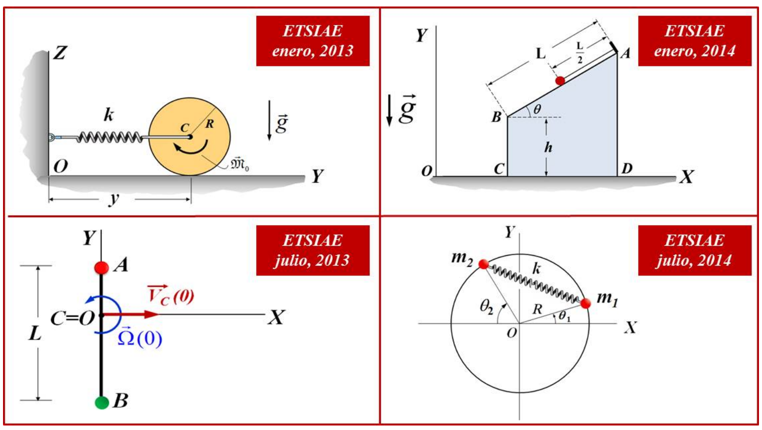
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO

FÍSICA I

CUESTIONES DE EVALUACIÓN CONTINUA Y PROBLEMAS DE EXAMEN

Fernando Jiménez Lorenzo



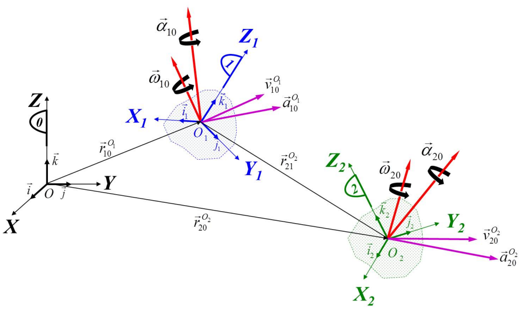
3.- MOVIMIENTO RELATIVO

3 Movimiento relativo

CUESTIÓN C3.1. [1]

Considérense tres triedros de referencia en movimiento relativo -véase figura- y definidos del siguiente modo:

- $S_0(O; X, Y, Z)$ triedro fijo, con origen en O y vectores unitarios $\left\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right\}$ fijos.
- $S_1(O_1; X_1, Y_1, Z_1)$ triedro móvil respecto a S_0, con origen en O_1, que se traslada con velocidad $\vec{v}_{10}^{O_1}$ y aceleración $\vec{a}_{10}^{O_1}$ y cuyos vectores unitarios $\left\{\vec{\imath}_1, \vec{\jmath}_1, \vec{k}_1\right\}$ giran con velocidad y aceleración angulares $\vec{\omega}_{10}$ y $\vec{\alpha}_{10}$.
- $S_2(O_2; X_2, Y_2, Z_2)$ triedro móvil respecto a S_0, con origen en O_2, que se traslada con velocidad $\vec{v}_{20}^{O_2}$ y aceleración $\vec{a}_{20}^{O_2}$ y cuyos vectores unitarios $\left\{\vec{\imath}_2, \vec{\jmath}_2, \vec{k}_2\right\}$ giran con velocidad y aceleración angulares $\vec{\omega}_{20}$ y $\vec{\alpha}_{20}$.



Indicar cuál de las siguientes afirmaciones es **falsa**:

A) $\vec{\omega}_{10} = -\vec{\omega}_{01} \quad , \quad \vec{\omega}_{20} = -\vec{\omega}_{02} \quad , \quad \vec{\omega}_{12} = -\vec{\omega}_{21}$

B) $\vec{\omega}_{20} = \vec{\omega}_{10} + \vec{\omega}_{21}$

C) $\vec{\alpha}_{10} = \left(\frac{d\,\vec{\omega}_{10}}{dt}\right)_{S_0} = \left(\frac{d\,\vec{\omega}_{10}}{dt}\right)_{S_1}$

D) $\vec{\alpha}_{20} = \left(\frac{d\,\vec{\omega}_{20}}{dt}\right)_{S_0} = \left(\frac{d\,\vec{\omega}_{20}}{dt}\right)_{S_2}$

E) $\vec{\alpha}_{21} = \left(\frac{d\,\vec{\omega}_{21}}{dt}\right)_{S_1} = \left(\frac{d\,\vec{\omega}_{12}}{dt}\right)_{S_2}$

(ETSIAE, autoevaluación 3-G5, octubre 2015)

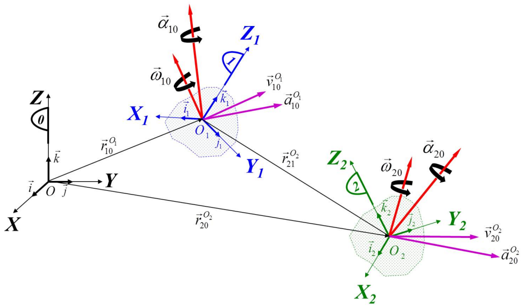
[1] Salvo que se especifique otra cosa, en todas las cuestiones de movimiento relativo o composición de movimientos que siguen se sobreentenderá que:

- $\vec{\omega}_{ij}$ ó $\vec{\alpha}_{ij}$, representan la velocidad o aceleración angular de los ejes del triedro S_i (que puede considerarse fijo a un sólido i) en su movimiento respecto al triedro S_j (que puede considerarse fijo a un sólido j).
- $\vec{r}_{ij}^{P}$ representa el vector de posición de un punto P fijo al triedro S_i (o de la partícula P del sólido i) en su movimiento respecto al triedro S_j.
- $\vec{v}_{ij}^{P}$ ó $\vec{a}_{ij}^{P}$, representan la velocidad o aceleración de un punto P fijo al triedro S_i en su movimiento respecto al triedro S_j.

CUESTIÓN C3.2.

Considérense tres triedros de referencia en movimiento relativo -véase figura- y definidos del siguiente modo:

- $S_0(O; X, Y, Z)$ triedro fijo, con origen en O y vectores unitarios $\left\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right\}$ fijos.
- $S_1(O_1; X_1, Y_1, Z_1)$ triedro móvil respecto a S_0, con origen en O_1, que se traslada con velocidad $\vec{v}_{10}^{O_1}$ y aceleración $\vec{a}_{10}^{O_1}$ y cuyos vectores unitarios $\left\{\vec{\imath}_1, \vec{\jmath}_1, \vec{k}_1\right\}$ giran con velocidad y aceleración angulares $\vec{\omega}_{10}$ y $\vec{\alpha}_{10}$.
- $S_2(O_2; X_2, Y_2, Z_2)$ triedro móvil respecto a S_0, con origen en O_2, que se traslada con velocidad $\vec{v}_{20}^{O_2}$ y aceleración $\vec{a}_{20}^{O_2}$ y cuyos vectores unitarios $\left\{\vec{\imath}_2, \vec{\jmath}_2, \vec{k}_2\right\}$ giran con velocidad y aceleración angulares $\vec{\omega}_{20}$ y $\vec{\alpha}_{20}$.



