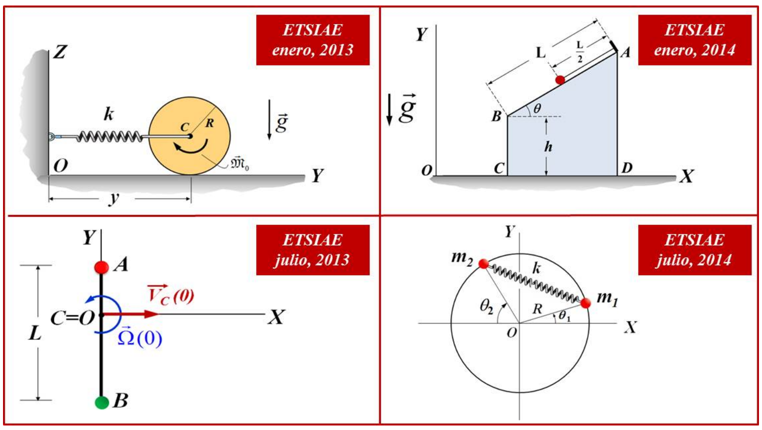
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO

FÍSICA I

CUESTIONES DE EVALUACIÓN CONTINUA Y PROBLEMAS DE EXAMEN

Fernando Jiménez Lorenzo

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



7.- CINEMÁTICA DEL SÓLIDO RÍGIDO

7 Cinemática del Sólido Rígido

CUESTIÓN C7.1.

Un sólido rígido se mueve respecto a un triedro inercial de referencia $S(O; X, Y, Z)$, de forma tal que uno de sus puntos se mantiene fijo en el origen de S.

Sean $\vec{V_C}$ y $\vec{a_C}$ la velocidad y la aceleración de su centro de masas y $\vec{\Omega}$ y $\vec{\alpha}$ su velocidad y su aceleración angulares de rotación, todo ello medido respecto a S. Se puede decir que:

A) Si la trayectoria del centro de masas está contenida en un plano, el movimiento del sólido es plano.

B) Si $\vec{\Omega}$ y $\vec{\alpha}$ son paralelos, la trayectoria del centro de masas está contenida en un plano.

C) Los vectores $\vec{\Omega}$ y $\vec{\alpha}$ son paralelos.

D) Los vectores $\vec{a_C}$ y $\vec{\Omega}$ son perpendiculares.

E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

(ETSIAE, diciembre 2013)

CUESTIÓN C7.2.

Un sólido rígido se mueve respecto a un triedro inercial de referencia $S(O; X, Y, Z)$. Sean $\vec{\Omega}$ y $\vec{\alpha}$ su velocidad y su aceleración angular de rotación. Se puede decir que:

A) Si en un cierto instante los puntos A y B del sólido tienen velocidad nula, entonces los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\vec{\Omega}$ son paralelos.

B) Si en un cierto instante los puntos A y B del sólido tienen velocidad nula, entonces los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\vec{\Omega}$ son perpendiculares.

C) Todos los puntos del sólido situados en un eje paralelo a $\vec{\Omega}$ y que pasa por el centro de masas tienen la misma aceleración.

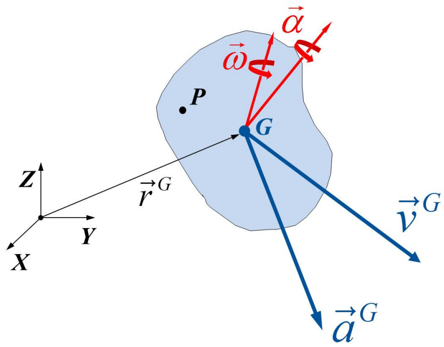
D) Todos los puntos del sólido situados en un eje paralelo a $\vec{\alpha}$ y que pasa por el centro de masas tienen la misma aceleración.

E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

(ETSIAE, autoevaluación 7-G5, diciembre 2013)

CUESTIÓN C7.3.

En el instante mostrado en la figura la velocidad y la aceleración del centro de masas del sólido, $\vec{v}^G$ y $\vec{a}^G$, así como su velocidad y aceleración angulares $\vec{\omega}$ y $\vec{\alpha}$ son conocidos.



Para cualquier otro punto P del sólido, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **falsa**?

A) $\vec{v}^P \cdot \vec{\omega} = \vec{v}^G \cdot \vec{\omega}$

B) $\vec{a}^P \cdot \vec{\omega} = \vec{a}^G \cdot \vec{\omega}$, solo si el movimiento es plano.

C) $\vec{a}^P \cdot \vec{\alpha} = \vec{a}^G \cdot \vec{\alpha}$, solo si el movimiento es plano.

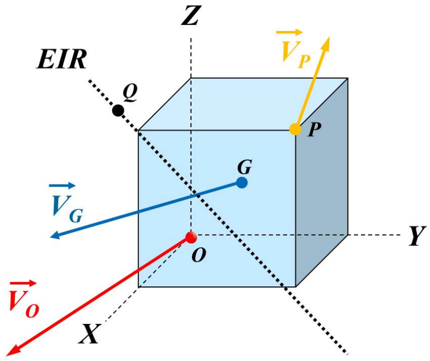
D) $\vec{v}^P \cdot \vec{\alpha} + \vec{a}^P \cdot \vec{\omega} = \vec{v}^G \cdot \vec{\alpha} + \vec{a}^G \cdot \vec{\omega}$

E) $\vec{a}^P \cdot \vec{\alpha} + \vec{v}^P \cdot \vec{\omega} = \vec{a}^G \cdot \vec{\alpha} + \vec{v}^G \cdot \vec{\omega}$

(ETSIAE, autoevaluación 7-G5, octubre 2014)

CUESTIÓN C7.4.

El cubo de arista unidad de la figura, considerado como sólido rígido, realiza en el instante mostrado una rotación instantánea en la que las velocidades de tres de sus puntos son:



$$\vec{r}^{\,O} = \vec{0} \qquad \vec{V}^{O} = 4\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$$
$$\vec{r}^{\,P} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k} \qquad \vec{V}^{P} = \vec{\jmath} + \vec{k}$$
$$\vec{r}^{\,G} = \frac{1}{2}(\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}) \qquad \vec{V}^{G} = 2\vec{\imath} + \frac{1}{2}(-\vec{\jmath} + \vec{k})$$

La recta que define el eje instantáneo de rotación (EIR) en ese instante, -el punto Q es un punto genérico de esa recta-, viene dada por:

A) $y = x/2 \quad , \quad z = 2(1 + x)$

B) $y = 2x \quad , \quad z = 2(1 - x)$

C) $y = x \quad , \quad z = 2(1 - x)$

D) $y = 2x \quad , \quad z = 2(1 + x)$

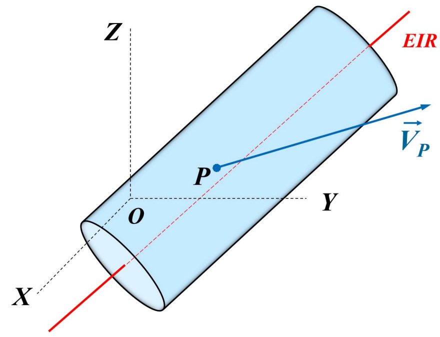
E) Ninguna, pues no se cumple la condición cinemática de rigidez.

(ETSIAE, autoevaluación 7-G5, octubre 2014)

CUESTIÓN C7.5.

En un cierto instante un sólido rígido se encuentra en rotación instantánea alrededor del eje definido por la recta -véase la figura-:

$$x = -1 - 2z \qquad , \qquad y = 2(1 + z)$$



Si en ese mismo instante la velocidad del punto $P(1, 1, 1)$ del sólido es $\vec{v}^{\,P} = -6\vec{\imath} - 8\vec{\jmath}$, su velocidad angular $\vec{\Omega}$ es:

A) $\vec{\Omega} = 2(2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} - \vec{k})$

B) $\vec{\Omega} = 2(2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + \vec{k})$

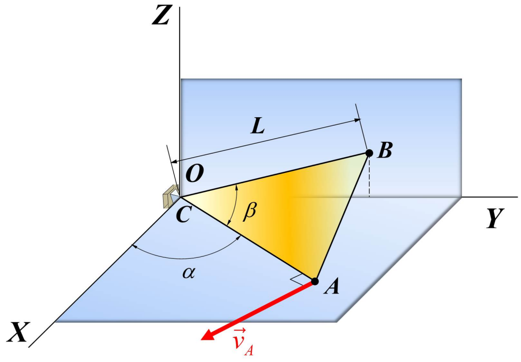
C) $\vec{\Omega} = 2(2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k})$

D) $\vec{\Omega} = 2(-2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k})$

E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

(ETSIAE, autoevaluación 7-G5, octubre 2014)

CUESTIÓN C7.6.



