ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO

FÍSICA I

PROBLEMAS RESUELTOS

7.- CINEMÁTICA DEL SÓLIDO

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

7 Cinemática del Sólido

PROBLEMA RESUELTO 7.1.

Consideremos dos sistemas de ejes: Uno, S, ortogonal, de versores $\left\{\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right\}$, y otro, S_1, ortogonal, de versores $\{\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3\}$ cuyas direcciones positivas son:

$$\overrightarrow{OX}_1 = \vec{i} + \vec{j}, \quad \overrightarrow{OY}_1 = -\vec{i} + \vec{j}, \quad \overrightarrow{OZ}_1 = \vec{k}$$

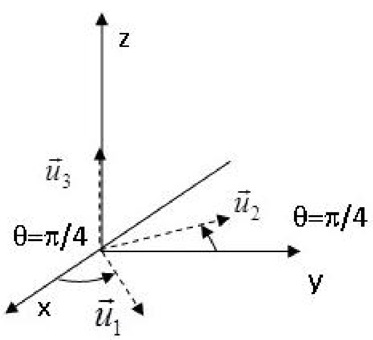
Calcular:

1. Versores $\left\{\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right\}$ en función de $\{\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3\}$ y viceversa.
2. El ángulo que forman los versores: $(\vec{u}_1, \vec{i})$ y $(\vec{u}_2, \vec{j})$.
3. Posición de un punto de coordenadas (a, b, c) en S en coordenadas del sistema S_1.
4. Los productos vectoriales $\vec{P}_1 = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2$; $\vec{P}_2 = \vec{u}_2 \times \vec{u}_3$ y $\vec{P}_3 = \vec{u}_3 \times \vec{u}_1$ expresados en función de los versores de S.
5. El producto escalar $E = (\vec{u}_1 - \vec{u}_2) \cdot (3\vec{u}_1 + \vec{u}_2 - \vec{u}_3)$.

SOLUCIÓN 7.1.

1) Los unitarios en las direcciones de los ejes del sistema S_1 son:

$$\vec{u}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j}) \ ; \quad \vec{u}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{i} + \vec{j}) \ ; \quad \vec{u}_3 = \vec{k}$$



En forma de matriz quedaría:

$$\begin{pmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz antisimétrica de rotación alrededor de un eje.

Despejamos los unitarios $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$

$$\vec{u}_1+\vec{u}_2=\sqrt{2}\vec{j}\ ;\ \vec{u}_1-\vec{u}_2=\sqrt{2}\vec{i}\ ;\quad \vec{u}_3=\vec{k}$$

En forma de matriz:

$$\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La inversa coincide con la transpuesta.

2) El ángulo entre dos vectores unitarios se obtiene por el producto escalar:

$$cos(\vec{u}_1,\vec{i})=\vec{u}_1\cdot\vec{i}=\sqrt{2}/2\rightarrow \text{ang}(\widehat{\vec{u}_1,\vec{i}})=45^{\text{o}}$$
$$cos(\vec{u}_2,\vec{j})=\vec{u}_2\cdot\vec{j}=\sqrt{2}/2\rightarrow \text{ang}(\widehat{\vec{u}_2,\vec{i}})=45^{\text{o}}$$

Obsérvese que la matriz general de un giro θ es:

$$\begin{pmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3) Un punto de coordenadas (a,b,c) tiene como vector de posición:

$$\vec{r}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}=\frac{\sqrt{2}}{2}a(\vec{u}_1-\vec{u}_2)+\frac{\sqrt{2}}{2}b(\vec{u}_1+\vec{u}_2)+c\vec{u}_3=$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)\vec{u}_1+\frac{\sqrt{2}}{2}(-a+b)\vec{u}_2+c\vec{u}_3$$

En forma matricial si a_1,b_1 y c_1 son las coordenadas en el sistema S_1: $\vec{r}=a_1\vec{u}_1+b_1\vec{u}_2+c_1\vec{u}_3$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

También se verifica:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$$

4) Tanto el producto vectorial como el escalar son independientes del sistema de referencia.

