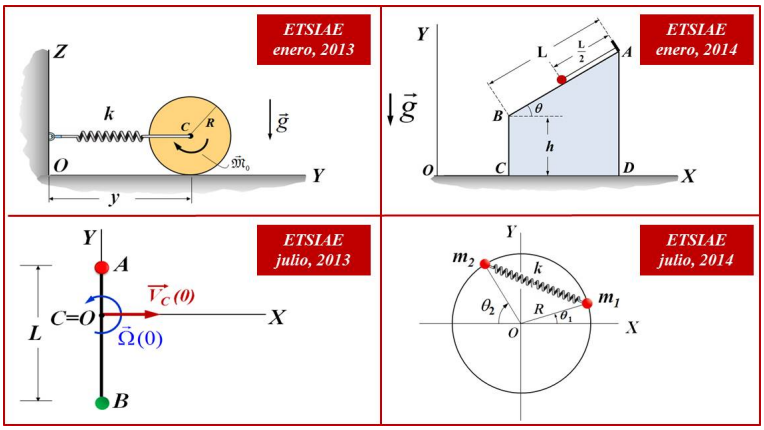
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO

# FÍSICA I

## CUESTIONES DE EVALUACIÓN CONTINUA Y PROBLEMAS DE EXAMEN

Fernando Jiménez Lorenzo

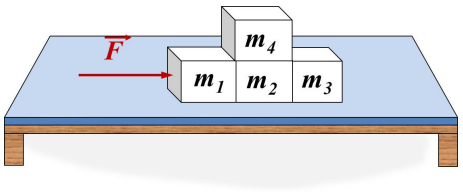



## 4.- DINÁMICA DE LA PARTÍCULA

# 4 Dinámica de la partícula

**CUESTIÓN C4.1.**

Los cuatro bloques $m_1, m_2, m_3$ y $m_4$ de la figura, en contacto y de la misma masa $m$, descansan sobre una mesa horizontal muy larga, de masa $10m$, y cuyas patas, que soportan por igual el peso de los bloques, apoyan sobre un suelo horizontal. En un cierto instante se aplica sobre el bloque $m_1$ la fuerza $\vec{F}$ indicada.




Si se denota por $\vec{N}_{ij}$, $i, j = 1, \cdots, 4$, la fuerza que ejerce el bloque $m_j$ sobre el bloque $m_i$, y se supone despreciable cualquier tipo de rozamiento entre las superficies en contacto, se puede afirmar que:

A) $\vec{N}_{42}$ y $m_4\vec{g}$ son un par de acción reacción.

B) La reacción a $m_2\vec{g}$ está aplicada en la mesa.

C) $\vec{N}_{21} = \vec{N}_{23}$

D) $\vec{N}_{32} = \vec{F}/3$

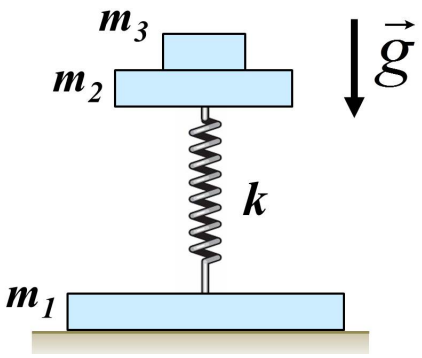
E) Los cuatro bloques se mueven con la misma aceleración.

*(ETSIAE, octubre 2010)*

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

## CUESTIÓN C4.2.

El sistema mostrado en la figura está constituido por tres bloques de masas $m_1, m_2$ y $m_3$ y un muelle ideal de masa nula, constante elástica $k$ y longitud natural $l_0$. El conjunto está en equilibrio y descansa sobre un suelo horizontal, siendo $l$ la longitud del muelle comprimido.




Denotando por $\vec{N}_{32}$ y $\vec{N}_{k2}$ las fuerzas que ejerce el bloque $m_2$ sobre el bloque $m_3$ y el muelle, respectivamente, y por $\vec{N}_{s1}$ y $\vec{N}_{k1}$ las que ejerce el bloque $m_1$ sobre el suelo y el muelle, respectivamente, se puede decir que:

A) $\vec{N}_{k2}$ y $\vec{N}_{k1}$ constituyen un par de acción-reacción.

B) $\vec{N}_{32}$ y el peso de $m_3$ constituyen un par de acción-reacción.

C) $\vec{N}_{s1}$ y $(m_1 + m_2 + m_3)\,\vec{g}$ constituyen un par de acción-reacción.

D) Que $|\vec{N}_{k2}| = |\vec{N}_{k1}|$ es una consecuencia de la 1ª ley de Newton.

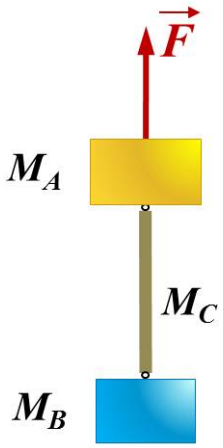
E) $l = l_0 - (1/k)(m_1 + m_2 + m_3)\,g$.

*(ETSIAE, octubre 2013)*

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

## CUESTIÓN C4.3.

Los dos bloques de masas $M_A$ y $M_B$ de la figura están unidos por una cuerda gruesa y uniforme, de masa $M_C$ y longitud $L$. Se aplica una fuerza $F$ hacia arriba, como se indica.




Si $T(x)$ es la tensión en la cuerda como función de la distancia $x$ al extremo superior ($x = 0$, arriba), se puede decir que:

A) $T(x) = \left(\frac{M_C + M_B(1-\frac{x}{L})}{M_A+M_B+M_C}\right) F$

B) $T(x) = \left(\frac{M_B + M_C(1+\frac{x}{L})}{M_A+M_B+M_C}\right) F$

C) $T(x) = \left(\frac{M_C + M_B(1+\frac{x}{L})}{M_A+M_B+M_C}\right) F$

D) $T(x) = \left(\frac{M_B + M_C(1-\frac{x}{L})}{M_A+M_B+M_C}\right) F$

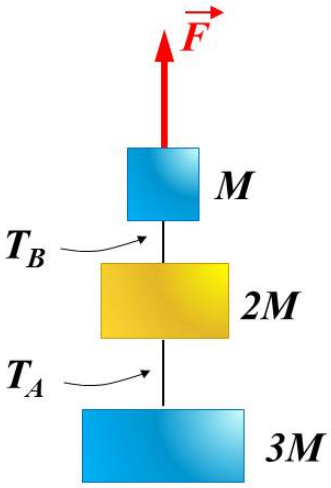
E) La tensión es la misma en todos los puntos de la cuerda.

*(ETSIAE, autoevaluación 4-G5, octubre 2014)*

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

## CUESTIÓN C4.4.

Los tres bloques de masas $M$, $2M$ y $3M$ mostrados en la figura están conectados por cuerdas ideales y se mueven verticalmente hacia arriba por la acción de una fuerza $\vec{F}$ constante.




Sean $T_A$ y $T_B$ las tensiones en cada una de las cuerdas. Se puede decir que:

A) $F = T_B$

B) $F = T_A + T_B$.

C) $T_A = T_B$

D) $F > T_A > T_B$

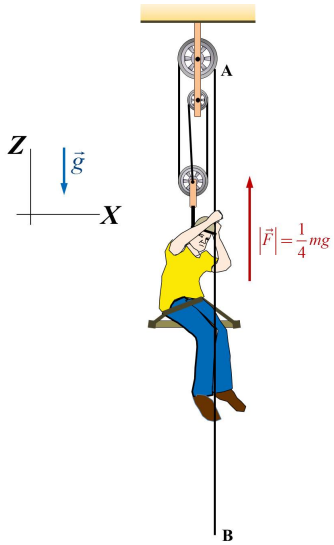
E) $F > T_B > T_A$

*(ETSIAE, octubre 2011)*

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

## CUESTIÓN C4.5.

Un obrero de masa $m$ necesita realizar trabajos de reparación en la fachada exterior de un edificio. Para elevarse del suelo utiliza un sistema mecánico conocido como "silla de contramaestre". El diseño del aparato permite al operario elevarse ejerciendo la fuerza necesaria sobre la cuerda $AB$ que cuelga. Dicha fuerza la puede realizar el propio operario, como en la figura, o un compañero situado en el suelo.




Despreciando la masa de la silla, las cuerdas y las poleas, así como cualquier tipo de rozamiento, para un valor de la fuerza aplicada $\vec{F}$ igual a 1/4 del peso del trabajador, se puede decir que:

A) El operararario solo puede subir si esta fuerza la realiza él mismo, tirando de la cuerda.

B) El operario solo puede subir si quien tira de la cuerda es el compañero, que está en el suelo.

C) El operario subirá en ambos casos con velocidad constante.

D) El operario subirá en ambos casos con aceleración constante.

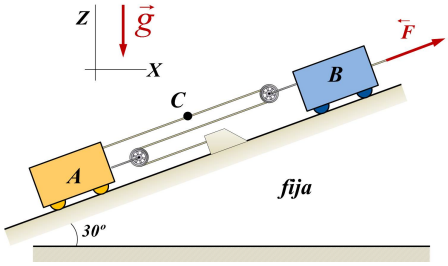
E) El operario no subirá en ningún caso, sea quien sea quien realice la fuerza. Es demasiado pequeña.

*(ETSIAE, autoevaluación 4-G5, noviembre 2014 )*

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

## CUESTIÓN C4.6.

Los dos bloques de la figura, de la misma masa $m_A = m_B = m$, están ascendiendo por un plano inclinado fijo, con aceleración constante, bajo la acción de una fuerza $\vec{F}$ de magnitud $|\vec{F}| = (5/4)\,mg$.




Si todas las cuerdas y poleas son ideales y el rozamiento despreciable, respecto a la magnitud de la tensión en la cuerda en el punto $C$, se puede decir que:

A) $T_C = (1/13)\,mg$

B) $T_C = (3/13)\,mg$

C) $T_C = (6/13)\,mg$

D) $T_C = (9/13)\,mg$

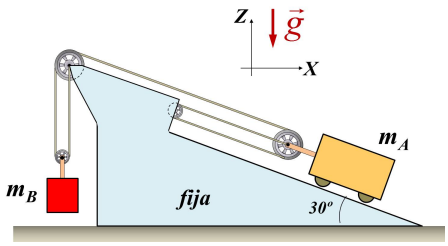
E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

*(ETSIAE, autoevaluación 4-G5, noviembre 2014)*

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

## CUESTIÓN C4.7.

Los dos bloques de la figura tienen masa $m_A = m$, y $m_B = (1/4)\,m$, las poleas y las cuerdas son ideales y el rozamiento despreciable.
Inicialmente el sistema se mantiene en reposo mediante topes -no dibujados-, sobre la cuña de ángulo de inclinación mostrado. Se retiran los topes y el sistema se pone en movimiento.




Sea $\ell$ la distancia recorrida por el bloque $A$ transcurrido un tiempo $t^*$ medido a partir del instante inicial. Respecto a la velocidad de $B$ en $t^*$, $\vec{v}_B(t^*)$, se puede decir que:

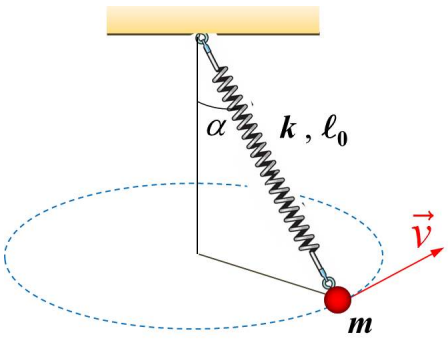
A) $\vec{v}_B(t^*) = \vec{0}$
B) $\vec{v}_B(t^*) = (3/5)\sqrt{\ell g}\,\vec{k}$
C) $\vec{v}_B(t^*) = (1/5)\sqrt{6\ell g}\,\vec{k}$
D) $\vec{v}_B(t^*) = -(3/5)\sqrt{\ell g}\,\vec{k}$
E) $\vec{v}_B(t^*) = -(1/5)\sqrt{6\ell g}\,\vec{k}$

*(ETSIAE, autoevaluación 4-G5, noviembre 2015)*

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

## CUESTIÓN C4.8.

En la figura se muestra un péndulo cónico construido con una partícula de masa $m$ y un muelle ideal de longitud natural $\ell_0$ y constante elástica $k = (mg/\ell_0)$.
En la posición indicada se observa que la trayectoria de la partícula está contenida en un plano horizontal y que el ángulo $\alpha$ que forma el muelle con la vertical es tal que $\operatorname{sen}\alpha = 3/5$.




Respecto al módulo $|\vec{v}|$ de la velocidad lineal de giro de $m$ en ese instante, se puede decir que:

A) $|\vec{v}| = \frac{9}{2}\sqrt{\frac{g\ell_0}{5}}$

B) $|\vec{v}| = \frac{9}{4}\sqrt{\frac{g\ell_0}{5}}$

C) $|\vec{v}| = \frac{9}{4}\sqrt{g\ell_0}$

D) $|\vec{v}| = \frac{9}{2}\sqrt{g\ell_0}$

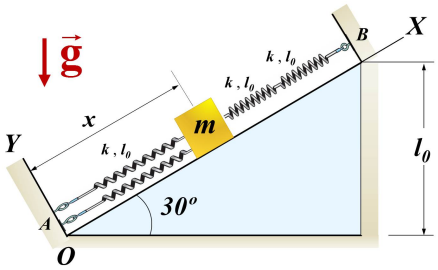
E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

*(ETSIAE, autoevaluación 4-G5, octubre 2015)*

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

## CUESTIÓN C4.9.

Un bloque de masa $m$ y tamaño despreciable puede deslizar sin rozamiento sobre una cuña cuyo ángulo de inclinación respecto a la horizontal es $\alpha = 30^o$, -véase figura-. El bloque, que inicialmente se encuentra en $x(0) = l_0$ sujeto por unos topes, está unido a los puntos $A$ y $B$ por cuatro muelles ideales idénticos, de constante elástica $k = mg/l_0$ y longitud natural $l_0$, dos de ellos conectados en "serie" y dos en "paralelo", como se indica.