Se puede decir que:

A) $\vec{\alpha}_{21} = \vec{\alpha}_{12}$

B) $\vec{\alpha}_{20} = \vec{\alpha}_{10} + \vec{\alpha}_{21} + \vec{\omega}_{21} \times \vec{\omega}_{20}$

C) $\vec{\alpha}_{20} = \vec{\alpha}_{10} + \vec{\alpha}_{21}$

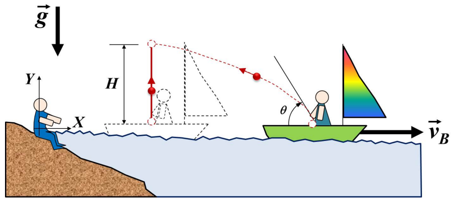
D) $\vec{v}_{02}^{\,O} = -\vec{v}_{20}^{\,O_2}$

E) $\vec{a}_{01}^{\,O} = -\vec{a}_{10}^{\,O_1} + \vec{\alpha}_{01} \times \vec{r}_{01}^{\,O} - \vec{\omega}_{01} \times \left(\vec{\omega}_{01} \times \vec{r}_{01}^{\,O}\right) + 2\vec{\omega}_{01} \times \vec{v}_{01}^{\,O}$

(ETSIAE, autoevaluación 3-G5, octubre 2015)

CUESTIÓN C3.3.

Un velero se mueve en línea recta con una velocidad constante $\vec{v}_B = v_B\vec{\imath}$. En su interior un tripulante, en reposo relativo al barco, lanza una pelota al aire a lo largo de una trayectoria contenida en un plano vertical y que inicialmete forma un ángulo θ con el suelo de la cubierta, -véase figura-.



Un niño, en reposo en la orilla, observa que la pelota se mueve verticalmente con aceleración constante $\vec{g} = -g\,\vec{\jmath}$. Si H es la altura a la que sube la pelota a partir del momento en el que el tripulante la suelta, se puede decir que:

A) $H = (v_B^2 \tan^2\theta)/2g$

B) $H = (v_B^2 \cos^2\theta)/2g$

C) $H = (v_B^2 \tan\theta)/2g$

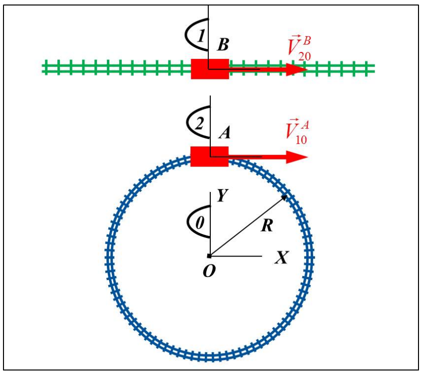
D) $H = (v_B^2 \cos\theta)/2g$

E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

(ETSIAE, autoevaluación 3-G5, octubre 2014)

CUESTIÓN C3.4.

Dos carretillas B y A (sólidos "1" y "2") avanzan por raíles sobre un suelo horizontal fijo (sólido "0") con velocidad constante en módulo, v_0. En un momento dado -véase figura-, en el que su vector de posición relativo es $\overrightarrow{AB} = a\,\vec{\jmath}$, las carretillas se mueven paralelamente con velocidades $\vec{v}\,^B_{10} = \vec{v}\,^A_{20} = v_0\,\vec{\imath}$ y aceleraciones $\vec{a}\,^B_{10} = \vec{0}$ y $\vec{a}\,^A_{20} = -(v_0^2/R)\,\vec{\jmath}$.



Si $\vec{v}\,^B_{12}$, $\vec{v}\,^A_{21}$, $\vec{a}\,^B_{12}$ y $\vec{v}\,^A_{21}$ son las velocidades y aceleraciones relativas de las carretillas en ese instante, entonces:

A) $\vec{v}\,^B_{12} = -\vec{v}\,^A_{21}$

B) $\vec{a}\,^B_{12} = -\vec{a}\,^A_{21}$

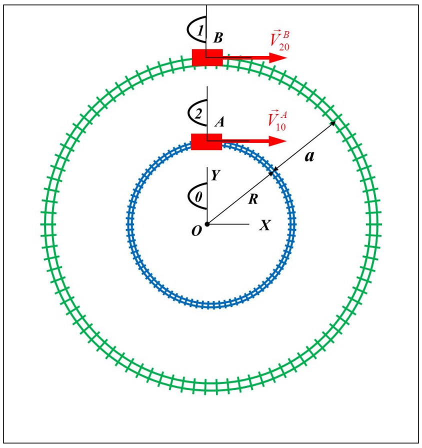
C) $\vec{v}\,^B_{12} = -\frac{v_0\,a}{R}\,\vec{\imath} \quad , \quad \vec{a}\,^B_{12} = \frac{v_0^2}{R}(1 + \frac{a}{R})\,\vec{\jmath}$

D) $\vec{v}\,^A_{21} = \vec{0} \quad , \quad \vec{a}\,^A_{21} = -\frac{v_0^2}{R}\,\vec{\jmath}$

E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

(ETSIAE, autoevaluación 3-G5, octubre 2014)

CUESTIÓN C 3.5.



Dos carretillas B y A (sólidos "1" y "2") avanzan por raíles sobre un suelo horizontal fijo (sólido "0") con velocidad constante en módulo, v_0. En un momento dado -véase figura-, en el que su vector de posición relativo es $\overrightarrow{AB} = a\,\vec{\jmath}$, las carretillas se mueven paralelamente con velocidades $\vec{v}^{\,B}_{10} = \vec{v}^{\,A}_{20} = v_0\,\vec{\imath}$ y aceleraciones $\vec{a}^{\,B}_{10} = -[v_0^2/(R+a)]\,\vec{\jmath}$ y $\vec{a}^{\,A}_{20} = -(v_0^2/R)\,\vec{\jmath}$.

