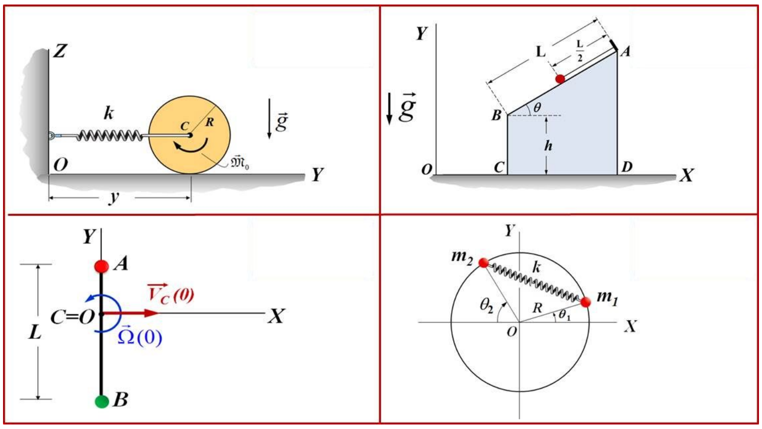
Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO

FÍSICA I

PROBLEMAS RESUELTOS

Fernando JIMÉNEZ LORENZO
José Carlos JIMÉNEZ SÁEZ
Santiago RAMÍREZ DE LA PISCINA MILLÁN



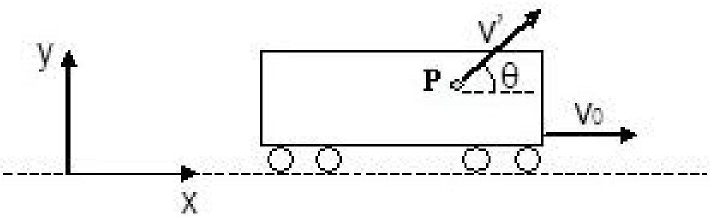
3.- MOVIMIENTO RELATIVO

3 Movimiento Relativo

INTRODUCCIÓN. CASOS SENCILLOS

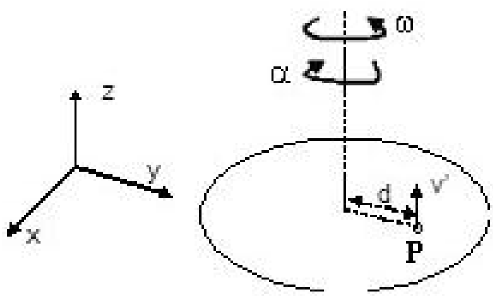
Considérense los siguientes movimientos instantáneos y en todos los casos calcúlese la velocidad y aceleración de la partícula respecto de un sistema fijo en el instante considerado.

a) Un vagón de tren se mueve rectilíneamente con una velocidad v_0 respecto de un sistema situado en tierra. Una mosca (partícula) se mueve dentro del vagón con una velocidad v' respecto del vagón, formando un ángulo θ con la horizontal y contenida en la dirección del movimiento.



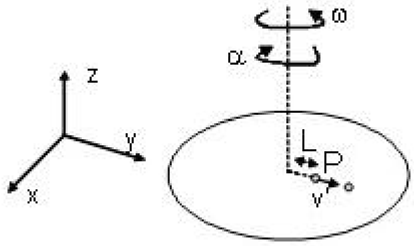
SOLUCIÓN $\begin{cases} \vec{v}_P = (v_0 + v' \cos\theta)\ \vec{i} + v'\ sen\,\theta\ \vec{j} \\ \vec{a}_P = \vec{0} \end{cases}$

b) Un tiovivo gira con velocidad angular ω antihoraria y con aceleración angular α horaria. Un niño (partícula) subido en un caballito a una distancia d del centro tiene una velocidad v' dirigida hacia arriba respecto del tíovivo.



SOLUCIÓN $\begin{cases} \vec{v}_P = -\omega\ d\ \vec{i} + v'\ \vec{k} \\ \vec{a}_P = \alpha\, d\ \vec{i} - \omega^2\, d\ \vec{j} \end{cases}$

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval
etsiae

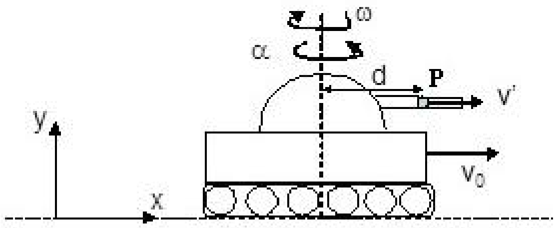


c) En las condiciones del caso b) el cobrador (partícula), que se encuentra a una distancia L del centro, se dirige al encuentro del niño con velocidad v' en dirección radial desde el centro de la plataforma.

SOLUCIÓN

$$\begin{cases} \vec{v}_P = \; -\omega \; L \; \vec{i} + v' \; \vec{j} \\ \vec{a}_P = \; (\alpha \, L - \; 2 \; \omega \; v') \; \vec{i} - \; \omega^2 \, L \; \vec{j} \end{cases}$$

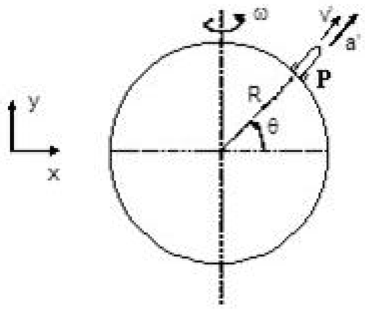
d) Un tanque se mueve con una velocidad v_0. La cabina del tanque gira con una velocidad angular ω horaria y con una aceleración angular α antihoraria. Un cañón situado en la cabina y cuya posición en ese instante coincide con la dirección del movimiento lanza un proyectil (partícula) que se encuentra a una distancia d del centro de la torreta con una velocidad v' respecto a su alma.



SOLUCIÓN

$$\begin{cases} \vec{v}_P = \; (v' + \; v_0) \; \vec{i} + \omega \; d \; \vec{k} \\ \vec{a}_P = \; - \; \omega^2 \, d \; \vec{i} + (2 \, \omega \, v' - \alpha \, d) \; \vec{k} \end{cases}$$

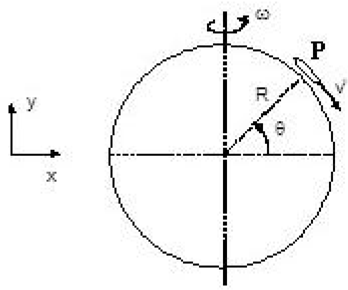
e) La tierra (esfera de radio R) gira con velocidad angular constante ω. Un cohete (partícula) despega desde un punto de su superficie con una velocidad v' y una aceleración a' medidas por un observador en su superficie dirigidas radialmente desde el centro de la tierra e inclinadas un ángulo θ respecto del plano ecuatorial.



SOLUCIÓN

$$\begin{cases} \vec{v}_P = \; v' \, cos \, \theta \; \vec{i} + v' \; sen \, \theta \; \vec{j} - \omega \; R \; cos \, \theta \; \vec{k} \\ \vec{a}_P = \; \Big(a' \, cos \, \theta - \omega^2 \, R \; cos \, \theta \Big) \; \vec{i} + a' \; sen \, \theta \; \vec{j} - 2 \, \omega \, v' \, cos \, \theta \; \vec{k} \end{cases}$$

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

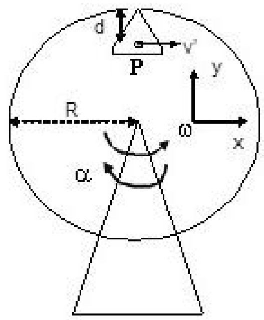


f) En las condiciones del caso e) una nube (partícula) se mueve sobre la superficie de la tierra en un punto de latitud θ con velocidad v' tangente a la misma, dirigiéndose hacia el plano ecuatorial y contenida en el plano definido por el eje terrestre y el radio vector que une el centro de la tierra y la nube.

SOLUCIÓN

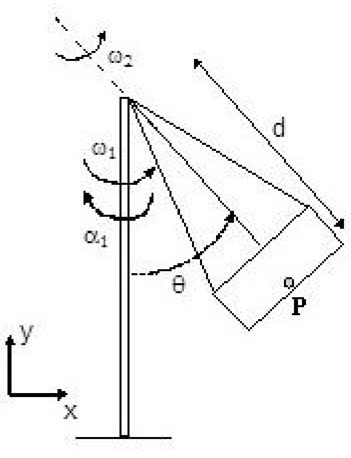
$$\begin{cases} \vec{v}_P = & v'\ sen\,\theta\ \vec{i} - v'\ cos\,\theta\ \vec{j} - \omega\ R\ cos\,\theta\ \vec{k} \\ \vec{a}_P = & -\omega^2\, R\ cos\,\theta\ \vec{i} - 2\,\omega\, v'\ sen\,\theta\ \vec{k} \end{cases}$$

g) Una noria de radio R gira con velocidad angular ω antihoraria y con aceleración angular α horaria. Dentro de una de las barquillas se encuentra un niño a una distancia d del punto de suspensión de la barquilla que lanza un objeto (partícula) con una velocidad v' respecto de la barquilla.



SOLUCIÓN

$$\begin{cases} \vec{v}_P = (v'\ \ -\omega\ \ (R-d))\ \ \ \vec{i} \\ \vec{a}_P = \ \alpha\ (R-d)\ \ \vec{i} + \left(\omega^2\ \ (R-d) + 2\,\omega\, v'\right)\ \ \vec{j} \end{cases}$$



h) Una cesta de feria se balancea con velocidad angular ω_1 antihoraria y con aceleración angular α_1 horaria en torno al eje y y se encuentra inclinada un ángulo θ respecto de la vertical mientras gira respecto a su propio eje con velocidad angular ω_2. Un niño (partícula) se halla acomodado dentro, a una distancia d del punto de suspensión de la cesta y en el eje de giro de la velocidad ω_2.

SOLUCIÓN

$$\begin{cases} \vec{v}_P = & -\omega_1\ d\ sen\,\theta\ \vec{k} \\ \vec{a}_P = & -{\omega_1}^2\ d\ sen\,\theta\,\vec{i} + \alpha_1\ d\ sen\,\theta\ \vec{k} \end{cases}$$

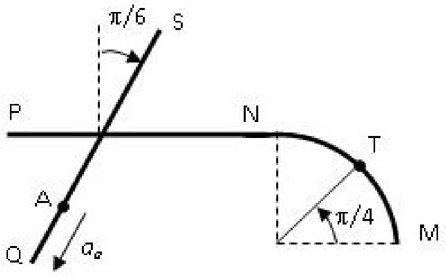
Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval
etsiae

PROBLEMA RESUELTO 3.1.

En el instante de interés indicado en la figura, un tren T recorre la vía $MTNP$ con velocidad $V = 60km/h$ y aceleración tangencial de módulo $a_t = 1m/s^2$.

El tramo MTN es un cuadrante de circunferencia de radio $R = 500m$.

Un automóvil A circula por la carretera recta QS dirigiéndose hacia el cruce de trayectorias y frenando con deceleración $a_a = 2m/s^2$.
Calcular:



1. Aceleración del tren T, en la posición indicada, vista desde el automóvil.

2. Lo mismo, pero suponiendo que el tren está detenido.

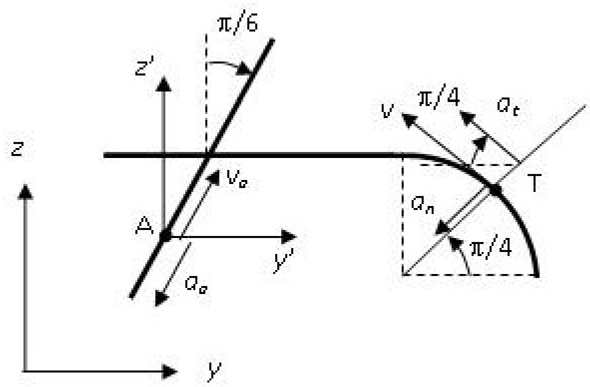
SOLUCIÓN 3.1.

