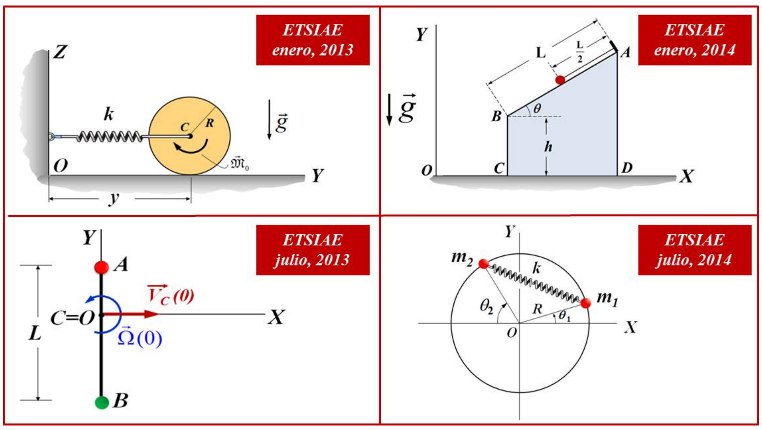
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO

FÍSICA I

CUESTIONES DE EVALUACIÓN CONTINUA Y PROBLEMAS DE EXAMEN

Fernando Jiménez Lorenzo



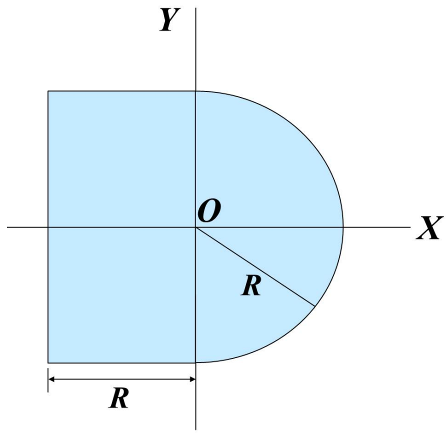
6.- GEOMETRÍA DE MASAS

6 Geometría de masas

CUESTIÓN C6.1.

En la figura se muestra una placa plana, homogénea, de masa m.

Si d representa la distancia desde el origen O del triedro de referencia indicado al centro de masas de la placa, se puede decir que:



A) $d = 2R/(4+\pi)$

B) $d = R/(4+\pi)$

C) $d = 2R/3(4+\pi)$

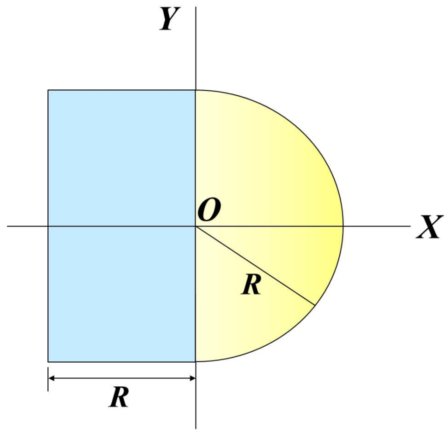
D) $d = R/3(4+\pi)$

E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

(ETSIAE, diciembre 2013)

CUESTIÓN C6.2.

La placa plana de masa m de la figura esta constituida por una placa rectangular, homogénea, de densidad superficial de masa $\sigma_1 = \sigma$, soldada a una placa semicircular también homogénea, pero con densidad $\sigma_2 = (2/\pi)\sigma$.



El momento de inercia de la placa respecto a un eje perpendicular a su plano y que pasa por el punto O indicado, vale:

A) $I_{O,z} = (11/18)mR^2$

B) $I_{O,z} = (13/18)mR^2$

C) $I_{O,z} = (11/36)mR^2$

D) $I_{O,z} = (13/36)mR^2$

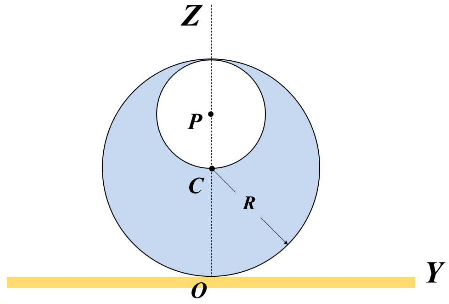
E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

(ETSIAE, autoevaluación 6-G5, diciembre 2013)

CUESTIÓN C6.3.

El sólido de la figura, de masa M, está constituido por un disco homogéneo de radio R al que se le ha practicado un taladro de sección circular de radio $R/2$.

Respecto al triedro de referencia mostrado, el momento de inercia del disco respecto al eje X vale:



A) $I_X = 21/24\, MR^2$

B) $I_X = 23/24\, MR^2$

C) $I_X = 25/24\, MR^2$

D) $I_X = 29/24\, MR^2$

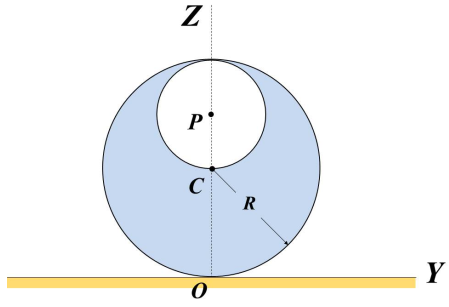
E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

(ETSIAE, julio 2010)

CUESTIÓN C6.4.

El sólido de la figura, de masa M, está constituido por un disco homogéneo de radio R al que se le ha practicado un taladro de sección circular de radio $R/2$.

El momento de inercia del disco respecto al eje Y del triedro mostrado vale:



A) $I_Y = 37/48\, MR^2$

B) $I_Y = 39/48\, MR^2$

C) $I_Y = 43/48\, MR^2$

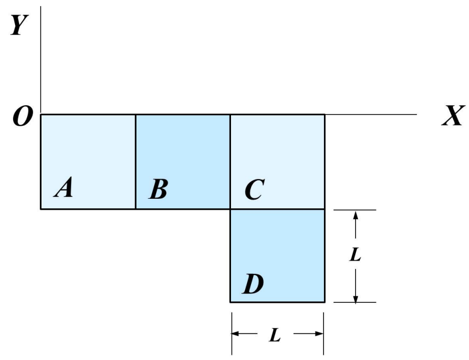
D) $I_Y = 41/48\, MR^2$

E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

(ETSIAE, enero 2010)

CUESTIÓN C6.5.

La placa plana de la figura de masa m está conformada por cuatro elementos homogéneos A, B, C y D, cuadrados, soldados por sus bordes y con densidades superficiales de masa $\sigma_D = 2\sigma_B = 4\sigma_A = 4\sigma_C$, respectivamente.



Si $I_{G,z}$ es el momento de inercia de la placa respecto a un eje perpendicular a su plano y que pasa por su centro de masas G, se puede decir que:

A) $I_{G,z} = (23/2)mL^2$

B) $I_{G,z} = (22/3)mL^2$

C) $I_{G,z} = (23/4)mL^2$

D) $I_{G,z} = (22/5)mL^2$

E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

(EUITA, abril 1994)

CUESTIÓN C6.6.

La rueda de la figura esta formada por un aro de masa $M_A = m/3$ y radio R, y por 4 varillas de masa $M_v = m/4$ cada una. Tanto el aro como las varillas son homogéneas.