Si $\vec{v}^{\,B}_{12}$, $\vec{v}^{\,A}_{21}$, $\vec{a}^{\,B}_{12}$ y $\vec{v}^{\,A}_{21}$ son las velocidades y aceleraciones relativas de las carretillas en ese instante, entonces:

A) $\vec{v}^{\,B}_{12} = -\vec{v}^{\,A}_{21}$

B) $\vec{a}^{\,B}_{12} = -\vec{a}^{\,A}_{21}$

C) $\vec{v}^{\,B}_{12} = -\frac{v_0\,a}{R}\,\vec{\imath}$, $\vec{a}^{\,B}_{12} = -\frac{v_0^2\,a^2}{R^2(R+a)}\,\vec{\jmath}$

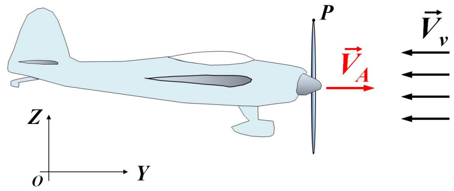
D) $\vec{v}^{\,A}_{21} = \frac{v_0\,a}{R+a}\,\vec{\imath}$, $\vec{a}^{\,A}_{21} = \frac{v_0^2\,a^2}{R(R+a)^2}\,\vec{\jmath}$

E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

(ETSIAE, autoevaluación 3-G5, octubre 2014)

CUESTIÓN C 3.6.

Un avión (sólido "2") vuela horizontalmente con una velocidad constante $\vec{v}_{20}^{A} = v_A \vec{\jmath}$ respecto de un triedro $S_0(O, X, Y, Z)$ fijo a tierra (sólido "0"), enfrentado a un viento horizontal (sólido "1") que sopla con velocidad constante $\vec{v}_{10}^{v} = -v_v \vec{\jmath}$ respecto a tierra -véase figura-. La hélice (sólido "3") del avión gira con velocidad angular constante $\vec{\Omega}$, siendo el sentido de giro antihorario, visto desde la cabina. La longitud de cada pala es L.



Sea $\vec{v}_{31}^{P}$ la velocidad relativa al viento de un punto P -extremo de una pala-, que en el instante mostrado está en el punto más alto. Se cumple:

A) $\vec{v}_{31}^{P} = (v_A + v_v)\,\vec{\jmath} - \Omega\, L\,\vec{\imath}$

B) $\vec{v}_{31}^{P} = (v_A - v_v)\,\vec{\jmath} - \Omega\, L\,\vec{\imath}$

C) $\vec{v}_{31}^{P} = (-v_A + v_v)\,\vec{\jmath} + \Omega\, L\,\vec{\imath}$

D) $\vec{v}_{31}^{P} = (v_A + v_v)\,\vec{\jmath} + \Omega\, L\,\vec{\imath}$

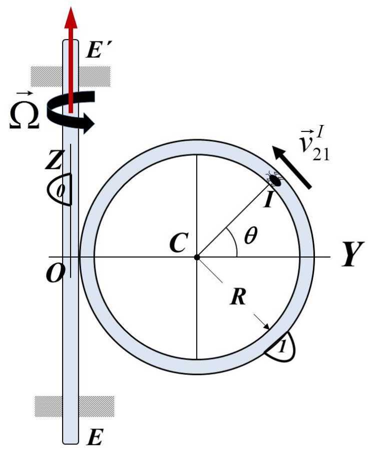
E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

(ETSIAE, enero 2012)

CUESTIÓN C 3.7.

Un tubo hueco circular (sólido "1") de radio R y espesor despreciable está soldado en O a un eje EE' que gira con velocidad angular constante $\vec{\Omega}$ -véase figura-. Por el interior del tubo se mueve un insecto I (sólido "2") con velocidad $\vec{v}\,^I_{21}$ relativa al tubo, de módulo constante: $|\vec{v}\,^I_{21}| = \Omega R$.

Sea $S_0(O; X, Y, Z)$ un triedro de referencia fijo con origen en O. Si $|\vec{v}\,^I_{20}(60^{\text{o}})|$ es el módulo de la velocidad del insecto en el triedro S_0 en el instante t^* en el que el ángulo girado es $\theta(t^*) = 60^{\text{o}}$, se puede decir que:



A) $|\vec{v}\,^I_{20}(60^{\text{o}})| = (\sqrt{17}/2)\Omega R$

B) $|\vec{v}\,^I_{20}(60^{\text{o}})| = (\sqrt{13}/2)\Omega R$

C) $|\vec{v}\,^I_{20}(60^{\text{o}})| = (\sqrt{15}/2)\Omega R$

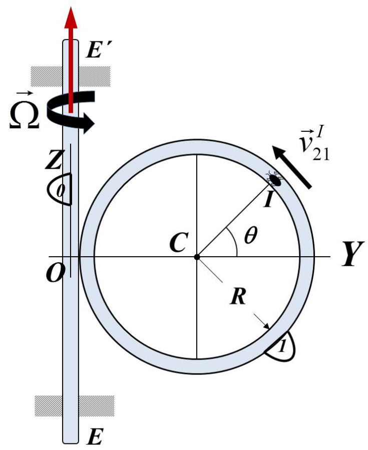
D) $|\vec{v}\,^I_{20}(60^{\text{o}})| = (\sqrt{11}/2)\Omega R$

E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

(ETSIAE, autoevaluación 3-G5, octubre 2014)

CUESTIÓN C3.8.

Un tubo hueco circular (sólido "1") de radio R y espesor despreciable está soldado en O a un eje EE' que gira con velocidad angular constante $\vec{\Omega}$ -véase figura-. Por el interior del tubo se mueve un insecto I (sólido "2") con velocidad $\vec{v}\,^I_{21}$ relativa al tubo, de módulo constante: $|\vec{v}\,^I_{21}| = \Omega R$.



Sea $S_0(O; X, Y, Z)$ un triedro de referencia fijo con origen en O. Si $|\vec{a}\,^I_{20}(60^{\text{o}})|$ es el módulo de la aceleración del insecto en el triedro S_0 en el mismo instante t^*, se puede decir que:

A) $|\vec{a}\,^I_{20}(60^{\text{o}})| = (\sqrt{27}/2)\Omega^2 R$

B) $|\vec{a}\,^I_{20}(60^{\text{o}})| = (\sqrt{33}/2)\Omega^2 R$

C) $|\vec{a}\,^I_{20}(60^{\text{o}})| = (\sqrt{35}/2)\Omega^2 R$

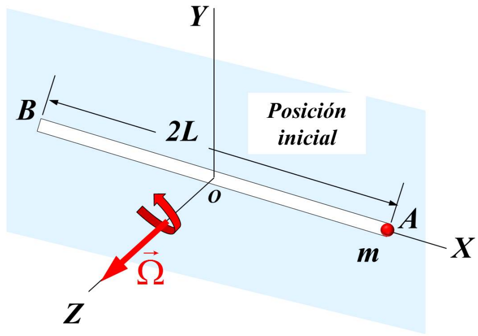
D) $|\vec{a}\,^I_{20}(60^{\text{o}})| = (\sqrt{31}/2)\Omega^2 R$

E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

(ETSIAE, autoevaluación 3-G5, octubre 2014)

CUESTIÓN C3.9.