$\vec{P}_1 = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j}) \times \frac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{i} + \vec{j}) = \frac{1}{2}(\vec{k} + \vec{k}) = \vec{k} = \vec{u}_3$

$\vec{P}_2 = \vec{u}_2 \times \vec{u}_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{i} + \vec{j}) \times \vec{k} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{j} + \vec{i}) = \vec{u}_1$

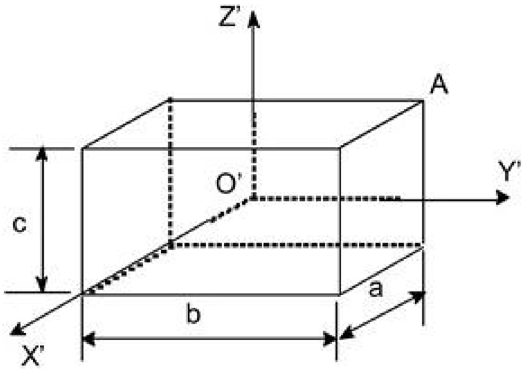
$\vec{P}_3 = \vec{u}_3 \times \vec{u}_1 = \vec{k} \times \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{i} + \vec{j}) = \vec{u}_2$

5)

$$E = (\vec{u}_1 - \vec{u}_2) \cdot (3\vec{u}_1 + \vec{u}_2 - \vec{u}_3) = 3 - 1 = 2$$

PROBLEMA RESUELTO 7.2.

El paralelepípedo de la figura, macizo y homogéneo, tiene su centro de masas en el punto O' (centro geométrico del sólido), origen de un sistema de referencia $O'X'Y'Z'$ ligado al sólido. Los valores de a, b y c están expresados en metros.



Un sistema de referencia $OXYZ$, inercial, coincide con el sistema $O'X'Y'Z'$ en el instante de interés dibujado.

Con respecto al sistema $OXYZ$ el sólido tiene un movimiento, en el instante dibujado, dado por:

Velocidad del punto O': $\vec{v}_{O'} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \quad (m/s)$

Aceleración del punto O': $\vec{a}_{O'} = 5\vec{i} + 7\vec{j} + 9\vec{k} \quad (m/s^2)$

Velocidad angular: $\vec{\Omega} = \vec{i} + \vec{j} \quad (rad/s)$

Aceleración angular: $\vec{\alpha} = 2\vec{k} \quad (rad/s^2)$

1. Calcular el vector velocidad y el vector aceleración del punto A del sólido, de coordenadas $(-a/2, b/2, c/2)$, en tal instante respecto del sistema inercial.

2. Velocidad de deslizamiento del sólido sobre la recta soporte del vector $\overrightarrow{O'A}$.

3. Demostrar que, en el instante considerado, no existe eje instantáneo de rotación.

4. Hallar la ecuación del eje instantáneo de rotación y mínimo deslizamiento.

5. Encontrar la velocidad que debe de tener el origen O_1 de un cierto sistema de referencia inercial $O_1X_1Y_1Z_1$ que se mueva en traslación con respecto a $OXYZ$, manteniendo sus ejes paralelos a los de $OXYZ$, y tal que en el instante de interés coincidan ambos, para que en el sistema de referencia $O_1X_1Y_1Z_1$ sí exista eje instantáneo de rotación y coincida con el eje instantáneo de rotación y mínimo deslizamiento calculado en el apartado anterior.

Todas las magnitudes en unidades fundamentales SI.

SOLUCIÓN 7.2.

1)

La posición del punto A para el instante de interés es: $\overrightarrow{O'A} = -\frac{a}{2}\vec{i} + \frac{b}{2}\vec{j} + \frac{c}{2}\vec{k}$

Aplicamos el campo de velocidades: $\vec{v}_A = \vec{v}_{O'} + \vec{\Omega} \times \overrightarrow{O'A}$

Siendo:

$\vec{v}_{O'} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$

$\vec{\Omega} \times \overrightarrow{O'A} = (\vec{i} + \vec{j}) \times \left(-\frac{a}{2}\vec{i} + \frac{b}{2}\vec{j} + \frac{c}{2}\vec{k}\right) = \frac{c}{2}\vec{i} - \frac{c}{2}\vec{j} + \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right)\vec{k}$

La velocidad del punto A queda:

$$\vec{v}_A = \left(1 + \frac{c}{2}\right)\vec{i} + \left(2 - \frac{c}{2}\right)\vec{j} + \left(1 + \frac{a+b}{2}\right)\vec{k}$$

