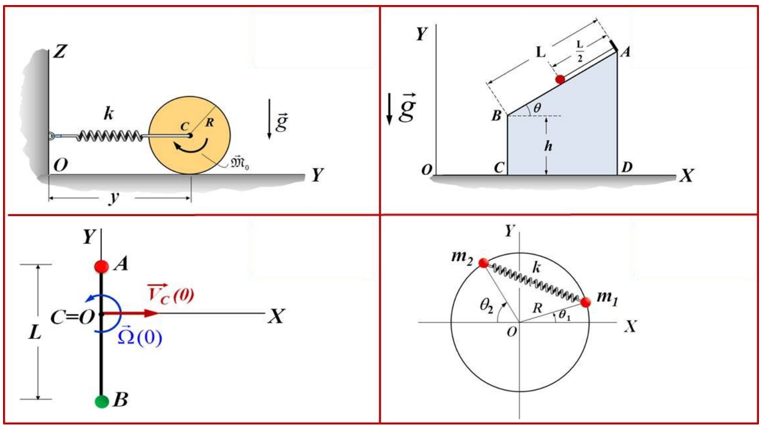
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO

FÍSICA I

PROBLEMAS PROPUESTOS

José Carlos JIMÉNEZ SÁEZ
Santiago RAMÍREZ DE LA PISCINA MILLÁN



1.- VECTORES

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

1 Vectores

PROBLEMA PROPUESTO 1.1.

Dado el sistema de vectores $\left\{\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{CD}\right\}$ y el punto M. Se pide:

1) El módulo de la resultante general.

2) El momento resultante respecto del origen.

3) El momento resultante respecto del punto M.

4) Los momentos resultantes respecto a los ejes Ox, Oy y Oz.

5) El momento resultante respecto del eje definido por los planos $x = 0$ y $ax + by + cz = 0$ en valor absoluto.

Todas las magnitudes están en unidades fundamentales del SI.

DATOS:
$A(-2,-10,1)$, $B(4,-2,-7)$, $C(3,-7,10)$, $D(-1,2,1)$, $M(-9,6,3)$
$a = 1, b = 1, c = 1$

SOLUCIÓN 1.1.

1) 12.0

2) (-24.0, -84.0, 21.0)

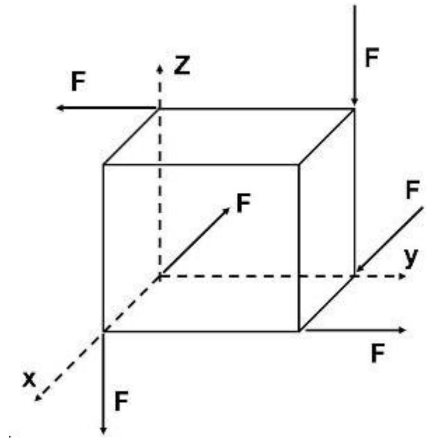
3) (12.0, -87.0, 135)

4) -24.0, -84.0, 21.0

5) 74.2

PROBLEMA PROPUESTO 1.2.

Dado el sistema de fuerzas que actúan sobre el cubo de arista L representado en la figura, en el que todas las fuerzas son de módulo F.



Se pide:

1) La componente según el eje Oz de la resultante.

2) El momento resultante respecto del eje Oy.

3) Reducir el sistema a una fuerza única y calcular la coordenada x de su punto de aplicación.

DATOS: $L = 75cm$, $F = 31N$

SOLUCIÓN 1.2.

1) -62,0

2) 23.3

3) 0.375

PROBLEMA PROPUESTO 1.3.

Dado el sistema de vectores

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA} = a\,\vec{i} + a\,\vec{j} - b\,\vec{k} \\ \overrightarrow{AB} = b\,\vec{i} - b\,\vec{j} + a\,\vec{k} \\ \overrightarrow{BC} = -a\,\vec{i} + a\,\vec{j} - c\,\vec{k} \end{cases}$$

referidos al sistema triortogonal $Oxyz$, se pide:

1) El módulo de la resultante.

2) La componente según Ox del momento de $\overrightarrow{BC}$ respecto del punto A.

3) La componente según Oy del momento de $\overrightarrow{BC}$ respecto del punto A.

4) El momento de $\overrightarrow{BC}$ respecto del origen.

5) El momento de $\overrightarrow{BC}$ respecto de la semirrecta orientada $\overrightarrow{OA}$.