Si $x_{min}$ es la distancia mínima entre el punto $A$ y el bloque tras soltar los topes, se puede afirmar que:

A) $x_{min} = (4/5)l_0$

B) $x_{min} = (3/5)l_0$

C) $x_{min} = (2/5)l_0$

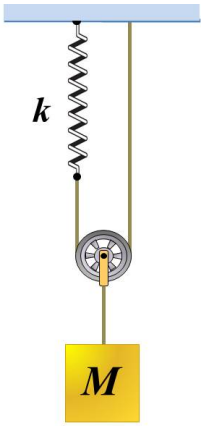
D) $x_{min} = (1/5)l_0$

E) Ninguna de las resuestas anteriores es correcta.

*(ETSIAE, octubre 2013)*

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

## CUESTIÓN C4.10.




El bloque de la figura tiene masa $M$, los hilos y la polea son ideales y el muelle -también ideal- tiene una constante elástica de valor $k = (Mg/5\ell_0)$ y una longitud natural $\ell_0$. El sistema está inicialmente en equilibrio y el rozamiento se supone despreciable.

En estas condiciones, se desplaza el bloque una distancia $\ell_0$ hacia abajo y se suelta. Si $\delta_{\text{máx}}$ es el estiramiento máximo que alcanza el muelle tras soltarlo, se puede afirmar que:

A) $\delta_{\text{máx}} = (11/2)\ell_0$

B) $\delta_{\text{máx}} = (9/2)\ell_0$

C) $\delta_{\text{máx}} = (7/2)\ell_0$

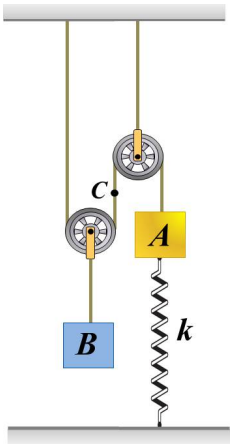
D) $\delta_{\text{máx}} = (5/2)\ell_0$

E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

*(ETSIAE, autoevaluación 4-G5, noviembre 2014)*

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

## CUESTIÓN C4.11.




En el sistema de la figura $m_A = m$ y $m_B = 3m$; el muelle, de longitud natural $\ell_0$, los hilos y las poleas son ideales. Todo el sistema está dispuesto en un plano vertical, inicialmente en equilibrio. En estas condiciones se desplaza el bloque $A$ hacia arriba una cantidad $\ell_0$ y se suelta.

Si la constante elástica del muelle es $k = (mg/\ell_0)$, la máxima tensión, $T_{\text{máx}}(C)$, que debe soportar el hilo en el punto $C$ indicado, vale:

A) $T_{\text{máx}}(C) = (15/14)mg$

B) $T_{\text{máx}}(C) = (21/14)mg$

C) $T_{\text{máx}}(C) = (27/14)mg$

D) $T_{\text{máx}}(C) = (33/14)mg$

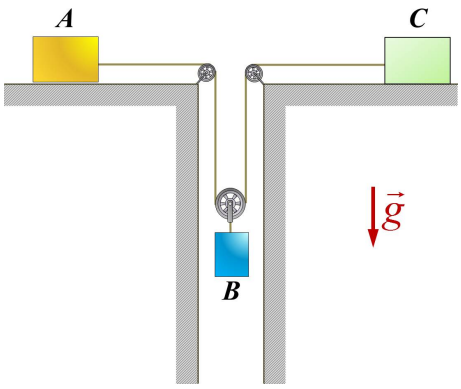
E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

*(ETSIAE, autoevaluación 4-G5, noviembre 2014)*

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

## CUESTIÓN C4.12.

En el sistema de la figura los bloques $A$ y $B$ tienen masas $m_A = m$ y $m_B = 4m$ y están en movimiento; las poleas y la cuerdas son ideales, de masa despreciable. Entre los bloques $A$ y $C$ y la superficie horizontal en la que apoyan existe rozamiento con coeficientes $\mu_e = 1/2$ (estático) y $\mu_d = 2/5$ (dinámico).




Si $m_{C,min}$ es la masa mínima de $C$ que permite que este bloque esté en reposo respecto a la superficie en la que apoya3s$^{o}$ 3:

A) $m_{C,min} = (9/5)m$

B) $m_{C,min} = (14/5)m$

C) $m_{C,min} = (11/5)m$

D) $m_{C,min} = (12/5)m$

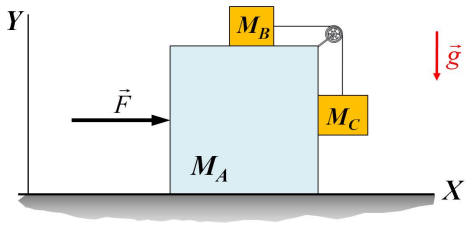
E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

*(ETSIAE, octubre 2013)*

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

## CUESTIÓN C4.13.

Un bloque de masa $M_A = 4m$ descansa sobre un suelo horizontal y está en contacto con otros dos bloques de la misma masa $M_B = M_C = m$, como se muestra en la figura.




Entre el bloque $A$ y el suelo en el que apoya, el rozamiento es despreciable; entre el bloque $A$ y los bloques $B$ y $C$ existe rozamiento con coeficientes estático $\mu_e = 1/2$ y dinámico $\mu_d = 1/3$.

Suponiendo que tanto el hilo como la polea son ideales, ¿qué fuerza $\vec{F}$ se necesita aplicar al bloque $A$ para impedir que se éste se mueva?

A) $\vec{F} = (1/3)\, mg\, \vec{\imath}$

B) $\vec{F} = (2/3)\, mg\, \vec{\imath}$

C) $\vec{F} = (3/4)\, mg\, \vec{\imath}$

D) $\vec{F} = (4/5)\, mg\, \vec{\imath}$

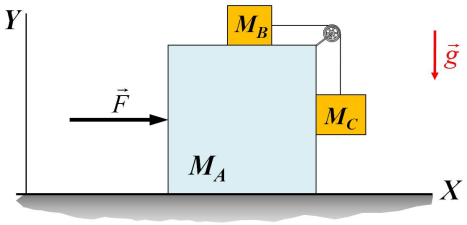
E) $\vec{F} = \vec{0}$.

*(EUITA, febrero 1988)*

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

## CUESTIÓN C4.14.

Un bloque de masa $M_A = 4m$ descansa sobre un suelo horizontal y está en contacto con otros dos bloques de la misma masa $M_B = M_C = m$, como se muestra en la figura.




Entre el bloque $A$ y el suelo en el que apoya, el rozamiento es despreciable; entre el bloque $A$ y los bloques $B$ y $C$ existe rozamiento con coeficientes estático $\mu_e = 1/2$ y dinámico $\mu_d = 1/3$.

Suponiendo que tanto el hilo como la polea son ideales, ¿qué fuerza mínima $\vec{F}_{\text{mín}}$ se puede aplicar al bloque $A$, para que los bloques $B$ y $C$ permanezcan en reposo respecto a él?

A) $\vec{F}_{\text{mín}} = 5\,mg\,\vec{\imath}$

B) $\vec{F}_{\text{mín}} = 4\,mg\,\vec{\imath}$

C) $\vec{F}_{\text{mín}} = 2\,mg\,\vec{\imath}$

D) $\vec{F}_{\text{mín}} = 3\,mg\,\vec{\imath}$

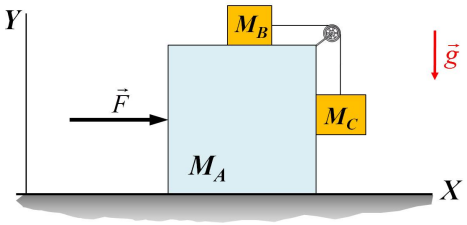
E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

*(EUITA, febrero 1988)*

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

## CUESTIÓN C4.15.

Un bloque de masa $M_A = 4m$ descansa sobre un suelo horizontal y está en contacto con otros dos bloques de la misma masa $M_B = M_C = m$, como se muestra en la figura.




Entre el bloque $A$ y el suelo en el que apoya, el rozamiento es despreciable; entre el bloque $A$ y los bloques $B$ y $C$ existe rozamiento con coeficientes estático $\mu_e = 1/2$ y dinámico $\mu_d = 1/3$.

Suponiendo que tanto el hilo como la polea son ideales, ¿qué fuerza máxima $\vec{F}_{\text{máx}}$ se puede aplicar al bloque $A$, para que los bloques $B$ y $C$ permanezcan en reposo respecto a él?

A) $\vec{F}_{\text{máx}} = 6\,mg\,\vec{\imath}$

B) $\vec{F}_{\text{máx}} = 9\,mg\,\vec{\imath}$

C) $\vec{F}_{\text{máx}} = 12\,mg\,\vec{\imath}$

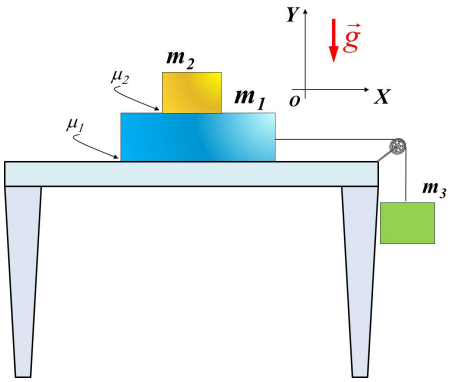
D) $\vec{F}_{\text{máx}} = 18\,mg\,\vec{\imath}$

E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

*(EUITA, febrero 1988)*

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

## CUESTIÓN C4.16.




Dos bloques de masas $m_1 = 2m$ y $m_2 = m/2$ se encuentran apilados sobre una mesa horizontal -véase figura-. El bloque $m_1$, a su vez, está conectado mediante un hilo ideal con otro bloque de masa $m_3$ que cuelga de la mesa a través de una polea también ideal e inicialmente bloqueada.

Existe rozamiento en las superficies en contacto, caracterizado por sendos coeficientes, estático $\mu_1 = 0.4$ y dinámico $\mu_{1d} = 0.2$ para el bloque $m_1$ y la mesa; y por coeficientes $\mu_2 = 0.5$ y $\mu_{2d} = 0.3$ entre los bloques $m_1$ y $m_2$.

Si se desbloquea la polea, los valores de $m_3$ que permiten que todo el conjunto se mueva solidariamente son:

A) $m \leq m_3 \leq (7/2)m$

B) $m \leq m_3 \leq (9/2)m$

C) $2m \leq m_3 \leq (7/2)m$

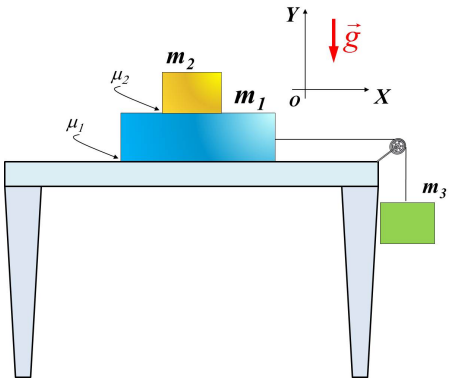
D) $2m \leq m_3 \leq (9/2)m$

E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

*(ETSIAE, autoevaluación 4-G5, noviembre 2014)*

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

## CUESTIÓN C4.17.




Dos bloques de masas $m_1 = 2m$ y $m_2 = m/2$ se encuentran apilados sobre una mesa horizontal -véase figura-. El bloque $m_1$, a su vez, está conectado mediante un hilo ideal con otro bloque de masa $m_3 = 5m$ que cuelga de la mesa a través de una polea también ideal e inicialmente bloqueada.

Existe rozamiento en las superficies en contacto, caracterizado por sendos coeficientes, estático $\mu_1 = 0.4$ y dinámico $\mu_{1d} = 0.2$ para el bloque $m_1$ y la mesa; y por coeficientes $\mu_2 = 0.5$ y $\mu_{2d} = 0.3$ entre los bloques $m_1$ y $m_2$.

Si se desbloquea la polea, la tensión $T$ en el hilo vale:

A) $T = (24/53)mg$

B) $T = (53/24)mg$

C) $T = (53/28)mg$

D) $T = (28/53)mg$

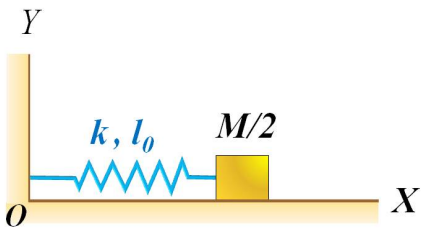
E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

*(ETSIAE, autoevaluación 4-G5, noviembre 2014)*

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

## CUESTIÓN C4.18.

En la figura se representa un bloque de masa $m = M/2$ que apoya sobre una mesa horizontal, y está unido mediante un muelle de constante elástica $k$ y longitud natural $l_0$ a una pared vertical.




Entre la mesa y el bloque existe rozamiento con coeficiente $\mu = kl_0/Mg$ (estático y dinámico).

Se suelta el bloque con velocidad nula a una distancia $d = 2l_0$ de la pared. La separación mínima $x_{min}$ del bloque a la pared en su movimiento posterior vale:

A) $x_{min} = l_0$

B) $x_{min} = 3l_0/2$

C) $x_{min} = l_0/4$

D) $x_{min} = l_0/2$

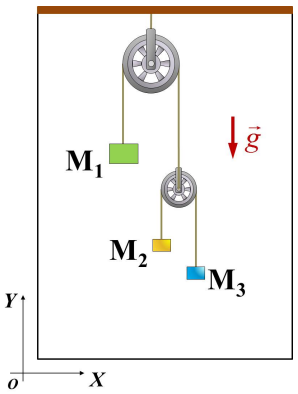
E) $x_{min} = 2l_0$, pues el bloque no se mueve.

*(ETSIAE, julio, 2012)*

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

## CUESTIÓN C4.19.

Del techo del ascensor de la figura cuelga una máquina de Atwood doble formada por tres masas de valores $M_1 = 4m$, $M_2 = m$ y $M_3 = 2m$ unidas mediante dos cuerdas ideales (inextensibles y sin masa) y dos poleas también ideales (de masa despreciable y sin rozamiento).




Inicialmente el ascensor está en reposo respecto al triedro inercial $OXY$ mostrado y las poleas bloqueadas.

