



# CÁLCULO DE ERRORES

J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física I  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



## ÍNDICE

### MEDIDAS DIRECTAS

MEDIDAS SIN DISPERSIÓN (UNA SOLA MEDIDA)

MEDIDAS CON DISPERSIÓN (VARIAS MEDIDAS)

### MEDIDAS INDIRECTAS

FÓRMULA GENERAL

SUMA Y/O RESTA

PRODUCTO POR UNA CONSTANTE

PRODUCTOS Y COCIENTES

FUNCIONES POTENCIALES Y EXPONENCIALES

J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física I  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



## MEDIDAS DIRECTAS



### MEDIDAS SIN DISPERSIÓN (UNA SOLA MEDIDA)

Mejor valor de la medida

Valor proporcionado por el aparato

Error absoluto

Error de Escala o Apreciación: Mínima división de la escala del aparato

Si existe algún error sistemático indicado por el fabricante se añadiría

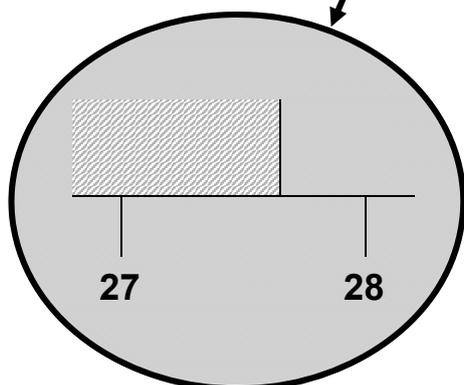
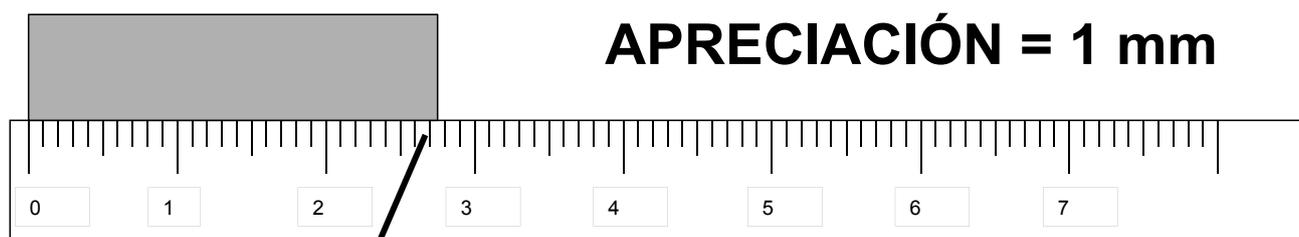
J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física I  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



## MEDIDAS DIRECTAS



### MEDIDAS SIN DISPERSIÓN (UNA SOLA MEDIDA)



**LECTURA = 27 o 28 mm**

**MEDIDA**

$$L = 27 \pm 1 \text{ mm}$$

$$L = 28 \pm 1 \text{ mm}$$

Mejor a la vista de la ampliación

J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física I  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



## MEDIDAS DIRECTAS



### MEDIDAS CON DISPERSIÓN (VARIAS MEDIDAS)

En ausencia de errores sistemáticos, el error absoluto tiene dos componentes

$$\Delta M = \Delta m_A + \Delta m_E$$

$$\Delta m_A$$

Error de escala (Apreciación)

$$\Delta m_E$$

Error estadístico

J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física I  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



## MEDIDAS DIRECTAS



### MEDIDAS CON DISPERSIÓN (VARIAS MEDIDAS)

$\Delta m_E$  Error estadístico

Es el error típico en el promedio:

$$\Delta m_E = \frac{\sigma}{\sqrt{N-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - x_m)^2}{N(N-1)}}$$

$x_i$  = medida  $i$ ;  $x_m$  = media;  $N$  = número de medidas

J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física I  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



## MEDIDAS DIRECTAS



### MEDIDAS CON DISPERSIÓN (VARIAS MEDIDAS)

$\Delta m_E$  Error estadístico

En cálculos rápidos como en el laboratorio se puede aproximar a la media de las desviaciones:

$$\Delta m_E = \frac{\sum_{i=1}^N |x_i - x_m|}{N}$$

J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física I  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



## MEDIDAS DIRECTAS



### MEDIDAS CON DISPERSIÓN (VARIAS MEDIDAS)

$\Delta m_E$  Error estadístico

Incluso puede aproximarse a la mitad de la desviación máxima si la dispersión no es grande:

$$\Delta m_E = \frac{Max(x_i) - Min(x_i)}{2}$$

J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física I  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



# MEDIDAS DIRECTAS



## MEDIDAS CON DISPERSIÓN (VARIAS MEDIDAS)

$$L_1 = 6,43 \pm 0,01$$

$$L_2 = 6,42 \pm 0,01$$

$$L_3 = 6,39 \pm 0,01$$

$$L_4 = 6,53 \pm 0,01$$

$$L_5 = 6,50 \pm 0,01$$

$$x_m = 6,454$$

$$\Delta m_A = 0,01$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - x_m)^2}{N}} = 0,0524$$