Trabajamos en unidades fundamentales SI.
Dado que nos piden calcular una serie de magnitudes cinemáticas desde el punto de vista del automóvil ligamos a éste un sistema de referencia S'.

Ejes fijos (Sistema S): $Oxyz$ fijos a tierra.

Ejes móviles (Sistema S'): $O'x'y'z'$ fijos al automóvil, paralelos a los fijos en el instante considerado.

1) En este caso conocemos la aceleración y la velocidad del tren en el sistema fijo S.



La aceleración tangencial es: $\vec{a}_t = \cos\frac{\pi}{4}(-\vec{j}) + \mathrm{sen}\frac{\pi}{4}\vec{k}$
La aceleración normal es: $\vec{a}_n = \frac{v^2}{R}\left(\cos\frac{\pi}{4}(-\vec{j}) + \mathrm{sen}\frac{\pi}{4}(-\vec{k})\right)$

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

Y la aceleración del tren, a_T, es:

$$\vec{a}_T = \vec{a}_t + \vec{a}_n = (1 + \tfrac{v^2}{R}\cos\tfrac{\pi}{4})(-\vec{j}) + (1 - \tfrac{v^2}{R}\mathrm{sen}\tfrac{\pi}{4})\vec{k} =$$
$$= -\tfrac{5}{9}\cdot\tfrac{\sqrt{2}}{3}(\vec{j}+\vec{k}) = -0.39(\vec{j}+\vec{k})$$

La velocidad del tren es $v_T = V = 60(km/h) = 50/3(m/s)$

La aceleración del origen de S' será la del automóvil:

$$\vec{a}_{O'} = \vec{a}_a = -a_a\ sen\frac{\pi}{6}\vec{j} - a_a\ \cos\frac{\pi}{6}\vec{k} = -2\left(\frac{1}{2}\vec{j} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{k}\right) = -\vec{j} - 1.732\vec{k}$$

Relacionamos aceleraciones absolutas y relativas entre los sistemas S y S', teniendo en cuenta que S' no gira ($\Omega = 0$) y la aceleración de su origen coincide con la aceleración del coche:

$$\vec{a}_T = \vec{a}'_T + \vec{a}_{O'} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt}\times\vec{r}' + \vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}') + 2\vec{\Omega}\times\vec{v}'_T = \vec{a}'_T + \vec{a}_{O'}$$

Para despejar la aceleración relativa del tren medida por el coche:

$$\vec{a}'_T = \vec{a}_T - \vec{a}_{O'} = -0.10\vec{j} + 2.046\vec{k} \quad {}^{m}\!/_{s^2}$$

2) Si el tren se encuentra detenido carece de aceleración absoluta, por tanto:

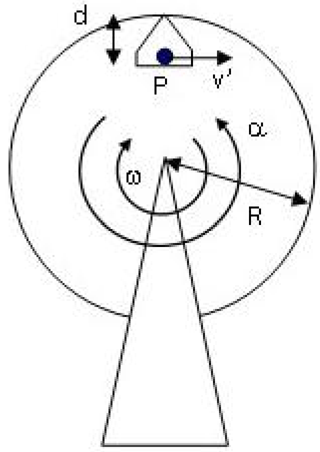
$$\vec{a}_T = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{a}'_T = -\vec{a}_{O'} = \vec{j} + 1.732\vec{k} \quad {}^{m}\!/_{s^2}$$

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

PROBLEMA RESUELTO 3.2.

Una noria gira con velocidad angular ω antihoraria y con aceleración angular α horaria. Dentro de una de las barquillas situada en la parte más alta de la noria se encuentra un niño que lanza un objeto (partícula) con una velocidad v' respecto de la barquilla. El niño se encuentra a una distancia d del punto más alto de la noria.

Calcúlese la velocidad y aceleración de la partícula respecto de un sistema fijo a tierra en el instante considerado.

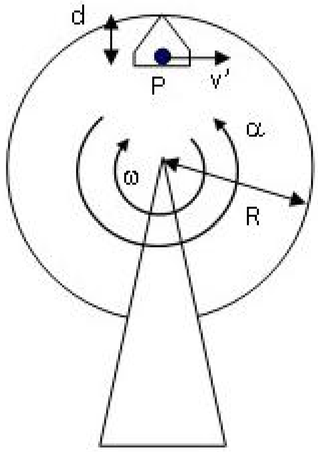


SOLUCIÓN 3.2.

Colocamos un sistema de ejes móviles ligado a la barquilla, ya que, la velocidad relativa se refiere a ésta ($\vec{v}'_P = v'\vec{i}'$). En el instante de interés estos ejes coinciden con los fijos.

Ejes fijos (Sistema S): $Oxyz$ fijos a tierra y con origen en el centro de la noria.
Eje Ox horizontal y contenido en el plano de la noria y eje Oy en la vertical.

Ejes móviles (Sistema S'): $O'x'y'z'$ ligados a la barquilla y con origen en el punto más alto de la noria.



Aunque parezca lo contrario el sistema móvil carece de velocidad y aceleración angulares ($\Omega = 0 \quad \alpha = 0$). Su origen describe un movimiento circular:

$$\vec{v}_{O'} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OO'} = \omega\vec{k} \times R\vec{j} = -\omega R\vec{i}$$

$$\vec{a}_{O'} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{OO'}) + \vec{\alpha} \times \overrightarrow{OO'} =$$
$$= \omega\vec{k} \times (-R\omega\vec{i}) + (-\alpha\vec{k}) \times R\vec{j} = -\omega^2 R\vec{j} + \alpha R\vec{i}$$

La velocidad absoluta, teniendo en cuenta que en el instante de interés coinciden los unitarios de los ejes S y S', es entonces:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{O'} + \vec{v}'_P + \vec{\Omega} \times \overrightarrow{O'P} = -\omega R\vec{i} + v'\vec{i}' = (v' - \omega R)\vec{i}$$

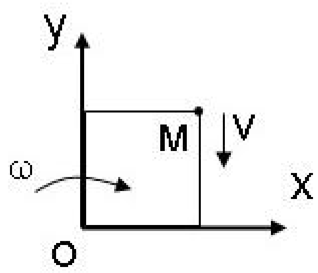
La aceleración absoluta es:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{O'} + \vec{a}'_P + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \overrightarrow{O'P}) + \vec{\alpha} \times \overrightarrow{O'P} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}'_P = \alpha R\vec{i} - \omega^2 R\vec{j}$$

No hay aceleración relativa dado que no lo dice el enunciado $\vec{a}'_P = \vec{0}$

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval
etsiae

PROBLEMA RESUELTO 3.3.



Un cuadrado de lado L gira en su plano, alrededor del eje OZ, con velocidad angular constante ω.

Un punto M se mueve sobre el lado AB con velocidad constante v, relativa al cuadrado.

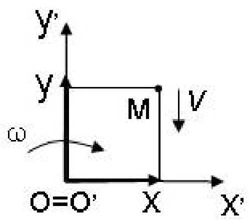
Determinar, en el instante dibujado, la velocidad absoluta de M y su aceleración absoluta.

SOLUCIÓN 3.3.

Se debe ligar un sistema de ejes móviles S' al cuadrado, de manera que en el instante de interés coinciden con los ejes del sistema fijo S ($\vec{i} = \vec{i}'$, $\vec{j} = \vec{j}'$, $\vec{k} = \vec{k}'$). La velocidad v es en realidad una velocidad relativa medida por este sistema ligado al cuadrado

Ejes fijos (Sistema S): $Oxyz$ fijos a tierra.

Ejes móviles (Sistema S'): $O'x'y'z'$ ligado al cuadrado.



La velocidad angular tiene el sentido negativo del eje z ya que el giro es horario visto desde este eje: $\vec{\Omega} = -\omega\vec{k}$.

La velocidad de M respecto del sistema S' es: $\vec{v}'_M = -v\,\vec{j}'$

El origen de S' carece de velocidad respecto de S: $\vec{v}_{O'} = \vec{0}$

La velocidad absoluta de M es:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_{O'} + \vec{v}'_M + \vec{\Omega} \times \overrightarrow{O'M} = -v\,\vec{j}' + (-\omega\,\vec{k}) \times (L\vec{i} + L\vec{j}) = -v\,\vec{j}' + \omega L(\vec{i} - \vec{j})$$

$$\vec{v}_M = \omega L\vec{i} - (v + \omega L)\,\vec{j}$$

S' carece de aceleración angular y M carece de aceleración relativa dado que el enunciado no informa acerca de ello; además O' carece de aceleración:

$$\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \vec{0},\ \vec{a}'_M = \vec{0},\ \vec{a}_{O'} = \vec{0}.$$

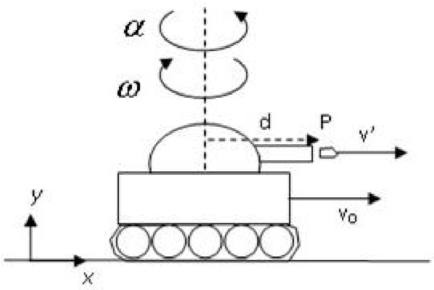
La aceleración absoluta de M es:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_{O'} + \vec{a}'_M + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \overrightarrow{O'M}) + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \overrightarrow{O'M} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}'_M$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \overrightarrow{O'M}) = (-\omega\,\vec{k}) \times \omega L(\vec{i} - \vec{j}) = -\omega^2 L(\vec{i} + \vec{j}) \\ 2\vec{\Omega} \times \vec{v}'_M = 2(-\omega\,\vec{k}) \times (-v\vec{j}') = -2\omega v\vec{i} \end{array}\right\} \vec{a}_M = -(2\omega v + \omega^2 L)\vec{i} - \omega^2 L\vec{j}$$

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

PROBLEMA RESUELTO 3.4.

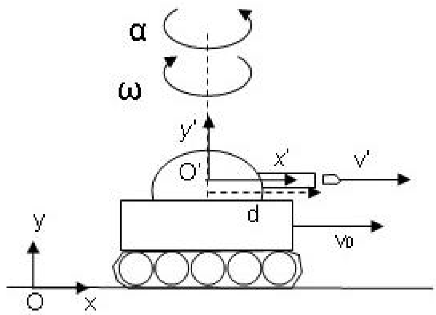


Un tanque se mueve con una velocidad v_0. La cabina del tanque gira con una velocidad angular ω horaria y con una aceleración angular α antihoraria. Un cañón situado en la cabina, moviéndose rígidamente con ella, cuya posición en ese instante coincide con la dirección de movimiento del tanque, lanza un proyectil P (partícula) con una velocidad v' respecto de su alma y situado a una distancia d del eje de giro de la cabina como se muestra en la figura.

Calcúlese la velocidad y aceleración de la partícula respecto de un sistema fijo en el instante considerado.

SOLUCIÓN 3.4.

Colocamos unos ejes móviles, paralelos a los fijos en el instante de interés, ligados a la cabina del tanque dado que nos dan la velocidad relativa del proyectil respecto de ésta. El origen del sistema móvil S' lo colocamos en el eje de giro de la cabina para evitar que la velocidad angular ω y la aceleración angular α confieran velocidad y aceleración al origen O' por el giro.



Ejes fijos (Sistema S): $Oxyz$ fijos a tierra.

Ejes móviles (Sistema S'): $O'x'y'z'$ ligados a la cabina del tanque.