En el caso del campo de aceleraciones tenemos:

$\vec{a}_A = \vec{a}_{O'} + \vec{\alpha} \times \overrightarrow{O'A} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \overrightarrow{O'A})$

Ahora conocemos:

$\vec{a}_{O'} = 5\vec{i} + 7\vec{j} + 9\vec{k}$

$\vec{\alpha} \times \overrightarrow{O'A} = 2\vec{k} \times \left(-\frac{a}{2}\vec{i} + \frac{b}{2}\vec{j} + \frac{c}{2}\vec{k}\right) = -b\vec{i} + a\vec{j}$

$\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \overrightarrow{O'A}) = (\vec{i} + \vec{j}) \times \left(\frac{c}{2}\vec{i} - \frac{c}{2}\vec{j} + \frac{a+b}{2}\vec{k}\right) = \frac{a+b}{2}\vec{i} - \frac{a+b}{2}\vec{j} - c\vec{k}$

La velocidad del punto A queda:

$$\vec{a}_A = \left(5 + \frac{a-b}{2}\right)\vec{i} + \left(7 - \frac{3a+b}{2}\right)\vec{j} + (9-c)\,\vec{k}$$

2)

La velocidad de deslizamiento sobre la recta $\overrightarrow{O'A}$ se puede calcular a partir de la velocidad del punto O', aunque también se puede utilizar cualquier otro punto de dicha recta:

$$v_{\overrightarrow{O'A}} = \vec{v}_A \cdot \frac{\overrightarrow{O'A}}{\left|\overrightarrow{O'A}\right|} = \vec{v}_{O'} \cdot \frac{\overrightarrow{O'A}}{\left|\overrightarrow{O'A}\right|} =$$

$$= (\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}) \cdot \frac{2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \left(-\frac{a}{2}\vec{i} + \frac{b}{2}\vec{j} + \frac{c}{2}\vec{k}\right) = \frac{(-a+2b+c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

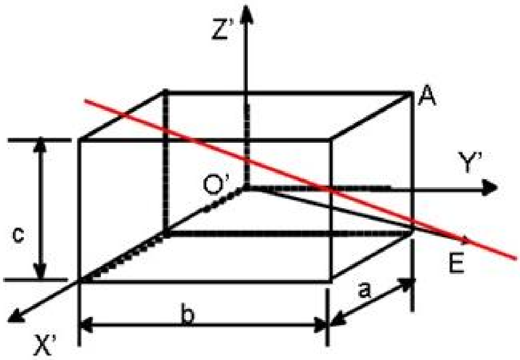
3)

Para que exista eje instantáneo de rotación es necesario que la velocidad de deslizamiento del sólido sea nula. Calculamos el vector velocidad de deslizamiento del sólido:

$$\vec{v}_d = \left(\vec{v}_A \cdot \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}\right)\frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|} = \left(\vec{v}_{O'} \cdot \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}\right)\frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|} = \left((\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}) \cdot \frac{\left(\vec{i} + \vec{j}\right)}{\sqrt{2}}\right)\frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|} = \frac{3\sqrt{2}}{2}\frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}$$

Por tanto, no hay eje instantáneo de rotación.

4)



La ecuación del eje instantáneo de rotación y mínimo deslizamiento es:

$$\overrightarrow{O'E} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_{O'}}{\omega^2} + \lambda\frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|} = \frac{\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}}{2} + \lambda\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j})$$

También se podía haber utilizado la velocidad del punto A: $\overrightarrow{AE} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_A}{\omega^2} + \lambda\frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}$

5) La velocidad del punto O' del sólido en el sistema S_1 es: $\vec{v}^{(1}_{O'} = \vec{v}^{(1}_{O} + \vec{v}_{O'}$

Basta con que $\vec{v}^{(1}_{O} = -\vec{v}_{O'}$ para que $\vec{v}^{(1}_{O'} \cdot \vec{\omega} = 0$.

Por tanto, la velocidad del origen de S, O, respecto del S_1 debe ser: $\vec{v}^{(1}_{O} = -\vec{v}_{O'}$.