Mientras el ascensor se mantiene en reposo se desbloquean las poleas. Si $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ y $\vec{a}_3$ son las aceleraciones de las masas en el movimiento posterior, se puede decir que:

A) $\vec{a}_1 = -(1/5)\, g\, \vec{\jmath}$ , $\vec{a}_2 = (3/5)\, g\, \vec{\jmath}$ , $\vec{a}_3 = -(1/5)\, g\, \vec{\jmath}$

B) $\vec{a}_1 = -(1/5)\, g\, \vec{\jmath}$ , $\vec{a}_2 = (2/5)\, g\, \vec{\jmath}$ , $\vec{a}_3 = -(1/5)\, g\, \vec{\jmath}$

C) $\vec{a}_1 = -(3/5)\, g\, \vec{\jmath}$ , $\vec{a}_2 = (2/5)\, g\, \vec{\jmath}$ , $\vec{a}_3 = (1/5)\, g\, \vec{\jmath}$

D) $\vec{a}_1 = -(3/5)\, g\, \vec{\jmath}$ , $\vec{a}_2 = (3/5)\, g\, \vec{\jmath}$ , $\vec{a}_3 = (1/5)\, g\, \vec{\jmath}$

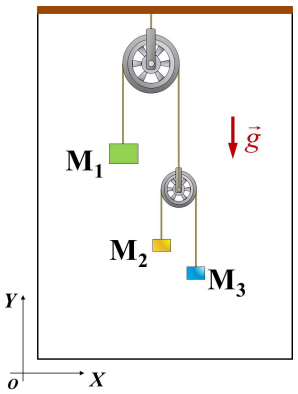
E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

*(ETSIAE, autoevaluación 4-G5, noviembre 2015)*

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

## CUESTIÓN C4.20.

Del techo del ascensor de la figura cuelga una máquina de Atwood doble formada por tres masas de valores $M_1 = 4m$, $M_2 = m$ y $M_3 = 2m$ unidas mediante dos cuerdas ideales (inextensibles y sin masa) y dos poleas también ideales (de masa despreciable y sin rozamiento).




Inicialmente el ascensor está en reposo respecto al triedro inercial $OXY$ mostrado y las poleas bloqueadas.

Si se desbloquean las poleas en un momento en el que el ascensor, bajo la acción de una fuerza $\vec{F}_0$ comunicada por su grupo tractor, está ascendiendo con una velocidad de módulo constante $v_0$, se puede decir que el módulo de la tensión $T_1$ en la cuerda que sujeta a $M_1$ en ese instante vale:

A) $T_1 = (16/5)mg + |\vec{F}_0|$

B) $T_1 = (16/5)mg$

C) $T_1 = (32/5)mg - |\vec{F}_0|$

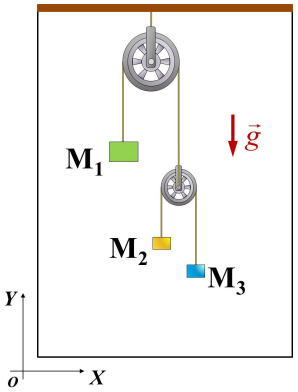
D) $T_1 = (32/5)mg$

E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

*(ETSIAE, autoevaluación 4-G5, noviembre 2015)*

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

## CUESTIÓN C4.21.




Del techo del ascensor de la figura cuelga una máquina de Atwood doble formada por tres masas de valores $M_1 = 4m$, $M_2 = m$ y $M_3 = 2m$ unidas mediante dos cuerdas ideales (inextensibles y sin masa) y dos poleas también ideales (de masa despreciable y sin rozamiento).

Inicialmente el ascensor está en reposo respecto al triedro inercial $OXY$ mostrado y las poleas bloqueadas.

Supóngase que se desbloquean las poleas en un momento en el que el ascensor está frenando, mientras desciende, con una aceleración $\vec{a}_0$ constante en módulo, de valor $|\vec{a}_0| = g/5$. Respecto a las aceleraciones $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ y $\vec{a}_3$ de las masas en el triedro inercial $OXY$, se puede decir entonces que:

A) $\vec{a}_1 = -(2/5)\,g\,\vec{\jmath}$ , $\vec{a}_2 = -(4/5)\,g\,\vec{\jmath}$ , $\vec{a}_3 = -(3/10)\,g\,\vec{\jmath}$

B) $\vec{a}_1 = -(2/5)\,g\,\vec{\jmath}$ , $\vec{a}_2 = (2/5)\,g\,\vec{\jmath}$ , $\vec{a}_3 = -(1/10)\,g\,\vec{\jmath}$

C) $\vec{a}_1 = \vec{0}$ , $\vec{a}_2 = (4/5)\,g\,\vec{\jmath}$ , $\vec{a}_3 = \vec{0}$

D) $\vec{a}_1 = \vec{0}$ , $\vec{a}_2 = -(2/5)\,g\,\vec{\jmath}$ , $\vec{a}_3 = (3/10)\,g\,\vec{\jmath}$

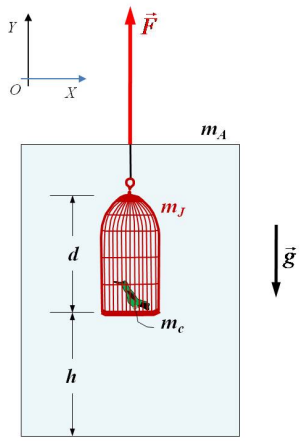
E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

*(ETSIAE, autoevaluación 4-G5, noviembre 2015)*

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

## CUESTIÓN C4.22.

Un ascensor de masa $m_A$ está siendo acelerado hacia arriba mediante una fuerza constante $\vec{F}$. El ascensor tiene colgada de su techo una jaula hermética de cristal de masa $m_J$ y altura $d$, mediante un hilo ideal inextensible; la base de la jaula dista inicialmente una distancia $h$, $(h < d)$, del suelo del ascensor.




En el interior de la jaula, un colibrí de masa $m_c$, en reposo respecto a la jaula, descansa apoyado en su base, como se muestra en la figura. Hay aire suficiente dentro de la jaula como para que el pájaro no experimente ningún inconveniente durante el tiempo que dura el experimento.

Sabiendo que $|\vec{F}| > (m_A + m_J + m_c)g$, la fuerza $\vec{N}$ que ejerce la base de la jaula sobre el pájaro vale:

A) $\vec{N} = F\left(\frac{m_J+m_C}{m_A+m_J+m_C}\right)\vec{\jmath}$

B) $\vec{N} = F\left(\frac{m_C}{m_A+m_J+m_C}\right)\vec{\jmath}$

C) $\vec{N} = F\left(\frac{m_A}{m_A+m_J+m_C}\right)\vec{\jmath}$

D) $\vec{N} = F\left(\frac{m_J}{m_A+m_J+m_J}\right)\vec{\jmath}$

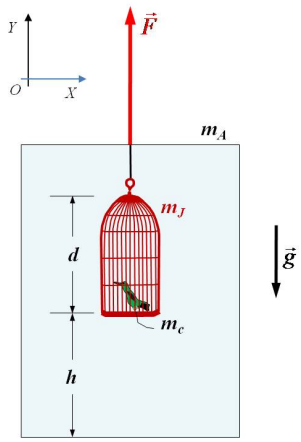
E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

*(ETSIAE, autoevaluación 4-G5, noviembre 2014)*

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

## CUESTIÓN C4.23.

Un ascensor de masa $m_A$ está siendo acelerado hacia arriba mediante una fuerza constante $\vec{F}$, $|\vec{F}| > (m_A + m_J + m_c)\, g$. El ascensor tiene colgada de su techo una jaula hermética de cristal de masa $m_J$ y altura $d$, mediante un hilo ideal inextensible; la base de la jaula dista inicialmente una distancia $h$, $(h < d)$, del suelo del ascensor.




En el interior de la jaula, un colibrí de masa $m_c$, en reposo respecto a la jaula, descansa apoyado en su base, como se muestra en la figura. Hay aire suficiente dentro de la jaula como para que el pájaro no experimente ningún inconveniente durante el tiempo que dura el experimento.

En un momento dado, se rompe la cuerda. Al comprobar la falta de apoyo en sus patas y de manera instintiva, el colibrí comienza a aletear rápidamente generando con ello una fuerza de sustentación $\vec{L}$ que le permite mantenerse a la misma altura $h$ que tenía respecto al suelo del ascensor antes de la rotura del hilo. Se puede decir que:

A) La aceleración $\vec{a}_A$ del ascensor respecto a tierra vale:

$$\vec{a}_A = [(F/m_A) + g]\ \vec{\jmath}$$

B) La aceleración $\vec{a}\,'_J$ de la jaula relativa al ascensor es:

$$\vec{a}\,'_J = -(F/m_A)\,[1 - m_C/m_J]\ \vec{\jmath}$$

C) La fuerza de sustentación que produce el aire sobre el colibrí vale:

$$\vec{L} = F\,(\ m_A/m_C)\ \vec{\jmath}$$

D) El tiempo $t^*$ que tarda la jaula en chocar con el suelo del ascensor es:

$$t^* = \sqrt{2m_A h/\left(1 + \tfrac{m_C}{m_J}\right) F}$$

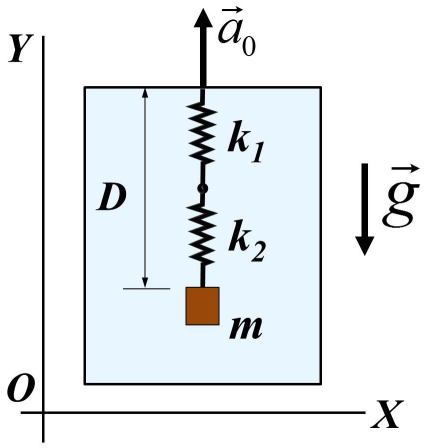
E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

*(ETSIAE, autoevaluación 4-G5, noviembre 2014)*

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

## CUESTIÓN C4.24.

Un bloque de masa $m$ está unido al techo de un ascensor mediante dos muelles ideales de masa nula, longitud natural $l_0$ y constantes elásticas $k_1 = k$ y $k_2 = k/2$, véase figura. Respecto a un sistema inercial $S$ fijo al suelo, el ascensor asciende verticalmente con aceleración constante $|\vec{a}_0| = (1/3)\, g$.




Respecto a un sistema móvil ligado al ascensor, el bloque está en reposo, a una distancia $D$ del techo. Se puede afirmar que:

A) $D = (3mg/k) + 2l_0$

B) $D = (2mg/k) + 2l_0$

C) $D = (4mg/k) + 2l_0$

D) $D = (5mg/k) + 2l_0$

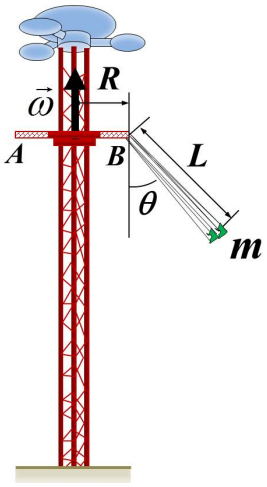
E) Ninguna de las anteriores es correcta.

*(ETSIAE, octubre 2013)*

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

## CUESTIÓN C4.25.

La atracción conocida como Star Flyer del Parque de Atracciones de Madrid es una gran torre central a lo largo de la cual se traslada, girando, un carrusel $AB$ de radio $R$ del que cuelgan un conjunto de sillas voladoras -doce sillas dobles concretamente- ancladas mediante cadenas de longitud $L$ -véase figura-.




En funcionamiento, y a medida que el carrusel sube, las cadenas se van separando de la vertical un ángulo $\theta$, que puede ser considerable en la posición más alta del carrusel -a unos ochenta metros sobre el suelo-. Para regocijo de los pasajeros, es habitual que el carrusel se mantenga algún tiempo en esta posición, girando con velocidad angular constante $\vec{\omega}$.

Despreciando la masa de las cadenas, la presencia del viento, y tratando al conjunto silla-pasajero como si fuera una única partícula de masa $m$, un **observador inercial** en el suelo, junto a la atracción, puede decir que durante el periodo en el que $\vec{\omega}$ se mantiene constante:

A) El ángulo $\theta$ que observa depende del valor de la masa del pasajero.

B) El ángulo $\theta$ sería cero si no existiera fuerza centrífuga sobre el pasajero.

C) La resultante de las fuerzas aplicadas al pasajero es nula.

D) El conjunto silla-pasajero describe una circunferencia y en ella la fuerza centrífuga equilibra a la componente paralela al suelo de la tensión en las cadenas.

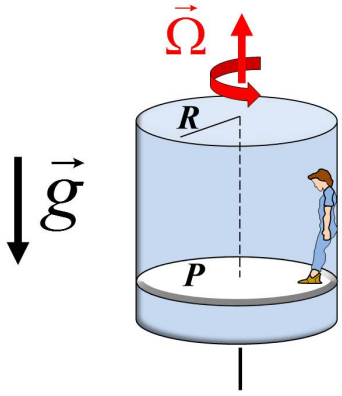
E) La componente paralela al suelo de la tensión en las cadenas es la única fuerza responsable de que el conjunto describa una circunferencia.

*(ETSIAE, autoevaluación 4-G5, noviembre 2015)*

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

## CUESTIÓN C4.26.

En la atracción mostrada en la figura, una persona -cuyo tamaño puede despreciarse-, se encuentra apoyada en la pared interior de un cilindro de radio $R$ que rota con cierta velocidad angular $\vec{\Omega}$ respecto a un sistema inercial $S$ fijo a tierra.




El piso del cilindro es móvil, de tal forma que después de cierto tiempo aquél se baja. Sin embargo, el pasajero no se cae. Para un observador en $S$, la razón es que:

A) No existe fuerza resultante sobre la persona.

B) No hay fuerza resultante en la dirección vertical.

C) No hay fuerza resultante en la dirección horizontal.

D) El peso de la persona y la fuerza centrífuga son iguales en módulo.

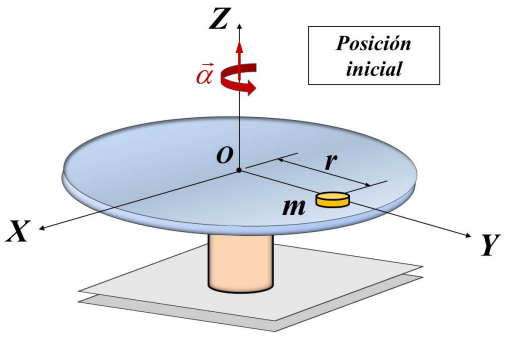
E) El peso de la persona es inferior a la fuerza de rozamiento con la pared.