En la figura se muestra una placa plana ABC con forma de triángulo isósceles, cuyos lados CA y CB de longitud L forman un ángulo $\beta = 30^o$ entre sí, la cual se está moviendo con respecto al triedro inercial de referencia $S(O; X, Y, Z)$, con las siguientes restricciones:

- El vértice C del triángulo está unido a una rótula fija en O.
- El lado CA se mueve sobre el plano horizontal XY, de modo que la velocidad del vértice A, $\vec{v}_A$, tiene módulo constante y es perpendicular a ese lado.
- El lado OB se mueve a lo largo de la pared vertical.

Sabiendo que en el instante de interés t^*, el ángulo que forma el lado CA de la placa con el eje X es $\alpha = 60^o$, ¿cuánto vale en ese instante la velocidad angular de la placa, $\vec{\omega}(t^*)$?

A) $\vec{\omega}(t^*) = -\frac{v_A}{L}\left[\frac{1}{\sqrt{6}}\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}\right]$

B) $\vec{\omega}(t^*) = -\frac{v_A}{L}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\imath} + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{\jmath} + \vec{k}\right]$

C) $\vec{\omega}(t^*) = -\frac{v_A}{L}\left[\vec{\imath} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\jmath} + \vec{k}\right]$

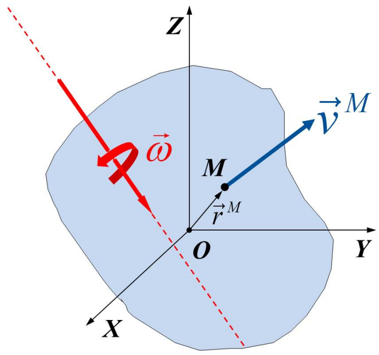
D) $\vec{\omega}(t^*) = -\frac{v_A}{L}\left[\frac{1}{\sqrt{6}}\vec{\imath} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\jmath} + \vec{k}\right]$

E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

(ETSIAE, autoevaluación 7-G5, octubre 2014)

CUESTIÓN C7.7.

Un sólido rígido se mueve respecto de un triedro de referencia de forma tal que en todo instante la velocidad de la partícula del sólido que pasa por el punto cuyo vector de posición es $\vec{r}^{\,M} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$ vale $\vec{v}^{\,M} = \vec{\jmath} + \vec{k}$ -véase la figura-.



Se sabe que en todo instante la velocidad angular del sólido es constante e igual a $\vec{\omega} = \vec{\imath} + 2(\vec{\jmath} - \vec{k})$. ¿Cuál de las siguiente afirmaciones es **falsa**?

A) El movimiento del sólido es una rotación pura alrededor de un eje fijo.

B) La velocidad de mínimo deslizamiento del sólido es nula.

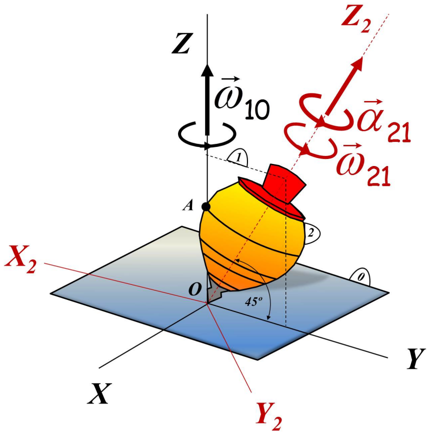
C) La aceleración de la partícula del sólido que pasa por el punto M es $\vec{a}^{\,M} = 4\vec{\imath} - (\vec{\jmath} - \vec{k})$

D) El eje instantáneo de rotación EIR -caso de existir- es la recta: $2x - y = 4 \ , \ y + z = 2$

E) La partícula del sólido que pasa por M describe una circunferencia de radio $R = \sqrt{2}$.

(ETSIAE, autoevaluación 7-G5, octubre 2014)

CUESTIÓN C7.8.



El movimiento de una peonza (sólido "2") es tal que en el instante mostrado en la figura está girando en torno a su eje de simetría (eje Z_2) con velocidad y aceleración angulares $\vec{\omega}_{21} = \omega\vec{k}_2$ y $\vec{\alpha}_{21} = 2\omega^2\vec{k}_2$, respectivamente.

El eje de simetría de la peonza está contenido siempre en un plano vertical (sólido "1") que gira en torno al eje Z de un triedro fijo $S_0(OXYZ)$ (sólido "0") con velocidad angular constante $\vec{\omega}_{10} = \omega\vec{k}$.

La aceleración angular de la peonza respecto a S_0, en el instante mostrado, $\vec{\alpha}_{20}$, vale:

A) $\vec{\alpha}_{20} = (\omega^2/\sqrt{2})\,[2\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}]$

B) $\vec{\alpha}_{20} = (2\omega^2/\sqrt{2})\,[-\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}]$

C) $\vec{\alpha}_{20} = (\omega^2/\sqrt{2})\,[-\vec{\imath} + 2(\vec{\jmath} + \vec{k})]$

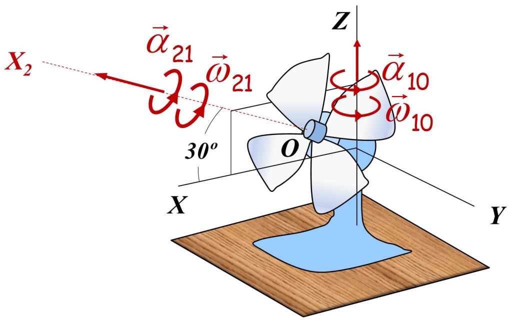
D) $\vec{\alpha}_{20} = (\omega^2/\sqrt{2})\,[\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}]$

E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

(ETSIAE, enero 2013)

CUESTIÓN C 7.9.

El movimiento de un ventilador es tal que, en el instante mostrado en la figura, sus aspas (sólido 2) están girando en torno a un eje X_2 perpendicular al plano que las contiene, con velocidad y aceleración angulares $\vec{\omega}_{21} = \omega\,\vec{\imath}_2$ y $\vec{\alpha}_{21} = \omega^2\,\vec{\imath}_2$, respectivamente.



El eje X_2 está unido al cuerpo del ventilador mediante un soporte (sólido 1) en O; dicho soporte gira en torno al eje Z de un triedro fijo $S_0(O; X, Y, Z)$ (sólido 0), con velocidad y aceleraciones angulares $\vec{\omega}_{10} = \omega\,\vec{k}$ y $\vec{\alpha}_{10} = (\omega^2/2)\,\vec{k}$.

Si $\vec{\alpha}_{20}$ es la aceleración de las aspas respecto a S_0, en el instante mostrado, entonces:

A) $\vec{\alpha} = \omega^2\,[(\sqrt{3}/2)(\vec{\imath} + \vec{\jmath}) + \vec{k}]$

B) $\vec{\alpha} = \omega^2\,[\sqrt{3}\,\vec{\imath} + (\sqrt{3}/2)\vec{\jmath} + 2\vec{k}]$

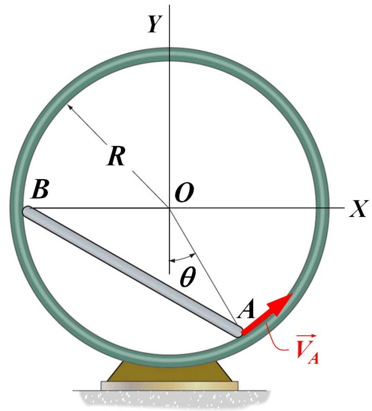
C) $\vec{\alpha} = \omega^2\,[(\sqrt{3}/2)(\vec{\imath} + \vec{\jmath}) + 2\vec{k}]$

D) $\vec{\alpha} = \omega^2\,[\sqrt{3}\,\vec{\imath} + (\sqrt{3}/2)\vec{\jmath} + (3/2)\vec{k}]$

E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

(ETSIAE, diciembre 2013)

CUESTIÓN C 7.10.