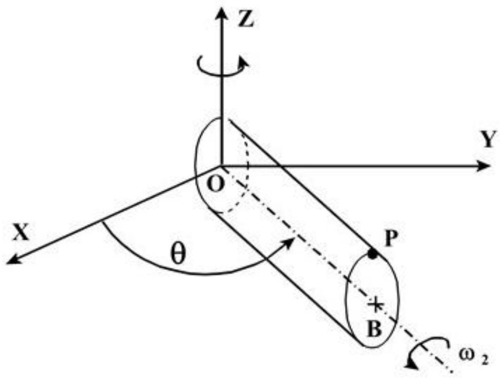
La velocidad del origen de S_1, O_1, respecto del S debe ser: $\vec{v}_{O_1} = -\vec{v}^{(1}_{O}$.

Y por tanto:

$$\vec{v}_{O_1} = -\vec{v}^{(1}_{O} = \vec{v}_{O'}$$

PROBLEMA RESUELTO 7.3.

El cilindro recto de la figura, de longitud L y radio R, se mueve girando en torno al eje OZ, de forma que su eje está siempre contenido en el plano XY, el centro de una de sus bases está fijo en el origen O del sistema fijo dibujado y la distancia angular θ entre el eje OX y el eje del cilindro corresponde a un movimiento armónico simple de amplitud $\pi/2$ y pulsación ω. En el instante $t = \pi/(2\omega)$ el eje del cilindro coincide con el eje OY.



Al mismo tiempo, el cilindro gira en torno a su eje con velocidad angular constante ω_2 en el sentido que se indica.

En la otra base del cilindro se encuentra una partícula P que describe un movimiento circular sobre su perímetro.

Para el instante genérico que se indica en la figura, calcular:

1. Velocidad angular y aceleración angular del cilindro.

2. Módulo de la velocidad de la partícula, relativa al cilindro, para que en todo instante se halle en la posición más alta.

   Velocidad y aceleración absolutas de la partícula en este caso.

3. Velocidad y aceleración absolutas de la partícula en el instante genérico considerado, si el módulo de su velocidad relativa al cilindro es v''_P constante, sentido a izquierdas visto desde O, y se encuentra en la parte más alta de su movimiento.

SOLUCIÓN 7.3.

1) Colocamos unos ejes móviles $OX'Y'Z'$ de tal manera que el eje X' coincida con el eje del cilindro, el eje Z' coincida con el eje Z, y que giren en torno a este eje.

$$\vec{i}' = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}$$
$$\vec{j}' = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}$$

De acuerdo con los datos del problema el movimiento del eje del cilindro sigue la ecuación armónica: $\theta = \frac{\pi}{2}\sin(\omega t)$

La velocidad y aceleración angulares del sistema S' se obtienen derivando:

$\vec{\omega}_1 = \omega_1 \vec{k} \Rightarrow \omega_1 = \frac{d\theta}{dt} = \frac{\pi}{2}\omega\cos(\omega t)$

$\vec{\alpha}_1 = \alpha_1 \vec{k} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{d\omega_1}{dt} = -\frac{\pi}{2}\omega^2\sin(\omega t)$

La velocidad angular del cilindro es, por composición de rotaciones:

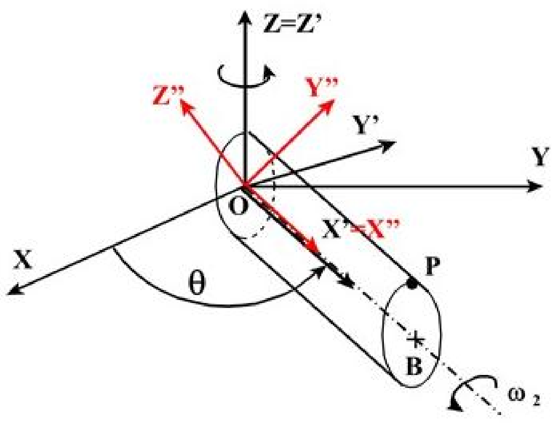
$\vec{\omega}_C = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 \rightarrow \vec{\omega}_C = \omega_1\vec{k} + \omega_2\vec{i}'$

Y la aceleración angular:

$\vec{\alpha}_C = \left(\frac{d\vec{\omega}_C}{dt}\right)_S = \alpha_1\vec{k} + \omega_2\left(\frac{d\vec{i}'}{dt}\right)_S = \alpha_1\vec{k} + \omega_2\vec{\omega}_1 \times \vec{i}' = \alpha_1\vec{k} + \omega_2\omega_1\vec{j}'$

También se podría calcular diciendo que $\vec{\omega}_1$ arrastra a $\vec{\omega}_2$ con lo cual $\vec{\alpha}_C = \vec{\alpha}_1 + \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2$.