*(ETSIAE, octubre 2011)*

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

## CUESTIÓN C4.27.

Sobre una plataforma circular plana, horizontal y en reposo, descansa una pequeña moneda de masa $m$. Con respecto al triedro fijo indicado en la figura, la moneda se encuentra inicialmente sobre el eje $Y$, a una distancia $r$ del centro $O$. Entre la plataforma y la partícula existe rozamiento con coeficiente $\mu$ (estático y dinámico).




En un cierto instante, que puede tomarse como inicial, la plataforma comienza a girar en torno a un eje perpendicular a su plano, acelerando con una aceleración angular constante:

$$\vec{\alpha} = \frac{g}{8\pi r}\,\vec{k}$$

Se observa que la moneda se desplaza solidariamente con la plataforma hasta que ésta ha girado una vuelta completa; a partir de ese instante comienza a moverse respecto a ella.

Para que tal circunstancia suceda, el valor mínimo del coeficientende rozamiento debe ser:

A) $\mu = \frac{1}{8\pi}\,(1 + 16\pi^2)$

B) $\mu = \frac{1}{4\pi}\,(1 + 16\pi^2)$

C) $\mu = \frac{1}{8\pi}\,\sqrt{1 + 16\pi^2}$

D) $\mu = \frac{1}{4\pi}\,\sqrt{1 + 16\pi^2}$

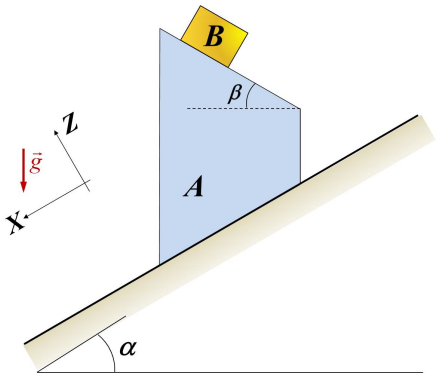
E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

*(EUITA, junio 1993)*

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

## CUESTIÓN C4.28.

El bloque $B$ de masa $m_B = m/2$ descansa sobre la superficie superior de una cuña de masa $m$ -véase figura-. Todo el conjunto se mantiene inicialmente en reposo bajo la acción de unos topes no dibujados.




Suponiendo que el rozamiento entre las superficies en contacto es despreciable y considerando que $\alpha = \beta = 30^{\circ}$, la aceleración del bloque $B$, $\vec{a}_B$, respecto al sistema inercial $OXZ$ mostrado, cuando se quitan los topes vale:

A) $\vec{a}_B = (1/22)\,[5\sqrt{3}\,\vec{\imath} - 9\,\vec{k}]\,g$

B) $\vec{a}_B = (1/22)\,[9\sqrt{3}\,\vec{\imath} - 5\,\vec{k}]\,g$

C) $\vec{a}_B = (1/22)\,[5\,\vec{\imath} - 9\sqrt{3}\,\vec{k}]\,g$

D) $\vec{a}_B = (1/22)\,[9\,\vec{\imath} - 5\sqrt{3}\,\vec{k}]\,g$

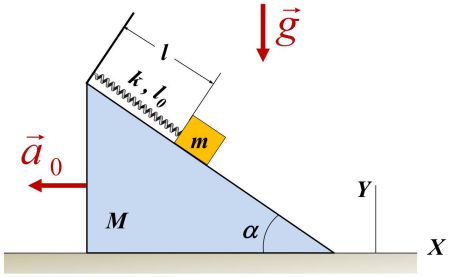
E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

*(ETSIAE, autoevaluación 4-G5, noviembre 2014)*

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

## CUESTIÓN C4.29.

Un bloque de masa $M$ en forma de cuña, con ángulo de inclinación $\alpha$, ( $\cos\alpha = 4/5$), se mueve sin rozamiento sobre una superficie horizontal con aceleración $\vec{a}_0 = -(1/2)g\,\vec{\imath}$. Una partícula de masa $m$ está sujeta al vértice superior de la cuña por un muelle de constante elástica $k$ y longitud natural $\ell_0$ -véase figura-.




Entre la cuña y la partícula existe rozamiento, con coeficientes estático y dinámico $\mu_e = 1/2$ y $\mu_d = 1/4$, respectivamente.

Si $\ell_{max} = \ell_0 + A\,(mg/k)$ y $\ell_{min} = \ell_0 + B\,(mg/k)$ son los valores máximo y mínimo de $\ell$, entre los que puede situarse la partícula, de forma que ésta permanezca en reposo relativo a la cuña, se puede decir que:

A) $A = (5/4)$ y $B = (1/4)$

B) $A = (3/2)$ y $B = (3/4)$

C) $A = (4/3)$ y $B = (1/2)$

D) $A = (5/4)$ y $B = (3/4)$

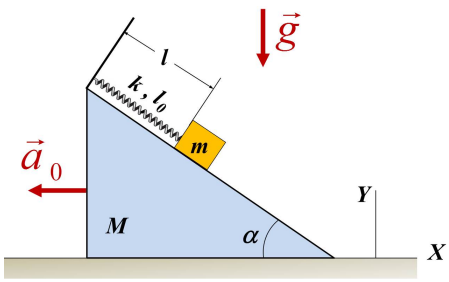
E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

*(ETSIAE, autoevaluación 4-G5, noviembre 2014)*

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

## CUESTIÓN C4.30.

Un bloque de masa $M$ en forma de cuña, con ángulo de inclinación $\alpha$, ( $\cos\alpha = 4/5$), se mueve sin rozamiento sobre una superficie horizontal con aceleración $\vec{a}_0 = -(1/2)g\,\vec{\imath}$. Una partícula de masa $m$ está sujeta al vértice superior de la cuña por un muelle de constante elástica $k$ y longitud natural $\ell_0$ -véase figura-.




Entre la cuña y la partícula existe rozamiento, con coeficientes estático y dinámico $\mu_e = 1/2$ y $\mu_d = 1/4$, respectivamente.

Si la partícula se deposita sobre el plano de forma que $\ell = \ell_0$, se puede decir que el estiramiento máximo $\delta_{\text{máx}}$ que alcanzará el muelle es:

A) $\delta_{\text{máx}} = (3/4)(mg/k)$

B) $\delta_{\text{máx}} = (7/8)(mg/k)$

C) $\delta_{\text{máx}} = (7/4)(mg/k)$

D) $\delta_{\text{máx}} = (5/4)(mg/k)$

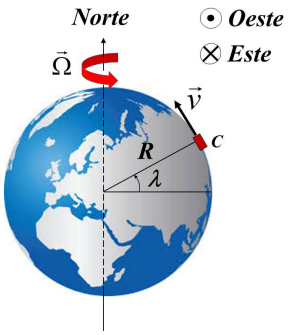
E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

*(ETSIAE, autoevaluación 4-G5, noviembre 2014)*

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

## CUESTIÓN C4.31.

Un coche $C$ se mueve por una carretera que discurre a lo largo de un meridiano terrestre, dirigiéndose hacia el norte con velocidad constante $\vec{v}$, relativa a la Tierra, la cual gira con la velocidad angular $\vec{\Omega}$ indicada.




Si en el instante mostrado la latitud $\lambda$ del coche es positiva (hemisferio norte), ¿en que dirección actúa la fuerza de rozamiento sobre las ruedas del coche?

A) Nordeste.

B) Noroeste.

C) Sureste.

D) Suroeste

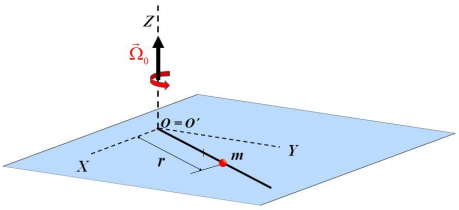
E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

*(ETSIAE, autoevaluación 4-G5, noviembre 2014)*

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

## CUESTIÓN C4.32.

En la figura se muestra una varilla horizontal de masa despreciable que se hace girar con velocidad angular constante $\vec{\Omega}_0 = \Omega_0 \vec{k}$, alrededor del eje vertical $Z$ de un triedro inercial $S(O, X, Y, Z)$.




Un abalorio de masa $m$, inicialmente en reposo relativo a la varilla, puede moverse sin rozamiento a lo largo de ésta. Sea $S'(O'; X', Y', Z')$ un triedro móvil respecto a $S$, con $O = O'$, $Z = Z'$, y definido de tal forma que el eje $X'$ coincide en todo instante con la varilla. Se puede decir que:

A) La energía cinética de la partícula en $S'$ permanece constante.

B) El momento con respecto a $O'$ de la fuerzas que actúan sobre $m$ en $S'$ es nulo.

C) La energía cinética de la partícula en $S$ permanece constante.

D) El momento con respecto a $O$ de la fuerzas que actúan sobre $m$ en $S$ es nulo.

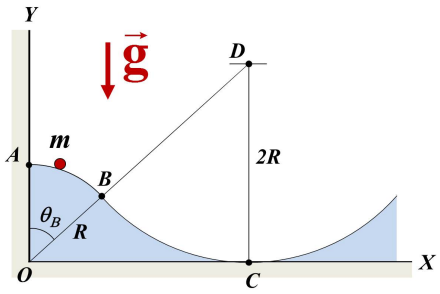
E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

*(ETSIAE, octubre 2012)*

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

## CUESTIÓN C4.33.

Una partícula de masa $m$ puede moverse por la superficie de un pista de hielo cuyo perfil $ABC$ -constituido por sendos arcos de circunferencia de radios $R$ y $2R$, tangentes en $B$- se muestra en la figura.




La partícula parte del reposo desde $A$ y en todo momento se encuentra en contacto con la pista.

Si $|\vec{L}_D^{(C)}|$ y $|\vec{L}_D^{(B)}|$ son los módulos de los momentos cinéticos de la partícula respecto al punto $D$ mostrado, cuando pasa por los puntos $B$ y $C$, puede afirmarse que el cociente $|\vec{L}_D^{(C)}|/|\vec{L}_D^{(B)}| \equiv \gamma$, vale:

A) $\gamma = 2/\sqrt{3}$

B) $\gamma = \sqrt{2}$

C) $\gamma = \sqrt{3}$

D) $\gamma = \sqrt{3/2}$

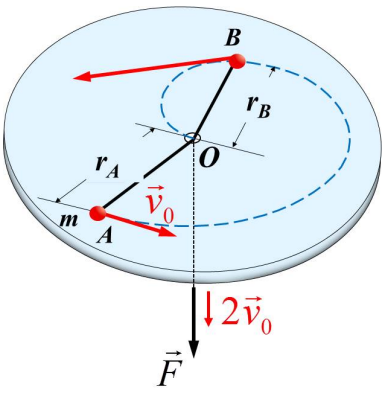
E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

*(ETSIAE, autoevaluación 4-G5, noviembre 2015)*

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

## CUESTIÓN C4.34.

La partícula de masa $m$ que se muestra en la figura está sujeta a un hilo ideal, inextensible y sin masa, el cual pasa a través de un orificio $O$ practicado en una mesa horizontal.




Cuando la partícula está en $A$ se mueve describiendo una circunferencia de radio $r_A$ y el módulo de su velocidad es $|\vec{v}_A| = v_0$. En ese instante se aplica una fuerza $\vec{F}$ hacia abajo en el extremo del hilo que cuelga, haciendo que éste baje con una velocidad constante de magnitud $2v_0$.

Si el rozamiento es despreciable, ¿cuál es el trabajo $W_{A-B}$ realizado por la fuerza para acortar la distancia radial del hilo desde $r_A$ hasta $r_B = r_A/2$?

A) $W_{A-B} = (7/2)\, Mv_0^2$

B) $W_{A-B} = (5/2)\, Mv_0^2$

C) $W_{A-B} = (9/2)\, Mv_0^2$

D) $W_{A-B} = (3/2)\, Mv_0^2$

E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

*(ETSIAE, autoevaluación 4-G5, noviembre 2014)*

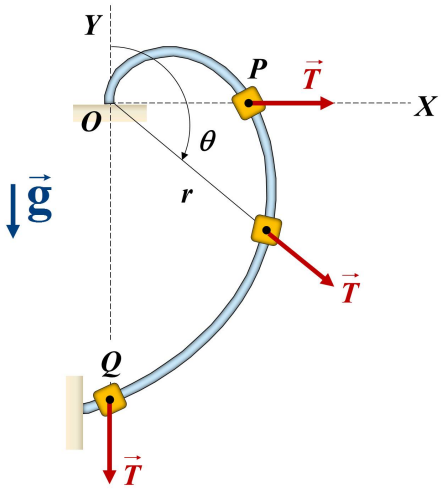
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

## CUESTIÓN C4.35.

Un pasador de masa $m$ desliza a lo largo de un tubo fijo y liso, con forma de espiral, contenido en el plano vertical de la figura. La forma del tubo viene definida, en coordenadas polares, por

$$r(\theta) = \lambda\theta$$

donde $\lambda$ es una constante positiva.




El pasador es liberado desde el reposo en el punto $P$ del tubo y desciende bajo la acción de una fuerza central radial de módulo constante $|\vec{T}| = mg/4$.

Si $v_Q$ es la magnitud de la velocidad del pasador cuando alcanza el punto $Q$, se puede afirmar que:

A) $v_Q = (3/2)\sqrt{\lambda\pi g}$

B) $v_Q = (5/2)\sqrt{\lambda\pi g}$

C) $v_Q = (7/2)\sqrt{\lambda\pi g}$

D) $v_Q = (9/2)\sqrt{\lambda\pi g}$

E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

*(ETSIAE, autoevaluación 4-G5, noviembre 2015)*

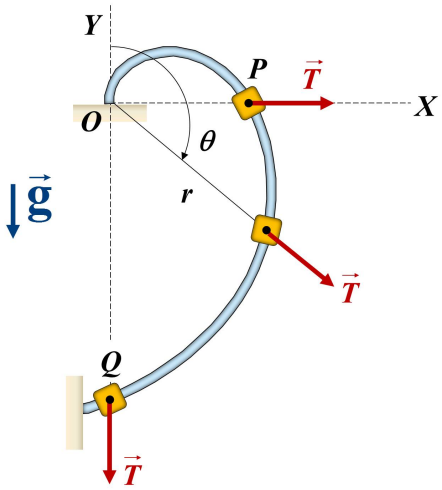
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

## CUESTIÓN C4.36.

Un pasador de masa $m$ desliza a lo largo de un tubo fijo y liso, con forma de espiral, contenido en el plano vertical de la figura. La forma del tubo viene definida, en coordenadas polares, por:

$$r(\theta) = \frac{\ell(1+\pi^2)}{\pi}\,\theta$$

donde $\ell$ es una constante positiva.