J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física I  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



# MEDIDAS DIRECTAS



## MEDIDAS CON DISPERSIÓN (VARIAS MEDIDAS)

$$\Delta m_E = \frac{\sigma}{\sqrt{N-1}} = 0,0262$$

$$\Delta m_E = \frac{\sum_{i=1}^N |x_i - x_m|}{N} = 0,0488$$

$$\Delta m_E = \frac{Max(x_i) - Min(x_i)}{2} = 0,07$$

J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física I  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



## MEDIDAS DIRECTAS



### MEDIDAS CON DISPERSIÓN (VARIAS MEDIDAS)

$$\Delta M_1 = \Delta m_A + \Delta m_E = 0,04 \quad L_1 = (645 \pm 4)E-2 \text{ u}$$

$$\Delta M_2 = \Delta m_A + \Delta m_E = 0,06 \quad L_2 = (645 \pm 6)E-2 \text{ u}$$

$$\Delta M_3 = \Delta m_A + \Delta m_E = 0,08 \quad L_3 = (645 \pm 8)E-2 \text{ u}$$

Cuidado con amplificar en exceso el error al utilizar las simplificaciones

J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física I  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



## MEDIDAS INDIRECTAS



### FÓRMULA GENERAL

Dadas las medidas  $X_i = x_i + \Delta x_i$

Para obtener el error en una función obtenida a partir de ellas

$$y = f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física I  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



# MEDIDAS INDIRECTAS



## FÓRMULA GENERAL

Se aplica 
$$\Delta y = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{x_1, \dots, x_n} \Delta x_i$$

O también 
$$\Delta y = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{x_1, \dots, x_n}^2 (\Delta x_i)^2}$$

Aunque nosotros utilizaremos la de arriba

J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física I  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



# MEDIDAS INDIRECTAS



## EJEMPLO: SUMA Y/O RESTA

$$y = x_1 + x_2 - x_3 \quad X_i = x_i + \Delta x_i$$

$$\Delta y = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3$$

El error absoluto de una suma o diferencia es igual a la suma de los errores absolutos de cada medida

J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física I  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



## MEDIDAS INDIRECTAS



### EJEMPLO: PRODUCTO POR UNA CONSTANTE

$$y = ax_1$$

$$X_1 = x_1 + \Delta x_1$$

$$\Delta y = a\Delta x_1$$

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta x_1}{x_1}$$

El error absoluto del producto por una constante es el producto de la constante por el error de la medida

Nota: Consideramos todas las variables positivas.

J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física I  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



## MEDIDAS INDIRECTAS



### EJEMPLO: PRODUCTOS Y COCIENTES

$$y = \frac{x_1 x_2}{x_3}$$

Aplicamos la fórmula general  $\Delta y = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{x_1, \dots, x_n} \Delta x_i$

$$\left| \frac{\partial y}{\partial x_1} \right| = \frac{x_2}{x_3}$$

$$\left| \frac{\partial y}{\partial x_2} \right| = \frac{x_1}{x_3}$$

$$\left| \frac{\partial y}{\partial x_3} \right| = \frac{x_1 x_2}{(x_3)^2}$$

Nota: Consideramos todas las variables positivas.

J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física I  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



# MEDIDAS INDIRECTAS



## EJEMPLO: PRODUCTOS Y COCIENTES

$$y = \frac{x_1 x_2}{x_3}$$

$$\Delta y = \frac{x_2}{x_3} \Delta x_1 + \frac{x_1}{x_3} \Delta x_2 + \frac{x_1 x_2}{(x_3)^2} \Delta x_3$$

J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física I  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



# MEDIDAS INDIRECTAS



## EJEMPLO: PRODUCTOS Y COCIENTES

$$y = \frac{x_1 x_2}{x_3}$$

$$X_i = x_i + \Delta x_i$$

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{\Delta x_2}{x_2} + \frac{\Delta x_3}{x_3}$$

**El error relativo de un producto o cociente es igual a la suma de los errores relativos de las medidas**

J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física I  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



## MEDIDAS INDIRECTAS



### EJEMPLO: FUNCIONES POTENCIALES Y EXPONENCIALES

$$y = x_1^a x_2^{x_3} b^{x_4} \quad X_i = x_i + \Delta x_i$$

El error relativo se obtiene de forma inmediata a partir de las propiedades de los logaritmos neperianos y su diferenciación

$$\ln y = a \ln x_1 + x_3 \ln x_2 + x_4 \ln b$$

Nota: Consideramos todas las variables positivas.

J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física I  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



## MEDIDAS INDIRECTAS



### EJEMPLO: FUNCIONES POTENCIALES Y EXPONENCIALES

Diferenciando:

$$\frac{\Delta y}{y} = a \frac{\Delta x_1}{x_1} + x_3 \frac{\Delta x_2}{x_2} + \Delta x_3 \ln x_2 + \Delta x_4 \ln b$$

J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física I  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