La velocidad del origen O' es la del tanque: $\vec{v}_{O'} = v_0\vec{i}$

La velocidad angular es negativa al ser horaria vista desde $\vec{j}$: $\vec{\Omega} = -\omega\vec{j}$

La velocidad relativa del proyectil es: $\vec{v}'_P = v'\vec{i}'$

El vector de posición en el sistema S' es: $\vec{r}'_P = d\vec{i}'$

La velocidad absoluta teniendo en cuenta el paralelismo de ejes de S y S' es:

$$\vec{v}_P = \vec{v}'_P + \vec{v}_{O'} + \vec{\Omega} \times r'_P = v'\vec{i}' + v_0\vec{i} + (-\omega\vec{j}) \times (d\vec{i}) = (v' + v_0)\vec{i} + \omega d\,\vec{k}$$

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

El origen O' carece de aceleración pues el enunciado no habla de esta magnitud: $\vec{a}_{O'} = \vec{0}$

La aceleración angular es positiva al ser horaria vista desde $\vec{j}$: $\vec{\alpha} = \alpha\vec{j}$

La aceleración relativa del proyectil es nula pues el enunciado no habla de esta magnitud: $\vec{a}'_P = \vec{0}$

La aceleración absoluta teniendo en cuenta el paralelismo de ejes de S y S' es:

$$\vec{a}_P = \vec{a}'_P + \vec{a}_{O'} + \vec{\alpha} \times \vec{r}'_P + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}'_P) + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}'_P$$

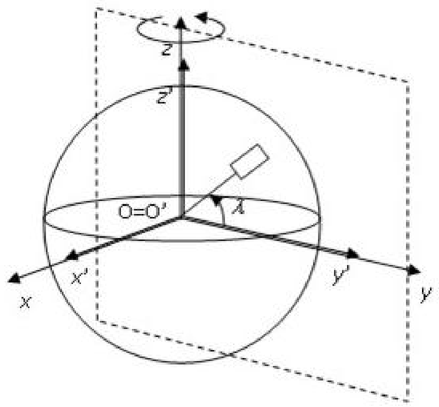
$$\vec{a}_P = \alpha\vec{j} \times d\vec{i}' + (-\omega\vec{j}) \times \omega d\,\vec{k} + 2(-\omega\vec{j}) \times v'\vec{i}'$$

$$\vec{a}_P = -\alpha d\,\vec{k} - \omega^2 d\,\vec{i} + 2\omega v'\,\vec{k} = -\omega^2 d\,\vec{i} + (2\omega v' - \alpha d)\vec{k}$$

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

PROBLEMA RESUELTO 3.5.

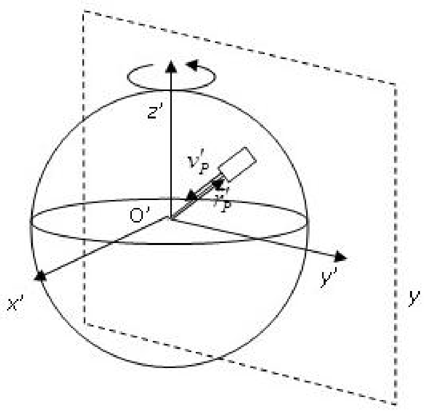
El ascensor de una mina desciende con velocidad constante de $12m/s$ con respecto a la superficie de la Tierra.
Calcular la aceleración del ascensor con respecto a un sistema de referencia fijo en el centro de la Tierra y que no gira con ella, si el ascensor está:



1. En el ecuador.
2. A $\lambda = 40^o$ de latitud norte.
3. A $\lambda = 40^o$ de latitud sur.

(Ejes: origen en el centro de la Tierra, eje Oz que pase por el polo norte, eje Oy pasa por el ecuador y el plano Oyz contiene al ascensor.)

SOLUCIÓN 3.5.



Ejes móviles paralelos a los fijos en el instante de interés, con origen fijo al centro de la Tierra y que giran con velocidad angular constante e igual a la de rotación diaria terrestre.

Es decir: $\vec{v}_{O'} = 0$ y $\vec{\Omega} = \omega_T \vec{k}$

La velocidad relativa respecto del sistema que gira con la tierra es:

$$\vec{v}'_P = -v'_P cos\lambda \vec{j}' - v'_P sen\lambda \vec{k}'$$

donde v'_P es la velocidad de descenso del ascensor y λ se mide positivamente en latitud norte y negativamente en latitud sur.

El vector de posición en el sistema móvil es: $\vec{r}'_P = R_T cos\lambda \vec{j}' + R_T\, sen\lambda \vec{k}'$

La velocidad absoluta es $\vec{v}_P = \vec{v}_{O'} + \vec{v}'_P + \vec{\Omega} \times \vec{r}'_P$ y haciendo el producto vectorial y sumando, queda (los ejes de ambos sistemas son paralelos):

$$\vec{v}_P = -\omega_T R_T cos\lambda \vec{i} - v'_P cos\lambda \vec{j} - v'_P sen\lambda \vec{k}$$

La aceleración de O', la aceleración relativa de P y la aceleración angular son nulas: $\vec{a}_{O'} = 0, \quad \vec{a}'_P = 0 \quad y \quad \vec{\alpha} = 0$

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

La aceleración absoluta es:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{O'} + \vec{a}'_P + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}'_P) + \vec{\alpha} \times \vec{r}'_P + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}'_P$$

Haciendo los productos vectoriales y sustituyendo,

$\vec{a}_P = \omega_T \vec{k} \times (-\omega_T R_T cos\lambda \vec{i}) + 2\omega_T \vec{k} \times (-v'_P cos\lambda \vec{j}' - v'_P sen\lambda \vec{k}')$

$\vec{a}_P = 2\omega_T v'_P cos\lambda\, \vec{i} - \omega_T^2 R_T cos\lambda\, \vec{j}$

Basta con sustituir los valores numéricos,

$R_T = 6,37.10^6\, m$

$\omega_T = 7,27.10^{-5}\, rad/s$

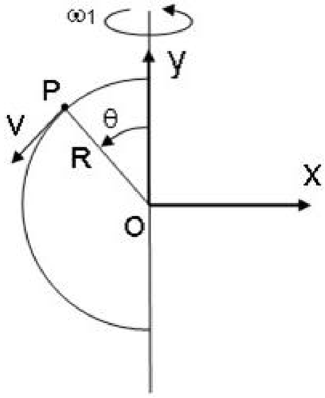
$\lambda = 0^o$, $40^o\, y\, -40^o$, según el caso.

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

PROBLEMA RESUELTO 3.6.

Un punto P recorre, con celeridad constante v, la semicircunferencia de radio R; ésta, a su vez, gira alrededor de su diámetro con velocidad angular ω_1 constante.

Calcular los vectores velocidad absoluta y aceleración absoluta de P, para una posición genérica dada por el ángulo θ, con respecto a los ejes fijos dibujados.

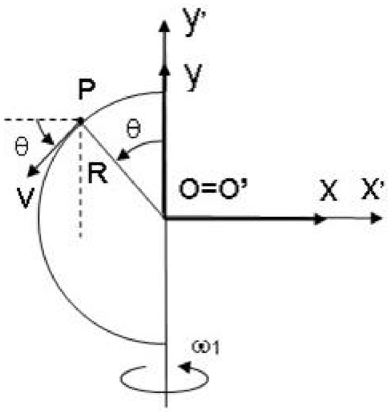


SOLUCIÓN 3.6.

Se debe ligar un sistema de ejes móviles S' a la semicircunferencia, de manera que en el instante de interés coinciden con los ejes del sistema fijo S ($\vec{i} = \vec{i}'$, $\vec{j} = \vec{j}'$, $\vec{k} = \vec{k}'$). La velocidad v es en realidad una velocidad relativa medida por este sistema ligado a la semicircunferencia.

Ejes fijos (Sistema S): $Oxyz$ fijos a tierra con origen O en el centro de la semicircunferencia.

Ejes móviles (Sistema S'): $O'x'y'z'$ ligados a la semicircunferencia.



La velocidad angular tiene el sentido positivo del eje y, ya que, el giro es antihorario visto desde este eje: $\vec{\Omega} = \omega_1 \vec{j}$

La velocidad de P respecto del sistema S' es: $\vec{v}'_P = v(-cos\theta\vec{i}' - sen\theta\vec{j}')$

Y el vector de posición de P en el sistema S' es: $\vec{r}'_P = R(-sen\theta\vec{i}' + cos\theta\vec{j}')$

El origen de S' carece de velocidad respecto de S: $\vec{v}_{O'} = \vec{0}$

La velocidad absoluta de P es:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{O'} + \vec{v}'_P + \vec{\Omega} \times \vec{r}'_P = v(-cos\theta\vec{i}' - sen\theta\vec{j}') + (-\omega_1\vec{j}) \times R(-sen\theta\vec{i}' + cos\theta\vec{j}')$$

Aplicamos el paralelismo de los ejes de S y S' en el instante de interés:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{O'} + \vec{v}'_P + \vec{\Omega} \times \vec{r}'_P = -vcos\theta\vec{i} - vsen\theta\vec{j} + \omega_1 Rsen\theta\vec{k}$$

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

S' carece de aceleración angular dado que el enunciado no lo dice, además O' carece de aceleración:

$\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \vec{0}$ y $\vec{a}_{O'} = \vec{0}$

En este caso la partícula P sí que tiene aceleración relativa dado que está describiendo una circunferencia con velocidad angular $\omega = \frac{v}{R}$:

$$\vec{a}'_P = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r'}_P) = \omega\vec{k}'\times(\omega\vec{k}'\times R(-sen\theta\vec{i}'+cos\theta\vec{j}')) = \omega\vec{k}'\times(-\omega R sen\theta\vec{j}'-\omega R cos\theta\vec{i}')$$

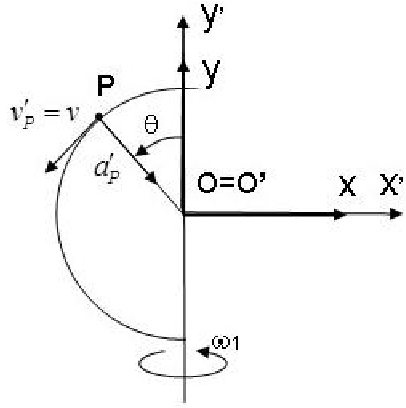
$$\vec{a}'_P = \omega^2 R(sen\theta\vec{i}' - cos\theta\vec{j}') = \frac{v^2}{R}(sen\theta\vec{i}' - cos\theta\vec{j}')$$

Por tanto, tiene módulo $\omega^2 R$, dirección radial y sentido hacia el centro de la circunferencia.

Calculamos los términos que faltan de la fórmula que relaciona las aceleraciones absoluta y relativa teniendo en cuenta el paralelismo de ejes:

$$\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r'}_P) = \omega_1\vec{j}\times\omega_1 R sen\theta\vec{k}' = \omega_1^2 R sen\theta\,\vec{i}$$

$$2\vec{\Omega}\times\vec{v}'_P = 2(\omega_1\vec{j})\times(-v cos\theta\vec{i}' - v sen\theta\vec{j}') = 2\omega_1 v cos\theta\vec{k}$$



La aceleración absoluta de P es:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{O'} + \vec{a'}_P + \vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times O'\vec{P}) + \frac{d\vec{\Omega}}{dt}\times O'\vec{P} + 2\vec{\Omega}\times\vec{v'}_P$$

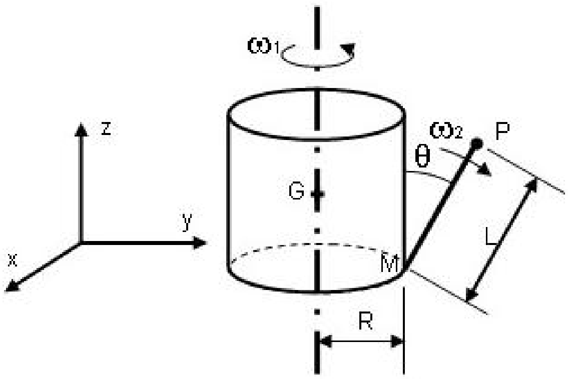
$$\vec{a}_P = \frac{v^2}{R}(sen\theta\vec{i}' - cos\theta\vec{j}') + \omega_1^2 R sen\theta\,\vec{i} + 2\omega_1 v cos\theta\vec{k} =$$

$$= (\frac{v^2}{R} + \omega_1^2 R)sen\theta\vec{i} - \frac{v^2}{R}cos\theta\,\vec{j} + 2\omega_1 v cos\theta\vec{k}$$

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval
etsiae

PROBLEMA RESUELTO 3.7.