En la figura se muestra un tubo recto de longitud $2L$ y centro O (sólido "1") que sirve de guía al movimiento de una partícula m (sólido "2") en su interior. El tubo está girando respecto al eje Z del triedro inercial de referencia $S_0(O;X,Y,Z)$ mostrado, con velocidad angular constante: $\vec{\omega}_{10} = \Omega\vec{k}$, e inicialmente se apoya sobre el eje X de este triedro.



Del movimiento de m relativo al tubo se sabe que en el instante inicial se encuentra en A y que su posición instantánea posterior está descrita por una función armónica del tipo:

$$x_{21}^{m} m(t) = L\cos(2\Omega t)$$

¿Cuánto vale la velocidad absoluta de la partícula, $\vec{v}_{20}^{\,m}(B)$, en el instante en que ésta alcanza por primera vez el extremo B?

A) $\vec{v}_{20}^{\,m}(B) = \Omega L(\vec{\imath} + \vec{\jmath})$

B) $\vec{v}_{20}^{\,m}(B) = \Omega L\vec{\imath}$

C) $\vec{v}_{20}^{\,m}(B) = -\Omega L\vec{\jmath}$

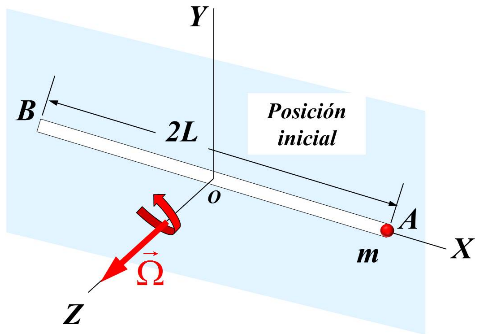
D) $\vec{v}_{20}^{\,m}(B) = \Omega L(\vec{\imath} - \vec{\jmath})$

E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

(EUITA, enero 2005)

CUESTIÓN C 3.10.

En la figura se muestra un tubo recto de longitud $2L$ y centro O (sólido "1") que sirve de guía al movimiento de una partícula m (sólido "2") en su interior. El tubo está girando respecto al eje Z del triedro inercial de referencia $S_0(O; X, Y, Z)$ mostrado, con velocidad angular constante: $\vec{\omega}_{10} = \Omega\vec{k}$, e inicialmente se apoya sobre el eje X de este triedro.
Del movimiento de m relativo al tubo se sabe que en el instante inicial se encuentra en A y que su posición instantánea posterior está descrita por una función armónica del tipo:



$$x_{21}^{m} m(t) = L\cos(2\Omega t)$$

¿Cuánto vale la aceleración absoluta de la partícula, $\vec{a}\,^{m}_{20}(B)$, en el instante en que ésta alcanza por primera vez el extremo B?

A) $\vec{a}\,^{m}_{20}(B) = -\Omega^2 L(4\vec{\imath} + 5\vec{\jmath})$

B) $\vec{a}\,^{m}_{20}(B) = -5\Omega^2 L\vec{\jmath}$

C) $\vec{a}\,^{m}_{20}(B) = 5\Omega^2 L\vec{\jmath}$

D) $\vec{a}\,^{m}_{20}(B) = \Omega^2 L(-4\vec{\imath} + 5\vec{\jmath})$

E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

(EUITA, enero 2005)

.

TABLA DE SOLUCIONES 3.- MOVIMIENTO RELATIVO			
C3.1	E	C3.21	
C3.2	E	C3.22	
C3.3	A	C3.23	
C3.4	D	C3.24	
C3.5	C	C3.25	
C3.6	A	C3.26	
C3.7	B	C3.27	
C3.8	D	C3.28	
C3.9	B	C3.29	
C3.10	C	C3.30	
C3.11		C3.31	
C3.12		C3.32	
C3.13		C3.33	
C3.14		C3.34	
C3.15		C3.35	
C3.16		C3.36	
C3.17		C3.37	
C3.18		C3.38	
C3.19		C3.39	
C3.20		C3.40	

PROBLEMA P 3.1.

Una partícula P (sólido 4) describe un circunferencia cuyas ecuaciones paramétricas, referidas a un triedro cartesiano de referencia fijo, $S_0(O; X, Y, Z)$, vienen dadas por:

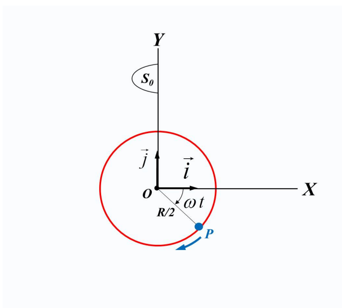
$$x_{40}^P(t) = \frac{R}{2}\cos\omega t$$
$$y_{40}^P(t) = -\frac{R}{2}\sin\omega t$$

donde R y ω son constantes positivas y t es el tiempo -véase figura-. Se definen los siguientes triedros de referencia, todos ellos móviles respecto a S_0:

- $S_1(O_1; X_1, Y_1, Z_1)$, con $O_1 = O$, $Z_1 = Z$, y cuyos ejes giran respecto a los de S_0 con velocidad angular constante $\vec{\omega}_{10} = \omega\vec{k}$.
- $S_2(O_2; X_2, Y_2, Z_2)$, cuyo origen O_2 describe una circunferencia de radio R y centro O con velocidad angular constante $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$ y cuyos ejes permanecen en todo momento paralelos a los fijos.
- $S_3(O_3; X_3, Y_3, Z_3)$, con $O_3 = O_2$, $Z_3 = Z_2$, y cuyos ejes giran respecto a los de S_2 con velocidad angular constante $\vec{\omega}_{32} = \omega\vec{k}$.

En el instante inicial, $t = 0$, $\overrightarrow{OO_2} = \overrightarrow{OO_3} = R\vec{\imath}$, y los ejes de S_0, S_1, S_2 y S_3 son paralelos. Se pide:

1. Utilizando la figura del enunciado, dibujar para un instante t arbitrario las posiciones de S_0, S_1, S_2 y S_3. ¿Alguno de estos triedros de referencia es inercial? Razónese.
2. Obtener la trayectoria, la velocidad absoluta $\vec{v}_{40}^P(t)$ y la aceleración absoluta $\vec{a}_{40}^P(t)$ de P en S_0, expresando todas ellas en función de los vectores unitarios $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de S_0.
3. Obtener la trayectoria, la velocidad relativa $\vec{v}_{41}^P(t)$ y la aceleración relativa $\vec{a}_{41}^P(t)$ de P en S_1, expresando todas ellas en función de los vectores unitarios $(\vec{\imath}_1, \vec{\jmath}_1, \vec{k}_1)$ de S_1.
4. Obtener la trayectoria, la velocidad relativa $\vec{v}_{42}^P(t)$ y la aceleración relativa $\vec{a}_{42}^P(t)$ de P en S_2, expresando todas ellas en función de los vectores unitarios $(\vec{\imath}_2, \vec{\jmath}_2, \vec{k}_2)$ de S_2.
5. Obtener la trayectoria, la velocidad relativa $\vec{v}_{43}^P(t)$ y la aceleración relativa $\vec{a}_{43}^P(t)$ de P en S_3, expresando todas ellas en función de los vectores unitarios $(\vec{\imath}_3, \vec{\jmath}_3, \vec{k}_3)$ de S_3.