El extremo A de la barra mostrada en la figura se mueve en el interior de un aro de radio R con una velocidad de módulo constante V_A.

Si $\vec{a}_B$ es la aceleración del otro extremo B de la barra en el instante indicado, en el que $\theta = 30^{\text{o}}$, entonces:

A) $\vec{a}_B = (V_A^2/2R)\,(\sqrt{3}\vec{\imath} - \vec{\jmath})$

B) $\vec{a}_B = (V_A^2/2R)\,(\vec{\imath} - \sqrt{3}\,\vec{\jmath})$

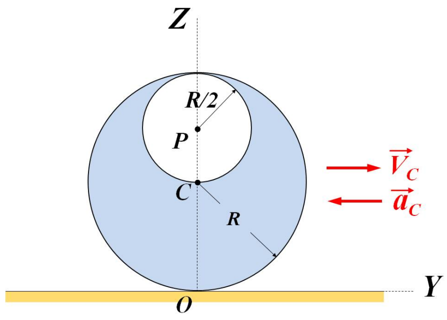
C) $\vec{a}_B = -(V_A^2/R)\,\vec{\jmath}$

D) $\vec{a}_B = (V_A^2/R)\,\vec{\imath}$

E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

(ETSIAE, enero 2013)

CUESTIÓN C 7.11.



El sólido de la figura, de masa M, está constituido por un disco homogéneo de radio R al que se le ha practicado un taladro de sección circular de radio $R/2$.

En el instante representado en la figura, el disco rueda sin deslizar sobre una superficie plana de forma tal que la velocidad y aceleración de su centro geométrico C están dadas, respectivamente por: $\vec{V}_C = V_C\,\vec{\jmath}$ y $\vec{a}_C = -a_C\,\vec{\jmath}$. Sea $\vec{a}_P$ la aceleración del punto P, centro del taladro.

Se cumple que:

A) $\vec{a}_P = -a_C\,\vec{\jmath} - (5V_C^2/2R)\,\vec{k}$

B) $\vec{a}_P = -a_C\,\vec{\jmath} + (5V_C^2/2R)\,\vec{k}$

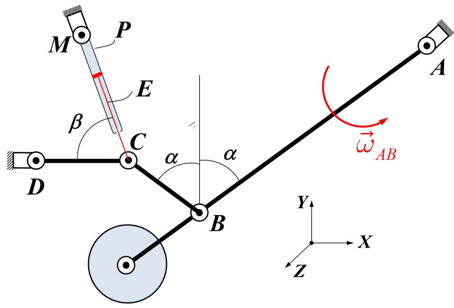
C) $\vec{a}_P = -[a_C + (5V_C^2/2R)]\,\vec{\jmath} + (5a_C/2)\,\vec{k}$

D) $\vec{a}_P = -[a_C + (5V_C^2/2R)]\,\vec{\jmath} - (5a_C/2)\,\vec{k}$

E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

(ETSIAE, julio 2012)

CUESTIÓN C 7.12.



En la figura se representa el mecanismo del tren de aterrizaje de un avión; el tren está formado por varillas coplanarias articuladas en sus extremos.

En el instante que se muestra, el tren se esta desplegando por acción del cilindro hidráulico MC que forma un ángulo $\beta = 60^{o}$ con la horizontal, la varilla DC está horizontal, las varillas CB y BA forman un ángulo $\alpha = 30^{o}$ con la vertical y los puntos A, D y M se consideran fijos. En dicho instante, la velocidad angular de la varilla AB es $\vec{\omega}_{AB} = 4\omega_0\,\vec{k}$.

Si $|\overrightarrow{AB}| = L$, y $\vec{v}^{E}_{PC}$ es la velocidad relativa del émbolo respecto al pistón, entonces:

A) $\vec{v}^{E}_{PC} = \sqrt{3}L\omega_0(\sqrt{3}\vec{\imath} - \vec{\jmath})$

B) $\vec{v}^{E}_{PC} = \sqrt{3}L\omega_0(\vec{\imath} - \sqrt{3}\,\vec{\jmath})$

C) $\vec{v}^{E}_{PC} = L\omega_0(\vec{\imath} - \sqrt{3}\,\vec{\jmath})$

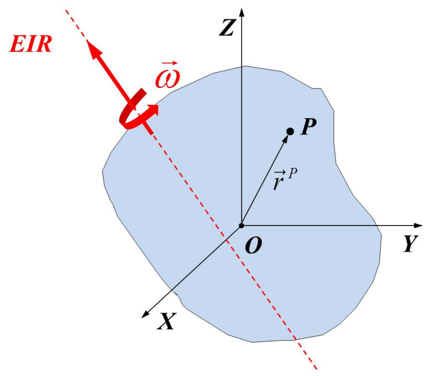
D) $\vec{v}^{E}_{PC} = L\omega_0(\sqrt{3}\,\vec{\imath} - \vec{\jmath})$

E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

(EUITA, junio 1995)

CUESTIÓN C 7.13.

Un sólido se mueve con respecto a un triedro de referencia de manera tal que su velocidad angular, $\vec{\Omega}(t)$, y el vector de posición de una de sus partículas, $\vec{r}^{\,P}(t)$, -véase la figura-, vienen dados en función del tiempo por:



$$\vec{\Omega}(t) = \frac{4\omega}{\pi}\left[\omega t\ (\operatorname{sen}\omega t\,\vec{\imath} - \cos\omega t\,\vec{\jmath}) + \frac{\pi}{4}\,\vec{k}\right]$$
$$\vec{r}^{\,P}(t) = R\,[\cos\omega t\,\vec{\imath} + \operatorname{sen}\omega t\,\vec{\jmath} + \omega t\,\vec{k}]$$

siendo R y ω constantes positivas. Si $\vec{v}^{\,O}(t^*)$ es la velocidad del punto del sólido que pasa por el origen de cooordenadas, en el instante t^* en el que el movimiento del sólido es una rotación pura, se verifica que:

A) $\vec{v}^{\,O}(t^*) = \frac{\pi R\omega}{4\sqrt{2}}[\vec{\imath} + \vec{\jmath}]$

B) $\vec{v}^{\,O}(t^*) = \frac{\pi R\omega}{\sqrt{2}}[\vec{\imath} + \vec{\jmath}]$

C) $\vec{v}^{\,O}(t^*) = \frac{\pi R\omega}{\sqrt{2}}[\vec{\imath} + \vec{k}]$

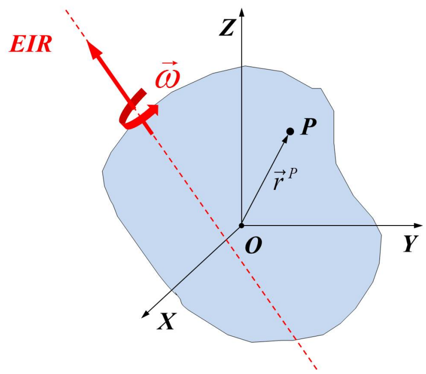
D) $\vec{v}^{\,O}(t^*) = \frac{\pi R\omega}{4\sqrt{2}}[\vec{\imath} + \vec{k}]$

E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

(ETSIAE, autoevaluación 7-G5, octubre 2014)

CUESTIÓN C 7.14.