En la figura se muestra un satélite cilíndrico de radio R que se mueve con velocidad de su centro de masas $\vec{v}_G = v_G\vec{k}$ y gira alrededor de su eje de simetría con velocidad angular $\vec{\omega}_1 = \omega_1\vec{k}$, respecto a los ejes fijos dibujados.

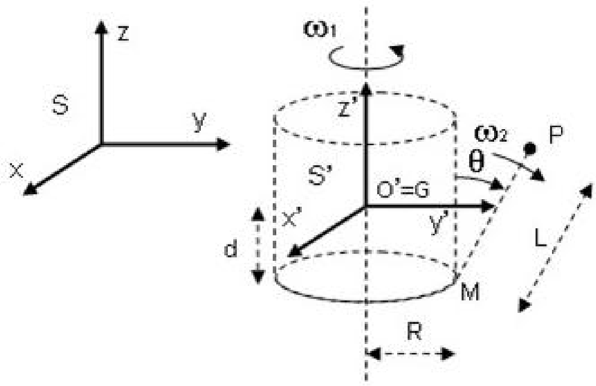


En el instante de interés mostrado, la barra MP de longitud L, que gira alrededor del punto M y está siempre contenida en un plano que contiene al eje del satélite, está separándose del satélite con velocidad angular ω_2.

1. Definir con precisión los ejes que se van a utilizar en la resolución.
2. Calcular, para el instante de interés, la velocidad y la aceleración absolutas del punto P situado en el extremo de la barra.

SOLUCIÓN 3.7.

1)

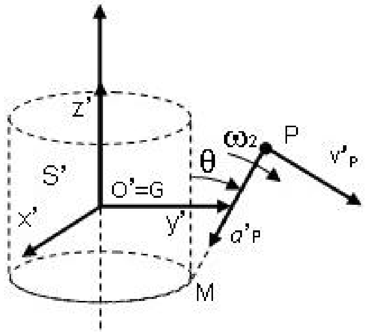


Se debe ligar un sistema de ejes móviles S' a la velocidad angular que arrastra. Se podrían ligar ejes móviles a la velocidad angular arrastrada, aunque en este caso es más fácil describir el movimiento de la partícula como un movimiento circular.

Ejes fijos (Sistema S): $Oxyz$ fijos a tierra.

Ejes móviles (Sistema S'): $O'x'y'z'$ (En este caso se debe ligar el sistema móvil al satélite, preferiblemente, con el origen en su eje de giro para evitar que éste tenga velocidad o aceleración respecto al sistema fijo debido a la velocidad angular ω_1; por tanto, el origen tendrá exclusivamente la velocidad $\vec{v}_G = v_G\vec{k}$).

El movimiento del punto P respecto del sistema S' es un movimiento circular con centro M. La velocidad angular lleva el sentido del eje $-\vec{i}'$ al ser el giro horario visto desde este eje.



$$\vec{v}'_P = (-\omega_2\vec{i}') \times \overrightarrow{MP} = (-\omega_2\vec{i}') \times (Lsen\theta\vec{j}' + Lcos\theta\vec{k}') = \omega_2 L(cos\theta\vec{j}' - sen\theta\vec{k}')$$

$$\vec{a}'_P = (-\omega_2\vec{i}') \times \left((-\omega_2\vec{i}') \times \overrightarrow{MP}\right) = (-\omega_2\vec{i}') \times \left(\omega_2 L(cos\theta\vec{j}' - sen\theta\vec{k}')\right)$$

$$\vec{a}'_P = -\omega_2^2 L(sen\theta\vec{j}' + cos\theta\vec{k}')$$

Relacionamos las velocidades medidas por el sistema S' y el sistema S. El sistema S' tiene velocidad angular ω_1 en el sentido positivo de $\vec{k}$ al ser el giro antihorario visto desde este eje ($\vec{\Omega} = \omega_1\vec{k}$). La velocidad de su origen es $\vec{v}_{O'} = \vec{v}_G = v_G\vec{k}$.

La partícula tiene de vector de posición en el sistema S': $r'_P = (R + Lsen\theta)\vec{j}' + (Lcos\theta - d)\vec{k}'$, siendo d la mitad de la altura.

Velocidad absoluta: $\vec{v}_P = \vec{v}'_P + \vec{v}_{O'} + \vec{\Omega} \times r'_P$

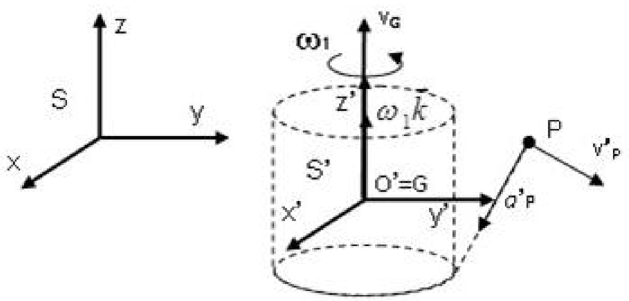
$$\left.\begin{array}{l} \vec{\Omega} = \omega_1\vec{k} \\ r'_P = (R + Lsen\theta)\vec{j}' + (Lcos\theta - d)\vec{k}' \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \vec{\Omega} \times r'_P = -\omega_1(R + Lsen\theta)\vec{i}$$

Sumando todos los términos y teniendo en cuenta que los unitarios de los sistemas S y S' coinciden en el instante considerado:

$$\vec{v}_P = -\omega_1(R + Lsen\theta)\vec{i} + \omega_2 Lcos\theta\vec{j} + (v_G - \omega_2 Lsen\theta)\vec{k}$$

Aceleración absoluta:

$$\vec{a}_P = \vec{a}'_P + \vec{a}_{O'} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{r}'_P + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}'_P) + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}'_P$$



Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

El sistema S' no tiene aceleración angular y su origen tampoco tiene aceleración (no lo dice el enunciado): $\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = 0$ y $\vec{a}_{O'} = \vec{0}$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a}'_P = -\omega_2^2 L(sen\theta\vec{j}' + cos\theta\vec{k}') \\ \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}'_P) = \omega_1\vec{k} \times [-\omega_1(R + Lsen\theta)]\vec{i} = -\omega_1^2(R + Lsen\theta)\vec{j} \\ 2\vec{\Omega} \times \vec{v}'_P = 2\omega_1\vec{k} \times [\omega_2 L(cos\theta\vec{j} - sen\theta\vec{k})] = -2\omega_1\omega_2 Lcos\theta\vec{i} \end{array}\right\}$$

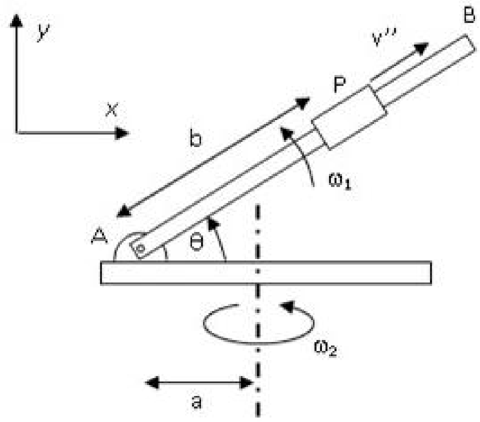
Sumando todos los términos y teniendo en cuenta que los unitarios de los sistemas S y S' coinciden en el instante considerado:

$$\vec{a}_P = -2\omega_1\omega_2 Lcos\theta\vec{i} - [\omega_1^2(R + Lsen\theta) + \omega_2^2 Lsen\theta]\vec{j} - \omega_2^2 Lcos\theta\vec{k}$$

Departamento de Física aplicada a las ingenierías Aeronáutica y Naval

PROBLEMA RESUELTO 3.8.

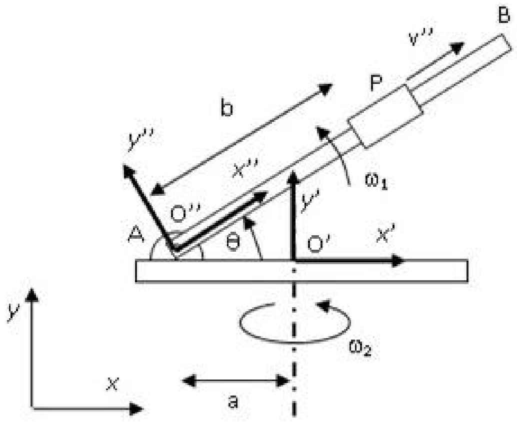
El pasador P de la figura se desplaza a lo largo de la varilla AB con velocidad relativa constante v''. La varilla gira respecto a una articulación a la que está sujeta en su extremo A, con velocidad angular constante ω_1.



La articulación está unida a un disco horizontal que rota con velocidad angular constante, ω_2, respecto a su eje E, que está fijo al sistema S, de ejes $Oxyz$. La distancia entre el eje de rotación del disco y la articulación es a.
Para el instante mostrado en la figura, en el que la varilla forma un ángulo θ con la horizontal y el pasador está a una distancia b de la articulación, se pide calcular:

1. Velocidad angular ω y aceleración angular α de la varilla respecto al sistema fijo S.
2. La velocidad del pasador respecto al sistema fijo S.
3. La aceleración del pasador respecto al disco horizontal.

SOLUCIÓN 3.8.



1) Colocamos dos sistemas de referencia móviles.

Uno ligado al disco, S' con origen O' en el eje de giro y con velocidad angular ω_2.

Y otro ligado a la varilla, S'' con origen O'' en la articulación y con velocidad angular ω_1. Es decir, se coloca un sistema ligado a aquellas velocidades angulares tales que se relacionan unas con otras por el arrastre.

En este caso, $\vec{\omega}_2$ arrastra a $\vec{\omega}_1$.

No se debe confundir con un sólido con una **única** velocidad angular descompuesta en distintos ejes, y que en ningún momento unas componentes arrastran a otras, por ejemplo, alabeo, cabeceo y guiñada en un aeroplano.

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

Por composición de rotaciones:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_1 = \omega_2\vec{j} + \omega_1\vec{k}$$

$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_2 + \vec{\alpha}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_1 = \omega_2\vec{j} \times \omega_1\vec{k} = \omega_2\omega_1\vec{i}$$

2,3) Calculamos la velocidad respecto del sistema S'. Tenemos que imaginar que el disco no gira y aplicar las ecuaciones que relacionan las velocidades en dos sistemas en movimiento relativo. El origen de S'' no se mueve.

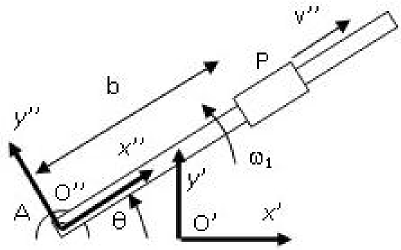
$$\vec{v'}_P = \vec{v'}_{O''} + \vec{v''}_P + \vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{O''P}$$

$$\vec{v'}_P = \vec{0} + v''(cos\theta\vec{i} + sen\theta\vec{j}) + \omega_1\vec{k} \times b(cos\theta\vec{i} + sen\theta\vec{j})$$

$$\vec{v'}_P = v''cos\theta\vec{i} + v''sen\theta\vec{j} + \omega_1(bcos\theta\vec{j} - bsen\theta\vec{i})$$

$$\vec{v'}_P = (v''cos\theta - \omega_1 bsen\theta)\vec{i} + (v''sen\theta + \omega_1 bcos\theta)\vec{j}$$

Calculamos la aceleración respecto del sistema S'. Tenemos que imaginar que el disco no gira y aplicar las ecuaciones que relacionan las aceleraciones en dos sistemas en movimiento relativo. El origen O'' no se mueve. S'' tampoco tiene aceleración angular.