Si I_O es el momento de inercia de la rueda con respecto a un eje perpendicular al papel y que pasa por el punto O de contacto entre la rueda y el suelo, entonces:

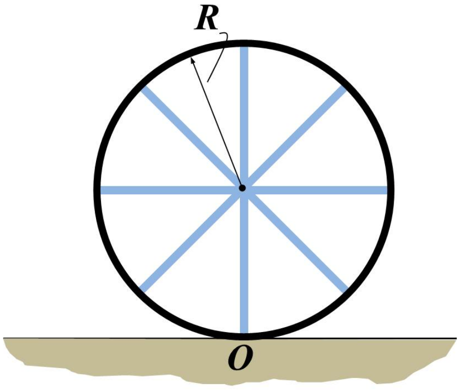
A) $I_O = 4mR^2$

B) $I_O = 2mR^2$

C) $I_O = (14/3)\, mR^2$

D) $I_O = 6mR^2$

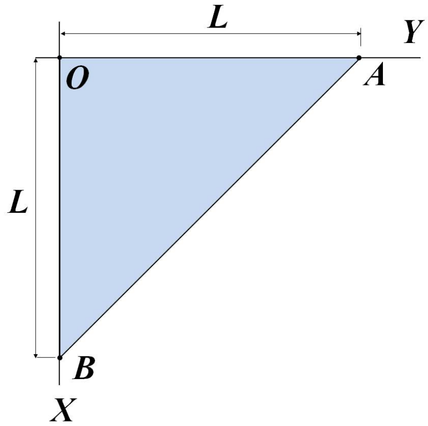
E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.



(ETSIAE, enero 2013)

CUESTIÓN C6.7.

Una placa homogénea de masa M tiene forma de triángulo rectángulo, con catetos de igual longitud L (véase la figura).



Sabiendo que el momento de inercia de la placa con respecto al eje Z (perpendicular al plano del papel) vale: $I_Z = (1/3)ML^2$, el momento de inercia de la placa con respecto a un eje paralelo al anterior y que pasa por el vértice B vale: $I_B = \gamma ML^2$, donde:

A) $\gamma = 5/9$

B) $\gamma = 5/3$

C) $\gamma = 4/9$

D) $\gamma = 2/3$

E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

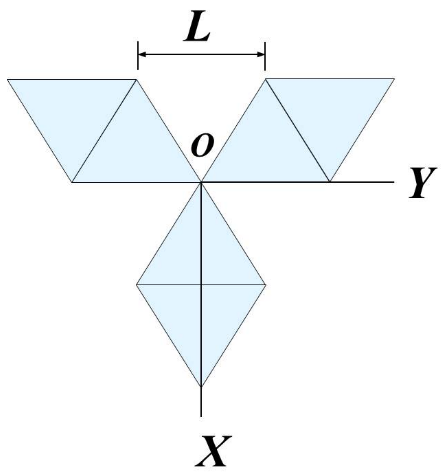
(ETSIAE, julio 2012)

CUESTIÓN C6.8.

Los momentos de inercia de una placa plana, homogénea, de masa m y con forma de triángulo equilátero de lado L, con respecto a dos ejes principales X' e Y' perpendiculares entre sí, contenidos en su plano y que pasan por su centro de masas, valen: $I_{X'} = I_{Y'} = (1/24)mL^2$.

Se utilizan seis placas del tipo citado (masa m y lado L) para construir la pieza mostrada en la figura.

Si I_Z es el momento de inercia de la pieza respecto a un eje perpendicular a su plano y que pasa por el origen del triedro $OXYZ$ mostrado, se puede decir que:



A) $I_Z = (13/4)mL^2$

B) $I_Z = (11/4)mL^2$

C) $I_Z = (11/2)mL^2$

D) $I_Z = (13/2)mL^2$

E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

(ETSIAE, diciembre 2013)

CUESTIÓN C6.9.

En la figura se representa una placa plana homogénea, de masa m, y con las dimensiones especificadas.

Respecto a la posición x_C de su centroide, en el triedro $OZYZ$ indicado, se puede decir que:

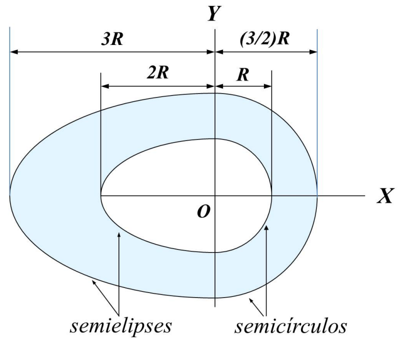
A) $x_C = -(13/4\pi)R$

B) $x_C = -(11/4\pi)R$

C) $x_C = -(7/3\pi)R$

D) $x_C = -(14/3\pi)R$

E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

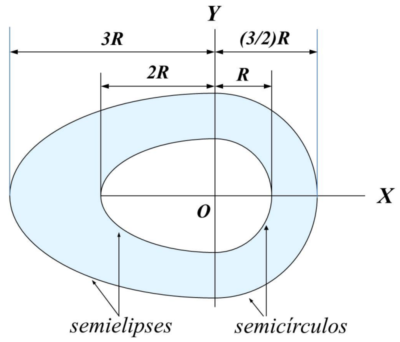


(ETSIAE, autoevaluación 6-G5, diciembre 2014)

CUESTIÓN C 6.10.

En la figura se representa una placa plana homogénea, de masa m, y con las dimensiones especificadas.

Respecto al valor de su momento de inercia en torno al eje perpendicular a su plano y que pasa por el origen O, el eje Z del triedro $OXYZ$ dibujado, se puede decir que:



A) $I_X = (13/16)mR^2$

B) $I_X = (13/4)mR^2$

C) $I_X = (13/8)mR^2$

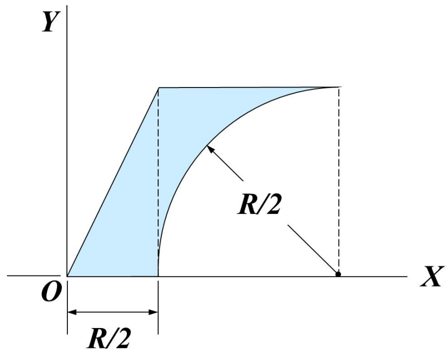
D) $I_X = (13/12)mR^2$

E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

(ETSIAE, autoevaluación 6-G5, diciembre 2014)

CUESTIÓN C6.11.

Si la superficie plana rayada, mostrada en la figura, se hace girar en torno al eje X del triedro de referencia $OXYZ$ indicado, el volumen V del sólido engendrado vale:



A) $V = \frac{\pi}{2}(\frac{17}{3} - \pi)R^3$

B) $V = \frac{\pi}{2}R^3$

C) $V = (\frac{17}{3} - \pi)R^3$

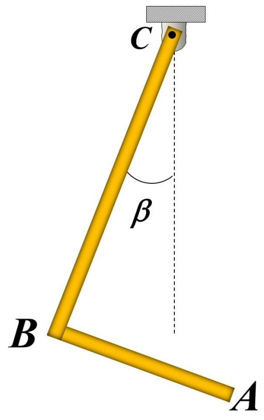
D) $V = \frac{17}{3}\pi R^3$

E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

(EUITA, febrero 1997)

CUESTIÓN C6.12.

El sólido ABC está formado por dos barras homogéneas delgadas, perpendiculares, soldadas entre sí en el punto B. La barra AB tiene una masa $M_{AB} = m$ y una longitud $L_{AB} = L$; la barra BC tiene una masa $M_{BC} = 2m$ y una longitud $L_{BC} = 2L$.



El sólido está suspendido del techo por el extremo C, y en la posición mostrada, se encuentra en equilibrio. Si denotamos por β el ángulo que la barra BC forma con la vertical en esa posición, podemos decir que:

A) $\tan\beta = 1/4$

B) $\tan\beta = 1/2$

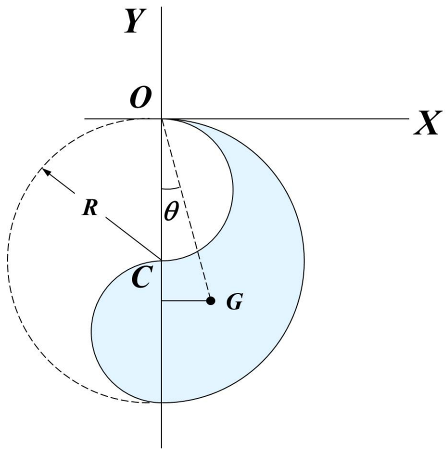
C) $\tan\beta = 1/6$

D) $\tan\beta = 1/8$

E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

(ETSIAE, junio 2011)

CUESTIÓN C6.13.