Un sólido se mueve con respecto a un triedro de referencia de manera tal que su velocidad angular, $\vec{\Omega}(t)$, y el vector de posición de una de sus partículas, $\vec{r}^{\,P}(t)$, -véase la figura-, vienen dados en función del tiempo por:



$$\vec{\Omega}(t) = \frac{4\omega}{\pi}\left[\omega t\ (\operatorname{sen}\omega t\,\vec{\imath} - \cos\omega t\,\vec{\jmath}) + \frac{\pi}{4}\,\vec{k}\right]$$
$$\vec{r}^{\,P}(t) = R\,[\cos\omega t\,\vec{\imath} + \operatorname{sen}\omega t\,\vec{\jmath} + \omega t\,\vec{k}]$$

siendo R y ω constantes positivas. En el movimiento del sólido, el eje instantáneo de rotación y mínimo deslizamiento (EIRMD), en el instante $t_0 = \pi/(2\omega)$, está definido por:

A) $y = \frac{2}{5}R\ ,\ \ z = -\frac{1}{2}(R + \pi x)$

B) $y = \frac{2}{5}R\ ,\ \ z = \frac{1}{2}(-\pi R + x)$

C) $y = \frac{2}{5}R\ ,\ \ z = \frac{1}{2}(R - \pi x)$

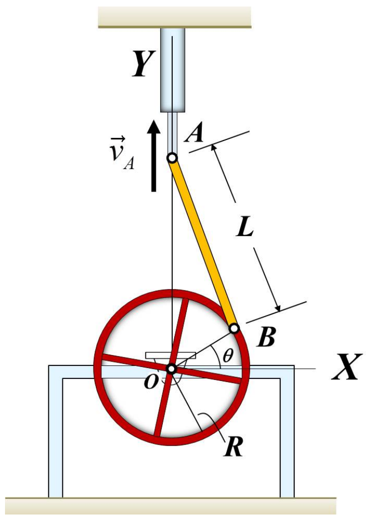
D) $y = \frac{2}{5}R\ ,\ \ z = \frac{1}{2}(\pi R + x)$

E) No existe EIRMD en el instante indicado.

(ETSIAE, autoevaluación 7-G5, octubre 2014)

CUESTIÓN C 7.15.

En el instante t^* indicado en la figura, el extremo A de la varilla AB se está moviendo con velocidad $\vec{v}_A(t^*) = v_A\,\vec{\jmath}$.



Su otro extremo está unido a una articulación, fija al punto B del volante mostrado, el cual está girando en torno a un eje que pasa por su centro O y es perpendicular al plano de la figura.

Sabiendo que entre el radio del volante y la longitud de la varilla existe la relación $(R/L) = (5\sqrt{7}/16)$, y que en el instante t^* el ángulo que forma el radio vector OB con el eje horizontal es tal que $\cos\theta = 4/5$, ¿cuánto vale la velocidad angular $\vec{\omega}(t^*)$ del volante en ese instante?

A) $\vec{\omega}(t^*) = \frac{v_A}{9R}\,(4-\sqrt{7})\,\vec{k}$

B) $\vec{\omega}(t^*) = \frac{5v_A}{9R}\,(4-\sqrt{7})\,\vec{k}$

C) $\vec{\omega}(t^*) = \frac{5v_A}{3R}\,(4-\sqrt{7})\,\vec{k}$

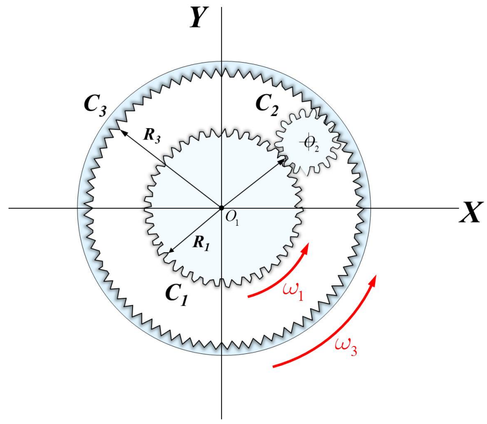
D) $\vec{\omega}(t^*) = \frac{v_A}{5R}\,(4-\sqrt{7})\,\vec{k}$

E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

(ETSIAE, autoevaluación 7-G5, octubre 2014)

CUESTIÓN C 7.16.

En la figura se muestra una disposición de engranajes "planetarios" en la que tanto el "sol" C_1, que es un engranaje de radio R_1, como el "anillo" C_3, que es un engranaje de radio interior R_3, giran con velocidades angulares $\vec{\omega}_1$ y $\vec{\omega}_3$, respectivamente, alrededor de su centro fijo común O. Entre ellos sujetan el engranaje "planeta" C_2, cuyo centro O_2 se mueve en un círculo de centro O_1.



Respecto a la velocidad angular $\vec{\omega}_2$ del planeta, se puede decir que:

A) $\vec{\omega}_2 = \left[\frac{\omega_3 R_3 - \omega_1 R_1}{R_3 - R_1}\right] \vec{k}$

B) $\vec{\omega}_2 = \left[\frac{\omega_3 R_3 + \omega_1 R_1}{R_3 + R_1}\right] \vec{k}$

C) $\vec{\omega}_2 = \left[\frac{\omega_3 R_3 - \omega_1 R_1}{2\,(R_3 - R_1)}\right] \vec{k}$

D) $\vec{\omega}_2 = \left[\frac{\omega_3 R_3 + \omega_1 R_1}{2\,(R_3 + R_1)}\right] \vec{k}$

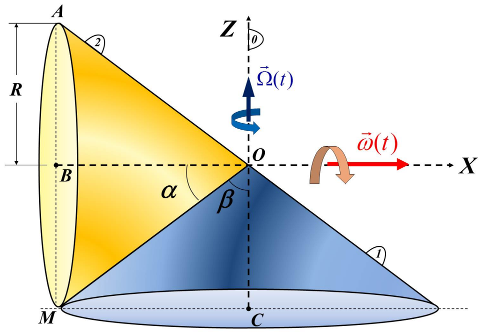
E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

(ETSIAE, autoevaluación 7-G5, octubre 2014)

CUESTIÓN C 7.17.

Dos conos rectos de semiángulos en el vértice α y β, con $\tan\alpha = 3/4$ y $\tan\beta = 4/3$, (sólidos "1" y "2", respectivamente), se hallan en contacto en todo instante por una generatriz.

Mediante un mecanismo no dibujado, cada cono realiza un movimiento de rotación pura respecto a su eje de simetría, que coincide en cada caso con uno de los ejes del triedro de referencia fijo $S_0(O; X, Y, Z)$ mostrado (sólido "0").



Si la velocidad angular que el mecanismo imprime al cono 1 sigue la ley:

$$\vec{\omega}_{10}(t) = \frac{\omega_0}{1 + \omega_0\, t}\,\vec{k}$$

donde ω_0 es una constante positiva y t el tiempo, y se sabe que no existe deslizamiento entre los conos, la velocidad angular $\vec{\omega}_{20}(t)$ del cono 2 habrá de ser:

A) $\vec{\omega}_{20}(t) = \frac{3}{4}\left[\frac{\omega_0}{1+\omega_0\, t}\right]\vec{\imath}$

B) $\vec{\omega}_{20}(t) = -\frac{4}{3}\left[\frac{\omega_0}{1+\omega_0\, t}\right]\vec{\imath}$

C) $\vec{\omega}_{20}(t) = \frac{4}{3}\left[\frac{\omega_0}{1+\omega_0\, t}\right]\vec{\imath}$

D) $\vec{\omega}_{20}(t) = -\frac{3}{4}\left[\frac{\omega_0}{1+\omega_0\, t}\right]\vec{\imath}$

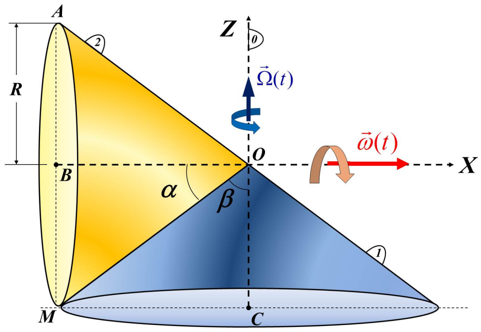
E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

(ETSIAE, autoevaluación 7-G5, octubre 2014)

CUESTIÓN C 7.18.

Dos conos rectos de semiángulos en el vértice α y β, con $\tan\alpha = 3/4$ y $\tan\beta = 4/3$, (sólidos "1" y "2", respectivamente), se hallan en contacto en todo instante por una generatriz.