El pasador es liberado desde el reposo en el punto $P$ del tubo y desciende bajo la acción de una fuerza central radial de módulo constante $|\vec{T}| = mg/4$.

En cuanto al momento cinético del pasador con respecto al origen $O$ cuando pasa por el punto $Q$, se puede decir que $\vec{L}_O^{(Q)} = \gamma m\ell\sqrt{\ell g}\,\vec{k}$, donde:

A) $\gamma = -\frac{1}{2}\pi(1+\pi^2)$

B) $\gamma = -\frac{7}{2}\pi(1+\pi^2)$

C) $\gamma = -\frac{5}{2}\pi(1+\pi^2)$

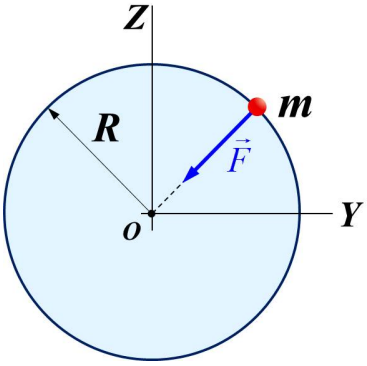
D) $\gamma = -\frac{3}{2}\pi(1+\pi^2)$

E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

*(ETSIAE, autoevaluación 4-G5, noviembre 2015)*

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

## CUESTIÓN C4.37.




Una partícula de masa $m$ se mueve sometida exclusivamente a la fuerza central:

$$\vec{F} = -F_0 \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

cuyo centro se sitúa en un punto fijo $O$, origen de un triedro de referencia inercial, -véase figura-. Aquí $F_0$ es una constante positiva y $\vec{r}$ el vector de posición de la partícula.

Si las condiciones iniciales del movimiento son tales que $m$ describe una circunferencia de radio $R$, en el sentido indicado en la figura, entonces:

A) El momento cinético de $m$ respecto a $O$ es:
$\vec{L}_0 = R\sqrt{mF_0R}\,\vec{\imath}$

B) La energía potencial de la fuerza $\vec{F}$ vale: $E_P = -F_0R$

C) La energía cinética de $m$ es: $E_C = (1/4)\,F_0R$

D) La energía mecánica $E$ de la partícula vale: $E = F_0R$

E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

*(ETSIAE, octubre 2012)*

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

## CUESTIÓN C4.38.

Una partícula de masa $m$ se mueve bajo la acción de una fuerza central:

$$\vec{F}(\vec{r}) = F(r)\,\frac{\vec{r}}{r}$$

donde $\vec{r}$ es el vector de posición de la partícula respecto a un punto fijo $O$, origen de un sistema de referencia inercial $S(O;X;Y;Z)$, y $r \equiv |\vec{r}|$ su módulo.

En el instante inicial el vector de posición de la partícula es $\vec{r}_0 = r_0\,\vec{\imath}$ y su velocidad $\vec{v}_0 = v_0\,\vec{\jmath}$, con $r_0$ y $v_0$ constantes positivas.

¿Cuál de estas afirmaciones es **falsa**?

A) La trayectoria de la partícula está contenida en el plano $XY$.

B) Si la fuerza $\vec{F}(\vec{r})$ es repulsiva, la trayectoria de $m$ no puede ser una circunferencia.

C) El momento cinético de $m$ respecto a $O$, $\vec{L}_0$, es constante y vale: $\vec{L}_0 = mr_0v_0\,\vec{k}$.

D) Si la fuerza $\vec{F}(\vec{r})$ es atractiva, la trayectoria será una circunferencia solo si $v_0 = \sqrt{-\frac{r_0F(r_0)}{m}}$.

E) La energía cinética $E_C$ de la partícula es constante y vale: $E_C = (1/2)mv_0^2$.

*(ETSIAE, octubre 2013)*

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

## CUESTIÓN C4.39.

Una partícula de masa $m$ se mueve sometida exclusivamente a la acción de la fuerza:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -A\vec{r}$$

donde $A$ es una constante positiva y $\vec{r}$ el vector de posición de la partícula en un triedro de referencia inercial $S(O;X;Y;Z)$. Bajo las condiciones iniciales, $\vec{r}(0) = R\,\vec{k}$ y $\vec{v}(0) = -2R\sqrt{\frac{A}{m}}\,\vec{j}$, la partícula describe una elipse cuyos puntos de máximo y mínimo acercamiento al origen $O$ son, respectivamente, $R$ y $2R$.

Si $\vec{L}_O$ es el momento cinético de la partícula con respecto al origen fijo $O$, para un instante genérico $t$, entonces:

A) $\vec{L}_O = 2R^2 At\,\vec{\imath}$

B) $\vec{L}_O = 2R^2\sqrt{\frac{A^3}{m}}\,t^2\,\vec{\imath}$

C) $\vec{L}_O = 2R^2\sqrt{Am}\,\vec{\imath}$

D) $\vec{L}_O = \vec{0}$

E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

*(ETSIAE, noviembre 2011)*

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

## CUESTIÓN C4.40.

Una partícula de masa $m$ se mueve sometida exclusivamente a la acción de la fuerza:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -A\vec{r}$$

donde $A$ es una constante positiva y $\vec{r}$ el vector de posición de la partícula en un triedro de referencia inercial $S(O;X;Y;Z)$. Bajo las condiciones iniciales, $\vec{r}(0) = R\,\vec{k}$ y $\vec{v}(0) = -2R\sqrt{\frac{A}{m}}\,\vec{j}$, la partícula describe una elipse cuyos puntos de máximo y mínimo acercamiento al origen $O$ son, respectivamente, $R$ y $2R$.

Respecto a la energía mecánica $E$ de la partícula, se puede decir que:

A) $E = 3AR^2$

B) $E = \frac{5}{2}AR^2$

C) $E = 2AR^2$

D) $E = AR^2$

E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

*(ETSIAE, noviembre 2011)*

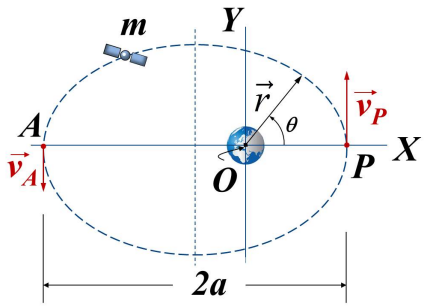
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

## CUESTIÓN C4.41.

Un satélite de masa $m$ describe alrededor de la Tierra -que se supondrá fija- una órbita elíptica dada por la ecuación:

$$r = \frac{(1-e^2)a}{1+e\cos\theta}$$

donde $e$ es la excentricidad de la elipse y $a$ su semieje mayor, estando la Tierra en uno de sus focos -véase la figura-.




Sean $M$ y $R$ la masa y el radio de la Tierra, ($M >> m$) y $g$ el valor de la aceleración de la gravedad en la superficie de ésta.

Si $r_A$ y $|\vec{v}_A|$ son, respectivamente, los módulos del vector de posición y de la velocidad del satélite en el apogeo (distancia de máxima separación), y $r_P$ y $|\vec{v}_P|$ las correspondientes al perigeo (distancia de mínima separación), se puede decir que:

A) $|\vec{v}_A| = R\sqrt{(g/a)\,(r_A/r_P)}$

B) $|\vec{v}_P| = R\sqrt{(2g/a)\,(r_P/r_A)}$

C) En cualquier instante, la energía mecánica del satélite vale: $E = mg\,(R^2/2a)$

D) El periodo de revolución del satélite es: $P = \pi a^{3/2}/(R\sqrt{g})$

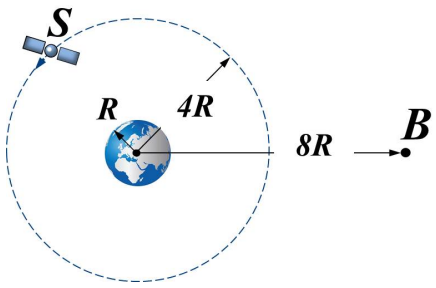
E) El momento cinético del satélite respecto al origen $O$ vale: $\vec{L}_O = mR\sqrt{ga\,(1-\epsilon^2)}\,\vec{k}$

*(EUITA, enero 2000)*

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

## CUESTIÓN C4.42.

Un satélite $S$ se mueve alrededor de la Tierra en una órbita circular de radio $4R$, siendo $R$ el radio de la Tierra.




Tomando como $g$ el valor de la aceleración de la gravedad sobre la superficie terrestre, si $\Delta v$ es el incremento mínimo de velocidad que se le debe comunicar al satélite para alcanzar el punto $B$, que está a una distancia $8R$ del centro de la Tierra, se puede decir que:

A) $\Delta v = \sqrt{Rg}\,[(1/\sqrt{3}) - 1/2]$

B) $\Delta v = \sqrt{Rg}\,[\sqrt{3/5} - 1/2]$

C) $\Delta v = \sqrt{Rg}\,[\sqrt{3/10} - 1/2]$

D) $\Delta v = \sqrt{Rg}\,[\sqrt{5/14} - 1/2]$

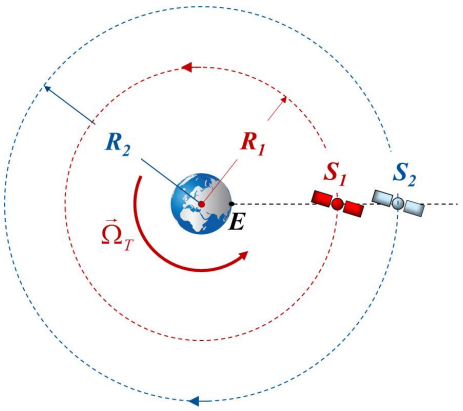
E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

*(EUITA, enero 2001)*

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

## CUESTIÓN C4.43.

Una estación de seguimiento de satélites $E$ se encuentra emplazada en una isla tropical situada en el ecuador terrestre. Un día, exactamente a las doce del mediodía, recibe la señal de dos objetos que identifica como satélites de comunicaciones. En ese instante ambos están pasando por encima de su vertical -véase figura-.




El primero y más cercano, $S_1$, se mueve en dirección antihoraria, de oeste a este, mientras el segundo, $S_2$, el más alejado, lo hace en dirección contraria. Esa misma noche, a las doce, recibe una nueva señal de los satélites, los cuales, como por la mañana, están pasando por la vertical a la estación.

Despreciando la traslación de la Tierra alrededor del sol, asumiendo que las órbitas de los satélites son circulares y sabiendo que ninguno de los satélites pasa por encima de la vertical de la estación entre mediodía y medianoche, la razón $R_1/R_2$ entre los radios de las órbitas verifica que:

A) $R_1/R_2 = (1/16)^{1/3}$

B) $R_1/R_2 = (1/4)^{1/3}$

C) $R_1/R_2 = (1/8)^{1/3}$

D) $R_1/R_2 = (1/9)^{1/3}$

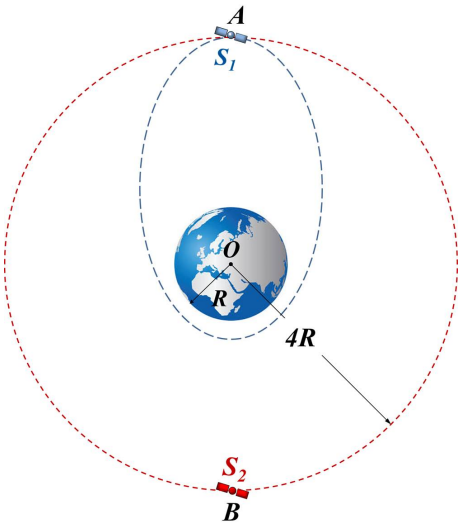
E) Ninguna de las respuestas anteriores.

*(ETSIAE, autoevaluación 4-G5, noviembre 2014)*

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

## CUESTIÓN C4.44.

Dos satélites $S_1$ y $S_2$ están en la misma órbita circular de radio $4R$ alrededor de la Tierra, ocupando en un cierto instante, que se puede tomar como inical, las posiciones $A$ y $B$ diametralmente opuestas indicadas en la figura.




Para interceptar al satélite $S_2$, el $S_1$ conecta un sistema de frenado mediante el cual, sin que cambie apreciablemente su posición, reduce su velocidad en la cantidad $\Delta v_1$, permitiéndole pasar a la órbita elíptica de interceptación mostrada.

Si la maniobra está diseñada para que el encuentro tenga lugar en $A$, transcurrido un tiempo desde el instante inicial igual al periodo $P$ de la nueva órbita elíptica, y tomando $g$ como el valor de la aceleración de la gravedad sobre la superficie terrestre, se puede decir que $|\Delta v_1| = \gamma\sqrt{gR/4}$, con:

A) $\gamma = 1 - \sqrt{2 - (2)^{2/3}}$

B) $\gamma = 1 - \sqrt{2 - (2)^{1/3}}$

C) $\gamma = 1 - \sqrt{(2)^{2/3} - 1}$

D) $\gamma = 1 - \sqrt{(2)^{1/3} - 1}$

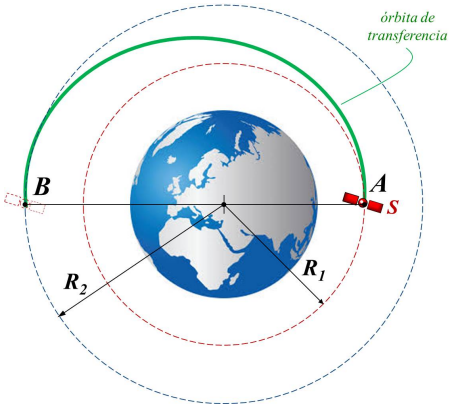
E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

*(EUITA, enero 2002)*

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

## CUESTIÓN C4.45.

Un satélite $S$ que se está moviendo alrededor de la Tierra en una órbita circular de radio $R_1 = 4R$ se transfiere a una órbita circular de radio mayor $R_2 = 8R$ mediante la órbita elíptica de transferencia mostrada en la figura.