Todas las magnitudes están en unidades fundamentales del SI.

DATOS: $a = -8$, $b = 9$, $c = -8$

SOLUCIÓN 1.3.

1) 28.1

2) -136

3) -136

4) (-272, -144, 128)

5) 151

PROBLEMA PROPUESTO 1.4.

Dada la recta $\frac{b-x}{a} = \frac{a-y}{c} = \frac{b+z}{d}$ y el vector deslizante $\vec{a} = b\,\vec{i} + a\,\vec{j} + c\,\vec{k}$ cuya recta soporte pasa por el punto $A(b,a,c)$, calcular en valor absoluto el momento del vector respecto de la recta.

Todas las magnitudes están en unidades fundamentales del SI.

DATOS: $a = -10, \quad b = -2, \quad c = -9, \quad d = 3$

SOLUCIÓN 1.4.

65.4

PROBLEMA PROPUESTO 1.5.

Dado el vector $\vec{a}(-c,-b,-a)$ deducir la ecuación del plano normal al vector $\vec{a}$ trazado por el punto $P_0(d,c,a)$. Escribir dicha ecuación en la forma $Ax + By + Cz + D = 0$.

Todas las magnitudes están en unidades fundamentales del SI.

DATOS: $a = -10, \quad b = -2, \quad c = -9, \quad d = 3$

SOLUCIÓN 1.5.

$9.00x + (-2.00)y + (-10.0)z + (-91.0) = 0$

PROBLEMA PROPUESTO 1.6.

Dado el vector $\vec{A}(-c,-b,-a)$ deducir la ecuación del plano normal al vector $\vec{A}$ trazado por el punto $P_0(d,c,a)$ y calcular la proyección del vector $\vec{B}(-c,b,-a)$ sobre dicho plano.

Todas las magnitudes están en unidades fundamentales del SI.

DATOS: $a = 2, \quad b = 9, \quad c = 0, \quad d = 5$

SOLUCIÓN 1.6.

3.90

PROBLEMA PROPUESTO 1.7.

Dados los puntos $A(c, a, b)$, $B(a, -c, d)$ y $C(b, b, b)$. Calcular el coseno del ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$

Todas las magnitudes están en unidades fundamentales del SI.

DATOS: $a = 10$, $b = 1$, $c = 4$, $d = 1$

SOLUCIÓN 1.7.

-0.184

PROBLEMA PROPUESTO 1.8.

Dados los vectores $\begin{cases} \vec{u} = b\,\vec{i} + a\,\vec{j} - b\,\vec{k} \\ \vec{v} = x\,\vec{i} - b\,\vec{j} + b\,\vec{k} \end{cases}$ aplicados en el mismo punto, se pide:

1) Hallar x para que el vector que une sus extremos sea perpendicular al vector

$$\vec{w} = -\vec{b}\,i + b\,\vec{j} + b\,\vec{k}$$

2) Calcular el volumen del paralelepípedo definido por los tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

Todas las magnitudes están en unidades fundamentales del SI.

DATOS: $a = -6$, $b = 3$

SOLUCIÓN 1.8.

1) 12.0

2) 135

PROBLEMA PROPUESTO 1.9.

Dados los vectores

$$\begin{cases} \vec{A} = c\,\vec{i} - a\,\vec{j} + b\,\vec{k} \\ \vec{B} = (a^2 + b)\,\vec{i} - b\,\vec{j} - b\,\vec{k} \\ \vec{C} = b\,\vec{i} + b\,\vec{j} + b\,\vec{k} \\ \vec{D} = b\,\vec{i} - b\,\vec{k} \end{cases}$$

expresar $\vec{A}$ en función de los otros tres, de la forma $\vec{A} = m\vec{B} + n\vec{C} + p\vec{D}$.

Todas las magnitudes están en unidades fundamentales del SI.

DATOS: $a = -8$, $b = 9$, $c = -8$

SOLUCIÓN 1.9.

$m = -0,183$, $n = 0.706$, $p = -0.111$

PROBLEMA PROPUESTO 1.10.

Dados los vectores $\vec{a} = x\,\vec{k}$ y $\vec{b} = \vec{i} + y\,\vec{k}$ determinar los valores absolutos de x e y para que el producto escalar de ambos valga P y formen un ángulo α.

Todas las magnitudes excepto los ángulos están en unidades fundamentales del SI.