Mediante un mecanismo no dibujado, cada cono realiza un movimiento de rotación pura respecto a su eje de simetría, que coincide en cada caso con uno de los ejes del triedro de referencia fijo $S_0(O; X, Y, Z)$ mostrado (sólido "0").



Si la velocidad angular que el mecanismo imprime al cono 1 sigue la ley:

$$\vec{\omega}_{10}(t) = \frac{\omega_0}{1+\omega_0\, t}\,\vec{k}$$

donde ω_0 es una constante positiva y t el tiempo, y se sabe que no existe deslizamiento entre los conos, puede decirse que la aceleración angular relativa del cono 2 respecto al cono 1, $\vec{\alpha}_{21}(t)$, vale:

$$\vec{\alpha}_{21}(t) = \left(\frac{\omega_0}{1+\omega_0\, t}\right)^2 \vec{u}$$

donde $\vec{u}$ es el vector constante:

A) $\vec{u} = \frac{3}{4}\,[\vec{\imath}+\vec{\jmath}\,] + \vec{k}$

B) $\vec{u} = -\frac{3}{4}\,[\vec{\imath}+\vec{\jmath}\,] + \vec{k}$

C) $\vec{u} = \frac{4}{3}\,[\vec{\imath}+\vec{\jmath}\,] + \vec{k}$

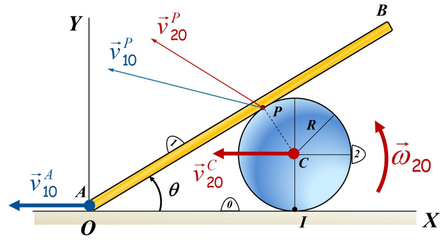
D) $\vec{u} = -\frac{4}{3}\,[\vec{\imath}+\vec{\jmath}\,] + \vec{k}$

E) Ninguna de las anteriores es correcta.

(ETSIAE, autoevaluación 7-G5, octubre 2014)

CUESTIÓN C 7.19.

En la figura se muestra un disco de radio R (sólido 2), que rueda sin deslizar sobre el plano horizontal $z = 0$ de un triedro de referencia fijo $S_0(O; X, Y, Z)$, dirigiéndose hacia la izquierda con velocidad angular de rotación $\vec{\omega}_{20} = \omega_0\,\vec{k}$.



Una varilla AB (sólido 1), apoyada en el suelo y en el disco, se mueve empujada por éste de modo que, en el instante dibujado, la velocidad de su extremo A es $\vec{v}^{\,A}_{10} = (1/2)\vec{v}^{\,C}_{20}$.

En ese mismo instante, el módulo de la velocidad de deslizamiento del disco sobre la barra, $|\vec{v}^{\,P}_{21}| = |\vec{v}^{\,P}_{20} - \vec{v}^{\,P}_{10}|$, en función de R, ω_0 y θ, vale:

A) $|\vec{v}^{\,P}_{21}| = R\omega_0(1 + \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta)$

B) $|\vec{v}^{\,P}_{21}| = R\omega_0(1 + \frac{3}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta)$

C) $|\vec{v}^{\,P}_{21}| = R\omega_0(1 + \frac{1}{2}\cos\theta)$

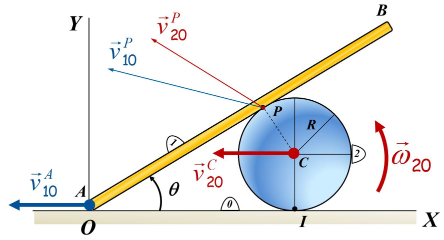
D) $|\vec{v}^{\,P}_{21}| = R\omega_0(1 + \frac{3}{2}\cos\theta)$

E) $|\vec{v}^{\,P}_{21}| = 0$

(ETSIAE, autoevaluación 7-G5, octubre 2014)

CUESTIÓN C7.20.

En la figura se muestra un disco de radio R (sólido 2), que rueda sin deslizar sobre el plano horizontal $z = 0$ de un triedro de referencia fijo $S_0(O; X, Y, Z)$, dirigiéndose hacia la izquierda con velocidad angular de rotación $\vec{\omega}_{20} = \omega_0\,\vec{k}$.



Una varilla AB (sólido 1), apoyada en el suelo y en el disco, se mueve empujada por éste de modo que, en el instante dibujado, la velocidad de su extremo A es $\vec{v}^{\,A}_{10} = (1/2)\vec{v}^{\,C}_{20}$.

En ese mismo instante, la velocidad angular de rotación de la varilla, $\vec{\omega}_{10}$, vale:

A) $\vec{\omega}_{10} = \frac{\omega_0}{2}\,\text{sen}^2(\theta/2)\,\vec{k}$

B) $\vec{\omega}_{10} = \omega_0\,\text{sen}^2(\theta/2)\,\vec{k}$

C) $\vec{\omega}_{10} = \omega_0\,\tan(\theta/2)\,\vec{k}$

D) $\vec{\omega}_{10} = \frac{\omega_0}{2}\,\tan(\theta/2)\,\vec{k}$

E) $\vec{\omega}_{10} = \vec{0}$

(ETSIAE, autoevaluación 7-G5, octubre 2014)

.

TABLA DE SOLUCIONES 7.- CINEMÁTICA SÓLIDO RÍGIDO			
C7.1	**B**	C7.21	
C7.2	**A**	C7.22	
C7.3	**E**	C7.23	
C7.4	**B**	C7.24	
C7.5	**A**	C7.25	
C7.6	**D**	C7.26	
C7.7	**C**	C7.27	
C7.8	**C**	C7.28	
C7.9	**A**	C7.29	
C7.10	**D**	C7.30	
C7.11	**E**	C7.31	
C7.12	**B**	C7.32	
C7.13	**A**	C7.33	
C7.14	**D**	C7.34	
C7.15	**B**	C7.35	
C7.16	**A**	C7.36	
C7.17	**B**	C7.37	
C7.18	**C**	C7.38	
C7.19	**C**	C7.39	
C7.20	**B**	C7.40	

PROBLEMA P 7.1.

El trompo de la figura se mueve de forma que su extremo O permanece fijo respecto al triedro fijo $S_0(O;X,Y,Z)$ mostrado.

La posición de su eje OA queda determinada por los ángulos φ (precesión) y θ (nutación) dibujados, los cuales varían con el tiempo t de acuerdo a las leyes:

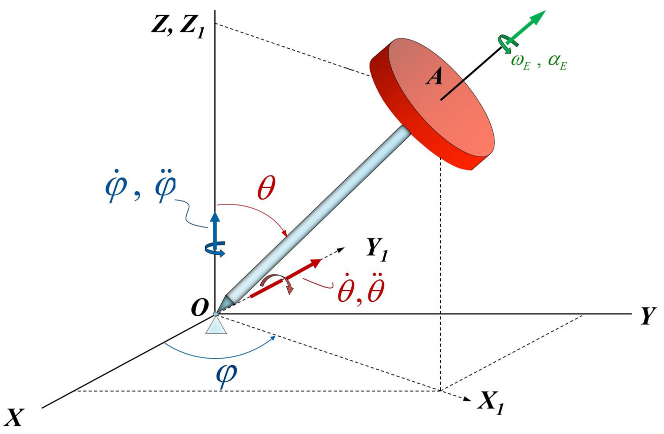
$$\theta(t) = \frac{\pi}{2}\,\text{sen}^2\frac{\omega t}{4} \qquad , \qquad \varphi(t) = 2\theta(t)$$

El trompo gira además alrededor de su eje OA con velocidad y aceleraciones angulares, $\omega_E(t)$ y $\alpha_E(t)$, respectivamente, en el sentido indicado. Utilizando como sistemas auxiliares:

- $S_1(O;X_1,Y_1,Z_1)$, sistema móvil con respecto a S_O, cuyos ejes giran con velocidad y aceleración angulares $\vec{\omega}_{10} = \dot{\varphi}(t)\,\vec{k}$ y $\vec{\alpha}_{10} = \ddot{\varphi}(t)\,\vec{k}$, y vectores unitarios $(\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1 = \vec{k})$.
- $S_2(O;X_2,Y_2,Z_2)$ sistema móvil con respecto a S_1, cuyos ejes giran con velocidad y aceleración angulares $\vec{\omega}_{21} = \dot{\theta}(t)\,\vec{j}_1(t)$ y $\vec{\alpha}_{21} = \ddot{\theta}(t)\,\vec{j}_1(t)$, y vectores unitarios $(\vec{i}_2,\vec{j}_2 = \vec{j}_1,\vec{k}_2)$.
- $S_3(A;X_3,Y_3,Z_3)$ sistema móvil con respecto a S_2, cuyos ejes giran con velocidad y aceleración angulares $\vec{\omega}_{32} = \omega_E(t)\,\vec{k}_2$ y $\vec{\alpha}_{32}t) = \alpha_E(t)\,\vec{k}_2$, y vectores unitarios $(\vec{i}_3,\vec{j}_3,\vec{k}_3 = \vec{k}_2)$.

determinar, respecto al triedro fijo $S_0(O;X,Y,Z)$:

1. La velocidad angular del trompo, $\vec{\omega}_{30}(t)$.
2. La ecuación vectorial del eje instantáneo de rotación.
3. La aceleración angular del trompo, $\vec{\alpha}_{30}(t)$.
4. Hacer aplicación numérica para el instante $t^* = \pi/\omega$, suponiendo que en ese instante $\omega_E(t^*) = \omega$ y $\alpha_E(t^*) = 0$.



(EUITA, abril 1994)

SOLUCIÓN P7.1.

1.-
$$\begin{aligned}\vec{\omega}_{30}(t) = & \ [-\dot{\theta}\operatorname{sen}\varphi + \omega_E \operatorname{sen}\theta\cos\varphi]\,\vec{\imath}\\ & +[\dot{\theta}\cos\varphi + \omega_E\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi]\,\vec{\jmath}\\ & +[\dot{\varphi} + \omega_E\cos\theta]\,\vec{k}\end{aligned}$$
.

2.-
$$x(t)\,\vec{\imath} + y(t)\,\vec{\jmath} + z(t)\,\vec{k} = \lambda\,\vec{\omega}(t) \quad , \quad \forall\lambda\in\Re$$
.

3.-
$$\begin{aligned}\vec{\alpha}_{30}(t) = & \ [\cos\varphi(\alpha_E\operatorname{sen}\theta - \dot{\varphi}\dot{\theta} + \dot{\theta}\omega_E\cos\theta) - \operatorname{sen}\varphi(\ddot{\theta} + \dot{\varphi}\omega_E\operatorname{sen}\theta)]\,\vec{\imath}\\ & +[\operatorname{sen}\varphi(\alpha_E\operatorname{sen}\theta - \dot{\varphi}\dot{\theta} + \dot{\theta}\omega_E\cos\theta) + \cos\varphi(\ddot{\theta} + \dot{\varphi}\omega_E\operatorname{sen}\theta)]\,\vec{\jmath}\\ & +[\ddot{\varphi} + \alpha_E\cos\theta - \dot{\theta}\omega_E\operatorname{sen}\theta]\,\vec{k}\end{aligned}$$
.

4.-
$$\begin{aligned}\vec{\omega}_{30}(t^*) &= \omega\left[-\frac{\pi}{8}\,\vec{\imath} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\vec{\jmath} + \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\vec{k}\right]\\ \vec{\alpha}_{30}(t^*) &= \omega^2\left[-\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\,\vec{\imath} + \left(-\frac{\pi^2}{32} + \frac{\pi}{8\sqrt{2}}\right)\vec{\jmath} - \frac{\pi}{8\sqrt{2}}\,\vec{k}\right]\end{aligned}$$
.

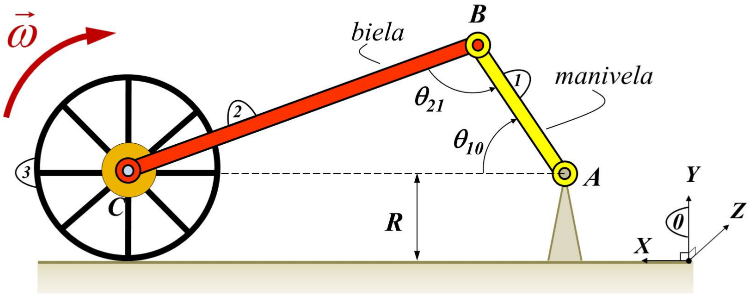
PROBLEMA P7.2.

El volante de la figura rueda sin deslizar con velocidad angular constante $\vec{\omega} = \omega\,\vec{k}$ sobre la superficie horizontal (plano XZ) del triedro fijo $S_0(O; X, Y, Z)$ (sólido "0") indicado.

El volante está acoplado a un sistema motor constituido por dos varillas AB (sólido "1", manivela) y BC (sólido "2", biela), de longitudes L y $2L$, respectivamente, conectadas en B, y que pueden girar libremente alrededor de articulaciones colocadas en A y C.

Cuando el ángulo θ_{21}^{*} que forman la biela y la manivela es tal que $\cos\theta_{21}^{*} = 1/4$, determinar:

1. Las velocidades angulares $\vec{\omega}_{10}$ y $\vec{\omega}_{20}$ de las varillas respecto al triedro fijo.
2. Las aceleraciones angulares $\vec{\alpha}_{10}$ y $\vec{\alpha}_{20}$ de las varillas respecto al triedro fijo.



(ETSIAE, autoevaluación 7-G5, diciembre 2013)

SOLUCIÓN P7.2.

1.-

$$\vec{\omega}_{10}(\theta_{21}^{*}) = \frac{7}{2\sqrt{15}}\,\omega\left(\frac{R}{L}\right)\vec{k}$$

$$\vec{\omega}_{20}(\theta_{21}^{*}) = -\frac{1}{2\sqrt{15}}\,\omega\left(\frac{R}{L}\right)\vec{k}$$

.

2.-

$$\vec{\alpha}_{10}(\theta_{21}^{*}) = \frac{41}{60\sqrt{15}}\,\omega^2\left(\frac{R}{L}\right)^2\vec{k}$$

$$\vec{\alpha}_{20}(\theta_{21}^{*}) = \frac{97}{60\sqrt{15}}\,\omega^2\left(\frac{R}{L}\right)^2\vec{k}$$

.

PROBLEMA P7.3.

Una esfera (sólido "1") de radio R se mueve sobre el plano XY del triedro fijo $S_0(O; X, Y, Z))$ (sólido "0") mostrado en la figura.

En el instante indicado t^* , el punto P de la esfera en contacto con el suelo coincide con el origen de coordenadas ($P = O$), y tiene velocidad nula, $\vec{v}\,^P_{10} = \vec{0}$. Para este mismo instante la posición y velocidad de los puntos A y B situados en un diámetro horizontal valen:

$$\vec{r}\,^A_{10}(t^*) = R(\vec{\imath} + \vec{k}) \quad , \quad \vec{v}\,^A_{10}(t^*) = v_0(b\vec{\imath} + a\vec{\jmath} - b\vec{k})$$
$$\vec{r}\,^B_{10}(t^*) = R(-\vec{\imath} + \vec{k}) \quad , \quad \vec{v}\,^B_{10}(t^*) = v_0(b\vec{\imath} + c\vec{\jmath} + b\vec{k})$$

donde a, b yc son constantes, ($a > 0$). Se pide:

1. Comprobar que las velocidades de los puntos indicados verifican la condición de equiproyectividad (también llamada rigidez cinemática).
2. Determinar la velocidad angular de rotación de la esfera, $\vec{\omega}_{10}(t^*)$, indicando qué componente corresponde a la rodadura y cuál al pivotamiento (caso de que existan).
3. Obtener la ecuación vectorial del EIR de la esfera.
4. Calcular la velocidad del centro C de la esfera, $\vec{v}\,^C_{10}(t^*)$.