El proceso se lleva a cabo mediante sendos impulsos instantáneos de los motores del satélite en los puntos $A$ y $B$ indicados. Si $\Delta v_A$ y $\Delta v_B$ son los cambios en la velocidad del satélite que provocan dichos impulsos, se puede decir que:

A) $(\Delta v_A/\Delta v_B) = (4+2\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{2})$

B) $(\Delta v_A/\Delta v_B) = (2+\sqrt{3})(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

C) $(\Delta v_A/\Delta v_B) = (2-\sqrt{3})(2+\sqrt{6})$

D) $(\Delta v_A/\Delta v_B) = (4-2\sqrt{3})(2+\sqrt{6})$

E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

*(EUITA, enero 2003)*

.

| TABLA DE SOLUCIONES<br>4.- DINÁMICA DE LA PARTÍCULA | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| C4.1 | **D** | C4.21 | **C** | C4.41 | **E** |
| C4.2 | **D** | C4.22 | **B** | C4.42 | **A** |
| C4.3 | **D** | C4.23 | **D** | C4.43 | **D** |
| C4.4 | **E** | C4.24 | **C** | C4.44 | **A** |
| C4.5 | **A** | C4.25 | **E** | C4.45 | **C** |
| C4.6 | **B** | C4.26 | **B** | C4.46 | |
| C4.7 | **B** | C4.27 | **C** | C4.47 | |
| C4.8 | **B** | C4.28 | **C** | C4.48 | |
| C4.9 | **D** | C4.29 | **D** | C4.49 | |
| C4.10 | **B** | C4.30 | **C** | C4.50 | |
| C4.11 | **C** | C4.31 | **B** | C4.51 | |
| C4.12 | **D** | C4.32 | **B** | C4.52 | |
| C4.13 | **A** | C4.33 | **C** | C4.53 | |
| C4.14 | **C** | C4.34 | **A** | C4.54 | |
| C4.15 | **D** | C4.35 | **A** | C4.55 | |
| C4.16 | **B** | C4.36 | **D** | C4.56 | |
| C4.17 | **C** | C4.37 | **A** | C4.57 | |
| C4.18 | **A** | C4.38 | **E** | C4.58 | |
| C4.19 | **A** | C4.39 | **C** | C4.59 | |
| C4.20 | **B** | C4.40 | **B** | C4.60 | |

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

## PROBLEMA P 4.1.

La curva $ABC$ de la figura representa la rampa de descenso de un trampolín de saltos de esquí. La forma de la curva se ha elegido de manera tal que la coordenada vertical $z$ de un punto de la curva y el ángulo $\theta$ que la tangente a ésta forma con la vertical están ligados por la ecuación:

$$z(\theta) = H\cos^2\theta$$

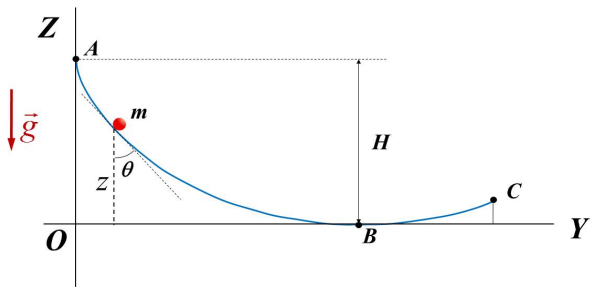
donde $H$ es la altura del trampolín respecto a un cierto nivel de referencia (eje $Y$).

Típicamente, en un salto, el saltador -que asimilaremos a una partícula puntual de masa $m$- inicialmente en reposo a una altura $z(0) = h$, se deja caer por la rampa bajo la acción de la fuerza de la gravedad, permaneciendo en contacto con la rampa hasta su despegue en $C$. Despreciando el rozamiento de los esquíes con el suelo, así como cualquier tipo de resistencia aerodinámica entre el saltador y su ambiente, y tomando como datos del problema $m, h, H$ y la aceleración constante de la gravedad $g$, determinar:

1. El módulo de la velocidad de la partícula, $v(\theta)$.
2. La aceleración tangencial de la partícula, $a_T(\theta)$.
3. Expresión de $\dot{\theta}(\theta)$.
4. El tiempo $t_1$ que tarda $m$ en llegar al punto más bajo $B$ de la rampa.

**A partir de ahora se considerará que el saltador parte inicialmente del punto $A$, por lo que $h = H$. Bajo este supuesto y considerando al tiempo $t$ como parámtro, se pide:**

5. Ecuaciones paramétricas $y(t)$ y $z(t)$ de la trayectoria del saltador.
6. Módulo $a(t)$ de la aceleración de $m$.
7. El módulo de la fuerza que ejerce la rampa sobre el saltador, $N(t)$.
8. El momento cinético $\vec{L}_O\,(t)$ de la partícula respecto al origen $O$ del triedro de referencia indicado.
9. Momento dinámico de las fuerzas que actúan sobre $m$ respecto a $O$, $\vec{M}_O\,(t)$. Verificar el teorema del momento cinético.
10. Si en lugar de la curva indicada, la rampa tuviera entre $A$ y $B$ la forma de un segmento rectilíneo que conectase ambos puntos, calcular el tiempo $t_1^*$ que tardaría $m$ en llegar a $B$ partiendo del reposo en $A$.




*(ETSIAE, adaptado, enero 2012)*

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

**SOLUCIÓN P4.1.**

1.- $v(\theta) = \sqrt{2g(h - H\cos^2\theta)}$

2.- $a_T(\alpha) = g\cos\theta$

3.- $\dot{\theta}(\theta) = \sqrt{\frac{g}{2H}}\left(\frac{\sqrt{(h/H)-\cos^2\theta}}{\operatorname{sen}\theta}\right)$

4.- $t_1 = \pi\sqrt{\frac{H}{2g}}$ , ¡independiente de $h$!

5.-
$$y(t) = \sqrt{\frac{gH}{2}}\left[t - \sqrt{\frac{H}{2g}}\operatorname{sen}\sqrt{\frac{2g}{H}}\,t\right]$$
$$z(t) = \frac{H}{2}\left(1 + \cos\sqrt{\frac{2g}{H}}\,t\right)$$

6.- $a = g$

7.- $N(t) = 2mg\operatorname{sen}\sqrt{\frac{g}{2H}}t$

8.- $\vec{L}_0 = -\left(\frac{mgH}{2}\right)\,t\,\operatorname{sen}\sqrt{\frac{2g}{H}}\,t\,\vec{\imath}$

9.- $\vec{M}_0 = -\left(\frac{mgH}{2}\right)\left[\sqrt{\frac{2g}{H}}\,t\,\cos\sqrt{\frac{2g}{H}}\,t\,+\operatorname{sen}\sqrt{\frac{2g}{H}}\,t\right]\vec{\imath}$

10.- $t_1^* = \sqrt{1+\frac{4}{\pi^2}}\,t_1$

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

**PROBLEMA P 4.2.**

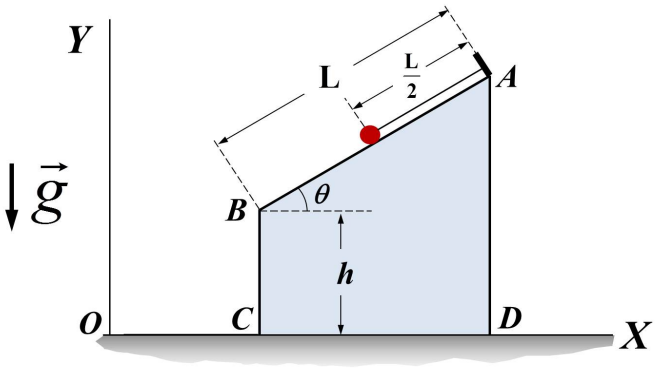
La cuña $ABCD$ de la figura, de masa $M = 3m$ y ángulo de inclinación $\theta = 30^o$, puede deslizar sin rozamiento sobre un suelo horizontal (el plano $XZ$ del triedro inercial de referencia mostrado). Sobre ella se encuentra una partícula puntual de masa $m$ sujeta al extremo $A$ de la cuña por un hilo ideal. El rozamiento entre la partícula y la cuña se considera despreciable e inicialmente tanto la partícula como la cuña se encuentran en reposo respecto al suelo.

**A) Si se aplica una fuerza $\vec{F} = F\,\vec{\imath}$ a la cuña (horizontal y a la altura necesaria para que el conjunto no gire), se pide:**

1. El valor de $F$ de forma tal que la cuña se mueva hacia la derecha con aceleración constante y de módulo $a_0 = g/4$.
2. El valor máximo que puede tener $F$ si $m$ debe permanecer en todo instante en contacto con la cuña.
3. El valor máximo que puede tener $F$ para que el hilo no se rompa, si la tensión máxima que puede soportar el hilo antes de romperse es $T_{max} = (3/2)\,mg$.

**B) Si partiendo de la posición inicial de reposo mostrada en la figura se corta el hilo, en el movimiento subsiguiente de la partícula y la cuña, determinar:**

4. La aceleración de la cuña respecto al suelo, $\vec{a}_C$.
5. La aceleración de la partícula respecto a la cuña, $\vec{a}\,'_P$.
6. La velocidad de la partícula respecto a la cuña en el instante en el que aquella alcanza el final de la pendiente, en el punto $B$, $\vec{v}\,'_P(B)$.
7. La velocidad de la cuña respecto al suelo en ese instante $\vec{v}_C(B)$.
8. El tiempo $t_B$ que pasa desde que se corta la cuerda, $(t = 0)$, hasta que la partícula alcanza el punto $B$.
9. La ecuación de la trayectoria de la partícula con respecto al suelo en el intervalo $[0, t_B]$.
10. El tiempo $t_s$ que tarda la partícula en llegar al suelo desde que abandona la cuña si $h = 8L/13$.




*(ETSIAE, enero 2014)*

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

**SOLUCIÓN P4.2.**

1.- $F = mg$

2.- $F_{max} = 4\sqrt{3}\, mg$

3.- $F_{max} = \frac{8\sqrt{3}}{3}\, mg$

4.- $\vec{a}_C = \frac{\sqrt{3}}{13} g\, \vec{\imath}$

5.- $\vec{a}\,'_P = -\frac{8}{13} g \left[\frac{\sqrt{3}}{2}\, \vec{\imath} + \frac{1}{2}\, \vec{\jmath}\right]$

6.- $\vec{v}\,'_P(B) = -\sqrt{\frac{8}{13} Lg}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\, \vec{\imath} + \frac{1}{2}\, \vec{\jmath}\right]$

7.- $\vec{v}_C(B) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3gL}{26}}\, \vec{\imath}$

8.- $t_B = \sqrt{\frac{13}{8}\frac{L}{g}}$

9.- Recta con pendiente : $\mathfrak{p} = \frac{4\sqrt{3}}{9}$

10.- $t_s = \sqrt{\frac{8}{13}\frac{L}{g}}$

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

**PROBLEMA P4.3.**

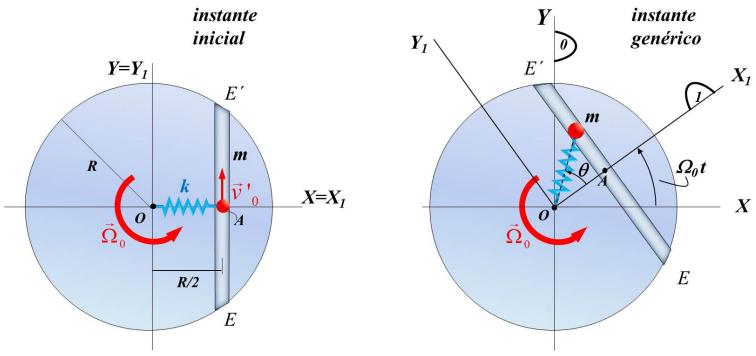
La plataforma circular de radio $R$ mostrada en la figura está contenida en el plano horizontal $XY$ de un triedro de referencia inercial $S_0(O;X,Y,Z)$. La plataforma tiene un canal recto $E'E$, a una distancia $R/2$ del origen de $S_0$, por donde puede moverse sin rozamiento una partícula de masa $m$. La partícula, además, está unida a $O$ mediante un muelle de constante elástica $k$ y longitud natural nula.

Considérese la situación en la cual la plataforma está girando con velocidad angular constante $\vec{\Omega}_0 = \Omega_0\,\vec{k}$ en torno a un eje que pasa por $O$ y es perpendicular a su plano. Se pide:

1. Determinar la condición que deben cumplir $k, m$ y $\Omega_0$ para que el movimiento de la partícula en el canal sea armónico simple.
2. En tal caso, calcular el periodo $P$ y la amplitud $A$ de dicho movimiento armónico.

Sea $S_1(O;X_1,Y_1,Z_1)$ un triedro móvil ligado a la plataforma, definido de forma tal que su eje $Z_1$ coincide con el fijo $Z$ y su eje $Y_1$ es paralelo en todo instante al canal $E'E$ -véase figura-. Sabiendo que en el instante inicial la partícula se encuentra en el punto $A$, con una velocidad $\vec{v}_{21}^{\,M}(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}R\sqrt{\frac{k}{m} - \Omega_0^2}\,\vec{\jmath}_1$ relativa al canal, se pide:

3. Vector de posición $\vec{r}_{21}^{\,M}$ de la partícula relativo a $S_1$.
4. Fuerza $\vec{N}$ que ejerce la plataforma sobre la partícula expresada en $S_1$.
5. Energía mecánica de la partícula en $S_1$, $E_{S_1}$.
6. Energía mecánica de la partícula en $S_0$, $E_{S_0}$.
7. Calcular explícitamente el trabajo que realiza la fuerza $\vec{N}$ sobre la partícula en el intervalo $[0,t]$, tanto en $S_1$ como en $S_0$, verificando el teorema de la energía mecánica.
8. Supuesto $\Omega_0 = \sqrt{k/2m}$, determinar las ecuaciones paramétricas de la trayectoria de $m$ en $S_0$.