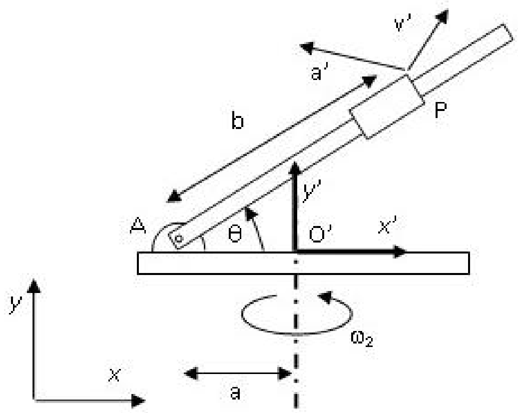


$$\vec{a'}_P = \vec{a'}_{O''} + \vec{a''}_P + \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{O''P}) + \vec{\alpha}_1 \times \overrightarrow{O''P} + 2\vec{\omega}_1 \times \vec{v}''_P$$

$$\vec{a'}_P = \vec{0} + \vec{0} + \omega_1\vec{k} \times \omega_1(bcos\theta\vec{j} - bsen\theta\vec{i}) + \vec{0} + 2\omega_1\vec{k} \times v''(cos\theta\vec{i} + sen\theta\vec{j})$$

$$\vec{a'}_P = -\omega_1^2 bcos\theta\vec{i} - \omega_1^2 bsen\theta\vec{j} + 2\omega_1 v''cos\theta\vec{j} - 2\omega_1 v''sen\theta\vec{i}$$

$$\vec{a'}_P = -(\omega_1^2 bcos\theta + 2\omega_1 v''sen\theta)\vec{i} + (2\omega_1 v''cos\theta - \omega_1^2 bsen\theta)\vec{j}$$



Calculamos la velocidad respecto del sistema S. Ahora trabajamos como si ya no existiera el sistema S''. La velocidad relativa de la partícula ha cambiado a v'. El origen de S' no se mueve.

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{O'} + \vec{v'}_P + \vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{O'P}$$

$$\vec{v'}_P = \vec{0} + (v''cos\theta - \omega_1 bsen\theta)\vec{i} + (v''sen\theta + \omega_1 bcos\theta)\vec{j} + \omega_2\vec{j} \times (-a\vec{i} + b(cos\theta\vec{i} + sen\theta\vec{j}))$$

$$\vec{v'}_P = \vec{0} + (v''cos\theta - \omega_1 bsen\theta)\vec{i} + (v''sen\theta + \omega_1 bcos\theta)\vec{j} - \omega_2(-a + bcos\theta)\vec{k}$$

Calculamos la aceleración respecto del sistema S. Ahora trabajamos como si ya no existiera el sistema S''. La aceleración relativa de la partícula ha cambiado a a'. El origen de S' no se mueve y el sistema S' tampoco tiene aceleración angular.

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{O'} + \vec{a}'_P + \vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{O'P}) + \vec{\alpha}_2 \times \overrightarrow{O'P} + 2\vec{\omega}_2 \times \vec{v}'_P$$

$$\vec{a}_P = \vec{0} - (\omega_1^2 bcos\theta + 2\omega_1 v'' sen\theta)\vec{i} + (2\omega_1 v'' cos\theta - \omega_1^2 bsen\theta)\vec{j} +$$
$$+\omega_2\vec{j} \times (-\omega_2(-a + bcos\theta)\vec{k}) + \vec{0} + 2\omega_2\vec{j} \times ((v''cos\theta - \omega_1 bsen\theta)\vec{i} + (v''sen\theta + \omega_1 bcos\theta)\vec{j} -$$
$$-\omega_2(-a + bcos\theta)\vec{k})$$

$$\vec{a}_P = -(\omega_1^2 bcos\theta + 2\omega_1 v'' sen\theta)\vec{i} + (2\omega_1 v'' cos\theta - \omega_1^2 bsen\theta)\vec{j} -$$
$$-\omega_2^2(-a + bcos\theta)\vec{i} - 2\omega_2(v''cos\theta - \omega_1 bsen\theta)\vec{k} - 2\omega_2^2(-a + bcos\theta)\vec{i}$$

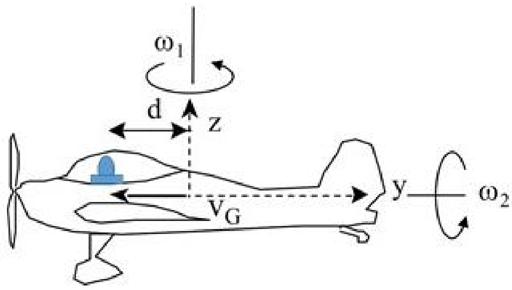
$$\vec{a}_P = -(3\,\omega_2^2(-a + bcos\theta) + \omega_1^2 bcos\theta + 2\omega_1 v'' sen\theta)\vec{i} +$$
$$+(2\omega_1 v'' cos\theta - \omega_1^2 bsen\theta)\vec{j} - 2\omega_2(v''cos\theta - \omega_1 bsen\theta)\vec{k}$$

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

PROBLEMA RESUELTO 3.9.

Un avión situado en posición horizontal respecto del suelo se desplaza con una velocidad horizontal V_G. Realiza al mismo tiempo una guiñada con velocidad angular ω_1 y un alabeo con velocidad angular ω_2. El piloto se halla a una distancia d del centro de masas tal y como se muestra en la figura. Calcúlese la velocidad y aceleración del piloto respecto de un sistema fijo.

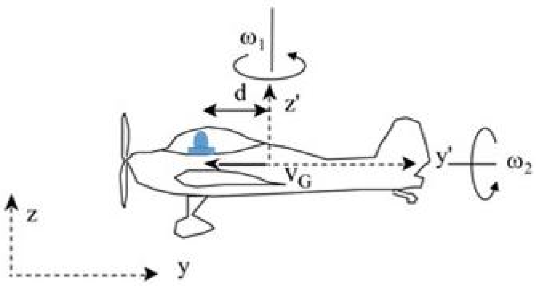


SOLUCIÓN 3.9.

Ejes fijos (Sistema S): $Oxyz$ fijos a tierra.

Ejes móviles (Sistema S'): $O'x'y'z'$ ligados al avión y origen O' en el CM por tanto, su velocidad angular es: $\vec{\Omega} = \omega_1 \vec{k} + \omega_2 \vec{j}$

Además su origen tiene velocidad: $\vec{v}_{O'} = -v_G \vec{j}$



ω_1 no arrastra a ω_2, ni a la inversa, puesto que se trata de componentes de la velocidad angular en el mismo sistema de referencia móvil. Por tanto: $\vec{\alpha} \neq \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2$ y $\vec{\alpha} \neq \vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_1$

Calculamos la velocidad absoluta del piloto (punto P):

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{O'} + \vec{v}'_P + \vec{\Omega} \times \overrightarrow{O'P} = -v_G \vec{j} + \omega_1 d \vec{i}$$

(La partícula carece de velocidad relativa respecto al sistema S' puesto que no se mueve respecto al sólido)

Calculamos la aceleración absoluta del punto P:

$$\vec{a}_P = \underbrace{\vec{a}_{O'}}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{a}'_P}_{\vec{0}} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \overrightarrow{O'P}) + \vec{\alpha} \times \overrightarrow{O'P} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}'_P$$

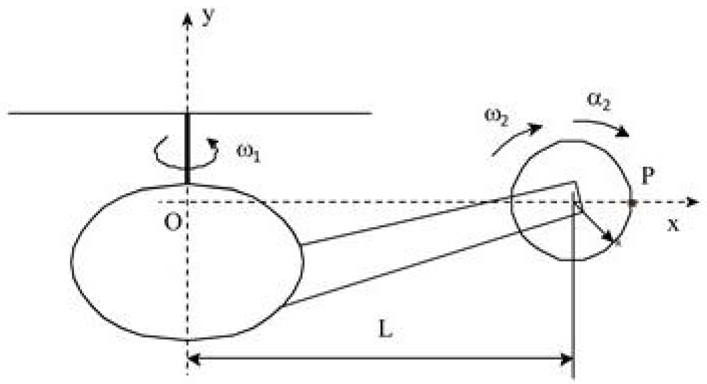
$$\vec{a}_P = \omega_1^2 d \vec{j} - \omega_2 \omega_1 d \vec{k}$$

O' carece de aceleración, P carece de aceleración relativa y S' no tiene aceleración angular.

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval
etsiae

PROBLEMA RESUELTO 3.10.

En el instante que se muestra en la figura, un helicóptero en vuelo estacionario (su centro de masas permanece fijo) gira alrededor del eje Y con velocidad angular ω_1. La hélice antipar, contenida en el plano XOY en el instante de interés, gira alrededor de un eje paralelo a OZ, con velocidad angular ω_2 y aceleración angular α_2 indicadas. Hallar, en el instante dibujado, los vectores velocidad absoluta y aceleración absoluta del punto P de la hélice.



(Tómense ejes móviles con origen en el centro de la hélice, fijos al helicóptero y paralelos a los fijos (dibujados) en el instante de interés)

SOLUCIÓN 3.10.

Ejes fijos (Sistema S): $Oxyz$ los dibujados.

Ejes móviles (Sistema S'): $O'x'y'z'$ ligados al helicóptero, con versores coincidentes con los versores de los ejes fijos en el instante de interés y con origen O' en el centro de la hélice antipar.

Obsérvese que O' tiene un movimiento circular instantáneo respecto del sistema fijo y el punto P tiene un movimiento circular instantáneo respecto del sistema S'.

Calculamos la velocidad absoluta del punto P: $v_P = \vec{v}'_P + \vec{v}_{O'} + \Omega \times \vec{r}'_P$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}'_P = -\omega_2 R\,\vec{j} \\ \vec{v}_{O'} = -\omega_1 L\,\vec{k} \\ \vec{\Omega} = \omega_1 \vec{j} \\ \vec{r}'_P = R\vec{i} \\ \vec{\Omega} \times \vec{r}'_P = -\omega_1 R\,\vec{k} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \vec{v}_P = -\omega_2 R\,\vec{j} - \omega_1 (L+R)\vec{k}$$

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

Calculamos la aceleración absoluta del punto P:

$$\vec{a}_P = \vec{a}'_P + \vec{a}_{O'} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{r}'_P + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}'_P) - 2\vec{\Omega} \times \vec{v}'_P$$

$$\left.\begin{array}{l}
\vec{a}'_P = -\omega_2^2 R_2 \vec{i} - \alpha_2 R_2 \vec{j} \\
\vec{a}_{O'} = -\omega_1^2 R_2 \vec{i} \\
\dfrac{d\vec{\Omega}}{dt} = 0 \\
\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}'_P) = \omega_1 \vec{j} \times (-\omega_1 R_2)\vec{k} = -\omega_1^2 R_2 \vec{i} \\
2\vec{\Omega} \times \vec{v}'_P = 2\omega_1 \vec{j} \times (-\omega_2 R_2)\vec{j} = 0
\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{a}_P = -(\omega_2^2 + 2\omega_1^2) R_2 \vec{i} - \alpha_2 R_2 \vec{j}$$

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

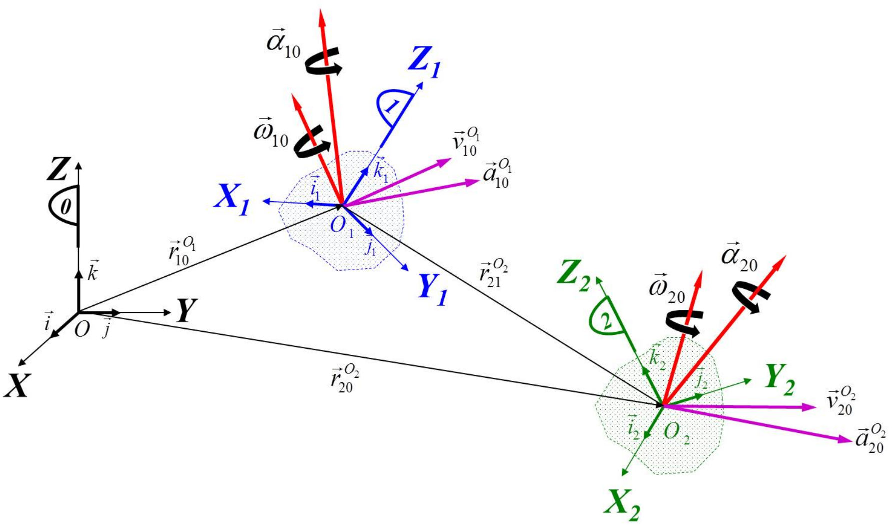
Otra notación útil en Movimiento Relativo

En muchos problemas de movimiento relativo se hace necesario recurrir a varios triedros de referencia para llegar al resultado deseado. Cuando esto sucede, la notación utilizada hasta aquí, con superíndices primados para diferenciar los distintos triedros de referencia involucrados en el movimiento no es la más adecuada, siendo conveniente substituirla por otra más eficaz basada en subíndices numéricos.

