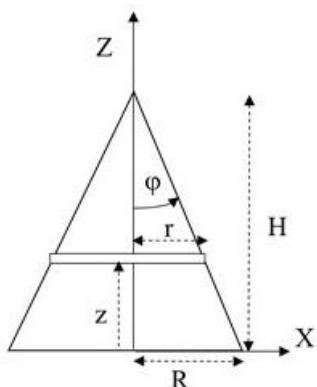
Determinar la posición del centro de masas del sólido homogéneo de la figura formado por un cono, un cilindro y una semiesfera y cuya masa total es M , así como sus momentos de inercia respecto del eje OZ .



SOLUCIÓN 6.7.

CENTRO DE MASAS (por simetría $x_C = y_C = 0$)

Cono:



$$z_c = \frac{\int z \, dm}{M_c}$$

$$dm = \rho \, dV = \rho \pi r^2 dz = \rho \pi \tan^2 \varphi (H - z)^2 dz$$

$$\tan \varphi = \frac{R}{H}$$

$$M_c = \int_M dm = \int_0^H \rho \pi \tan^2 \varphi (H - z)^2 dz$$

Resolviendo y simplificando pues $H = R$ y teniendo en cuenta el cambio de ejes:

$$V_1 = \pi R^2 \frac{R}{3} = \frac{\pi R^3}{3}$$

$$z_1 = 2R + \frac{R}{4} = \frac{9R}{4}$$

Cilindro:

$$V_2 = \pi R^2 R = \pi R^3$$

$$z_2 = R + \frac{R}{2} = \frac{3R}{2}$$

Semiesfera:

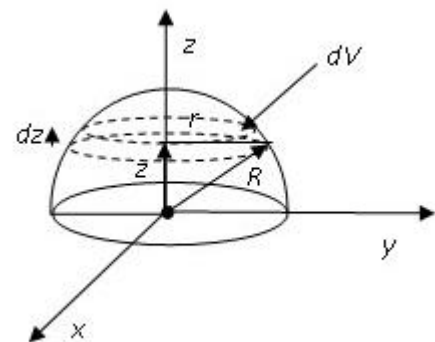
El cálculo del centro de masas de una semiesfera es más sencillo por simetría:

$$z_s = \frac{\int z \, dm}{M_s}$$

El diferencial de masa que se encuentra a una distancia z es el siguiente:

$$dm = \rho \, dV = \rho \pi r^2 dz = \rho \pi (R^2 - z^2) dz$$

Y la masa de la semiesfera es: $M_s = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi \rho R^3$



Con lo cual sustituyendo e integrando:

$$z_s = \frac{\int_0^R z \rho \pi (R^2 - z^2) dz}{\frac{2}{3} \pi \rho R^3} = \frac{3}{8} R$$

Por tanto, respecto a los ejes del problema quedaría:

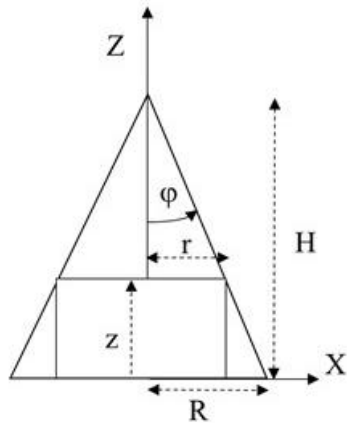
$$V_3 = \frac{2\pi R^3}{3}$$

$$z_3 = \frac{5R}{8}$$

El resultado final es:

$$V_T = V_1 + V_2 + V_3 = 2\pi R^3$$

$$z_C = \frac{z_1 V_1 + z_2 V_2 + z_3 V_3}{V_T} = \frac{4R}{3}$$

MOMENTO DE INERCIA**Cono:**

Por integración $I_z = \int_M r^2 dm$, donde el dm es un cilindro hueco de radio r , altura z y espesor dr .

$$dm = \rho dV = \rho 2\pi r z dr$$

$$dm = \rho 2\pi (H - z) \tan \varphi z (-\tan \varphi dz)$$

$$\tan \varphi = \frac{R}{H}$$

$$I_z = \int_H^0 -\rho 2\pi (H - z)^3 \tan^4 \varphi z dz$$

Resolviendo y haciendo $H = R$ se tiene:

$$I_1 = 3\rho \frac{\pi R^3}{3} \frac{R^2}{10} = \rho \pi \frac{R^5}{10}$$

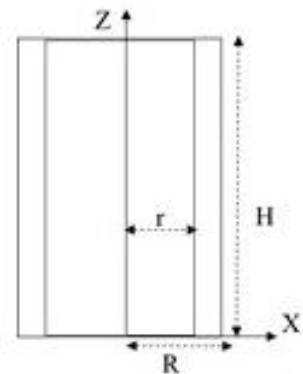
Cilindro:

El cálculo es análogo siendo ahora el dm un cilindro hueco de radio r , altura la del cilindro H y espesor dr :

$$I_z = \int_M r^2 dm$$

$$dm = \rho dV = \rho 2\pi r H dr$$

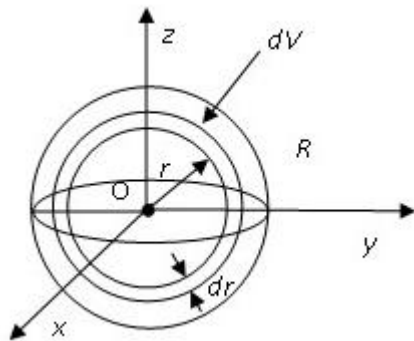
$$I_z = \int_0^R r^3 \rho 2\pi H dr$$



Resolviendo y haciendo $H = R$ se tiene:

$$I_2 = \rho \pi R^3 \frac{R^2}{2} = \rho \pi \frac{R^5}{2}$$

Semiesfera:



El momento de inercia de una esfera de masa M respecto de su centro es:

$$I_O = \int_0^R r^2 \rho dV = \int_0^R r^2 \rho 4\pi r^2 dr = \frac{4}{5} \pi \rho R^5$$

$$I_O = \frac{3}{5} MR^2$$

Por las propiedades de simetría:

$$2I_O = I_{Ox} + I_{Oy} + I_{Oz} = 3I_{Ox}$$

$$I_{Ox} = \frac{2}{3} I_O = \frac{2}{5} MR^2$$

Si se tratase de media esfera, la masa pasaría a ser la mitad y el momento de inercia también:

$$I_{Ox} = \frac{1}{5} M_{esfera} R^2 = \frac{2}{5} M_{semiesfera} R^2$$

Quedaría al final:

$$I_3 = 2\rho \frac{2\pi R^3}{3} \frac{R^2}{5} = 4\rho\pi \frac{R^5}{15}$$

Sumando todos:

$$I_x = 13 \rho\pi \frac{R^5}{15}$$

Y teniendo en cuenta que $\rho = \frac{M}{V_T}$ queda:

$$I_x = \frac{13}{30} MR^2$$