La placa plana rayada mostrada en la figura, cuyo perímetro está formado por tres semicircunferencias con centros alineados, tiene una densidad superficial de masa σ y está contenida en un plano vertical, fijada mediante un pasador al punto O.

Sea G el punto que representa la posición del centro de masas de la placa.

Respecto al ángulo θ que define la posición de equilibrio de la placa, se puede decir que:

A) $\tan\theta = 5/(4\pi)$

B) $\tan\theta = 4/(5\pi)$

C) $\tan\theta = 3/(5\pi)$

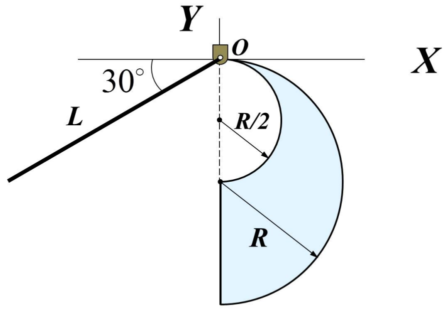
D) $\tan\theta = 3/(4\pi)$

E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

(EUITA, diciembre 2000)

CUESTIÓN C6.14.

La pieza de la figura está constituida por una placa plana homogénea de masa $M_1 = 3m$, con forma de semicírculo de radio R, y a la que se ha practicado un taladro en forma de semicírculo con radio $R/2$, soldada a una varilla homogénea de longitud L y masa $M_2 = m$, inclinada un ángulo de 30º respecto a la horizontal.



Si se sabe que la pieza se encuentra en equilibrio en la posición indicada, ¿cuál debe ser la relación entre R y L para que dicho equilibrio sea posible?

A) $L/R = 28/(9\sqrt{3}\pi)$

B) $L/R = 112/(9\sqrt{3}\pi)$

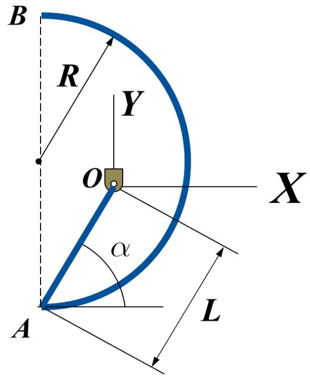
C) $L/R = 56/(3\sqrt{3}\pi)$

D) $L/R = 56/(9\sqrt{3}\pi)$

E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

(ETSIAE, autoevaluación 6-G5, diciembre 2013)

CUESTIÓN C6.15.



El alambre homogéneo OAB está doblado en un arco semicircular de radio R y una sección recta como se muestra en la figura, además se encuentra unido a una articulación en O.

Si la longitud L de la varilla y el ángulo α son los adecuados como para hacer que el el centro de masas del alambre esté en O, se puede decir que:

A) $L^2 = R^2[\sqrt{4+\pi^2} - \pi]$

B) $L^2 = 2R^2 \left(\sqrt{4+\pi^2} - \pi\right)$

C) $\cos\alpha = \pi/\sqrt{4+\pi^2}$

D) $\tan\alpha = 2/\pi$

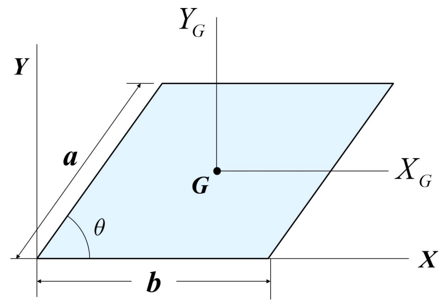
E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

(ETSIAE, autoevaluación 6-G5, diciembre 2013)

CUESTIÓN C6.16.

En la figura se representa una placa plana homogénea, de masa m, con forma de paralelogramo y con las dimensiones indicadas.

Respecto al valor de su momento de inercia respecto al eje X_G que pasa por su centro de masas G, se puede decir que:



A) $I_{X_G} = (1/6)ma^2 \operatorname{sen}^2 \theta$

B) $I_{X_G} = (1/8)ma^2 \operatorname{sen}^2 \theta$

C) $I_{X_G} = (1/10)ma^2 \operatorname{sen}^2 \theta$

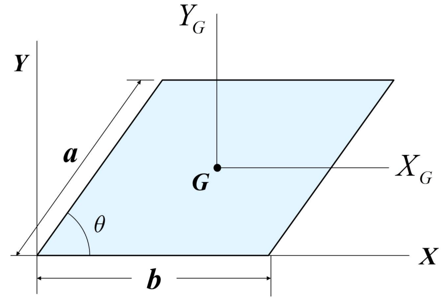
D) $I_{X_G} = (1/12)ma^2 \operatorname{sen}^2 \theta$

E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

(ETSIAE, autoevaluación 6-G5, diciembre 2015)

CUESTIÓN C6.17.

En la figura se representa una placa plana homogénea, de masa m, con forma de paralelogramo y con las dimensiones indicadas.



Respecto al valor de su momento de inercia respecto al eje Y_G que pasa por su centro de masas G, se puede decir que:

A) $I_{Y_G} = (1/6)m\left[a^2 + b^2\cos^2\theta\right]$

B) $I_{Y_G} = (1/12)m\left[a^2 + b^2\cos^2\theta\right]$

C) $I_{Y_G} = (1/6)m\left[b^2 + a^2\cos^2\theta\right]$

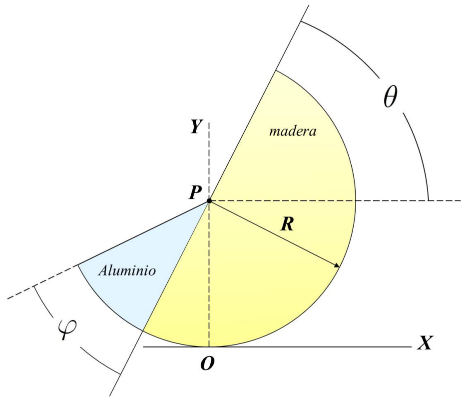
D) $I_{Y_G} = (1/12)m\left[b^2 + a^2\cos^2\theta\right]$

E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

(ETSIAE, autoevaluación 6-G5, diciembre 2015)

CUESTIÓN C6.18.

En la figura se muestra una pieza plana constituida por dos segmentos circulares de radio R, solidariamente unidos, homogéneos, fabricados con madera y aluminio, con densidades $\rho_{Al}/\rho_{ma} = 4$.



Se sabe que el ángulo φ que define el sector de aluminio está fabricado de modo tal que $\operatorname{sen}\varphi = 3/5$.

Si la pieza está en equilibrio, se puede afirmar que:

A) $\tan\theta = 3$

B) $\tan\theta = 9/7$

C) $\tan\theta = 2$

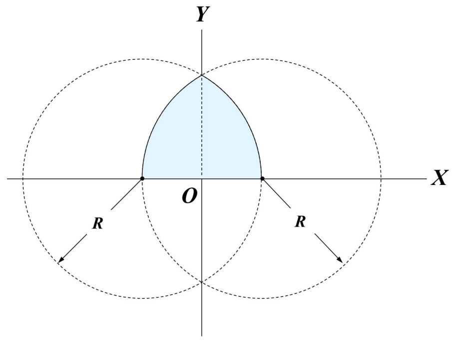
D) $\tan\theta = 9/2$

E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

(ETSIAE, autoevaluación 6-G5, diciembre 2014)

CUESTIÓN C6.19.

Considérese el sólido de revolución engendrado al hacer girar la placa rayada de la figura, en torno al eje X del triedro de referencia indicado.