*(ETSIAE, autoevaluación 4-G5, octubre 2014)*

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

**SOLUCIÓN P4.3.**

1.- $\omega^2 \equiv \frac{k}{m} - \Omega_0^2 > 0$

2.- $P = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} - \Omega_0^2}} \quad , \quad A = \frac{\sqrt{3}}{2} R$

3.- $\vec{r}_{21}^{\,M}(t) = \frac{R}{2}\vec{\imath}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} R \operatorname{sen} \omega t \vec{\jmath}_1$

4.- $\vec{N}(t) = \frac{mR}{2}\omega^2 \left[1 - 2\sqrt{3}\left(\frac{\Omega_0}{\omega}\cos\omega t\right)\right]\vec{\imath}_1 + mg\vec{k}_1$

5.- $E_{S_1} = \frac{1}{2} m\omega R^2$

6.- $E_{S_0} = \frac{1}{4} mR^2 \left[3\Omega_0^2 \operatorname{sen}^2 \omega t + \sqrt{3}\omega\Omega_0 \cos\omega t + 2\omega^2 + \Omega_0^2\right]$

7.-
$$W^{\vec{N}}_{0\to t, S_1} = 0$$
$$W^{\vec{N}}_{0\to t, S_0} = \frac{1}{4} mR^2 \left[3\Omega_0^2 \operatorname{sen}^2 \omega t + \sqrt{3}\omega\Omega_0(\cos\omega t - 1)\right]$$

8.-
$$x(t) = \frac{R}{2}\left[\cos\omega t - \frac{\sqrt{3}}{2}(1 - \cos 2\omega t)\right]$$
$$y(t) = \frac{R}{2}\left[\operatorname{sen}\omega t + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen} 2\omega t\right]$$

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

**PROBLEMA P 4.4.**

Una varilla larga $AB$ tiene su extremo $A$ fijo, está inclinada un ángulo $\alpha$ respecto a la horizontal ( $\operatorname{sen}\alpha = 4/5$), y gira alrededor del eje $Z$ de un triedro inercial de referencia $S(O = A; XYZ)$ con velocidad angular $\vec{\Omega} = \Omega\,\vec{k}$, ($\Omega = cte$). Un abalorio de masa $m$ está sujeto a la varilla en el punto $P$ mediante topes -no dibujados-, e inicialmente dista $L_0$ de $A$ -véase figura-.

Sea $S'(O'; X'Y'Z')$ un triedo móvil ligado a la varilla, con $O = O', Z = Z'$, y elegido de tal manera que la varilla siempre está contenida en el plano $X'Z'$ mostrado. Sean $\vec{u}_r$ y $\vec{u}_\alpha$ dos vectores unitarios contenidos en este plano; el primero en la dirección de la varilla, el segundo perpendicular a ella. En un cierto instante ($t = 0$) se quitan los topes. Se pide:

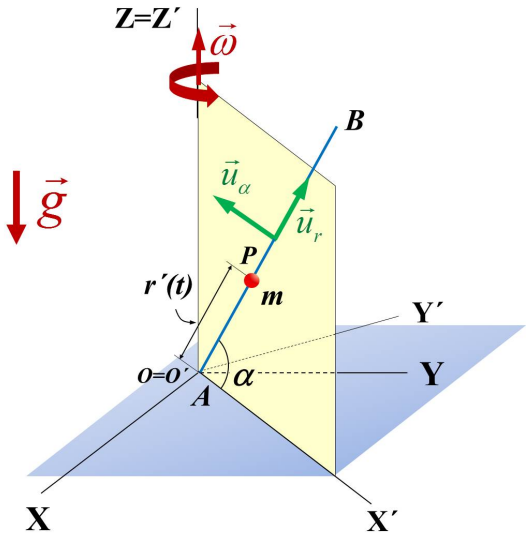
**A) Si el rozamiento entre la partícula y la varilla es despreciable:**

1. Determinar el valor $\Omega_0$ del módulo de la velocidad angular de la varilla que permite que el abalorio permanezca fijo respecto a la varilla en todo instante.
2. Si $\Omega = \frac{1}{\sqrt{5}}\,\Omega_0$, determinar:
   - *a*) Ecuaciones de movimiento de $m$ en $S'$.
   - *b*) Vector de posición de la partícula en $S'$ en función del tiempo, $\vec{r}\,'(t)$.
   - *c*) Velocidad relativa de $m$ en $S'$ en función de su posición relativa a la varilla, $\vec{v}\,'(r\,')$.

   En el instante $t^*$ en el que la partícula alcanza el extremo $A$ de la varilla, calcular:
   - *d*) Fuerza de inercia de arrastre sobre $m$ en el triedro $S'$, $\vec{F}^{\,I,arrastre}(t^*)$.
   - *e*) Fuerza de inercia de Coriolis sobre $m$ en el triedro $S'$, $\vec{F}^{\,I,Coriolis}(t^*)$.
   - *f*) Fuerza que ejerce la varilla sobre la partícula, $\vec{N}(t^*)$.
   - *g*) ¿Se conserva la energía mecánica de la partícula en $S$ en el intervalo $[0, t^*]$? Si no lo hace, calcular su variación $\Delta E_m$.

**B) Si existe rozamiento entre la partícula y la varilla con coeficiente $\mu$ (estático y dinámico):**

3. Determinar los valores máximo y mínimo, $\Omega_{\text{máx}}$ y $\Omega_{\text{mín}}$, del módulo de la velocidad angular de la varilla que permiten que el abalorio permanezca fijo respecto a aquella en todo instante.




*(ETSIAE, julio 2011)*

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

**SOLUCIÓN P4.4.**

1.- $\Omega_0 = \frac{2}{3}\sqrt{5}\sqrt{\frac{g}{L_0}}$

2a)
$$N_1 - \frac{3}{5}mg\left(1 + \frac{16}{45}\frac{r'}{L_0}\right) = 0$$
$$N_2 - \frac{4}{5}m\dot{r}'\sqrt{\frac{g}{L_0}} = 0$$
$$\frac{4}{5}g\left[\frac{r'}{L_0} - 1\right] = \ddot{r}'$$

Expresando la reacción de la varilla como: $\vec{N} = N_1\,\vec{u}_\alpha + N_2\,\vec{\jmath}'$

2 b) $\vec{r}\,'(t) = L_0\left[5 - 4\cosh\left(\frac{2}{5}\sqrt{\frac{g}{L_0}}\,t\right)\right]\,\vec{u}_r$

2 c) $\vec{v}\,'(r') = -\frac{2}{5}\sqrt{g}\sqrt{10(L_0 - r') + \left[\frac{(r')^2 - L_0^2}{L_0}\right]}\,\vec{u}_r$

2 d) $\vec{F}^{\,I,arrastre}(t^*) = \vec{0}$

2 e) $\vec{F}^{\,I,Coriolis}(t^*) = \frac{24}{25}mg\,\vec{\jmath}'$

2 f) $\vec{N}(t^*) = \frac{3}{5}mg\left[\vec{u}_\alpha + \frac{8}{5}\vec{\jmath}'\right]$

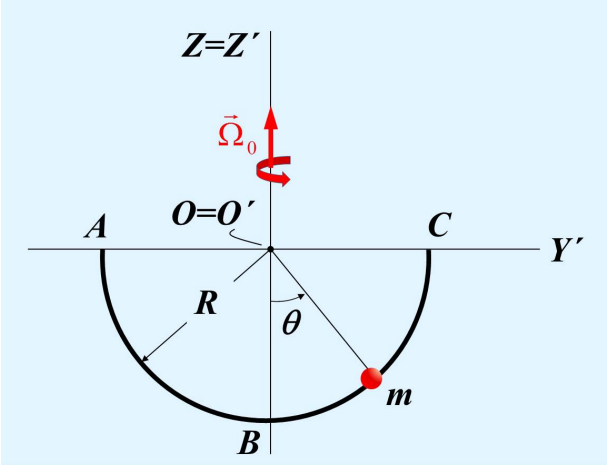
2 g) $\Delta E_m = -\frac{4}{25}mgL_0$

3.- $\Omega_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{5g}{3L_0}\left[\frac{4+3\mu}{3-4\mu}\right]}$ , $\Omega_{\text{mín}} = \sqrt{\frac{5g}{3L_0}\left[\frac{4-3\mu}{3+4\mu}\right]}$

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

**PROBLEMA P4.5.**

Alrededor del eje vertical $OZ$ de un triedro inercial $S(O,X,Y,Z)$, se hace girar con velocidad angular $\vec{\Omega}_0 = \Omega_0\,\vec{k}'$ constante, una varilla semicircular $ABC$ de radio $R$. Por la varilla se puede mover un abalorio de masa $m$, inicialmente en reposo en el punto $B$. No hay rozamiento entre el abalorio y la varilla.
Durante el movimiento se observa que si se desplaza el abalorio ligeramente de $B$, éste alcanza el extremo $C$ de la varilla si $\Omega_0$ es mayor que un cierto valor $\Omega_{0,\,lim}$; mientras que permanece en las proximidades de $B$ si $\Omega_0$ es menor que dicho valor límite.
Se define un triedro $S'(O',X',Y',Z')$, fijo a la varilla, con $O \equiv O'$ y $Z \equiv Z'$, de forma tal que la varilla permanece en el plano vertical $Y'Z'$ en todo instante, -véase figura-.




Se pide:

1. Valor límite $\Omega_{0,\,lim}$

**SUPÓNGASE A PARTIR DE AHORA QUE $\Omega_0 > \Omega_{0,\,lim}$.**

Determinar en función del ángulo $\theta$, -que define la posición del abalorio en la varilla en un instante cualquiera- y de los datos del problema, $R, m$ y $g$:

2. El valor de $\ddot{\theta}(\theta)$.
3. La velocidad relativa $\vec{v}\,'(\theta)$ del abalorio con respecto a la varilla en $S'$.
4. El ángulo $\alpha$ que forma con la vertical el vector velocidad $\vec{v}(\theta)$ del abalorio en $S$.
5. La resultante $\vec{F}_I(\theta)$ de las fuerzas de inercia sobre el abalorio en $S'$.
6. La fuerza $\vec{N}(\theta)$ que ejerce la varilla sobre el abalorio.
7. El momento cinético del abalorio respecto del punto $O$, en el triedro $S'$, $\vec{L}'_O(\theta)$.
8. El momento cinético del abalorio respecto del punto $O$, en el triedro $S$, $\vec{L}_O(\theta)$.
9. El trabajo $W_I(\theta_0)$ en $S'$ de las fuerzas de inercia que actúan sobre $m$ entre $\theta = 0$ y $\theta = \theta_0$.
10. ¿Se conserva la energía mecánica de la partícula? Si no lo hace, calcular su variación en el intervalo $[0,\theta]$.

*(ETSIAE, enero 2013)*

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

**SOLUCIÓN P4.5.**

1.- $\dot{\theta} = \sqrt{\Omega_0^2 \operatorname{sen}^2\theta - \frac{2g}{R}(1-\cos\theta)} \qquad \Rightarrow \qquad \Omega_{0,min} = \sqrt{\frac{2g}{R}}$

2.- $\ddot{\theta} = \left(\Omega_0^2 \cos\theta - \frac{g}{R}\right) \operatorname{sen}\theta$

3.- $\vec{v}\,'(\theta) = R\sqrt{\Omega_0^2 \operatorname{sen}^2\theta - \frac{2g}{R}(1-\cos\theta)}\,[\cos\theta\,\vec{j}\,' + \operatorname{sen}\theta\,\vec{k}\,']$

4.- $\tan\alpha = \left(\frac{\Omega_0}{\dot{\theta}}\right)\sqrt{1+\left(\frac{\dot{\theta}}{\Omega_0\,\tan\theta}\right)^2}$

5.- $$\begin{aligned}\vec{F}_I(\theta) &= \vec{F}_{cent}(\theta) + \vec{F}_{Cor}(\theta)\\ &= \Omega_0^2 R \operatorname{sen}\theta\,[\operatorname{sen}\theta\,\vec{u}_r\,' + \cos\theta\,\vec{u}_\theta\,'] + 2mR\,\Omega_0\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{i}\,'\end{aligned}$$

6.- $$\begin{aligned}N_{x'}(\theta) &= -2mR\Omega_0\cos\theta\sqrt{\Omega_0^2\operatorname{sen}^2\theta - \frac{2g}{R}(1-\cos\theta)}\\ N_{y'}(\theta) &= [mg(2-3\cos\theta) - 2mR\Omega_0^2\operatorname{sen}^2\theta]\,\operatorname{sen}\theta\\ N_{z'}(\theta) &= -[mg(2-3\cos\theta) - 2mR\Omega_0^2\operatorname{sen}^2\theta]\,\cos\theta\end{aligned}$$

7.- $\vec{L}_O\,' = mR^2\sqrt{\Omega_0^2\operatorname{sen}^2\theta - \frac{2g}{R}(1-\cos\theta)}\,\vec{i}\,'$

8.- $\vec{L}_O = \vec{L}_O\,' + mR^2\Omega_0\operatorname{sen}\theta\,[\cos\theta\,\vec{j}\,' + \operatorname{sen}\theta\,\vec{k}\,']$

9.- $W_I(\theta) = \frac{1}{2}m\Omega_0^2R^2\operatorname{sen}^2\theta$

10.- $\Delta(E_C + E_{p,grav}) = mR^2\Omega_0^2\operatorname{sen}^2\theta$

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

**PROBLEMA P4.6.**

Sobre la superficie horizontal $XY$ de un triedro inercial $S(O;X,Y,Z)$, se apoya sin rozamiento un aro circular de radio $R$. El aro se hace girar con velocidad angular constante $\vec{\Omega} = \Omega\,\vec{k}$, alrededor de un eje perpendicular a su plano y que pasa por un punto $A$ de su contorno. En todo instante $A$ permanece fijo en el origen de $S$.
Se define un triedro $S'(O';X',Y',Z')$, fijo al aro, con $O' = O$ y $Z \equiv Z'$, de forma tal que el aro permanece siempre en el plano horizontal $X'Y'$.
Un abalorio de masa $M$ puede moverse sin rozamiento por el aro, y está conectado a $A$ mediante un muelle ideal de constante elástica $k$ y longitud natural nula. Del movimiento del abalorio se sabe que:

- En el instante inicial se encuentra en el punto $B$ del aro, ($\theta_0 = 45^o$), en reposo relativo a éste, -Fig.1-.
- Existe un valor de $\vec{\Omega}$, denotado por $\vec{\Omega}_0 = \Omega_0\,\vec{k}$, para el que la condición anterior se satisface en todo instante.