2) Ligamos un sistema S'' al cilindro de manera que su origen coincida con O. La velocidad respecto a este sistema v''_P para que esté siempre en el punto más alto es una velocidad igual y contraria a la del punto más alto del cilindro respecto de S'. Es decir, la partícula debe dar vueltas sobre la superficie del cilindro en sentido opuesto a la velocidad de giro de éste (ω_2) de manera que ambas velocidades de giro se compensen.



En el eje $\vec{j}'$ sería: $\vec{v}''_P = \omega_2 R\vec{j}'$

La velocidad respecto al sistema S' sería, por movimiento relativo:

$$\vec{v}'_P = \vec{v}''_P + \vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{OP} = \vec{v}''_P + \vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{BP} = \vec{0}$$

Y análogamente respecto al sistema S: $\vec{v}_P = \vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{OP} = \omega_1 L\vec{j}'$

La aceleración absoluta de este punto se puede obtener, por ejemplo, derivando:

$$\vec{a}_P = \frac{d\omega_1}{dt}L\vec{j}' + \omega_1 L\left(\frac{d\vec{j}'}{dt}\right)_S = \alpha_1 L\vec{j}' + \omega_1 L\vec{\omega}_1 \times \vec{j}' = \alpha_1 L\vec{j}' - \omega_1^2 L\vec{i}'$$

3) En este caso la velocidad del punto es:¨ $\vec{v}''_P = v''_P\vec{j}'$

Respecto al sistema S' sería por movimiento relativo: $\vec{v}'_P = \vec{v}''_P + \vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{OP}$

Y respecto al sistema S: $\vec{v}_P = \vec{v}'_P + \vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{OP} = (v''_P + L\omega_1 - R\omega_2)\vec{j}'$

Para la aceleración, por movimiento relativo, sería:

$\vec{a}'_P = \vec{a}''_P + \vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{OP}) = -\frac{v''^2_P}{R}\vec{k}' + \vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{OP})$

Donde hemos tenido en cuenta la aceleración de la partícula por describir un movimiento circular. Y respecto al sistema S:

$$\vec{a}_P = \vec{a}'_P + \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{OP}) + 2\vec{\omega}_1 \times \vec{v}'_P + \vec{\alpha}_1 \times \overrightarrow{OP} =$$
$$= (\omega_1\omega_2 R - L\omega_1^2 - 2\omega_1 v''_P)\vec{i}' + L\alpha_1\vec{j} + (L\omega_1\omega_2 - R_1\omega_2^2 + 2\omega_2 v''_P - \frac{v''^2_P}{R})\vec{k}'$$

En este caso y dado que los orígenes de los sistemas S' y S'' coinciden, se puede comprobar que las velocidades y aceleraciones se podían haber obtenido pasando directamente de S'' a S teniendo en este caso el sistema S'' la velocidad y aceleración angulares compuestas:

$\vec{\omega}_C = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$

$\vec{\alpha}_C = \vec{\alpha}_1 + \underbrace{\vec{\alpha}_2}_{\vec{0}} + \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2$

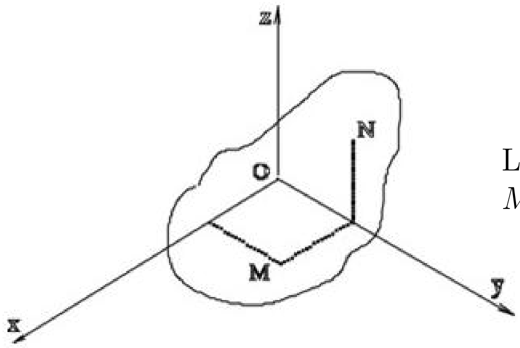
$\vec{v}_P = \vec{v}''_P + \vec{\omega}_C \times \overrightarrow{OP}$

$\vec{a}_P = \vec{a}''_P + \vec{\omega}_C \times (\vec{\omega}_C \times \overrightarrow{OP}) + 2\vec{\omega}_C \times \vec{v}''_P + \vec{\alpha}_C \times \overrightarrow{OP}$

PROBLEMA RESUELTO 7.4.