Respecto al volumen V de dicho sólido, se puede decir que[a]:

A) $V = (3\pi/4)R^3$

B) $V = (5\pi/12)R^3$

C) $V = (7\pi/12)R^3$

D) $V = (1\pi/4)R^3$

E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

[a]En el cálculo puede ser de utilidad saber que:

$$\int \left[2\sqrt{R^2-u^2}-R\right] du = u\left[\sqrt{R^2-u^2}-R\right] - R^2 \arctan\left(\frac{u\sqrt{R^2-u^2}}{u^2-R^2}\right)$$

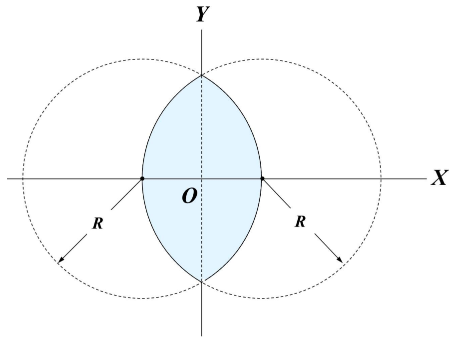
y que

$$\int u\left[2\sqrt{R^2-u^2}-R\right] du = -\frac{1}{2}Ru^2 - \frac{2}{3}(R^2-u^2)^{3/2}$$

(ETSIAE, autoevaluación 6-G5, diciembre 2015)

CUESTIÓN C6.20.

Para la placa plana homogénea, de masa m, mostrada en la figura, el momento de inercia $I_{Z,O}$ con respecto a un eje perpendicular a su plano y que pasa por su centro de masas O, vale [a]:



$$I_{Z,O} = \lambda \left(\frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{4\pi - 3\sqrt{3}} \right) mR^2$$

donde:

A) $\lambda = 9/2$

B) $\lambda = 7/2$

C) $\lambda = 5/2$

D) $\lambda = 3/2$

E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

[a] En el cálculo puede ser de utilidad conocer que

$$\int u^2\sqrt{R^2-u^2}du = \frac{1}{8}\left[u\sqrt{R^2-u^2}(2u^2-R^2) + R^4 \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{R^2-u^2}}\right)\right]$$

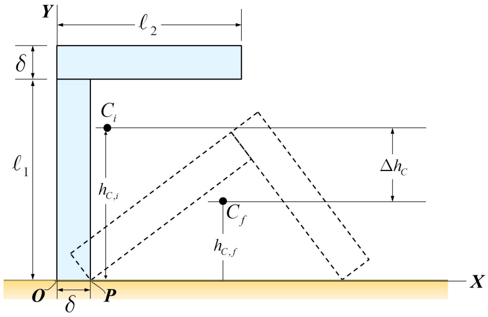
$$\int u\sqrt{R^2-u^2}du = -\frac{1}{3}(R^2-u^2)^{3/2}$$

$$\int \sqrt{R^2-u^2}du = \frac{1}{2}\left[u\sqrt{R^2-u^2} + R^2 \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{R^2-u^2}}\right)\right]$$

(ETSIAE, autoevaluación 6-G5, diciembre 2014)

CUESTIÓN C 6.21.

El techo de un edificio se sostiene gracias a vigas de hormigón que tienen la forma que se muestra en la figura.



Cada viga vertical tiene una longitud $\ell_1 = L$ y una anchura $\delta = (1/6)L$. Cada viga horizontal tiene una longitud $\ell_2 = (11/12)L$ y una anchura $\delta = (1/6)L$. Las vigas verticales tienen una masa $m_1 = (5/4)m$ y las horizontales $m_2 = m$.

Respecto al momento de inercia $I_{Z,P}$ de la viga en torno a un eje perpendicular a su plano y que pasa por el punto de su base P, se puede decir que:

A) $I_{Z,P} = (95/54)mL^2$

B) $I_{Z,P} = (97/27)mL^2$

C) $I_{Z,P} = (97/54)mL^2$

D) $I_{Z,P} = (95/27)mL^2$

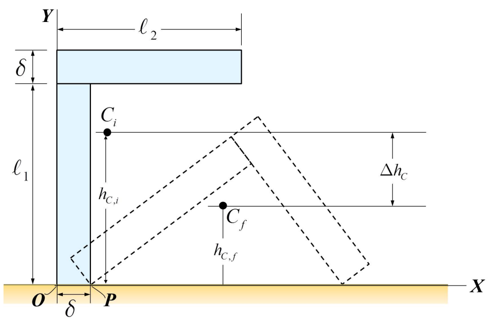
E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

(ETSIAE, autoevaluación 6-G5, diciembre 2015)

CUESTIÓN C6.22.

El techo de un edificio se sostiene gracias a vigas de hormigón que tienen la forma que se muestra en la figura. Cada viga vertical tiene una longitud $\ell_1 = L$ y una anchura $\delta = (1/6)L$.

Cada viga horizontal tiene una longitud $\ell_2 = (11/12)L$ y una anchura $\delta = (1/6)L$. Las vigas verticales tienen una masa $m_1 = (5/4)m$ y las horizontales $m_2 = m$. Cuando se estaban instalando, una de las estructruras empezó a caer antes de que fuera anclada, girando en su plano vertical, en torno al pie P, hasta alcanzar la posición final indicada.



Sea $h_{C,i}$ la distancia vertical al suelo del centroide de la viga en la posición inicial, y $h_{C,f}$ la correspondiente al llegar al suelo.

Respecto al cambio vertical en la posición del centro de masas de la viga, $\triangle h_C \equiv |h_{C,f} - h_{C,i}|$, luego de la caída, se puede decir que:

A) $\triangle h_C = (10/27)L$

B) $\triangle h_C = (5/27)L$

C) $\triangle h_C = (5/54)L$

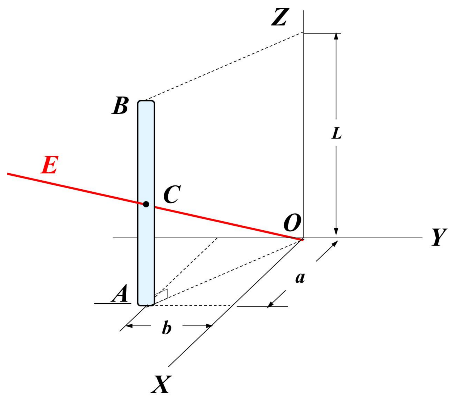
D) $\triangle h_C = (7/27)L$

E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

(ETSIAE, autoevaluación 6-G5, diciembre 2015)

CUESTIÓN C6.23.

Una varilla homogénea AB de longitud L y masa m se encuentra en la posición indicada en la figura.



Si I_E es el momento de inercia de la varilla respecto al eje E que pasa por el origen del triedro cartesiano de referencia $OXYZ$ mostrado y por el centro de masas C de la varilla, se puede decir que:

A) $I_E = \frac{1}{6}mL^2\left[\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+(L^2/4)}\right]$

B) $I_E = \frac{1}{3}mL^2\left[\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+L^2}\right]$

C) $I_E = \frac{1}{12}mL^2\left[\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+(L^2/4)}\right]$

D) $I_E = \frac{1}{24}mL^2\left[\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+L^2}\right]$

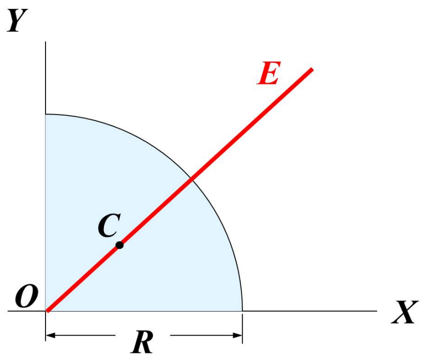
E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

(ETSIAE, autoevaluación 6-G5, diciembre 2013)

CUESTIÓN C 6.24.

En la figura se muestra una placa plana homogénea, de masa m, con la forma de un cuarto de círculo de radio R.