DATOS: $P = 13$, $\alpha = 58^o$

SOLUCIÓN 1.10.

$|x| = 20.8$ $|y| = 0.625$

PROBLEMA PROPUESTO 1.11.

De un paralelogramo se conocen las coordenadas de tres vértices consecutivos:

$$A(-b, c, a) \quad B(a, -b, e) \quad C(0, -c, -d)$$

1) Calcular las coordenadas del cuarto vértice.

2) Calcular el área del paralelogramo.

Todas las magnitudes están en unidades fundamentales del SI.

DATOS: $a = 5$, $b = -4$, $c = -10$, $d = 8$, $e = -2$

SOLUCIÓN 1.11.

1) (-1.00, -4.00, -1.00)

2) 96.0

PROBLEMA PROPUESTO 1.12.

Dos vectores del mismo módulo a forman un ángulo θ.

1) Calcular el módulo del vector suma.

2) Calcular el módulo del vector diferencia.

Todas las magnitudes excepto los ángulos están en unidades fundamentales del SI.

DATOS: $a = 82$, $\theta = 59^o$

SOLUCIÓN 1.12.

1) 143

2) 80.8

PROBLEMA PROPUESTO 1.13.

Se descompone un vector de módulo v en otros dos, perpendiculares entre sí de modo que los módulos de los tres vectores estén en progresión aritmética.

1) Calcular el módulo del mayor de ellos.

2) Calcular el módulo del menor de ellos.

Todas las magnitudes están en unidades fundamentales del SI.

DATOS: $v = 91$

SOLUCIÓN 1.13.

1) 72.8

2) 54.6

PROBLEMA PROPUESTO 1.14.

Se descompone un vector de módulo v en otros dos, perpendiculares entre sí de modo que los módulos de los tres vectores estén en progresión geométrica. Calcular el módulo del menor de ellos.

Todas las magnitudes están en unidades fundamentales del SI.

DATOS: $v = 59$

SOLUCIÓN 1.14.

36.5

PROBLEMA PROPUESTO 1.15.

Descomponer el vector $\vec{v} = m\vec{i} + n\vec{j} + p\vec{k}$ en tres vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, de modo que se cumpla $\vec{v} = \alpha\vec{A} + \beta\vec{B} + \gamma\vec{C}$.

Los tres vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, pasan por el origen y por los puntos $A(b, a, c), B(d, b, 0)$ y $C(a, b, a)$ respectivamente.

Calcular el valor de los coeficientes α, β y γ.

Todas las magnitudes están en unidades fundamentales del SI.

DATOS: a = 2, b = 9, c = 0, d = 5, m = 6, n = 7, p = 6

SOLUCIÓN 1.15.

$\alpha = 1.41, \quad \beta = 2.52, \quad \gamma = -4.00$

PROBLEMA PROPUESTO 1.16.

Un vector de módulo v se descompone en sus tres componentes perpendiculares y se elije el sistema de ejes de modo que sus componentes v_x, v_y y v_z, sean proporcionales a los números a, b y c respectivamente.

Calcular v_x, v_y y v_z.

Todas las magnitudes están en unidades fundamentales del SI.

DATOS: $v = 82, \quad a = 18, \quad b = 9, \quad c = 19$

SOLUCIÓN 1.16.

$v_x = 53.3 \quad v_y = 26.7 \quad v_z = 56.3$

PROBLEMA PROPUESTO 1.17.

Calcular la tangente del ángulo formado por los vectores:

$$\vec{A} = a\,\vec{i} + c\,\vec{j} + d\,\vec{k} \quad \text{y} \quad \vec{B} = -a\,\vec{i} + b\,\vec{j} + c\,\vec{k}$$

Todas las magnitudes están en unidades fundamentales del SI.

DATOS: a = 1, b = 4, c = -9, d = -7

SOLUCIÓN 1.17.

4.24

PROBLEMA PROPUESTO 1.18.

Calcular el vector unitario que define la dirección de la bisectriz del ángulo que forman las direcciones de los vectores: $\vec{A} = b\,\vec{i} - a\,\vec{j} + a\,\vec{k}$; $\vec{B} = c\,\vec{i} + d\,\vec{j}$.

Todas las magnitudes están en unidades fundamentales del SI.