En esta nueva notación se sobreentenderá que:

- $\vec{\omega}_{ij}$ ó $\vec{\alpha}_{ij}$, representan la velocidad o aceleración angular de los ejes de un triedro S_i (que puede considerarse fijo a un sólido i) en su movimiento respecto a un triedro S_j (que puede considerarse fijo a un sólido j).
- $\vec{r}_{ij}^{P}$ representa el vector de posición de un punto P fijo al triedro S_i (o de la partícula P del sólido i) en su movimiento respecto al triedro S_j.
- $\vec{v}_{ij}^{P}$ ó $\vec{a}_{ij}^{P}$, representan la velocidad o aceleración de un punto P fijo al triedro S_i en su movimiento respecto al triedro S_j.

Para ilustrar esta notación, en la figura se han dibujado tres triedros de referencia en movimiento relativo y definidos del siguiente modo:



- $S_0(O; X, Y, Z)$ triedro fijo, con origen en O y vectores unitarios $\left\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right\}$ fijos.
- $S_1(O_1; X_1, Y_1, Z_1)$ triedro **móvil respecto a** S_0, con origen en O_1, que se traslada con velocidad $\vec{v}_{10}^{O_1}$ y aceleración $\vec{a}_{10}^{O_1}$ y cuyos vectores unitarios $\left\{\vec{\imath}_1, \vec{\jmath}_1, \vec{k}_1\right\}$ giran con velocidad y aceleración angulares $\vec{\omega}_{10}$ y $\vec{\alpha}_{10}$.

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

- $S_2(O_2; X_2, Y_2, Z_2)$ triedro **móvil respecto a** S_0, con origen en O_2, que se traslada con velocidad $\vec{v}_{20}^{O_2}$ y aceleración $\vec{a}_{20}^{O_2}$ y cuyos vectores unitarios $\left\{\vec{\imath}_2, \vec{\jmath}_2, \vec{k}_2\right\}$ giran con velocidad y aceleración angulares $\vec{\omega}_{20}$ y $\vec{\alpha}_{20}$.

  Obviamente $S_2(O_2; X_2, Y_2, Z_2)$ estará también en movimiento **con respecto a** S_1, y en ese caso $\vec{v}_{21}^{O_2}$ y aceleración $\vec{a}_{21}^{O_2}$ denotarían la velocidad con la que el observador ligado a S_1 ve trasladarse al punto O_2 y $\vec{\omega}_{21}$ y $\vec{\alpha}_{21}$ la velocidad y aceleración angulares con las que ese mismo observador ve girar a los ejes de S_2.

Considérese, por ejemplo, cómo relacionan la velocidad y la aceleración de una partícula P fija en el origen O_2 de S_2, sendos observadores fijos a S_0 y S_1. Las fórmulas de composición de velocidades y aceleraciones deducidas anteriormente, se escriben en la nueva notación como:

$$\vec{v}_{20}^{P} = \vec{v}_{21}^{\,P} + \vec{v}_{10}^{\,O_1} + \vec{\omega}_{10} \times \vec{r}_{21}^{\,P}$$

$$\vec{a}_{20}^{P} = \vec{a}_{21}^{\,P} + \vec{a}_{10}^{\,O_1} + \vec{\alpha}_{10} \times \vec{r}_{21}^{\,P} + \vec{\omega}_{10} \times \left(\vec{\omega}_{10} \times \vec{r}_{21}^{\,P}\right) + 2\,\vec{\omega}_{10} \times \vec{v}_{21}^{\,P}$$

Se incluyen a continuación dos problemas resueltos utilizando la nueva notación.

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

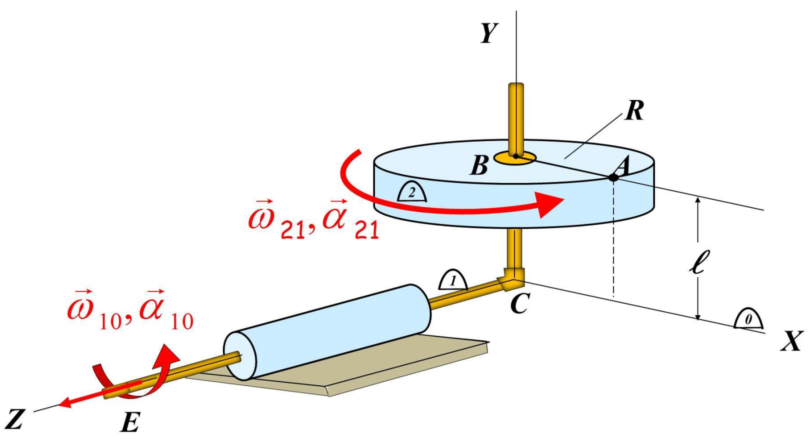
PROBLEMA RESUELTO 3.11.

En el instante t^* indicado, el brazo BCE -sólido 1- en forma de L de la pieza que se representa en la figura está girando alrededor de su eje EC con una velocidad y una aceleración angulares $\vec{\omega}_{10}(t^*)$ y $\vec{\alpha}_{10}(t^*)$, respectivamente. En ese mismo instante, el disco D -sólido 2- de radio R está girando alrededor del segmento BC con una velocidad angular y una aceleración angulares $\vec{\omega}_{21}(t^*)$ y $\vec{\alpha}_{21}(t^*)$.

Considérese el punto A del borde del disco que en el instante t^* se encuentra en la posición especificada en la figura. Determinar, con respecto a un triedro de ejes fijos $S_0(C; X, Y, Z)$, con origen en la posición que ocupa el punto C del brazo en el instante t^*:

1. La velocidad absoluta de A, $\vec{v}^{A}_{D0}(t^*)$.
2. La aceleración absoluta de A, $\vec{a}^{A}_{D0}(t^*)$.
3. La velocidad angular $\vec{\alpha}_{D0}(t^*)$ del disco.
4. La aceleración angular $\vec{\alpha}_{D0}(t^*)$ del disco.

Para el cálculo, tómense como datos: $\vec{\omega}_{10}(t^*) = 5\vec{k}$, $\vec{\alpha}_{10}(t^*) = 2\vec{k}$, $\vec{\omega}_{21}(t^*) = 4\vec{\jmath}$, $\vec{\alpha}_{21}(t^*) = -4\vec{\jmath}$, $R = 0.15$ y $\ell = 0.12$, todo en unidades SI.



(ETSIAE, autoevaluación 7-G5, diciembre 2014)

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

SOLUCIÓN 3.11.

MÉTODO 1:

Utilizando dos sistemas auxiliares móviles.

Empezaremos especificando los triedros de referencia elegidos para resolver el problema. Así:

- $S_0(O = C; X, Y; Z)$, el sistema fijo al que se hace referencia en el enunciado.
- $S_1(O_1 = B; X_1, Y_1, Z_1)$, ligado al brazo, con origen en el punto B del mismo, ejes Z_1 y Z paralelos en todo instante, y cuyo movimiento (en unidades SI) con ***respecto a*** S_0, en el instante t^* en el que el punto A ocupa la posición mostrada en la figura, queda definido por:

$$\begin{cases} \vec{v}^{\,B}_{10} = \vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{CB} = 5\vec{k}_1 \times 0.12\vec{j}_1 = -0.6\vec{i}_1 \quad \text{(traslación del origen de S}_1 \text{ respecto a S}_0\text{)} \\ \\ \vec{a}^{\,B}_{10} = \vec{\alpha}_1 \times \overrightarrow{CB} + \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{CB}) = 2\vec{k}_1 \times 0.12\vec{j}_1 + 5\vec{k}_1 \times (-0.6\vec{i}_1) = -0.24\vec{i}_1 - 3\vec{j}_1 \\ \\ \vec{\omega}_{10} = \vec{\omega}_1 = 5\,\overrightarrow{k_1} \quad \text{(rotación de los ejes de S}_1 \text{ respecto a los de S}_0\text{)} \\ \\ \vec{\alpha}_{10} \equiv \left(\dfrac{\vec{\omega}_{10}}{dt}\right)_{S_0} = \left(\dfrac{d\vec{\omega}_1}{dt}\right)_{S_0} = \left(\dfrac{d\omega_1}{dt}\right)\overrightarrow{k_1} + \omega_1 \cancelto{0}{\left(\dfrac{d\overrightarrow{k_1}}{dt}\right)_{S_0}} = 2\,\overrightarrow{k_1} \end{cases}$$

- $S_2(O_2 = B; X_2, Y_2, Z_2)$, ligado al disco, con origen en el punto B de éste, ejes Y_2 e Y_1 paralelos en todo instante, y cuyo movimiento (en unidades SI) con ***respecto a*** S_1, en el instante t^* mostrado, queda definido por:

$$\begin{cases} \vec{v}^{\,B}_{21} = \vec{a}^{\,B}_{21} = \vec{0} \quad (\textit{no existe} \text{ traslación del origen de S}_2 \text{ respecto a S}_1\text{)} \\ \\ \vec{\omega}_{21} = \vec{\omega}_2 = 4\vec{j}_2 \quad \text{(rotación de los ejes de S}_2 \text{ respecto a los de S}_1\text{)} \\ \\ \vec{\alpha}_{21} \equiv \left(\dfrac{\vec{\omega}_{21}}{dt}\right)_{S_1} = \left(\dfrac{d\vec{\omega}_2}{dt}\right)_{S_1} = \left(\dfrac{d\omega_2}{dt}\right)\vec{j}_2 + \omega_2 \cancelto{0}{\left(\dfrac{d\vec{j}_2}{dt}\right)_{S_1}} = -4\vec{j}_2 \end{cases}$$

Para facilitar los cálculos, se considerará que los ejes de S_0, S_1 y S_2 son paralelos en el instante de interés, por lo que en ese instante -y sólo en ese-:

$$\vec{i} \parallel \vec{i}_1(t^*) \parallel \vec{i}_2(t^*) \qquad , \qquad \vec{j} \parallel \vec{j}_1(t^*) \parallel \vec{j}_2(t^*) \qquad , \qquad \vec{k} \parallel \vec{k}_1(t^*) \parallel \vec{k}_2(t^*)$$

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval
etsiae

A) Movimiento de A relativo al triedro S_1

De la figura se ve que en el instante t^* mostrado:

$$\overrightarrow{BA} = 0.15\vec{i} \qquad (m)$$

El punto A está fijo al disco. Por tanto, su velocidad relativa respecto al triedro S_2, $\vec{v}^{\,A}_{D2}$, es nula. Y lo mismo se puede decir de la aceleración relativa $\vec{a}^{\,A}_{D2}$.