Si I_E es el momento de inercia de la placa con respecto al eje E que pasa por el origen del triedro de referencia mostrado y por el centro de masas C de la placa, se puede decir que:



A) $I_E = \frac{1}{4} m R^2 \left(1 + \frac{2}{\pi}\right)$

B) $I_E = \frac{1}{8} m R^2 \left(1 + \frac{2}{\pi}\right)$

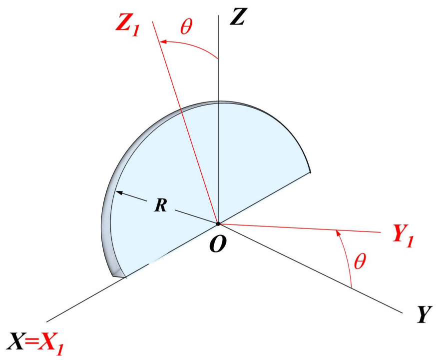
C) $I_E = \frac{1}{8} m R^2 \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)$

D) $I_E = \frac{1}{4} m R^2 \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)$

E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

(ETSIAE, autoevaluación 6-G5, diciembre 2013)

CUESTIÓN C6.25.



En la figura se muestra una placa plana homogénea, de masa m, con la forma de un semidisco de radio R.

La placa está inclinada un ángulo θ respecto del plano XZ del triedro de referencia $OXYZ$ mostrado.

Si $I_{Y,O}$ es el momento de inercia de la placa con respecto al eje Y indicado, se puede decir que:

A) $I_{Y,O} = \frac{1}{4}mR^2(1 + \cos^2\theta)$

B) $I_{Y,O} = \frac{1}{4}mR^2(1 + \tan^2\theta)$

C) $I_{Y,O} = \frac{1}{8}mR^2(1 + 2\cos^2\theta)$

D) $I_{Y,O} = \frac{1}{8}mR^2(1 + 2\tan^2\theta)$

E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

(ETSIAE, autoevaluación 6-G5, diciembre 2013)

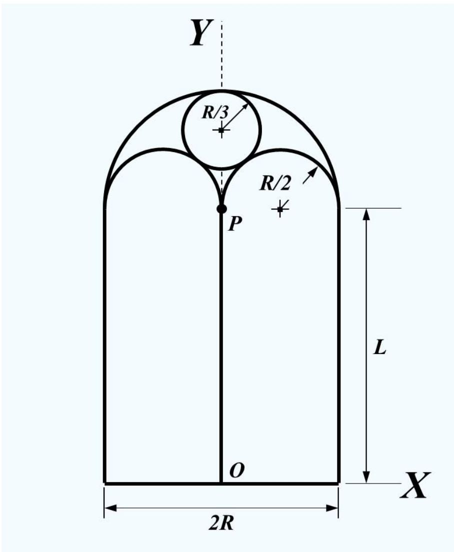
.

TABLA DE SOLUCIONES 6.- GEOMETRÍA DE MASAS			
C6.1	**C**	C6.21	**A**
C6.2	**A**	C6.22	**A**
C6.3	**D**	C6.23	**C**
C6.4	**C**	C6.24	**D**
C6.5	**B**	C6.25	**A**
C6.6	**B**	C6.26	
C6.7	**D**	C6.27	
C6.8	**C**	C6.28	
C6.9	**D**	C6.29	
C6.10	**A**	C6.30	
C6.11	**A**	C6.31	
C6.12	**D**	C6.32	
C6.13	**B**	C6.33	
C6.14	**C**	C6.34	
C6.15	**B**	C6.35	
C6.16	**D**	C6.36	
C6.17	**D**	C6.37	
C6.18	**C**	C6.38	
C6.19	**B**	C6.39	
C6.20	**D**	C6.40	

PROBLEMA P 6.1.

La estructura metálica de la figura tiene una masa total m y está constituida por tubos delgados y homogéneos de acero de sección despreciable. Respecto al triedro de ejes fijos dibujados, determinar:

1. Posición del centroide C de la estructura.
2. Relación entre las magnitudes de R y L si el centroide ha de estar localizado en el punto P.
3. El momento de inercia de la estructura respecto a un eje perpendicular al plano del papel y que pasa por el punto P.



(ETSIAE, autoevaluación 6-G5, 2013)

SOLUCIÓN P 6.1.

1.- $x_C = 0$, $y_C = \frac{\frac{3}{2}L^2+\frac{8}{3}\pi RL+R^2\left(3+\frac{4\pi}{9}\right)}{3L+2R\left(1+\frac{4}{3}\pi\right)}$

.

2.- Si $\gamma \equiv \frac{L}{R}$ entonces $\gamma^2 + \frac{4}{3}\gamma - \left(2 + \frac{8\pi}{27}\right) = 0$

.

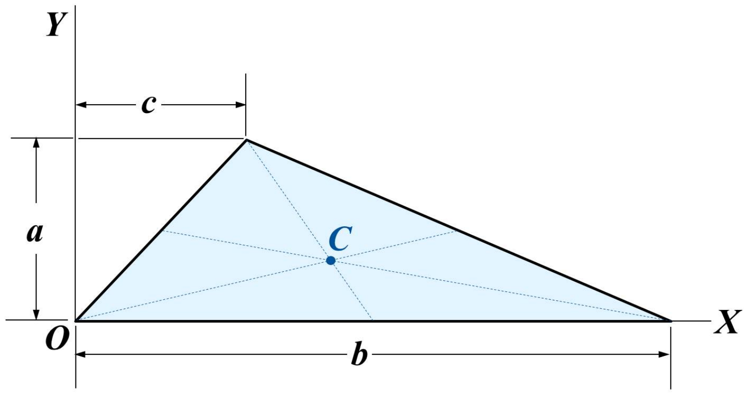
3.- $I_{Z,P} = m\left[\frac{L^3+2RL(R+L)+\frac{1}{3}R^3\left(2+\frac{101\pi}{18}\right)}{3L+2R\left(1+\frac{4}{3}\pi\right)}\right]$

.

PROBLEMA P 6.2.

Para el sólido homogéneo mostrado en la figura, de masa m, sección triangular y espesor despreciable, se pide:

1. Coordenadas del centro de masas, C, respecto al triedro $OXYZ$ indicado.
2. Tensor de inercia $\mathbf{I}_O$ respecto al triedro $OXYZ$
3. Tensor de inercia $\mathbf{I}_C$ respecto a un triedro $CXYZ$ paralelo al anterior pero con origen en el centro de masas del sólido (tensor central).



(ETSIAE, autoevaluación 6-G5, diciembre 2015)

SOLUCIÓN P 6.2.

.

1.- $x_C = \frac{1}{3}(b+c)$, $y_C = \frac{1}{3}a$

. 2.- $\mathbf{I}_O = \begin{pmatrix} I_x & -P_{xy} & 0 \\ -P_{xy} & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{1}{6}ma^2 \\ I_y &= \frac{1}{6}m(b^2+c^2+bc) \\ I_z &= \frac{1}{6}m(a^2+b^2+c^2+bc) \\ P_{xy} &= \frac{1}{12}m\,\frac{a}{(b-c)^2}(b^3-3bc^2+2c^3) \end{aligned}$$

3.- $\mathbf{I}_C = \begin{pmatrix} I_{x_C} & -P_{x_C y_C} & 0 \\ -P_{x_C y_C} & I_{y_C} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z_C} \end{pmatrix}$

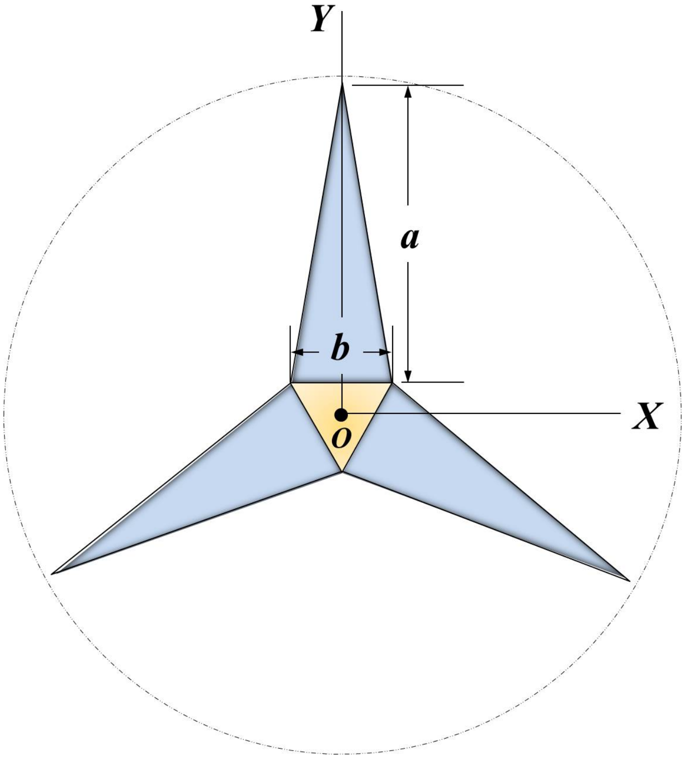
$$\begin{aligned} I_{x_C} &= \frac{1}{18}ma^2 \\ I_{y_C} &= \frac{1}{18}m(b^2+c^2-bc) \\ I_{z_C} &= \frac{1}{18}m(a^2+b^2+c^2-bc) \\ P_{xy} &= \frac{1}{12}m\,\frac{a}{(b-c)^2}(b^3-3bc^2+2c^3) - \frac{1}{9}m\,a(b+c) \end{aligned}$$

PROBLEMA P 6.3.