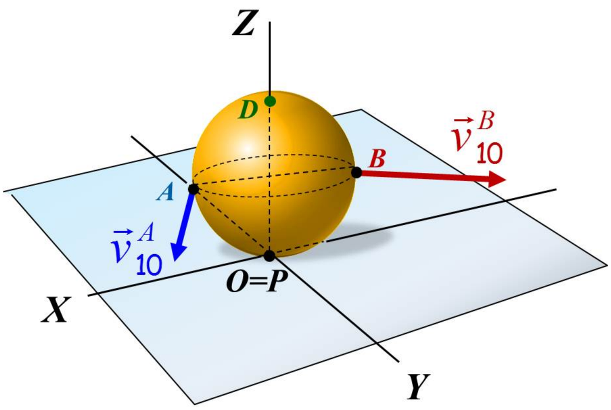


Figura 7.1:

(ETSIAE, autoevaluación 7-G5, diciembre 2014)

SOLUCIÓN P7.3.

1.- $\overrightarrow{AB}\cdot(\vec{v}\,^A_{10}-\vec{v}\,^B_{10})=\overrightarrow{OA}\cdot(\vec{v}\,^O_{10}-\vec{v}\,^A_{10})=\overrightarrow{OB}\cdot(\vec{v}\,^O_{10}-\vec{v}\,^B_{10})=0$

.

2.-
$$\vec{\omega}_{10}(t^*)=-\frac{v_0}{2R}\left[(a+c)\,\vec{\imath}-2b\,\vec{\jmath}+(c-a)\,\vec{k}\right]$$
$$\vec{\omega}_{10,rod}(t^*)=-\frac{v_0}{2R}\left[(a+c)\,\vec{\imath}-2b\,\vec{\jmath}\right]$$
$$\vec{\omega}_{10,piv}(t^*)=-\frac{v_0}{2R}(c-a)\,\vec{k}$$

.

3.-
$$y=-\frac{2b}{a+c}\,x \quad , \quad z=\frac{c-a}{c+a}\,x \qquad (c\neq -a)$$
$$y=\frac{b}{a}\,z \quad , \quad x=0 \qquad (c=-a)$$

.

4.- $\vec{v}\,^C_{10}(t^*)=\dfrac{v_0}{2}\left[2b\,\vec{\imath}+(a+c)\,\vec{\jmath}\right]$

.

PROBLEMA P7.4.

Un cono (sólido "2") se mueve sobre la superficie horizontal $z = 0$ (plano π) del triedro fijo $S_0(O; X, Y, Z)$ (sólido "0") mostrado en la figura.

Se define el triedro $S_1(O_1; X_1, Y_1, Z_1)$, (sólido "1"), móvil con respecto a S_0, con origen O_1 en el vértice P del cono, con $Z \equiv Z_1$ y cuyo eje Y_1 coincide en todo instante con la generatriz del cono en contacto con el plano horizontal π.

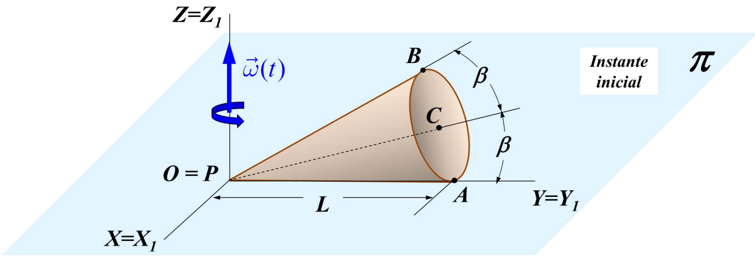
Considérense el movimiento del cono en los dos casos siguientes:

A) Con el vértice P fijo en O, el cono desliza sobre π y pivota alrededor del eje Z con velocidad angular constante: $\vec{\omega}(t) = \omega_0\, \vec{k}_1$.

B) Con el vértice P fijo en O, el cono rueda sin deslizar sobre π, de tal forma que en todo instante la velocidad del punto A -punto de la base en contacto con π- es nula; al hacerlo, el eje PC, que une el vértice del cono con el centro de su base, gira en torno al eje Z con velocidad $\vec{\omega}(t) = \omega(t)\, \vec{k}_1$.

En ambos casos indicar si el movimiento del cono es plano y determinar en S_0:

1. La velocidad de mínimo deslizamiento del cono, $\vec{v}_d$.
2. El eje EIRMD (o el EIR en su caso).
3. La velocidad angular, $\vec{\omega}_{20}(t)$, y la aceleración angular, $\vec{\alpha}_{20}(t)$, del cono.
4. Las velocidades de los puntos A y C mostrados, $\vec{v}\,^A_{20}(t)$ y $\vec{v}\,^C_{20}(t)$.
5. Las aceleraciones de los puntos A y C mostrados, $\vec{a}\,^A_{20}(t)$ y $\vec{a}\,^C_{20}(t)$.



(ETSIAE, autoevaluación 7-G5, diciembre 2014)

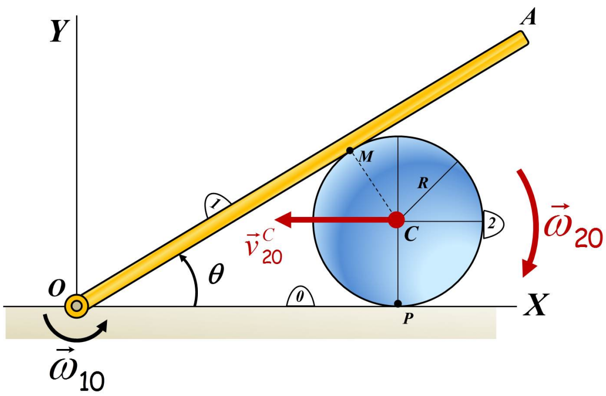
SOLUCIÓN P7.4.

A	B
1.- $\vec{v}_d = \vec{0}$	1.- $\vec{v}_d = \vec{0}$
2.- EIR. El eje Z_1	2.- EIR. El eje Y_1
3.- $\vec{\omega}_{20}(t) = \omega_0\,\vec{k}_1$ 3.- $\vec{\alpha}_{20}(t) = \vec{0}$	3.- $\vec{\omega}_{20}(t) = -\frac{\omega(t)}{\tan\beta}\,\vec{j}_1$ 3.- $\vec{\alpha}_{20}(t) = \frac{1}{\tan\beta}[\,\omega^2(t)\,\vec{i}_1 - \dot{\omega}(t)\,\vec{j}_1]$
4.- $\vec{v}\,^A_{20}(t) = -\omega_0 L\,\vec{i}_1$ 4.- $\vec{v}\,^C_{20}(t) = -\omega_0 L\cos^2\beta\,\vec{i}_1$	4.- $\vec{v}\,^A_{20}(t) = \vec{0}$ 4.- $\vec{v}\,^C_{20}(t) = -\omega(t) L\cos^2\beta\,\vec{i}_1$
5.- $\vec{a}\,^A_{20}(t) = -\omega_0^2 L\,\vec{j}_1$ 5.- $\vec{a}_C(t) = -\Omega_0^2 L\cos^2\beta\,\vec{j}_1$	5.- $\vec{a}\,^A_{20}(t) = \frac{\omega^2(t)\,L}{\tan\beta}\,\vec{k}_1$ 5.-$\vec{a}\,^C_{20}(t) = -L\cos^2\beta\,[\,\dot{\omega}(t)\,\vec{i}_1 + \omega^2(t)\,\vec{j}_1]$

PROBLEMA P7.5.

En el mecanismo plano de la figura, la barra OA (sólido "1") gira alrededor del eje Z del triedro fijo al suelo $S_0(O; X, Y, Z)$ (sólido "0") con velocidad angular constante $\vec{\omega}_{10}(t) = \dot{\theta}\,\vec{k}$. Un disco de radio R (sólido "2") se mueve en el plano $z = 0$ de forma que desliza sobre el eje X de S_0 a la vez que rueda sin deslizar sobre la barra OA. Determinar, en función de θ y sus derivadas:

1. La posición del CIR del movimiento del disco respecto al origen.
2. La velocidad angular de rotación del disco $\vec{\omega}_{20}$.
3. La velocidad del centro del disco $\vec{v}^{\,C}_{20}$.
4. La velocidad del punto P del disco $\vec{v}^{\,P}_{20}$ en contacto con el suelo.
5. La aceleración angular de rotación del disco $\vec{\alpha}_{20}$.
6. La aceleración del centro del disco $\vec{a}^{\,C}_{20}$.