DATOS: $a = 7$ $b = 18$ $c = 21$ $d = 6$

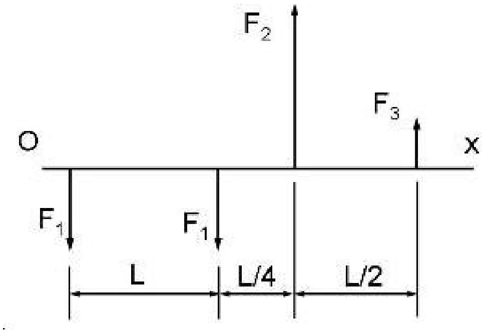
SOLUCIÓN 1.18.

(0.983, -0.0353, 0.182)

PROBLEMA PROPUESTO 1.19.

Dados los vectores de la figura, calcular la coordenada x de un punto del eje Ox de modo que el momento resultante del sistema respecto de dicho punto sea cero.

Tómese el origen en el punto de aplicación del vector situado más a la izquierda en el dibujo.



DATOS: $F_1 = 18\ N$ $F_2 = 18\ N$ $F_3 = 15\ N$ $L = 66\ m$

SOLUCIÓN 1.19.

-677 m

PROBLEMA PROPUESTO 1.20.

Para determinar la anchura de un tramo recto de un río se traza una base de longitud L a lo largo de una orilla. Desde los extremos de esta base se trazan visuales a un objeto situado en la orilla opuesta. Estas visuales forman ángulos α y β con la base (no con su prolongación).

Calcular la anchura del río por cálculo vectorial.

DATOS: $L = 57\ m$ $\alpha = 66^o$ $\beta = 17^o$

SOLUCIÓN 1.20.

15.3 m

PROBLEMA PROPUESTO 1.21.

Dada la ecuación vectorial $(ax+y)\vec{A}+(x-by)\vec{B}=n\,\vec{A}+m\vec{B}$ en la que $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son vectores conocidos, no paralelos y n, m, a, b, x e y son escalares, calcular los valores de x e y.

Todas las magnitudes están en unidades fundamentales del SI.

DATOS: $n = 1.1 \quad m = 3.2 \quad a = 14 \quad b = 8$

SOLUCIÓN 1.21.

$x = 0.106 \quad y = -0.387$

PROBLEMA PROPUESTO 1.22.

Dadas las coordenadas cartesianas del punto $P(a, b)$, determinar las coordenadas polares.
DATOS: $a = 36m \quad b = 30m$

SOLUCIÓN 1.22.

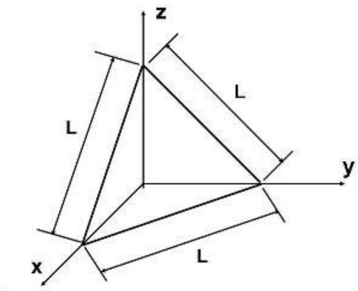
$46.9m \quad 0.695rad$

PROBLEMA PROPUESTO 1.23.

Calcular el versor normal al plano representado en la figura.

Todas las magnitudes están en unidades fundamentales del SI.

DATOS: $L = 1$



SOLUCIÓN 1.23.

(0.481, 0481, 0481)

PROBLEMA PROPUESTO 1.24.

Dada la ecuación de una curva en polares: $r(1 - cos\theta) = 2$, obtener la coordenada y correspondiente al punto $x = a$ en valor absoluto.

DATOS: $a = 0.125\ m$

SOLUCIÓN 1.24.

0.516

PROBLEMA PROPUESTO 1.25.

Dada la ecuación: $r = p/(1 - ecos\theta)$, obtener la coordenada y correspondiente al punto $x = a$.

DATOS: $a = 9\ m \quad p = 45\ m \quad e = 8.4$

SOLUCIÓN 1.25.

112

PROBLEMA PROPUESTO 1.26.

Obtener la coordenada radial r de la curva $y^2 = 2px$ para el ángulo polar $\theta = \theta_0\ rad$.

DATOS: $\theta_0 = 0.25\ rad \quad p = 28\ m$

SOLUCIÓN 1.26.

886 m

PROBLEMA PROPUESTO 1.27.

Dado el vector con origen en el punto $P(1,1)$ y extremo en el punto $Q(a,b)$, determinar las componentes radial y angular para un sistema polar con origen en $(1,1)$.

DATOS: a = 6.0 m b = 2.7 m

SOLUCIÓN 1.27.

radial 4.74 m angular -2.33 rad

PROBLEMA PROPUESTO 1.28.