En la figura se muestra un sólido homogéneo de masa m, constituido por cuatro placas triangulares fabricadas del mismo material.

Tres de ellas tienen la forma de un triángulo isósceles; la central tiene forma de triángulo equilátero, con las dimensiones a y b indicadas.

Determinar el tensor de inercia del sólido, $\mathbf{I}_C$, con respecto al triedro indicado, con origen en el centro de la placa equilátera, en función de los parámetros m, a y b.



(ETSIAE, autoevaluación 6-G5, diciembre 2013)

SOLUCIÓN P 6.3.

$$.\quad \mathbf{I}_C = \begin{pmatrix} I_x & -P_{xy} & 0 \\ -P_{xy} & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix},$$

$$I_x = I_y = \frac{1}{2} I_z$$

$$I_z = \frac{1}{12}\left(\frac{m}{6a+\sqrt{3}b}\right)\left[\sqrt{3}b^3 + 12a^3 + 9ab^2 + 8\sqrt{3}a^2 b\right]$$

$$P_{xy} = \frac{\sqrt{3}}{36}\left(\frac{m}{6a+\sqrt{3}b}\right)\left[4a^3 + 3ab^2 + 4\sqrt{3}a^2 b\right]$$

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

PROBLEMA P 6.4.

En la figura se representa un sólido rígido de masa total m con forma de "tentetieso". Está constituido por:

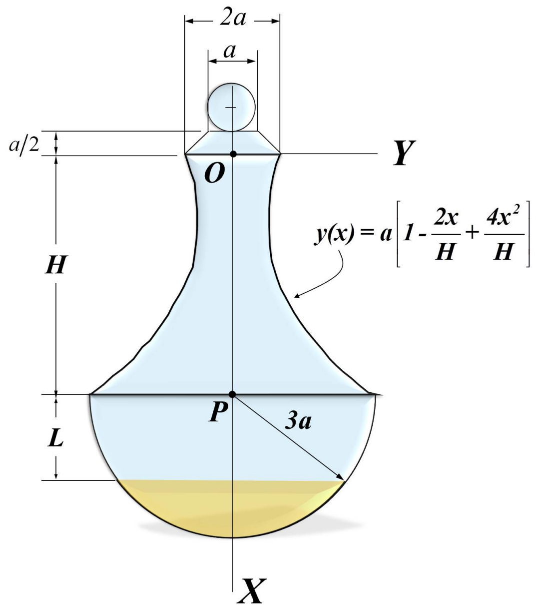
- una esfera de radio $a/2$,
- un tronco de cono recto con bases de radios $a/2$ y a y altura $a/2$,
- un cuerpo de revolución, cuya forma se obtiene haciendo girar en torno al eje X del triedro indicado el área plana delimitada por la función:

$$y(x) = a\left[1 - \frac{2x}{H} + \frac{4x^2}{H^2}\right]$$

  y las rectas $x = 0$ y $x = H$, siendo a y H constantes positivas,
- una semiesfera de radio $3a$, todas ellas soldadas con sus centros en la misma recta vertical.

Todos los sólidos son homogéneos y macizos, y a excepción del extremo de la semiesfera en contacto con el suelo horizontal, un casquete esférico de densidad $n\rho$, con $n \geq 1$, el resto de los sólidos está fabricado del mismo material, con densidad ρ. Se pide:

1. Posición del centro de masas C del tentetieso.
2. Momentos de inercia del tentetieso respecto a los ejes del triedro $OXYZ$ dibujado.
3. Suponiendo $H = 5a$ y $n = 1$ (todo el sólido hecho del mismo material, sin contrapeso), determinar si el centro de masas del sólido se encontrará por encima o por debajo del punto P indicado (este aspecto es importante en la determinación de la estabilidad del tentetieso).



(ETSIAE, autoevaluación 6-G5, diciembre 2015)

	Esfera (1)	Cono (2)	Sólido de revolución (3)	Casquete superior (4)	Casquete inferior (5)
V_i	$(1/6)\,\pi a^3$	$(7/24)\,\pi a^3$	$(11/5)\,\pi a^2 H$	$\pi\left[9a^2L-(L^3/3)\right]$	$(\pi/3)(L-3a)^2(6a+L)$
$x_{C,i}$	$-a$	$-(11/56)a$	$(49/66)H$	$H+\frac{L}{2}-\frac{L^3}{4(27a^2-L^2)}$	$H+\frac{3L}{4}+\frac{27a^2}{4(6a+L)}$
$I_{x,i}$	$(1/10)m_1a^2$	$(93/80)m_2a^2$	$(277/126)m_3a^2$	$\frac{3}{2}m_4\left(\frac{81a^4-6a^2L^2+\frac{1}{5}L^4}{27a^2-L^2}\right)$	$\frac{3}{10}m_5\left(\frac{3a-L}{6a+L}\right)\left(24a^2+9aL+L^2\right)$
$I_{y,i}$ $I_{z,i}$	$(11/10)\,m_1a^2$	$(25/112)m_2a^2$	$\left(\frac{277}{252}a^2+\frac{142}{231}H^2\right)m_3$	$\frac{3m_4}{(27a^2-L^2)}\left[36a^2H(H+L)\right.$ $-HL^2\left(2L+\frac{4}{3}H\right)-\frac{3}{5}L^4$ $\left.+\,a^2\left(81a^2+6L^2\right)\right]$	$\frac{3m_5}{(L-3a)^2(6a+L)}\left[81a^4(2H-L)+\frac{3}{5}L^5\right.$ $+a^3\left(\frac{1296}{5}a^2+72H^2-6a^2L^3\right)$ $\left.-36a^2HL(H-L)+HL^3\left(\frac{4}{3}H+2L\right)\right]$

SOLUCIÓN P6.4.

1.- $x_C = \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{4} V_i x_{c,i}\right) + nV_5 x_{c,5}}{\left(\sum_{i=1}^{4} V_i\right) + nV_5}$, $y_C = 0$

.

2.-
$$m_i = \frac{V_i}{\left(\sum_{i=1}^{4} V_i\right) + nV_5} \quad \forall i = 1, \ldots 4 \quad , \quad m_5 = n\frac{V_5}{\left(\sum_{i=1}^{4} V_i\right) + nV_5}$$
$$I_x = \sum_{i=1}^{5} I_{x_i}$$
$$I_y = I_z = \sum_{i=1}^{5} I_{y_i}$$

.

3.- $x_C = \frac{28965}{5656} a \simeq 5.12a$ (el tentetieso es estable)

.