(ETSIAE, autoevaluación 3-G5, octubre 2014)

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

SOLUCIÓN P 3.1.

2.-
$$(x_{40}^P)^2 + (y_{40}^P)^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2$$
$$\vec{v}_{40}^P(t) = -\frac{R}{2}\omega\,[\operatorname{sen}\omega t\vec{\imath} + \cos\omega t\vec{\jmath}]$$
$$\vec{a}_{40}^P(t) = -\frac{R}{2}\omega^2\,[\cos\omega t\vec{\imath} - \operatorname{sen}\omega t\vec{\jmath}]$$
.

3.-
$$(x_{41}^P)^2 + (y_{41}^P)^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2$$
$$\vec{v}_{41}^P(t) = -R\omega[\operatorname{sen}2\omega t\vec{\imath}_1 + \cos 2\omega t\vec{\jmath}_1]$$
$$\vec{a}_{41}^P(t) = -2R\omega^2[\cos 2\omega t\vec{\imath}_1 - \operatorname{sen}2\omega t\vec{\jmath}_1]$$
.

4.-
$$\frac{(x_{42}^P)^2}{(R/2)^2} + \frac{(y_{42}^P)^2}{(3R/2)^2} = 1$$
$$\vec{v}_{42}^P(t) = \frac{R}{2}\omega\,[\sin\omega t\ \vec{\imath}_2 - 3\cos\omega t\ \vec{\jmath}_2]$$
$$\vec{a}_{42}^P(t) = \frac{R}{2}\omega^2\,[\cos\omega t\ \vec{\imath}_2 + 3\operatorname{sen}\omega t\ \vec{\jmath}_2]$$
.

5.-
$$(x_{43}^P + R)^2 + (y_{43}^P)^2 = (\frac{R}{2})^2$$
$$\vec{v}_{43}^P(t) = -R\omega\,[\operatorname{sen}2\omega t\ \vec{\imath}_3 + \cos 2\omega t\ \vec{\jmath}_3]$$
$$\vec{a}_{43}^P(t) = -2R\omega^2[\cos 2\omega t\ \vec{\imath}_3 - \sin 2\omega t\ \vec{\jmath}_3]$$
.

etsiae UPM

PROBLEMA P 3.2.

Un registrador gráfico -figuras 1 y 2- consiste, básicamente, de:

- Un rollo de papel continuo (sólido "1") montado en un cilindro rotatorio C de radio R del que se va desenrollando.
- una guía rectilínea AB (sólido "0") fija y dispuesta perpendicularmente al lado de la hoja de papel de mayor longitud.
- Una pluma m (sólido "2") que puede desplazarse sobre la guía.

Considérense dos triedros de referencia cartesianos $S_0(O = A; X, Y, Z)$ y $S_1(O_1; X_1, Y_1, Z_1)$, el primero fijo a la guía con origen en A y el segundo ligado a la hoja móvil, trasladándose con ella; ambos sistemas coinciden en el instante inicial. En lo que sigue se supondrá que:

- El cilindro gira con velocidad angular constante, $\vec{\omega} = -(2\pi/P)\,\vec{\jmath}$.
- La pluma se mueve respecto a la guía con un movimiento que viene descrito por la función armónica:

$$y_{20}^{m}(t) = L\left[1 - \cos\frac{2\pi}{P}t\right]$$

Considerando el movimiento de m respecto a la hoja móvil, se pide:

1. Velocidad de m en S_1, $\vec{v}\,_{21}^{m}(t)$.
2. Ecuación de la trayectoria de m en S_1, $y\,_{21}^{m}(x_{21}^{m})$.
3. Aceleración de arrastre de m en $S_1, \vec{a}\,_{21}^{m,\,arratre}(t)$.
4. Aceleración de Coriolis de m en $S_1, \vec{a}\,_{21}^{m,\,Coriolis}(t)$
5. Aceleración de m en S_1, $\vec{a}\,_{21}^{m}(t)$.

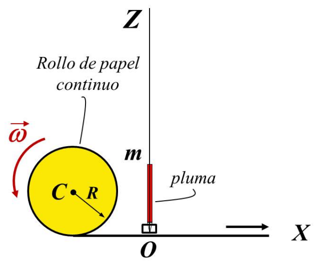


Fig.1

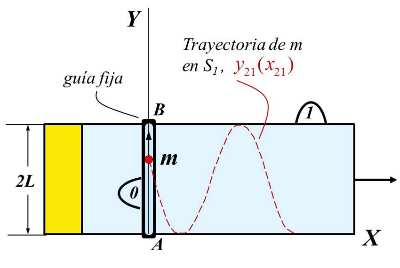


Fig.2

(ETSIAE, autoevaluación 3-G5, octubre 2015)

SOLUCIÓN P 3.2.

1.- $$\vec{v}\,^{m}_{21} = \frac{2\pi}{P}\left[-R\,\vec{\imath} + L\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{P}\,t\right)\,\vec{\jmath}\right]$$

2.- $$y\,^{m}_{21} = L\left[1 - \cos\left(\frac{x^{m}_{21}}{R}\right)\right]$$

3.- $$\vec{a}\,^{m,\,Coriolis}_{21} = \vec{0}$$

4.- $$\vec{a}\,^{m,\,arrastre}_{21} = \vec{0}$$

5.- $$\vec{a}\,^{m}_{21} = \frac{4\pi^2}{P^2}\,\cos\left(\frac{2\pi}{P}t\right)\,\vec{\jmath}$$

PROBLEMA P 3.3.