Para el punto de coordenadas cartesianas $P(a,b,c)$, obtener las componentes de sus coordenadas esféricas.

DATOS: $a = 36\ m$ $b = 30\ m$ $c = 6.2\ m$

SOLUCIÓN 1.28.

$47.3\ m$ $0.695\ rad$ $0.00282\ rad$

PROBLEMA PROPUESTO 1.29.

Dada la función vectorial: $\vec{A}(t) = 3t^2\ \vec{i} + \cos 4t\ \vec{k}$, obtener el módulo de la derivada para $t = t_0$.

DATOS: $t_0 = 8.9$

SOLUCIÓN 1.29.

53.5

PROBLEMA PROPUESTO 1.30.

Dada la función vectorial: $\vec{A}(t) = 6t\,\vec{i} + \exp(2t)\,\vec{k}$, obtener el módulo de la integral definida entre $[0, t_0]$.

DATOS: $t_0 = 5.9$

SOLUCIÓN 1.30.

6.66e4

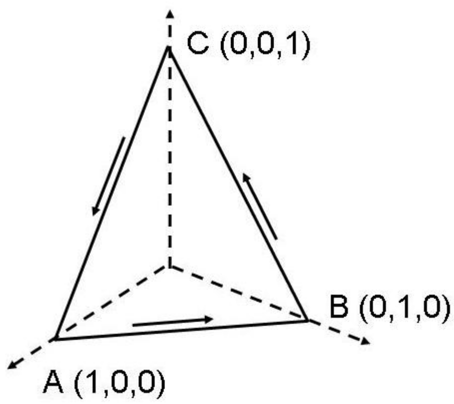
PROBLEMA PROPUESTO 1.31.

Dado el triángulo de la figura y el campo vectorial: $\vec{a} = cz\,\vec{i} + ay\,\vec{j} + b(x+y)\,\vec{k}$, se pide:

1) La circulación en el lado AB siguiendo el sentido indicado en la figura.

2) La circulación en el lado BC siguiendo el sentido indicado en la figura.

3) La circulación en el lado CA siguiendo el sentido indicado en la figura.



DATOS: $a = 29$ $\quad b = 48$ $\quad c = 8.4$

SOLUCIÓN 1.31.

1) 14.5

2) 9.50

3) -28.2

PROBLEMA PROPUESTO 1.32.

Dado el campo vectorial: $\vec{A}(t) = at\sin(kt)\,\vec{i} + b\cos(kt)\,\vec{j}$, se pide:

1) La componente x de la derivada del campo para el parámetro $t = t_0$.

2) La componente y de la integral del campo entre los valores $\pi/2$ y $t = t_0$.

DATOS: $a = 44$ $b = 10$ $t_0 = 2.6\ s$ $k = 9.4$

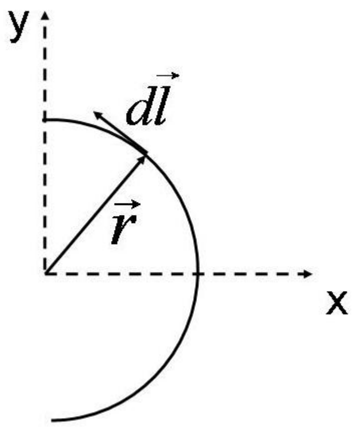
SOLUCIÓN 1.32.

1) 799

2) -1.54

PROBLEMA PROPUESTO 1.33.

Considérese la curva $C(x^2 + y^2 = R^2, z = 0, x \geqslant 0)$ recorrida en sentido antihorario tal y como se muestra en la figura. Se pide:



1) El módulo de la siguiente integral: $\int_C d\vec{l}$

2) El valor de la siguiente integral: $\int_C dl$

3) El módulo de la siguiente integral: $\int_C \vec{r} \times d\vec{l}$

4) El módulo de la siguiente integral: $\int_C B_0\vec{k} \times d\vec{l}$

5) El valor de la siguiente integral: $\int_C H\vec{k} \cdot (\vec{r} \times d\vec{l})$

6) El módulo de la siguiente integral: $\int_C x\vec{k} \times d\vec{l}$.

Ayuda: $cos^2\theta = \frac{cos2\theta+1}{2}$

DATOS: $R = 8.7\ m$ $B_0 = 38$ $H = 38$

SOLUCIÓN 1.33.

1) 17.4
2) 27.3
3) 238
4) 661
5) 9040
6) 119