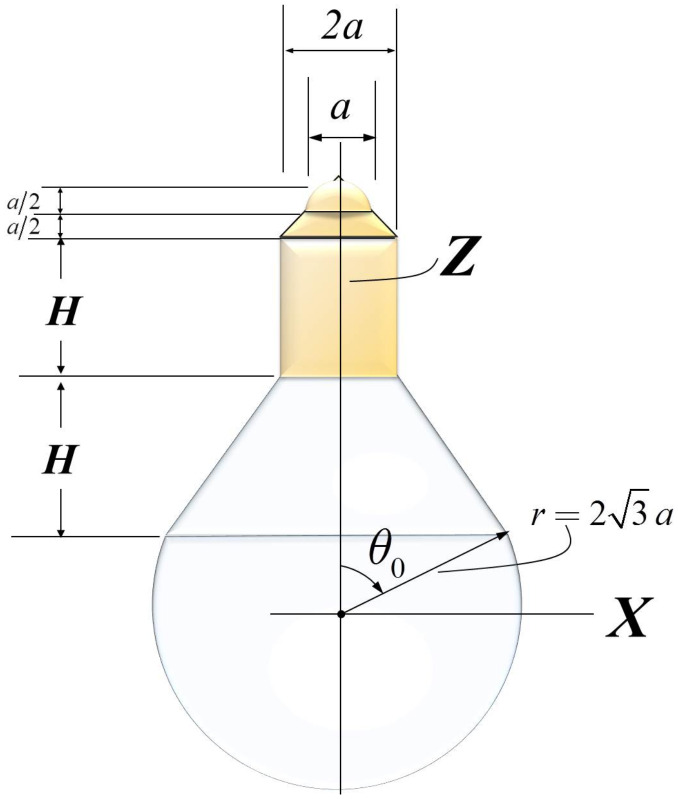
PROBLEMA P6.5.

Una bombilla está constituida por un casquete esférico hueco de cristal, de radio $r = 2\sqrt{3}a$ y densidad ρ_c, unido solidariamente a un cono recto truncado del mismo material y con las dimensiones especificadas en la figura.

El casquillo de la bombilla es metálico, también hueco, fabricado con un material de densidad ρ_m. Está conformado por un cilindro, un tronco de cono y una semiesfera, en la forma y con las dimensiones indicadas.

Si la masa total de la bombilla es m, el espesor de todos los materiales despreciable, y el ángulo θ_0 que especifica el tamaño del casquete esférico vale $\theta_0 = 60^{\circ}$, se pide:

1. Posición del centro de masas C de la bombilla.
2. Momentos de inercia de la bombilla respecto a los ejes del triedro $OXYZ$ dibujado.



(ETSIAE, autoevaluación 6-G5, diciembre 2014)

	Casquete (1)	Tronco de cono (2)	Cilindro (3)	Tronco de cono (4)	Semiesfera (5)
S_i	$36\pi a^2$	$4\pi a\sqrt{H^2+4a^2}$	$2\pi aH$	$\frac{3\sqrt{2}}{4}\pi a^2$	$\frac{\pi}{2}a^2$
$z_{C,i}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}\,a$	$\sqrt{3}a+\frac{5}{12}H$	$\sqrt{3}a+\frac{3}{2}H$	$2H+\sqrt{3}a+\frac{2}{9}a$	$2H+(\sqrt{3}+\frac{1}{2})a+\frac{1}{4}a$
$I_{z,i}$	$9m_1\,a^2$	$5m_2\,a^2$	$m_3\,a^2$	$\frac{5}{8}m_4\,a^2$	$\frac{1}{6}m_5\,a^2$
$I_{x,i}$ $I_{y,i}$	$\frac{15}{2}m_1\,a^2$	$\frac{m_2}{12}[66a^2+10\sqrt{3}aH+3H^2]$	$m_3[\frac{7}{2}a^2+3\sqrt{3}aH+\frac{7}{3}H^2]$	$\frac{m_4}{72}[(133+16\sqrt{3})\,a^2+$ $+16(2+9\sqrt{3})aH+144H^2]$	$\frac{m_5}{6}\left[(22+9\sqrt{3})\,a^2+\right.$ $\left.+6(3+4\sqrt{3})aH+24H^2\right]$

SOLUCIÓN P6.5.

1.- $z_C = \frac{[S_1 z_{c,1}+S_2 z_{c,2}+n(S_3 z_{c,3}+S_4 z_{c,4}+S_5 z_{c,5})]}{S_1+S_2+n(S_3+S_4+S_5)}$, $y_C = 0$

.

2.-

$$m_i = \frac{S_i}{S_1+S_2+n(S_3+S_4+S_5)} \quad i = 1,\dots 2$$

$$m_i = \frac{nS_i}{S_1+S_2+n(S_3+S_4+S_5)} \quad i = 3,\dots 5$$

$$I_z = \sum_{i=1}^{5} I_{z_i}$$

$$I_x = I_y = \sum_{i=1}^{5} I_{x_i}$$

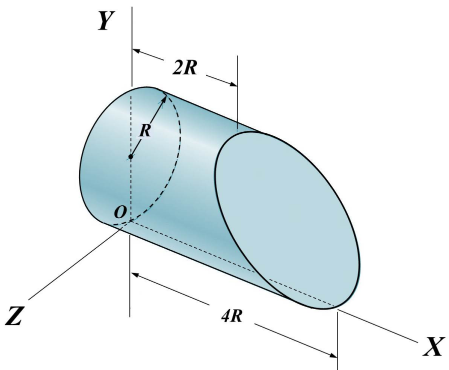
.

PROBLEMA P6.6.

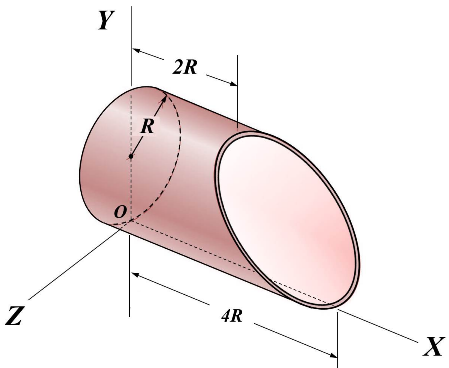
En la figura se representan sendos troncos de cilindros rectos, homogéneos, de la misma masa m, y con las dimensiones indicadas.

Se pide, determinar:

1. Superficie y volumen de cada cilindro.
2. Posición del centroide C de cada uno de los sólidos respecto al triedro $OXYZ$ dibujado, con origen en el punto de apoyo de una de las bases, y en el que el eje X coincide con la generatriz de contacto del cilindro con el suelo horizontal, -el plano XZ-.
3. Momentos de inercia de cada uno de los sólidos respecto a los ejes coordenados.



Tronco de cilindro macizo



Tronco de cilindro hueco

(ETSIAE, autoevaluación 6-G5, diciembre 2013)

SOLUCIÓN P6.6.

1.-

$$S^{\text{macizo}} = 8\pi R^2 \quad , \quad S^{\text{hueco}} = 6\pi R^2$$

$$V^{\text{macizo}} = 3\pi R^3$$

.

2.-

$$x_C^{\text{macizo}} = \frac{37}{24}R \quad , \quad x_C^{\text{hueco}} = \frac{19}{12}R$$

$$y_C^{\text{macizo}} = \frac{11}{12}R \quad , \quad y_C^{\text{hueco}} = \frac{5}{6}R$$

$$z_C^{\text{macizo}} = 0 \quad , \quad z_C^{\text{hueco}} = 0$$

.

3.-

$$I_{O,x}^{\text{macizo}} = \frac{19}{24}mR^2 \quad , \quad I_{O,x}^{\text{hueco}} = \frac{5}{3}mR^2$$

$$I_{O,y}^{\text{macizo}} = \frac{7}{2}mR^2 \quad , \quad I_{O,y}^{\text{hueco}} = 4mR^2$$

$$I_{O,z}^{\text{macizo}} = \frac{91}{24}mR^2 \quad , \quad I_{O,z}^{\text{hueco}} = \frac{31}{6}mR^2$$

.

PROBLEMA P6.7.