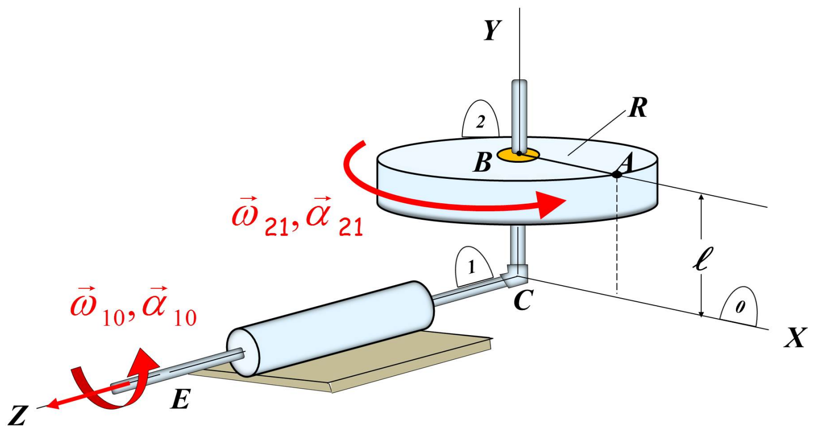
En el instante t^* indicado, el brazo BCE -sólido 1- en forma de L de la pieza que se representa en la figura está girando alrededor de su eje EC con una velocidad y una aceleración angulares $\vec{\omega}_{10}(t^*)$ y $\vec{\alpha}_{10}(t^*)$, respectivamente. En ese mismo instante, el disco D -sólido 2- de radio R está girando alrededor del segmento BC con una velocidad angular y una aceleración angulares $\vec{\omega}_{21}(t^*)$ y $\vec{\alpha}_{21}(t^*)$.

Considérese el punto A del borde del disco que en el instante t^* se encuentra en la posición especificada en la figura. Determinar, con respecto a un triedro de ejes fijos $S_0(C; X, Y, Z)$, con origen en la posición que ocupa el punto C del brazo en el instante t^*:

1. La velocidad absoluta de A, $\vec{v}^{A}_{D0}(t^*)$.
2. La aceleración absoluta de A, $\vec{a}^{A}_{D0}(t^*)$.
3. La velocidad angular $\vec{\alpha}_{D0}(t^*)$ del disco.
4. La aceleración angular $\vec{\alpha}_{D0}(t^*)$ del disco.

Para el cálculo, tómense como datos:

$$
\begin{array}{rlcrl}
\vec{\omega}_{10}(t^*) = 5\vec{k} & (rad/s) & , & \vec{\alpha}_{10}(t^*) = 2\vec{k} & (rad/s^2) \\
\vec{\omega}_{21}(t^*) = 4\vec{\jmath} & (rad/s) & , & \vec{\alpha}_{21}(t^*) = -4\vec{\jmath} & (rad/s^2) \\
R = 0.15 & (m) & , & \ell = 0.12 & (m)
\end{array}
$$



(ETSIAE, autoevaluación 3-G5, octubre 2014)

SOLUCIÓN P3.3.

1.- $\vec{v}^{A}_{D0}(t^*) = -0.6\vec{i} + 0.75\vec{j} - 0.6\vec{k}, \qquad (m/s)$

2.- $\vec{a}^{A}_{D0}(t^*) = -6.39\vec{i} - 2.7\vec{j} + 0.6\vec{k}, \qquad (m/s^2)$

3.- $\vec{\omega}_{D0}(t^*) = \vec{\omega}_{D0}(t^*) = -20\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k} \qquad (rad/s)$

4.- $\vec{\alpha}_{D0}(t^*) = -20\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}, \qquad (rad/s^2)$

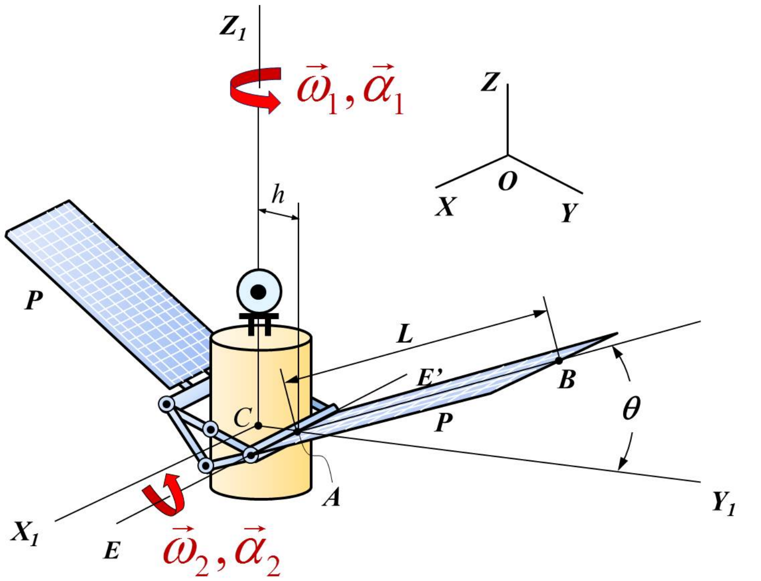
PROBLEMA P3.4.

En el instante t^* indicado en la figura, cuando $\theta(t^*) = 30^o$, el movimiento del satélite de telecomunicaciones con respecto al sistema fijo $S_0(O; X, Y, Z)$ mostrado, es el siguiente:

- El centro de masas C del satélite se traslada con velocidad $\vec{v}_C = v_0\vec{i}$, y aceleración $\vec{a}_C = a_0\vec{i}$.
- El cuerpo del satélite está girando con velocidad angular $\vec{\omega}_1$ y aceleración angular $\vec{\alpha}_1$ con respecto al eje Z_1 de un triedro móvil $S_1(C; X_1, Y_1, Z_1)$ con origen en C y ligado al mismo.
- Los paneles solares P están girando con velocidad angular $\vec{\omega}_2$ y aceleración angular $\vec{\alpha}_2$ con respecto al eje EE', paralelo al eje X_1 de S_1.

Considerando el instante t^* mostrado, en el que los ejes de S_0 y S_1 son paralelos, se pide:

1. La velocidad absoluta $\vec{v}^{\,B}_{P0}(t^*)$ del punto B localizado en el extremo de uno de los paneles solares.
2. La aceleración absoluta $\vec{a}^{\,B}_{P0}(t^*)$ de ese mismo punto.



(ETSIAE, autoevaluación 3-G5, octubre 2014)

SOLUCIÓN P3.4.

1.- $\vec{v}_{P0}^{B}(t^*) = \left[v_0 - \omega_1(h + \frac{\sqrt{3}}{2}L)\right]\vec{\imath} + \frac{L\omega_2}{2}\left[-\vec{\jmath} + \sqrt{3}\,\vec{k}\right]$

.

2.- $\vec{a}_{P0}^{B}(t^*) = \left[a_0 - \alpha_1(h + \dfrac{\sqrt{3}}{2}L) + L\omega_1\omega_2\right]\vec{\imath} - \left[\dfrac{L}{2}(\alpha_2 + \sqrt{3}\omega_2^2) + \omega_1^2(h + \dfrac{\sqrt{3}}{2}L)\right]\vec{\jmath} + \dfrac{L}{2}\left[\sqrt{3}\alpha_2 - \omega_2^2\right]\vec{k}$

.