Utilizando la fórmula que relaciona las velocidades de A en S_1 y S_2:

$$\vec{v}^{\,A}_{21} = \cancelto{0}{\vec{v}^{\,B}_{21}} + \cancelto{0}{\vec{v}^{\,A}_{D2}} + \vec{\omega}_{21} \times \overrightarrow{BA} = 4\vec{j} \times 0.15\vec{i} = -0.6\vec{k} \qquad (m/s)$$

Y la fórmula que relaciona las aceleraciones de A en S_1 y S_2:

$$\begin{aligned}\vec{a}^{\,A}_{21} &= \cancelto{0}{\vec{a}^{\,B}_{21}} + \cancelto{0}{\vec{a}^{\,A}_{D2}} + \vec{\alpha}_{21} \times \overrightarrow{BA} + \vec{\omega}_{21} \times \left(\vec{\omega}_{21} \times \overrightarrow{BA}\right) + 2\vec{\omega}_{21} \times \cancelto{0}{\vec{v}^{\,A}_{D2}} = \\ &= -4j \times 0.15\vec{i} + 4\vec{j} \times (-0.6\vec{k}) = -2.4\vec{i} + 0.6\vec{k} \qquad (m/s^2)\end{aligned}$$

B) Movimiento de A relativo al sistema fijo S_0

Utilizando la fórmula que relaciona las velocidades de A en S_0 y S_1:

$$\vec{v}^{A}_{D0} = \vec{v}^{B}_{10} + \vec{v}^{\,A}_{21} + \vec{\omega}_{10} \times \overrightarrow{BA} = -0.6\vec{i} - 0.6\vec{k} + 5\vec{k} \times (0.15\vec{i}) = -0.6\vec{i} + 0.75\vec{j} - 0.6\vec{k} \qquad (m/s)$$

y la que relaciona las aceleraciones de A en S_0 y S_1:

$$\begin{aligned}\vec{a}^{A}_{D0} &= \vec{a}^{B}_{10} + \vec{a}^{\,A}_{21} + \vec{\alpha}_{10} \times \overrightarrow{BA} + \vec{\omega}_{10} \times \left(\vec{\omega}_{10} \times \overrightarrow{BA}\right) + 2\vec{\omega}_{10} \times \vec{v}^{\,A}_{21} = \\ &= -3\vec{j} - 0.24\vec{i} - 2.4\vec{i} + 0.6\vec{k} + 2\vec{k} \times 0.15\vec{i} + 5\vec{k} \times 0.75\vec{j} + \vec{0} = \\ &= -6.39\vec{i} - 2.7\vec{j} + 0.6\vec{k} \qquad (m/s^2)\end{aligned}$$

Obsérvese que no existe aceleración de Coriolis porque los vectores $\vec{\omega}_{10}$ y $\vec{v}^{\,A}_{21}$ son paralelos.

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

De lo dicho hasta ahora, es claro que la introducción de los dos sistemas auxiliares móviles nos ha permitido abordar el estudio del movimiento absoluto de A de una manera simple y sistemática. No obstante, cabría preguntarse cómo depende el procedimiento de, por ejemplo, la elección del origen del sistema móvil S_1 ligado al brazo. Vamos a ver que por lo que concierne ***al movimiento relativo de*** S_2 ***con respecto a*** S_1, es indiferente el punto del brazo que se escoja como origen de S_1, debido a la condición según la cual la distancia entre dos puntos cualesquiera de un sólido permanece siempre constante, por lo que no existe velocidad relativa entre ellos. Para fijar ideas, supongamos que hubiéramos tomado el origen de S_1 en el punto C del brazo en lugar del punto B. Se tendría entonces que:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \vec{v}^{\,C}_{10} = \vec{a}^{\,C}_{10} = \vec{0} & & \\ \vec{\omega}_{10} = \vec{\omega}_1 = 5\,\vec{k}_1 & , & \vec{\alpha}_{10} = 2\,\vec{k}_1 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \vec{v}^{\,B}_{21} = \vec{a}^{\,B}_{21} = \vec{0} & & \\ \vec{\omega}_{21} = \vec{\omega}_2 = 4\,\vec{j}_2 & , & \vec{\alpha}_{21} = -4\,\vec{j}_2 \end{array} \right\}$$

Puede comprobarse que el movimiento de A respecto a S_1 conduce a los mismos valores para $\vec{v}^{A}_{21}$ y $\vec{a}^{A}_{21}$ de antes. Por otro lado,

$$\vec{v}^{A}_{D0} = \cancelto{0}{\vec{v}^{B}_{10}} + \vec{v}^{\,A}_{21} + \vec{\omega}_{10} \times \overrightarrow{CA} = -0.6\vec{k} + 5\vec{k} \times (0.12\vec{j} + 0.15\vec{i}) = -0.6\vec{i} + 0.75\vec{j} - 0.6\vec{k} \quad (m/s) \tag{3.1}$$

y además:

$$\begin{aligned} \vec{a}^{A}_{D0} &= \cancelto{0}{\vec{a}^{C}_{10}} + \vec{a}^{\,A}_{21} + \vec{\alpha}_{10} \times \overrightarrow{CA} + \vec{\omega}_{10} \times \left(\vec{\omega}_{10} \times \overrightarrow{CA}\right) + 2\vec{\omega}_{10} \times \vec{v}^{\,A}_{21} = \\ &= -2.4\vec{i} + 0.6\vec{k} + 2\vec{k} \times (0.12\vec{j} + 0.15\vec{i}) + 5\vec{k} \times (-0.6\vec{i} + 0.75\vec{j}) + \vec{0} = \\ &= -6.39\vec{i} - 2.7\vec{j} + 0.6\vec{k} \qquad (m/s^2) \end{aligned} \tag{3.2}$$

como debía.

MÉTODO 2:

Utilizando un único sistema auxiliar móvil y composición de rotaciones.

Es posible determinar la velocidad y la aceleración del punto A con ayuda de un único triedro auxiliar móvil ligado al disco. En efecto, introduzcamos el sistema:

- $S_3(O_3 = B; X_3, Y_3, Z_3)$ ligado al disco, y cuyo movimiento con ***respecto a*** S, en el instante de interés t^*, y en unidades SI, queda definido por:

$$\begin{cases} \vec{v}\,^B_{30} = \vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{CB} = 5\vec{k} \times 0.12\vec{j} = -0.6\vec{i} \qquad \text{(traslación del origen de } S_3 \text{ respecto a } S_0) \\ \vec{a}\,^B_{30} = \vec{\alpha}_1 \times \overrightarrow{CB} + \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{CB}) = \\ \qquad = 2\vec{k} \times 0.12\vec{j} + 5\vec{k} \times (-0.6\vec{i}) = -0.24\vec{i} - 3\vec{j} \\ \vec{\omega}_{30} = \vec{\omega}_{10} + \vec{\omega}_{21} = 5\,\vec{k} + 4\vec{j} \qquad \text{(rotación de los ejes de } S_3 \text{ respecto a los de } S_0\text{)} \\ \vec{\alpha}_{30} \equiv \left(\dfrac{\vec{\omega}_{30}}{dt}\right)_{S_0} = \left(\dfrac{d\vec{\omega}_{10}}{dt}\right)_{S_0} + \left(\dfrac{d\vec{\omega}_{21}}{dt}\right)_{S_1} + \vec{\omega}_{10} \times \vec{\omega}_{21} = \\ \qquad = \vec{\alpha}_{10} + \vec{\alpha}_{21} + \vec{\omega}_{10} \times \vec{\omega}_{21} = -20\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k} \end{cases}$$

También en este caso se ha considerado que los ejes de S_3 son paralelos a los ejes fijos de S_0 en el instante t^*.

Habiendo elegido el triedro S_3 fijo al disco, es claro que su velocidad angular $\vec{\omega}_{D0}(t^*)$ y su aceleración angular de rotación $\vec{\alpha}_{D0}(t^*)$ coinciden con la de los ejes de S_3. Por ello,

$$\vec{\omega}_{D0}(t^*) = -20\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k} \qquad (rad/s)$$

$$\vec{\alpha}_{D0}(t^*) = -20\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k} \qquad (rad/s^2)$$

Podemos calcular directamente ahora la velocidad de A por transformación de velocidades (A pertenece al disco):

$$\vec{v}^A_{D0} = \vec{v}^B_{30} + \cancelto{0}{\vec{v}^A_{D3}} + \left(\vec{\omega}_{30} \times \overrightarrow{BA}\right) = -0.6\vec{i} + (5\,\vec{k} + 4\vec{j}) \times 0.15\vec{i} = -0.6\vec{i} + 0.75\vec{j} - 0.6\vec{k} \quad (m/s) \tag{3.3}$$

y en cuanto a su aceleración:

$$\begin{aligned} \vec{a}^A_{D0} &= \vec{a}^B_{30} + \cancelto{0}{\vec{a}^A_{D3}} + \vec{\alpha}_{30} \times \overrightarrow{BA} + \vec{\omega}_{30} \times \left(\vec{\omega}_{30} \times \overrightarrow{BA}\right) + 2\vec{\omega}_{30} \times \cancelto{0}{\vec{v}^A_{D3}} = \\ &= -0.24\vec{i} - 3\vec{j} + (-20\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}) \times 0.15\vec{i} + (5\,\vec{k} + 4\vec{j}) \times 0.75(\vec{j} - 0.6\vec{k}) = \\ &= -6.39\vec{i} - 2.7\vec{j} + 0.6\vec{k} \qquad (m/s^2) \end{aligned} \tag{3.4}$$

como debía.

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

Como una prueba final es instructivo comprobar que las expresiones (3.1) y (3.3) son equivalentes:

$$\begin{aligned}\vec{v}_{D0}^{A} =&\vec{v}_{21}^{\,A} + \vec{\omega}_{10} \times \overrightarrow{CA} = \vec{\omega}_{21} \times \overrightarrow{BA} + \vec{\omega}_{10} \times (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB}) = \\ =&\vec{\omega}_{10} \times \overrightarrow{CB} + (\vec{\omega}_{10} + \vec{\omega}_{21}) \times \overrightarrow{BA} = \vec{v}_{30}^{B} + \vec{\omega}_{03} \times \overrightarrow{BA}\end{aligned}$$

Y también las (3.2) y (3.4):

$$\begin{aligned}\vec{a}_{D0}^{A} =&\vec{a}_{21}^{\,A} + \vec{\alpha}_{10} \times \overrightarrow{CA} + \vec{\omega}_{10} \times \left(\vec{\omega}_{10} \times \overrightarrow{CA}\right) + 2\vec{\omega}_{10} \times \vec{v}_{21}^{\,A} = \\ =&\vec{\alpha}_{21} \times \overrightarrow{BA} + \vec{\omega}_{21} \times \left(\vec{\omega}_{21} \times \overrightarrow{BA}\right) + \vec{\alpha}_{10} \times \overrightarrow{CB} + \vec{\alpha}_{10} \times \overrightarrow{BA} + \\ &+\vec{\omega}_{10} \times (\vec{\omega}_{10} \times \overrightarrow{CB}) + \vec{\omega}_{10} \times (\vec{\omega}_{10} \times \overrightarrow{BA}) + 2\vec{\omega}_{10} \times (\vec{\omega}_{21} \times \overrightarrow{BA})\end{aligned}$$

Esta expresión se puede reescribir con ayuda de la identidad de Jacobi para el doble producto vectorial:

$$\vec{\omega}_{10} \times (\vec{\omega}_{21} \times \overrightarrow{BA}) = (\vec{\omega}_{10} \times \vec{\omega}_{21}) \times \overrightarrow{BA} + \vec{\omega}_{21} \times (\vec{\omega}_{10} \times \overrightarrow{BA})$$

Con lo cual, tras una simple reordenación:

$$\begin{aligned}\vec{a}_{D0}^{A} =&[\vec{\alpha}_{10} \times \overrightarrow{CB} + \vec{\omega}_{10} \times (\vec{\omega}_{10} \times \overrightarrow{CB})] + [\vec{\alpha}_{10} + \vec{\alpha}_{21} + (\vec{\omega}_{10} \times \vec{\omega}_{21})] \times \overrightarrow{BA} + \\ &+(\vec{\omega}_{10} + \vec{\omega}_{21}) \times [(\vec{\omega}_{10} + \vec{\omega}_{21}) \times \overrightarrow{BA})] = \\ =&\vec{a}_{30}^{B} + \vec{\alpha}_{30} \times \overrightarrow{BA} + \vec{\omega}_{30} \times \left(\vec{\omega}_{30} \times \overrightarrow{BA}\right)\end{aligned}$$

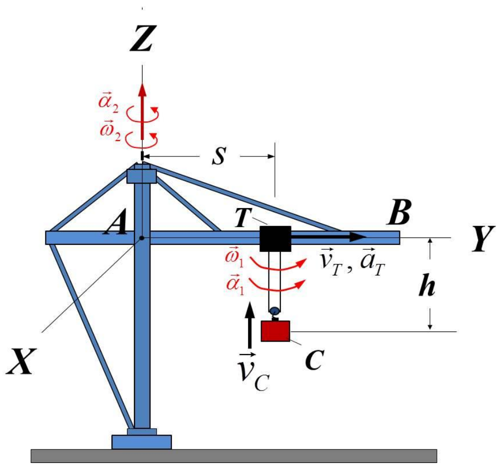
con lo que se concluye la prueba.