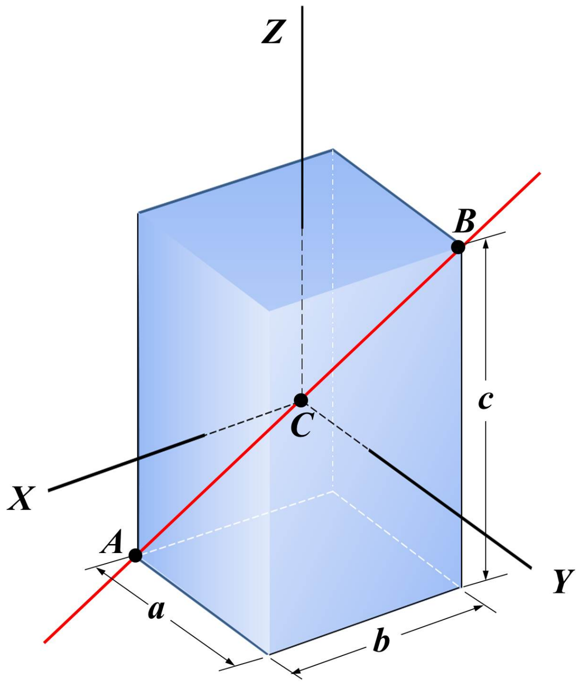
En la figura se muestra un prisma homogéneo, de masa m y aristas a, b y c. Considérese el eje que pasa por los vertices opuestos A y B.

A) Si el prisma es **macizo**, se pide:

1. Momentos de inercia del prisma respecto a los tres ejes coordenados que pasan por su centro de masas C.
2. Momento de inercia del prisma respecto al eje AB.
3. Particularizar al caso $a = b = c \equiv \ell$ (cubo macizo).

B) Si el prisma es **hueco**, se pide:

4. Momentos de inercia del prisma respecto a los tres ejes coordenados que pasan por el centro de masas C.
5. Momento de inercia del prisma respecto al eje AB.
6. Particularizar al caso $a = b = c \equiv \ell$ (cubo hueco).



(ETSIAE, autoevaluación 6-G5, diciembre 2013)

SOLUCIÓN P6.7.

A)

$$1.- \quad I_x = \frac{1}{12}m(a^2+c^2) \quad , \quad I_y = \frac{1}{12}m(b^2+c^2) \quad , \quad I_z = \frac{1}{12}m(a^2+b^2)$$

$$2.- \quad I_{AB} = \frac{1}{6}\left(\frac{m}{a^2+b^2+c^2}\right)\left[a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right]$$

$$3.- \quad I_x = I_y = I_z = I_{AB} = \frac{1}{6}m\ell^2$$

.

B)

$$4.- \quad I_x = \frac{1}{12}\left(\frac{m}{ab+bc+ca}\right)\left[a^3(b+c)+c^3(a+b)+3\,abc(a+c)\right]$$

$$I_y = \frac{1}{12}\left(\frac{m}{ab+bc+ca}\right)\left[b^3(c+a)+a^3(b+c)+3\,abc(b+a)\right]$$

$$I_z = \frac{1}{12}\left(\frac{m}{ab+bc+ca}\right)\left[c^3(a+b)+b^3(c+a)+3\,abc(c+b)\right]$$

$$5.- \quad I_{AB} = \frac{1}{6}\left(\frac{m}{(ab+bc+ca)(a^2+b^2+c^2)}\right)\times$$

$$\times\left\{(a^3b^3+b^3c^3+a^3c^3)+2abc\left[a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)\right]\right\}$$

$$6.- \quad I_x = I_y = I_z = I_{AB} = \frac{5}{18}m\ell^2$$

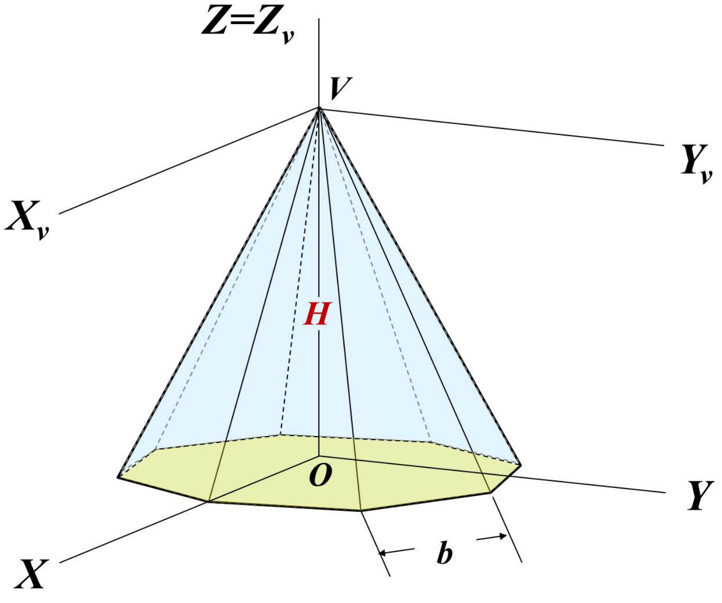
.

PROBLEMA P6.8.

Una pirámide regular es una pirámide recta cuya base es un polígono regular. En este tipo de pirámides cada cara lateral es un triángulo isósceles igual a los demás.

En la figura se representa una pirámide regular de n lados, homogénea, de masa m, con lado de la base b y altura H. Se pide, determinar:

1. Área de la pirámide, $A_p(n)$.
2. Volumen de la pirámide, $V_p(n)$.
3. Posición del centroide C de la pirámide respecto al triedro $OXYZ$ dibujado.
4. Momento de inercia del polígono de la base con respecto a un eje perpendicular a su plano y que pasa por su centro, $I_{O,z}^{\text{polígono}}$.
5. Momento de inercia de la pirámide con respecto al mismo eje del apartado anterior, $I_{O,z}$.
6. Tensor de inercia de la pirámide respecto al triedro (O_v, X_v, Y_v, Z_v) mostrado, cuyo origen se sitúa en el vértice V.
7. Particularizar el resultado anterior si la pirámide es:
   a) Un tetraedro regular.
   b) Una pirámide regular de base cuadrada.



(ETSIAE, autoevaluación 6-G5, diciembre 2015)

SOLUCIÓN P6.8.

1.- $A_p(n) = \frac{n}{4}b\left[b\cot\left(\frac{\pi}{n}\right) + 2\sqrt{H^2 + \frac{b^2}{4}\cot^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}\right]$

.

2.- $V_p(n) = \frac{1}{12}n\cot\left(\frac{\pi}{n}\right)b^2 H$

.

3.- $x_C = y_C = 0, \quad z_C = H/4 \qquad$ (independiente de n)

.

4.- $I_{O,z}^{\text{polígono}} = \frac{1}{8}mb^2\left[\frac{1}{3} + \cot^2\left(\frac{\pi}{n}\right)\right]$

.

5.- $I_{O,z} = \frac{3}{40}mb^2\left[\frac{1}{3} + \cot^2\left(\frac{\pi}{n}\right)\right]$

.

. 6.- $\mathbf{I}_V = \begin{pmatrix} I_{V,x} & 0 & 0 \\ 0 & I_{V,y} & 0 \\ 0 & 0 & I_{V,z} \end{pmatrix},$

$$I_{V,x} = I_{V,y} = \frac{3}{5}m\left[H^2 + \frac{1}{16}\left[\frac{1}{3} + \cot^2\left(\frac{\pi}{n}\right)\right]b^2\right]$$
$$I_{V,z} = \frac{3}{40}mb^2\left[\frac{1}{3} + \cot^2\left(\frac{\pi}{n}\right)\right]$$

7.- $I_{O,z}^{\text{tetraedro}} = \dfrac{1}{20}mb^2 \quad , \quad I_{O,x}^{\text{tetraedro}} = \dfrac{3}{5}m\left[H^2 + \dfrac{1}{24}b^2\right]$

$I_{O,z}^{\text{cuadrada}} = \dfrac{1}{10}mb^2 \quad , \quad I_{O,x}^{\text{cuadrada}} = \dfrac{3}{5}m\left[H^2 + \dfrac{1}{12}b^2\right]$

.