El sólido de la figura está en movimiento. Los ejes $OXYZ$ están ligados al sólido. Se conocen, en función del tiempo, las velocidades absolutas de tres puntos del sólido, las cuales, expresadas en componentes respecto al sistema de referencia ligado al sólido, son:

$$\begin{cases} \vec{v}_O = t\vec{i} + 3t^2\vec{j} \\ \\ \vec{v}_M = t\vec{i} + 3t^2\vec{j} + \left(2\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) - 2\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right)\vec{k} \\ \\ \vec{v}_N = \left(t + 2\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right)\vec{i} + \left(3t^2 - 2\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right)\vec{j} + 2\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\vec{k} \end{cases}$$



Los puntos O, M y N tienen coordenadas $O(0,0,0)$, $M(1,1,0)$, $N(0,1,1)$ en dicho sistema de referencia.

Utilizando el sistema de referencia ligado al sólido, calcular:

1. Velocidad angular del sólido en función del tiempo.
2. Ecuación del eje instantáneo de rotación y mínimo deslizamiento, en función del tiempo.
3. Velocidad de deslizamiento del sólido.

Todas las magnitudes en unidades fundamentales SI.

SOLUCIÓN 7.4.

1) Las velocidades de los puntos del sólido verifican:

$\vec{\Omega} = \Omega_x\vec{i} + \Omega_y\vec{j} + \Omega_z\vec{k}$

$\vec{v}_O \cdot \vec{\Omega} = \vec{v}_M \cdot \vec{\Omega} = \vec{v}_N \cdot \vec{\Omega}$

Llamando $\omega = \frac{2\pi}{T}$tenemos las siguientes ecuaciones:

$(2\sin(\omega t) - 2\cos(\omega t))\Omega_z = 0 \rightarrow \Omega_z = 0$

$2\Omega_x\cos(\omega t) = 2\Omega_y\sin(\omega t) \rightarrow \Omega_x\cos(\omega t) = \Omega_y\sin(\omega t) \qquad (1)$

Del campo de velocidades del sólido se tiene:

$\vec{v}_M = \vec{v}_O + \vec{\Omega} \times \overrightarrow{OM} = t\vec{i} + 3t^2\vec{j} + (\Omega_x - \Omega_y)\vec{k}$

De esta ecuación:

$(\Omega_x - \Omega_y) = 2\sin(\omega t) - 2\cos(\omega t) \qquad (2)$

Operando: $\Omega_y = 2\cos(\omega t); \quad \Omega_x = 2\sin(\omega t)$

Por tanto: $\vec{\Omega} = 2\sin(\omega t)\vec{i} + 2\cos(\omega t)\vec{j}$

2) Sea $E(x, y, z)$ un punto del eje instantáneo de rotación y mínimo deslizamiento:

$\vec{v}_E = \vec{v}_O + \vec{\Omega} \times \overrightarrow{OE} = t\vec{i} + 3t^2\vec{j} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2\sin(\omega t) & 2\cos(\omega t) & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix}$

$\vec{v}_E = (2\cos(\omega t)z + t)\vec{i} + (3t^2 - 2\sin(\omega t)z)\vec{j} + (2\sin(\omega t)y - 2\cos(\omega t)x)\vec{k}$

En los puntos del EIRyMD la velocidad es paralela a la velocidad angular, por tanto:

$$\vec{v}_E \parallel \vec{\omega} \Rightarrow \frac{(2\cos(\omega t)z + t)}{2\sin(\omega t)} = \frac{(3t^2 - 2\sin(\omega t)z)}{2\cos(\omega t)} = \frac{2\sin(\omega t)y - 2\cos(\omega t)x}{0}$$

3) La velocidad de deslizamiento del sólido es:

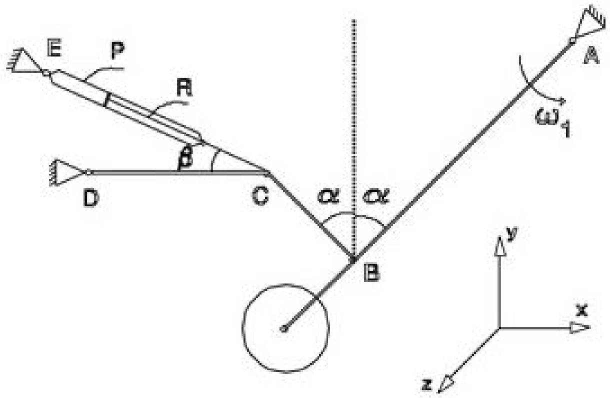
$$v_d = \vec{v}_0 \cdot \vec{\omega} = 2t\sin(\omega t) + 6t^2\cos(\omega t)$$

PROBLEMA RESUELTO 7.5.