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval
etsiae

PROBLEMA RESUELTO 3.12.

En un cierto instante t^* el brazo AB de la grúa mostrada en la figura está girando alrededor de un eje vertical fijo AZ con una velocidad y una aceleración angulares $\vec{\omega}_2$ y $\vec{\alpha}_2$, respectivamente, mientras que la carretilla T está moviéndose hacia afuera, a lo largo del brazo con una velocidad y una aceleración $\vec{v}_T$ y $\vec{a}_T$ relativas al mismo.



De la carretilla cuelga una carga C -sólido 4- de tamaño despreciable, que está siendo elevada bajo la acción de un motor con velocidad constante $\vec{v}_C$ relativa a la carretilla.

En el mismo instante t^*, los cables que sujetan la carga se encuentran en posición vertical y están oscilando por acción del viento en el plano ZAB con una velocidad y una aceleración angulares $\vec{\omega}_1$ y $\vec{\alpha}_1$.

A efecto de notaciones y cálculos se tomarán los siguientes triedros de referencia:

- $S_0(O = A; X, Y, Z)$ triedro fijo.
- $S_1(O_1 = A; X_1, Y_1, Z_1)$ triedro móvil con respecto a S_0, ligado al brazo AB y con origen en A.
- $S_2(O_2 = T; X_2, Y_2, Z_2)$ triedro móvil con respecto a S_1, con origen en el centro de la carretilla.
- $S_3(O_3 = T; X_3, Y_3, Z_3)$ triedro móvil con respecto a S_2 con origen en el centro de la carretilla y cuyos ejes giran con la velocidad y la aceleración angular de oscilación de los cables.

Considerando que en el instante t^* mostrado los ejes de los triedros S_0, S_1, S_2 y S_3 son paralelos, se pide:

1. Velocidad de la carga C relativa a la carretilla, $\vec{v}\,^C_{42}(t^*)$.
2. Aceleración de la carga C relativa a la carretilla, $\vec{a}\,^C_{42}(t^*)$.
3. Velocidad de la carga C relativa al brazo AB, $\vec{v}\,^C_{41}(t^*)$.
4. Aceleración de la carga Crelativa al brazo AB, $\vec{a}\,^C_{41}(t^*)$.
5. Velocidad absoluta de la carga C, $\vec{v}\,^C_{40}(t^*)$.
6. Aceleración absoluta de la carga C, $\vec{a}\,^C_{40}(t^*)$.

(ETSIAE, enero 1987)

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

SOLUCIÓN 3.12.

Empezamos especificando los sistemas de coordenadas que se eligen para resolver el problema. De acuerdo al enunciado:

- $S_0(A; X, Y; Z)$, el sistema fijo mostrado en la figura con vectores unitarios $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

- $S_1(O_1 = A; X_1, Y_1, Z_1 \| Z)$ ligado al brazo AB, con vectores unitarios $(\vec{\imath}_1(t), \vec{\jmath}_1(t), \vec{k}_1 = \vec{k})$, origen en la carretilla, y cuyo movimiento con *respecto a* S_0 queda definido por

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \vec{v}_{10}^{O_1} = \vec{0} & , & \vec{a}_{10}^{O_1} = \vec{0} \\ \vec{\omega}_{10} = \omega_2 \vec{k}_1 & , & \vec{\alpha}_{10} = \alpha_2 \vec{k}_1 \end{array} \right\}$$

- $S_2(O_2 = T; X_2 = X_1, Y_2 = Y_1, Z_2 = Z_1)$, fijo a la carretilla, con vectores unitarios $(\vec{\imath}_2(t) = \vec{\imath}_1(t), \vec{\jmath}_2(t) = \vec{\jmath}_1(t), \vec{k}_2 = \vec{k}_1)$, y cuyo movimiento con *respecto a* S_1 queda definido por:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \vec{v}_{21}^{O_2}(t) = v_T \vec{\jmath}_2 & , & \vec{a}_{21}^{O_2}(t) = a_T \vec{\jmath}_2 \\ \vec{\omega}_{21} = \vec{0} & , & \vec{\alpha}_{21} = \vec{0} \end{array} \right\}$$

- $S_3(O_3 = T; X_3 = X_2, Y_3, Z_3)$, con origen en la carretilla, vectores unitarios $(\vec{\imath}_3(t) = \vec{\imath}_2(t), \vec{\jmath}_3(t), \vec{k}_3)$ y cuyos ejes giran con la velocidad y la aceleración angular de los cables.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \vec{v}_{32}^{O_3} = \vec{0} & , & \vec{a}_{32}^{O_3} = \vec{0} \\ \vec{\omega}_{32}(t) = \omega_1 \vec{\imath}_3 & , & \vec{\alpha}_{32}(t) = \alpha_1 \vec{\imath}_3 \end{array} \right\}$$

Los ejes de estos tres sistemas son paralelos en el instante de interés t^*, en el que la carga C ocupa la posición mostrada en la figura.

Por último, y a efectos de notaciones, podemos asumir que la carga forma parte de un sólido 4 al que hemos "pegado" un triedro S_4.

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

A) Movimiento de la carga C relativo a S_3.

Aquí simplemente:

$$\vec{v}^{\,C}_{43}(t) = \vec{v}_C(t) = v_C\,\vec{k}_3 \qquad , \qquad \vec{a}^{\,C}_{43}(t) = \vec{0}$$

Y en el instante de interés t^*:

$$\vec{v}^{\,C}_{43}(t^*) = \vec{v}_C(t^*) = v_C\vec{k} \qquad , \qquad \vec{a}^{\,C}_{43}(t^*) = \vec{0}$$

B) Movimiento de la carga C relativo a la carretilla.

Utilizando la fórmula que relaciona las velocidades de la carga en los sistemas S_3 y S_2:

$$\begin{aligned}\vec{v}^{\,C}_{42}(t) =& \cancelto{0}{\vec{v}^{\,A}_{32}(t)} + \vec{v}^{\,C}_{43}(t) + \vec{\omega}_{32}(t) \times \vec{r}^{\,C}_{43}(t)\\ =& v_C\vec{k}_3 + \omega_1\vec{\imath}_3 \times (-h\vec{k}_3) = h\omega_1\vec{\jmath}_3 + v_C\vec{k}_3\end{aligned}$$

Y en el momento de interés:

$$\vec{v}^{\,C}_{42}(t^*) = h\omega_1\vec{\jmath} + v_C\vec{k}$$

En cuanto a las aceleraciones, se tiene que:

$$\vec{a}^{\,C}_{42}(t) = \cancelto{0}{\vec{a}^{\,T}_{32}(t)} + \cancelto{0}{\vec{a}^{\,C}_{43}(t)} + \vec{\alpha}_{32}(t) \times \vec{r}^{\,C}_{43}(t) + \vec{\omega}_{32}(t) \times \left(\vec{\omega}_{32}(t) \times \vec{r}^{\,C}_{43}(t)\right) + 2\vec{\omega}_{32}(t) \times \vec{v}^{\,C}_{43}(t)$$

Pero:

$$\vec{\alpha}_{32}(t) \times \vec{r}^{\,C}_{43}(t) = \alpha_1\vec{\imath}_3 \times (-h\vec{k}_3) = \alpha_1 h\vec{\jmath}_3$$

$$\vec{\omega}_{32}(t) \times \left(\vec{\omega}_{32}(t) \times \vec{r}^{\,C}_{43}(t)\right) = \omega_1\vec{\imath}_3 \times (h\omega_1\vec{\jmath}_3) = h\omega_1^2\vec{k}_3$$

$$2\vec{\omega}_{32}(t) \times \vec{v}^{\,C}_{43}(t) = 2\omega_1\vec{\imath}_3 \times (v_C\vec{k}_3) = -2\omega_1 v_C\vec{\jmath}_3$$

Por tanto:

$$\vec{a}^{\,C}_{42}(t) = (\alpha_1 h - 2\omega_1 v_C)\vec{\jmath}_3 + h\omega_1^2\vec{k}_3$$

y en el instante de interés:

$$\vec{a}^{\,C}_{42}(t^*) = (\alpha_1 h - 2\omega_1 v_C)\vec{\jmath} + h\omega_1^2\vec{k}$$

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

C) Movimiento de la carga C relativo al brazo.

Ahora: $\vec{v}^C_{41}(t) = \vec{v}^T_{21}(t) + \vec{v}^C_{42}(t) = h\omega_1\vec{\jmath}_3 + v_C\vec{k}_3 + v_T\vec{\jmath}_2$

y de aquí: $\vec{v}^C_{41}(t^*) = (v_T + h\omega_1)\vec{\jmath} + v_C\vec{k}$

Así mismo: $\vec{a}^C_{41}(t) = \vec{a}^T_{21}(t) + \vec{a}^C_{42}(t) = \vec{a}^C_{42}(t) + a_T\vec{\jmath}_2$

por lo que $\vec{a}^C_{41}(t^*) = (\alpha_1 h - 2\omega_1 v_C + a_T)\vec{\jmath} + h\omega_1^2\vec{k}$

D) Movimiento absoluto de la carga C.

Se tiene ahora que:

$$\vec{v}^C_{40}(t) = \cancelto{0}{\vec{v}^A_{10}(t)} + \vec{v}^C_{41}(t) + \omega_{10}(t) \times \vec{r}^C_{41}(t)$$

Pero

$$\vec{\omega}_{10}(t) \times \vec{r}^C_{41}(t) = \omega_2\vec{k}_1 \times [s\vec{\jmath}_1 - h\vec{k}_3] = -\omega_2 s\,\vec{\imath}_1 - h\omega_2(\vec{k}_1 \times \vec{k}_3)$$

De aquí:

$$\vec{v}^C_{40}(t^*) = -\omega_2 s\,\vec{\imath} + (v_T + h\omega_1)\vec{\jmath} + v_C\vec{k}$$

Similarmente:

$$\vec{a}^C_{40}(t) = \cancelto{0}{\vec{a}^A_{10}(t)} + \vec{a}^C_{41}(t) + \alpha_{10}(t) \times \vec{r}^C_{41}(t) + \omega_{10}(t) \times \Big(\omega_{10}(t) \times \vec{r}^C_{41}(t)\Big) + 2\omega_{10}(t) \times \vec{v}^C_{41}(t)$$

Ahora:

$$\vec{\alpha}_{10}(t) \times \vec{r}^C_{41}(t) = -\alpha_2\vec{k}_1 \times (s\,\vec{\jmath}_1 - h\vec{k}_3) = -\alpha_2 s\,\vec{\imath}_1 - \alpha_2 h\,(\vec{k}_1 \times \vec{k}_3)$$
$$\vec{\omega}_{10}(t) \times \Big(\vec{\omega}_{10}(t) \times \vec{r}^{\,C}_{41}(t)\Big) = \omega_2\vec{k}_1 \times (-\omega_2 s\,\vec{\imath}_1 - h\omega_2(\vec{k}_1 \times \vec{k}_3))$$
$$2\vec{\omega}_{10}(t) \times \vec{v}^{\,C}_{41}(t) = 2\omega_2\vec{k}_1 \times (h\omega_1\vec{\jmath}_3 + v_C\vec{k}_3 + v_T\vec{\jmath}_2)$$

En el instante de interés:

$$\vec{a}^{\,C}_{40}(t^*) = -[\alpha_2 s + 2\omega_2(v_T + \omega_1 h)]\vec{\imath} + (a_T + \alpha_1 h - 2\omega_1 v_C - \omega_2^2 s)\vec{\jmath} + h\omega_1^2\vec{k}$$