(ETSIAE, autoevaluación 7-G5, diciembre 2014)

SOLUCIÓN P7.5.

1.- $\overrightarrow{OI} = \frac{R}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}\,[\vec{\imath} + \tan\theta\,\vec{\jmath}]$

.

2.- $\vec{\omega}_{20} = -\dot{\theta}\left[\frac{\cos\theta}{1-\cos\theta}\right]\vec{k}$

.

3.- $\vec{v}\,^{C}_{20} = -R\dot{\theta}\left[\frac{1}{1-\cos\theta}\right]\vec{\imath}$

.

4.- $\vec{v}\,^{P}_{20} = -R\dot{\theta}\left[\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}\right]\vec{\imath}$

.

5.- $\vec{\alpha}_{20} = \dot{\theta}^2\left[\frac{\operatorname{sen}\theta}{(1-\cos\theta)^2}\right]\vec{k}$

.

6.- $\vec{a}\,^{C}_{20} = R|\vec{\alpha}_{20}|\vec{\imath}$

.

PROBLEMA P7.6.

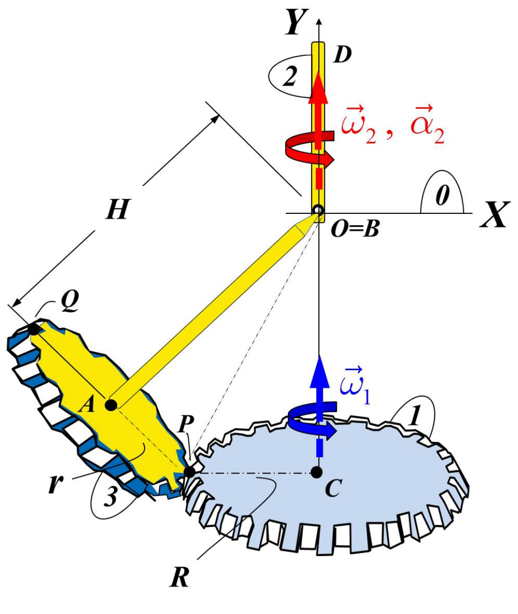
En la figura se muestra un mecanismo constituido por dos discos A ("sólido 3") y C ("sólido 1"), de radios r y R, respectivamente, en contacto permanente, cuyos bordes estas biselados para formar dos engranajes cónicos, y una varilla AB soldada al primero por su extremo A y unida mediante una horquilla a la flecha vertical BD ("sólido 2"). Dicha flecha, en el instante t^* mostrado, está girando en torno al eje OY del triedro de referencia inercial $S_0(O; X, Y, Z)$ ("sólido 0") con velocidad angular $\vec{\omega}_{20}(t^*) = \omega_2 \vec{\jmath}$ y aceleración angular $\vec{\alpha}_{20}(t^*) = \alpha_2 \vec{\jmath}$.

A) Suponiendo que el engranaje C está **fijo**, determinar, en el instante t^*:

1. La ecuación del eje instantáneo de rotación en el movimiento del disco A respecto a S_0.
2. La velocidad de mínimo deslizamiento del disco A en S_0, $\vec{v}_d$. ¿Se puede concluir en base a este resultado que el movimiento del disco A en S_0 es plano? Razónese.
3. Suponiendo que el ángulo de biselado es lo suficientemente pequeño como para considerar que el plano tangente a los dos discos es el plano horizontal que contiene al disco C, determinar las componentes de rodadura, $\vec{\omega}_{31}{}^{rod}$, y pivotamiento, $\vec{\omega}_{31}{}^{piv}$, de la velocidad angular de rotación del disco A sobre el disco C.
4. La velocidad angular de rotación del disco A respecto a S_0, $\vec{\omega}_{30}(t^*)$.
5. La aceleración angular de rotación del disco A respecto a S_0, $\vec{\alpha}_{30}(t^*)$

B) Suponiendo que el engranaje C es **móvil**, siendo su movimiento un giro con velocidad angular constante $\vec{\omega}_1(t) = \omega_1 \vec{\jmath}$, en torno al eje vertical OY, determinar, en t^*:

6. La velocidad angular de rotación del disco A, $\vec{\omega}_{30}(t^*)$ en S_0.
7. Las componentes de rodadura, $\vec{\omega}_{31}{}^{rod}$, y pivotamiento, $\vec{\omega}_{31}{}^{piv}$, de la velocidad angular de rotación del disco A sobre el disco C.
8. Ecuación del eje instantáneo de rotación en el movimiento del disco A respecto a S_0.
9. Velocidades $\vec{v}_{30}^{A}$ y $\vec{v}_{30}^{Q}$ de los puntos A y Q del disco A en S_0.



(ETSIAE, autoevaluación 7-G5, diciembre 2015)

SOLUCIÓN P7.6.

1.- $y = \left(\frac{\sqrt{r^2+H^2-R^2}}{R}\right)\, x.$

.

2.- $\vec{v}_d = \vec{0}.$ No.

.

3.-

$$\vec{\omega}_{31}^{rod}(t^*) = \omega_2 \left(\frac{R}{r}\right)\left[\frac{HR + r\sqrt{r^2+H^2-R^2}}{r^2+H^2}\right]\vec{\imath}$$

$$\vec{\omega}_{31}^{piv}(t^*) = \omega_2 \left(\frac{\sqrt{r^2+H^2-R^2}}{r}\right)\left[\frac{HR + r\sqrt{r^2+H^2-R^2}}{r^2+H^2}\right]\vec{\jmath}$$

.

4.- $\vec{\omega}_{30}(t^*) = \omega_2 \left[\frac{HR+r\sqrt{r^2+H^2-R^2}}{r(r^2+H^2)}\right]\left(R\,\vec{\imath} + \sqrt{r^2+H^2-R^2}\,\vec{\jmath}\right)$

.

5.- $$\vec{\alpha}_{30}(t^*) = \left[\frac{HR + r\sqrt{r^2+H^2-R^2}}{r(r^2+H^2)}\right]\left\{R\left(\alpha_2\,\vec{\imath} - \omega_2^2\,\vec{k}\right) + \alpha_2\sqrt{r^2+H^2-R^2}\,\vec{\jmath}\right\}$$

.

6.- $\vec{\omega}_{30}(t^*) = \omega_1\,\vec{\jmath} + (\omega_2-\omega_1)\left[\frac{HR+r\sqrt{r^2+H^2-R^2}}{r(r^2+H^2)}\right]\left(R\,\vec{\imath} + \sqrt{r^2+H^2-R^2}\,\vec{\jmath}\right)$

.

7.-

$$\vec{\omega}_{31}^{rod}(t^*) = (\omega_2-\omega_1)\left(\frac{R}{r}\right)\left[\frac{HR + r\sqrt{r^2+H^2-R^2}}{r^2+H^2}\right]\vec{\imath}$$

$$\vec{\omega}_{31}^{piv}(t^*) = (\omega_2-\omega_1)\left(\frac{\sqrt{r^2+H^2-R^2}}{r}\right)\left[\frac{HR + r\sqrt{r^2+H^2-R^2}}{r^2+H^2}\right]\vec{\jmath}$$

.

8.- $y = \frac{\omega_2\, r(r^2+H^2) + (\omega_2-\omega_1)R\left[H\sqrt{r^2+H^2-R^2} - rR\right]}{R(\omega_2-\omega_1)\left[HR + r\sqrt{r^2+H^2-R^2}\right]}\, x$

.

9.-

$$\vec{v}_{30}^{A}(t^*) = \omega_2\left[\frac{RH^2 + rH\sqrt{r^2+H^2-R^2}}{r^2+H^2}\right]\vec{k}$$

$$\vec{v}_{30}^{Q}(t^*) = \left\{2\omega_2\left[\frac{RH^2 + rH\sqrt{r^2+H^2-R^2}}{r^2+H^2}\right] - R\omega_1\right\}\vec{k}$$

.