En la figura se indica el mecanismo de un tren de aterrizaje formado por varillas coplanarias articuladas en sus extremos.

En el instante que se muestra, el tren se está desplegando por acción del cilindro hidraúlico EC, la varilla DC está horizontal, las varillas AB y BC forman un ángulo α con la vertical y los puntos A, D y E se consideran fijos.

En dicho instante, la velocidad angular de la varilla AB es $\vec{\omega}_1 = \omega_1 \vec{k}$ según se indica y su aceleración angular es nula.



1. Calcular, en tal instante, la velocidad del émbolo R con respecto al cilindro P.
2. Posición del centro instantáneo de rotación, CIR, de la barra BC.

DATOS:

Longitudes $AB = L_1$; $BC = L_2$; $CD = L_3$

Los ángulos α y β son conocidos.

SOLUCIÓN 7.5.

La velocidad del punto C, $\vec{v}_C$, es perpendicular a DC pues D es un punto fijo. Además apunta en el sentido negativo del eje Oy porque el émbolo se está desplegando.

La velocidad que se pide es la proyección de $\vec{v}_C$ sobre la recta EC. Dado que DC sigue un movimiento circular, el ángulo con la perpendicular a EC es β. Por tanto, la velocidad que piden es:

$$v_{\overrightarrow{EC}} = \vec{v}_C \cdot \frac{\overrightarrow{EC}}{\left|\overrightarrow{EC}\right|} = |v_C| \sin\beta$$

Utilizando el campo de velocidades del sólido relacionamos las velocidades de C y B:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{\omega}_{BC} \times \overrightarrow{BC}$$
$$\vec{v}_C = v_C\vec{j}, \quad \vec{\omega}_{BC} = \omega_{BC}\vec{k}, \quad \vec{v}_B = \omega_1 L_1 \left(\cos\alpha\vec{i} - \sin\alpha\vec{j}\right)$$

Donde hemos tenido en cuenta que el movimiento de B es un movimiento circular con velocidad ω_1 en torno a A. Por geometría se tiene que:

$$\overrightarrow{BC} = L_2(-\sin\alpha\vec{i} + \cos\alpha\vec{j}); \quad \overrightarrow{AB} = -L_1(\sin\alpha\vec{i} + \cos\alpha\vec{j})$$

De la ecuación del campo de velocidades se obtienen dos ecuaciones escalares:

$$Ox : \omega_1 L_1 \cos\alpha - L_2\omega_{BC}\cos\alpha = 0$$
$$Oy : v_C = -\omega_1 L_1 \sin\alpha - L_2\omega_{BC}\sin\alpha$$

Resolviendo: $\begin{cases} \omega_{BC} = \omega_1 L_1/L_2 \\ v_C = -2\omega_1 L_1 \sin\alpha \end{cases}$

$$v_{\overrightarrow{EC}} = |v_C|\sin\beta = 2\omega_1 L_1 \sin\alpha\sin\beta$$

También se puede resolver por las propiedades de la velocidad de deslizamiento:

$$\vec{v}_C \cdot \overrightarrow{BC} = \vec{v}_B \cdot \overrightarrow{BC}$$

La posición del CIR de la barra BC está en la intersección de las perpendiculares de las velocidades de dos puntos cualesquiera, por tanto:

$\vec{v}_B = \omega_1 L_1 \vec{u}_{v_B}$, donde $\vec{u}_{v_B}$ es perpendicular a AB.

$\vec{v}_C = v_C\vec{j}$

Trazando las perpendiculares encontramos que el CIR es la imagen especular del punto C respecto de un eje perpendicular (paralelo al eje $\vec{j}$) que pase por el punto B. El CIR se encuentra por tanto sobre la barra AB.