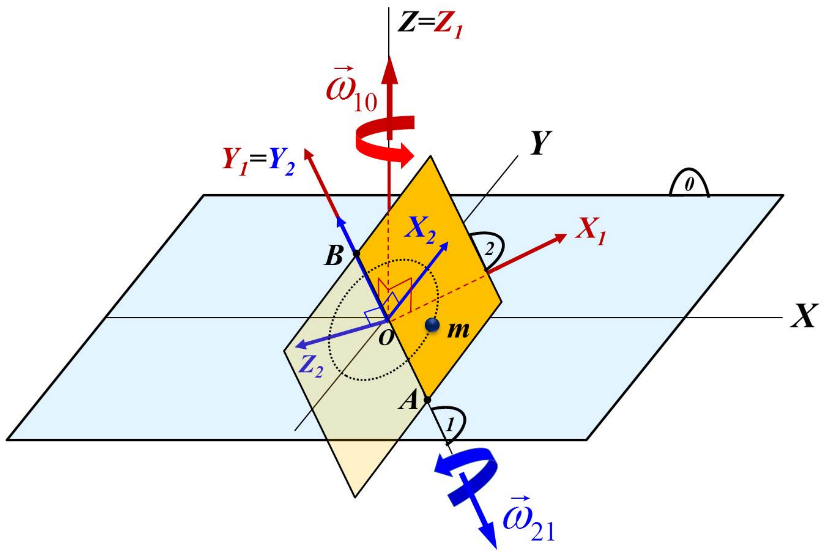
PROBLEMA P3.5.

Una partícula m (sólido 3) describe sobre un plano móvil (sólido 2) una trayectoria cuyas ecuaciones paramétricas, respecto a un triedro cartesiano $S_2(O_2; X_2, Y_2, Z_2)$ fijo al plano, están dadas por:

$$x_{32}^P(t) = a\cos(2\omega t)$$
$$y_{32}^P(t) = -b\sin(2\omega t)$$

El movimiento del plano es un giro con velocidad angular $\vec{\omega}_{21}$ alrededor de la recta AB contenida en el plano -véase figura-. Además, dicha recta -ligada a un triedro $S_1(O_1; X_1, Y_1, Z_1)$- gira con velocidad angular $\vec{\omega}_{10}$ alrededor del eje vertical Z del triedro de referencia inercial $S_0(O; X, Y, Z)$ mostrado. Sabiendo que en todo instante se verifica que $|\vec{\omega}_{10}| = 2|\vec{\omega}_{21}| = 2\omega$, siendo ω una constante, y suponiendo que en $t = 0$ los triedros S_0, S_1 y S_2 son coincidentes, determinar en el instante t^* en el que el plano contiene por primera vez al eje fijo Z:

1. La velocidad angular $\vec{\omega}_{20}(t^*)$ del plano respecto a S_0.
2. La aceleración angular $\vec{\alpha}_{20}(t^*)$ del plano respecto a S_0.
3. El vector de posición $\vec{r}_{30}^{\,P}(t^*)$ de la partícula respecto a S_0.
4. La velocidad absoluta $\vec{v}_{30}^{\,P}(t^*)$ de la partícula respecto a S_0.
5. La aceleración absoluta $\vec{a}_{30}^{\,P}(t^*)$ de la partícula respecto a S_0.



(EUITA, febrero 1996)

SOLUCIÓN P3.5.

1.- $\vec{\omega}_{20}(t^*) = \omega[\vec{\jmath} + 2\,\vec{k}]$

.

2.- $\vec{\alpha}_{20}(t^*) = -2\omega^2\,\vec{\imath}$

.

3.- $\vec{r}^{\,P}_{30}(t^*) = -a\,\vec{k}$

.

4.- $\vec{v}^{\,P}_{30}(t^*) = -\omega[a\,\vec{\imath} + 2b\,\vec{\jmath}]$

.

5.- $\vec{a}^{\,P}_{30}(t^*) = \omega^2[8b\,\vec{\imath} - 4a\,\vec{\jmath} + 5a\,\vec{k}]$

.

PROBLEMA P3.6.

El brazo AB (sólido 1) del mecanismo mostrado en la figura está girando alrededor de un eje vertical fijo AZ (sólido 0) con una velocidad angular constante $\vec{\omega}_1 = \omega\vec{k}$. Simultáneamente, el aro circular (sólido 2) es obligado a girar respecto al brazo con una aceleración de módulo constante $|\vec{\alpha}_2| = 4\omega^2/\pi$, y en la dirección indicada.

Una abalorio P se está moviendo por el aro bajo la acción de un dispositivo -no dibujado- de forma tal que el ángulo $\theta_3(t)$ que define su posición en el tiempo con respecto al diámetro horizontal del aro viene dado por la función periódica:

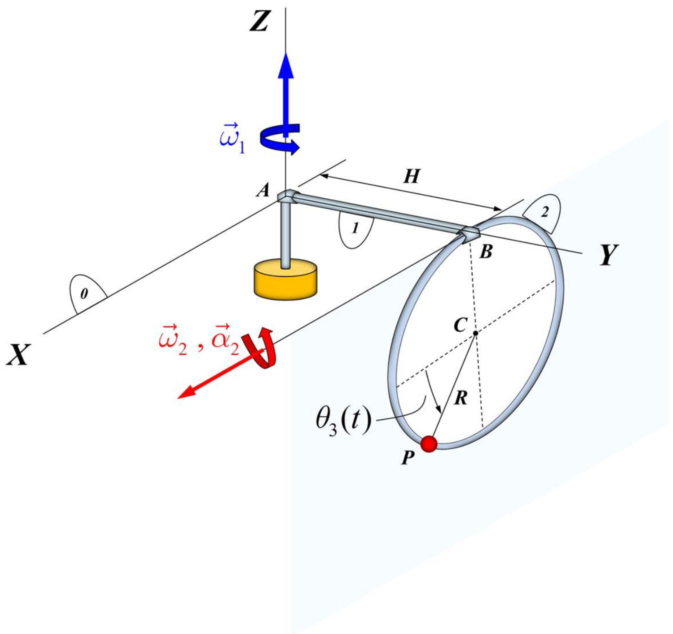
$$\theta_3(t) = \pi \operatorname{sen}^2 \omega t$$

Se definen los siguientes triedros de referencia, todos ellos paralelos en el instante inicial $t = 0$:

- $S_0(O = A; X; Y; Z)$ triedro fijo.
- $S_1(O_1 = A; X_1; Y_1; Z_1 \| Z)$ triedro móvil con respecto a S_0, ligado al brazo AB y con origen en A.
- $S_2(O_2 = B; X_2 \| X_1; Y_2; Z_2)$ triedro móvil con respecto a S_1, con origen en el extremo B del brazo.
- $S_3(O_2 = C; X_3 \| X_2; Y_3 \| Y_2; Z_3 \| Z_2)$ triedro fijo con respecto a S_2, pero con origen en el centro C del aro.
- $S_4(O_3 = P; X_4 \| X_3; Y_4 \| Y_3; Z_4 \| Z_3)$ triedro móvil fijo a la partícula P, que se traslada -sin girar- con ella.