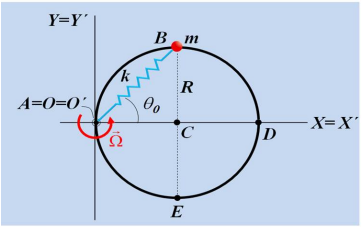


*Fig.1 Instante inicial*

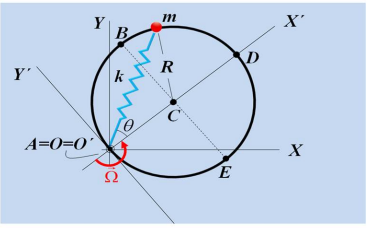


*Fig.2 Instante genérico, $\Omega > \Omega_0$*

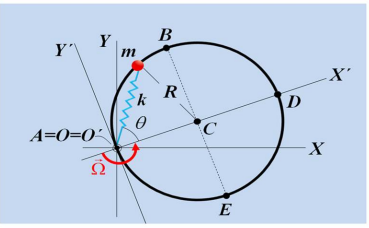


*Fig.3 Instante genérico, $\Omega < \Omega_0$*

1. Si $\theta$ representa el ángulo que forma el muelle con el eje $X'$ de $S'$ en un instante genérico (para $\Omega > \Omega_0$, -ver Fig.2-), determinar su variación con el tiempo $\dot{\theta} \equiv d\theta/dt$.
2. Calcular $\Omega_0$.

**Supóngase a partir de ahora que:** $\Omega = 3\sqrt{\dfrac{k}{M}}$

Cuando el abalorio pasa por el punto $D$ del aro, determinar:

3. Su velocidad en $S'$, $\vec{v}\,'(D)$.
4. Su aceleración en $S'$, $\vec{a}\,'(D)$.
5. Su velocidad en $S$, $\vec{v}(D)$.
6. La resultante de las fuerzas de inercia sobre $m$ en $S'$, $\vec{F}_I(D)$.
7. La fuerza $\vec{N}(D)$ que ejerce el aro sobre el abalorio.
8. En $S$, el momento cinético de $M$ con respecto al origen $O$, $\vec{L}_O(D)$.
9. En $S$, el trabajo $W^{BD}_{elas}$ entre $B$ y $D$ de la fuerza elástica del muelle.
10. En $S$, el trabajo $W^{BD}_{norm}$ entre $B$ y $D$ de la fuerza que ejerce el aro sobre el abalorio.

*(ETSIAE, junio 2013)*

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

**SOLUCIÓN P4.6.**

1.- $\dot{\theta} = -\sqrt{\frac{1}{2}\left(\Omega^2 - \frac{k}{M}\right)\cos 2\theta}$

2.- $\Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$

3.- $\vec{v}\,'(D) = -4R\sqrt{\frac{k}{M}}\,\vec{\jmath}\,'$

4.- $\vec{a}\,'(D) = -(16\,Rk/M)\,\vec{\imath}\,'$

5.- $\vec{v}(D) = 2R\sqrt{\frac{k}{M}}\,\vec{\jmath}\,'$

6.- $\vec{F}_I(D) = -6Rk\,\vec{\imath}\,'$

7.- $\vec{N}(D) = -8Rk\,\vec{\imath}\,'$

8.- $\vec{L}_O(D) = 4\sqrt{kM}\,R^2\,\vec{k}\,'$

9.- $W^{BD}_{elas} = -kR^2$

10.- $W^{BD}_{norm} = -6kR^2$

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

**PROBLEMA P 4.7.**

Una partícula material de masa $m$ se mueve sin rozamiento por el interior del tubo mostrado en la figura, mientras se ve sometida a la acción de una fuerza central $\vec{F}(r)$ que emana del extremo fijo $O$ del tubo.

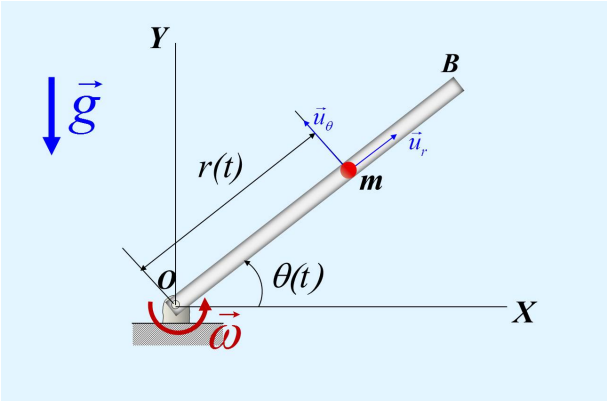
Mediante un dispositivo no dibujado, el tubo, contenido siempre en el plano horizontal $XY$ de un triedro inercial $S(O;X,Y,Z)$, es obligado a realizar oscilaciones armónicas de amplitud $\theta_0$ y periodo $P_0$, centradas en el eje $OY$ de $S$.

Se define un triedro $S'(O';X',Y',Z')$, fijo al tubo, con $O'=O$ y $Z\equiv Z'$, de forma tal que el eje $X'$ coincide en todo instante con la posición del tubo.
Sabiendo que en el instante inicial el tubo apoya sobre el eje $OY$ de $S$ y que en el movimiento de la partícula las coordenadas $r$ y $\theta$ que determinan su posición están relacionadas por:

$$r(\theta)=r_0\left[1-\left(\frac{\theta-\frac{\pi}{2}}{\theta_0}\right)^2\right]$$

donde $r_0$ es una constante conocida, se pide:

1. Expresión de $\theta(t)$.
2. Expresión de $r(t)$.
3. Si la función $r(t)$ es periódica, calcular su periodo $P$.
4. Determinar la fuerza central $\vec{F}(r)$ que actúa sobre la partícula.
5. Calcular la fuerza de reacción $\vec{N}(r)$ que ejerce el tubo sobre la partícula.
6. ¿Es el triedro $S'$ inercial? Si no lo es, determinar la fuerza de inercia de arrastre $\vec{F}^{IA}$ y la fuerza de Coriolis $\vec{F}^{IC}$ que aparecen sobre $m$ en dicho triedro.
7. Determinar la energía cinética de la partícula en $S$, $E_C(r)$.
8. Determinar la energía mecánica de la partícula en $S$, $E(r)$.
9. Calcular el trabajo de la reacción del tubo en $S$ entre los instantes inicial $t_1=0$ y $t_2=\pi/(2\omega)$. Comprobar que se verifica el teorema de la energía mecánica.
10. Determinar el trabajo de las fuerzas de inercia sobre $m$ en $S'$ para el mismo intervalo de tiempo del apartado anterior. Verificar el teorema de la energía cinética en $S'$.




*(EUITA, junio, 2001)*

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

**SOLUCIÓN P4.7.**

1.- $\theta(t) = \frac{\pi}{2} + \theta_0 \,\text{sen}\,\omega t \qquad , \qquad \omega = 2\pi/P_0$

2.- $r(t) = r_0 \,\cos^2 \omega t$

3.- $P = P_0/2$

4.- $\vec{F}(r) = -m\omega^2 \left[-2r_0 + 4r + \frac{\theta_0^2 r^2}{r_0}\right] \vec{u}_r$

5.-
$$\vec{N}(r) = -5m\omega^2 r\sqrt{1 - \frac{r}{r_0}}\,\vec{u}_\theta \qquad , \qquad 0 \le \omega t \le \pi$$
$$\vec{N}(r) = +5m\omega^2 r\sqrt{1 - \frac{r}{r_0}}\,\vec{u}_\theta \qquad , \qquad \pi \le \omega t \le 2\pi$$

6.-
$$\vec{F}^{IA}(r) = m\omega^2 \frac{\theta_0^2}{r_0} r^2 \,\vec{u}_r - \frac{1}{5}\vec{N}(r)$$
$$\vec{F}^{IC}(r) = -\frac{4}{5}\vec{N}(r)$$

7.- $E_C(r) = \frac{1}{2} m\omega^2 \, r \left[4(r_0 - r) + \frac{\theta_0^2}{r_0} r^2\right]$

8.- $E(r) = \frac{5}{6} m\omega^2 \frac{\theta_0^2}{r_0} r^3$

9.- $W^N_{t_1 \to t_2} = -\frac{5}{6} m\omega^2 \theta_0^2 r_0^2$

10.- $W^{inercia}_{t_1 \to t_2} = -\frac{1}{3} m\omega^2 \theta_0^2 r_0^2$

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

**PROBLEMA P4.8.**

Una sonda espacial $S$ de masa $m$ está describiendo una órbita circular ecuatorial de radio $\beta R$, $(\beta > 1)$ y centro $O$, alrededor del satélite de un planeta. El satélite es esférico, de densidad uniforme, radio $R$ y masa $M$, $(M >> m)$, -véase figura-.

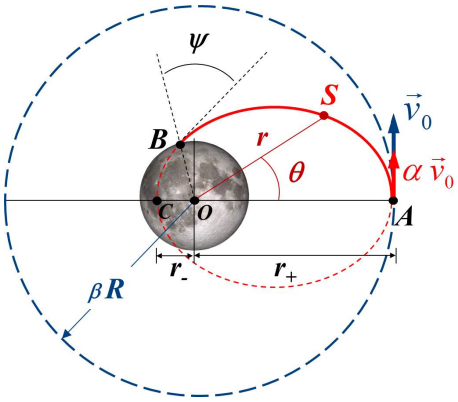
Tras fotografiarlo y con el fin de realizar un estudio de los materiales que constituyen el suelo, se ajusta la trayectoria de la sonda permitiendo que ésta se estrelle contra la superficie del satélite según una trayectoria elíptica cuya ecuación, en función de las coordenadas polares $(r, \theta)$ mostradas, viene dada por:

$$r = \frac{a(1-\epsilon^2)}{1-\epsilon\cos\theta}$$

donde $a$ y $\epsilon$ son dos parámetros que definen, respectivamente, el semieje mayor y la excentricidad de la elipse. Para ello, y en el instante en el que la sonda se encuentra en el punto $A$ de su órbita inicial y el módulo de su velocidad es $v_0$, se conectan unos propulsores que actúan reduciendo casi instantáneamente el módulo de la velocidad de la sonda a $\alpha v_0$, con $\alpha$ una constante positiva menor que la unidad (suponer despreciable la perdida de masa de la sonda en esta maniobra).

Considerando a efectos prácticos que el satélite no se mueve y que su atmósfera es muy tenue, se pide:

1. Valor de $a$ en función de $\alpha$, $\beta$ y $R$.
2. Valor de $\epsilon$ en función de $\alpha$.
3. Semiejes mayor $r_+$ y menor $r_-$ de la órbita.
4. Para un valor de $\beta$ dado, condición que ha de satisfacer $\alpha$ para que la colisión pueda producirse.
5. Si la colisión se produce, determinar el ángulo $\psi$ que forma la tangente a la trayectoria de la sonda con la vertical en el instante de impacto (punto $B$ de la figura).
6. Valor de $\alpha$ necesario para que el choque con la superficie tenga lugar en el punto en el que $\theta = 90^o$.
7. Supuesto el caso del apartado anterior, el tiempo $t^*$ que tarda la sonda en llegar al suelo[1].
8. Hágase aplicación asumiendo que el satélite es la Luna ($R_L = 1738$ km, $g_L = 1.62\,\mathrm{m/s^2}$) y que la sonda fuera del tipo de la SMART-1 de la ESA (lanzada el 27/07/2003 y estrellada el 3/07/2006) con $m \simeq 300kg$, $\beta \simeq 2$ y $\alpha = 1/\sqrt{2}$. En particular, sabiendo que la explosión de 1g de TNT libera una energía de 4200 J, determinar la cantidad $M_{\mathrm{TNT}}$ de este material cuya explosión generaría una energía equivalente a la energía cinética de la sonda en el instante de impacto.




*(ETSIAE, autoevaluación 4-G5, noviembre 2013)*

[1] Para resolver este apartado puede ser útil conocer que:

$$\int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{[1-(1-\alpha^2)\cos\theta]^2} = \frac{(1-\alpha^2)\,\mathrm{sen}\,\theta_0}{[\alpha^2(2-\alpha^2)][1-(1-\alpha^2)\cos\theta_0]} + \frac{2}{\alpha^3(2-\alpha^2)^{3/2}}\arctan\left[\frac{\sqrt{2-\alpha^2}}{\alpha}\tan\frac{\theta_0}{2}\right]$$

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

**SOLUCIÓN P4.8.**

1.- $a = \frac{\beta R}{2-\alpha^2}$

2.- $\epsilon = 1 - \alpha^2$

3.- $r_+ = \beta R \quad , \quad r_- = \left(\frac{\beta\alpha^2}{2-\alpha^2}\right) R$

4.- $0 < \alpha \leq \sqrt{\frac{2}{1+\beta}}$

5.- $\operatorname{sen}\psi = \frac{\beta\alpha}{\sqrt{\alpha^2+2(\beta-1)}}$

6.- $\alpha = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$

7.- $t^* = \sqrt{\frac{R}{g}}\left[\frac{\beta(\beta-1)}{2\beta-1} + \frac{2\beta^3}{(2\beta-1)^{3/2}}\arctan\sqrt{2\beta-1}\right]$

8.-
$a = (4/3)R_L = 2317\,\text{km}$
$e = 1/2$
$r_+ = 2R_L = 3476\,\text{km} \quad , \quad r_- = (2/3)R_L = 1158\ \text{km}$
$\theta_0 = 90^\text{o} \quad , \quad \psi = \arcsin(2/\sqrt{5}) \simeq 63,4^\text{o}$
$t^* = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{R_L}{g_L}}\left[1 + \frac{8\pi}{3\sqrt{3}}\right] \simeq 1\,\text{hora}$
$v_{choque} = \frac{1}{2}\sqrt{5 g_L R_L} = 1671\,\text{m/s}$
$M_{\text{TNT}} = 99,7\,\text{kg}$