Considérese el instante t^* en el que el abalorio se detiene por primera vez con respecto al aro. Tomando como datos los valores de R, H y ω, determinar en ese instante y en función de los vectores unitarios $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de S_0:

1. La velocidad del abalorio relativa al brazo AB, $\vec{v}\,^P_{41}(t^*)$.
2. La aceleración del abalorio relativa al brazo AB, $\vec{a}\,^P_{41}(t^*)$.
3. La velocidad absoluta del abalorio $\vec{v}\,^P_{40}(t^*)$.
4. La aceleración absoluta del abalorio $\vec{a}\,^P_{40}(t^*)$



(ETSIAE, autoevaluación 3-G5, diciembre 2014)

SOLUCIÓN P3.6.

1.- $\vec{v}\,^{P}_{41}(t^*) = 2\omega R\vec{k}$

.

2.- $\vec{a}\,^{P}_{41}(t^*) = 2\omega^2 R(2-\pi)\vec{\imath} + \frac{4\omega^2}{\pi}\,\vec{k}$

.

3.- $\vec{v}\,^{P}_{40}(t^*) = R\omega\vec{\imath} - \omega(H+R)\vec{\jmath} + 2\omega R\vec{k}$

.

4.- $\vec{a}\,^{P}_{40}(t^*) = \omega^2(H+5R-2\pi R)\vec{\imath} + R\omega^2\vec{\jmath} + \frac{4\omega^2}{\pi}\,\vec{k}$

.

PROBLEMA P3.7.

En un cierto instante t^* el brazo AB de la grúa mostrada en la figura está girando alrededor de un eje vertical fijo AZ con una velocidad y una aceleración angulares $\vec{\omega}_2$ y $\vec{\alpha}_2$, respectivamente, mientras que la carretilla T está moviéndose hacia afuera, a lo largo del brazo con una velocidad y una aceleración $\vec{v}_T$ y $\vec{a}_T$ relativas al mismo.

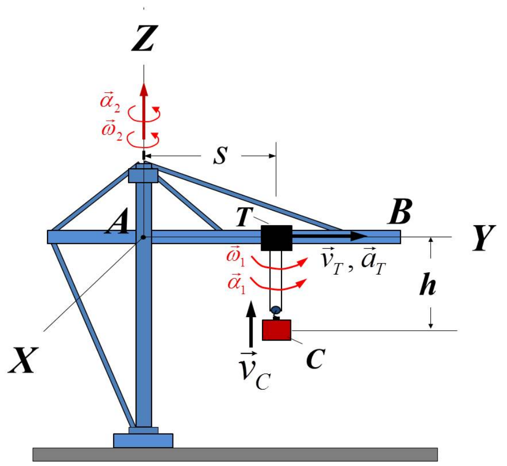
De la carretilla cuelga una carga C -sólido 4- de tamaño despreciable, que está siendo elevada bajo la acción de un motor con velocidad constante $\vec{v}_C$ relativa a la carretilla. En el mismo instante t^*, los cables que sujetan la carga se encuentran en posición vertical y están oscilando por acción del viento en el plano ZAB con una velocidad y una aceleración angulares $\vec{\omega}_1$ y $\vec{\alpha}_1$.

A efecto de notaciones y cálculos se tomarán los siguientes triedros de referencia:

- $S_0(O = A; X, Y, Z)$ triedro fijo.
- $S_1(O_1 = A; X_1, Y_1, Z_1)$ triedro móvil con respecto a S_0, ligado al brazo AB y con origen en A.
- $S_2(O_2 = T; X_2, Y_2, Z_2)$ triedro móvil con respecto a S_1, con origen en el centro de la carretilla.
- $S_3(O_3 = T; X_3, Y_3, Z_3)$ triedro móvil con respecto a S_2 con origen en el centro de la carretilla y cuyos ejes giran con la velocidad y la aceleración angular de oscilación de los cables.

Considerando que en el instante t^* mostrado los ejes de los triedros S_0, S_1, S_2 y S_3 son paralelos, se pide:

1. Velocidad de la carga C relativa a la carretilla, $\vec{v}\,^C_{42}(t^*)$.
2. Aceleración de la carga C relativa a la carretilla, $\vec{a}\,^C_{42}(t^*)$.
3. Velocidad de la carga C relativa al brazo AB, $\vec{v}\,^C_{41}(t^*)$.
4. Aceleración de la carga Crelativa al brazo AB, $\vec{a}\,^C_{41}(t^*)$.
5. Velocidad absoluta de la carga C, $\vec{v}\,^C_{40}(t^*)$.
6. Aceleración absoluta de la carga C, $\vec{a}\,^C_{40}(t^*)$.



(ETSIAE, enero 1987)

SOLUCIÓN P3.7.

1.- $\vec{v}^{\,C}_{42}(t^*) = \omega_1 h\vec{\jmath} + v_C\vec{k}$

.

2.- $\vec{a}^{\,C}_{42}(t^*) = (\alpha_1 h - 2\omega_1 v_C)\vec{\jmath} + h\omega_1^2\vec{k}$

.

3.- $\vec{v}^{\,C}_{41}(t^*) = (v_T + \omega_1 h)\vec{\jmath} + v_C\vec{k}$

.

4.- $\vec{a}^{\,C}_{41}(t^*) = (a_T + \alpha_1 h - 2\omega_1 v_C)\vec{\jmath} + h\omega_1^2\vec{k}$

.

5.- $\vec{v}^{\,C}_{40}(t^*) = -\omega_2 s\vec{\imath} + (v_T + \omega_1 h)\vec{\jmath} + v_C\vec{k}$

.

6.-
$$\begin{aligned}\vec{a}^{\,C}_{40}(t^*) &= -[\alpha_2 s + 2\omega_2(v_T + \omega_1 h)]\vec{\imath}\\ &\quad +(a_T + \alpha_1 h - 2\omega_1 v_C - \omega_2^2 s)\vec{\jmath} + h\omega_1^2\vec{k}\end{aligned}$$

.