CONDUCCIÓN ELÉCTRICA

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

Curso 2014/15

ÍNDICE

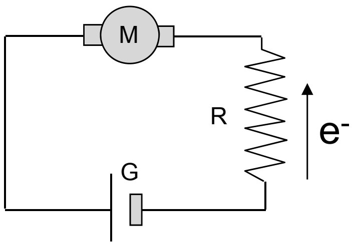
DENSIDAD E INTENSIDAD DE CORRIENTE
LEY DE OHM
ASOCIACIÓN DE RESISTENCIAS
- SERIE
- PARALELO

EFECTO JOULE
FUERZA ELECTROMOTRIZ (f.e.m.)
CIRCUITO CON RESISTENCIA Y GENERADOR
LEYES DE KIRCHHOFF
APLICACIÓN DE LAS LEYES DE KIRCHHOFF
- CIRCUITO CON DOS GENERADORES EN PARALELO

MÉTODO DE LAS INTENSIDADES DE MALLA

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

DENSIDAD E INTENSIDAD DE CORRIENTE



Corriente Eléctrica:
Movimiento de electrones (e^-) por un circuito de conductores.

Generador (G):
Elemento activo que mantiene una diferencia de potencial.
Si lo hace mediante reacciones químicas, se trata de una pila o batería; si lo hace por campos magnéticos es una dinamo.

Motor (M):
Elemento activo que extrae energía del movimiento de las cargas y lo convierte en energía mecánica.

Resistencia (R):
Elemento pasivo que disipa energía en forma de calor.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

DENSIDAD E INTENSIDAD DE CORRIENTE

Es posible mantener un conductor fuera del equilibrio termodinámico manteniendo diferencias de potencial entre sus extremos. Un campo eléctrico no nulo da lugar a una densidad de corriente de cargas libres (electrones).

Carga (y su velocidad) contenida en el diferencial de volumen

Número de electrones por unidad de volumen

$$\vec{J} = \sum_j q_j \vec{v}_j \,/\, d\mathrm{v} = q_e n_e \vec{v}$$

Diferencial de volumen

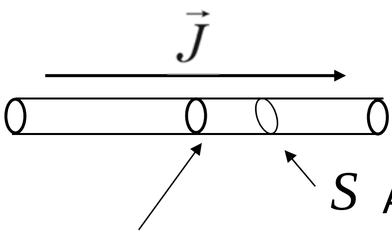
Carga del electrón (negativa)

Velocidad promedio en el diferencial de volumen

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

DENSIDAD E INTENSIDAD DE CORRIENTE

Intensidad de corriente eléctrica:
Flujo del vector densidad de corriente a través de una sección transversal del conductor.



$$I = \int_{S_\perp} \vec{J} \cdot d\vec{S}_\perp = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

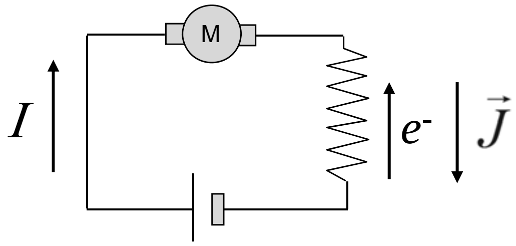
S Área de una sección genérica

$S_\perp$ Área de la sección transversal

La intensidad de corriente se define asociada a una superficie *S*. En circuitos se toma la sección normal al flujo de portadores.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

DENSIDAD E INTENSIDAD DE CORRIENTE



$$\vec{J} = q_e n_e \vec{v} = -e n_e \vec{v}$$

En circuitos en lugar de trabajar con $\vec{J}$ se utiliza la intensidad I (que es un escalar).
No obstante en las representaciones, junto al símbolo de la intensidad (I) se dibuja el sentido de $\vec{J}$ (que es el contrario al de movimiento de los electrones).

Para un análisis más detallado de la Densidad y de la Intensidad de Corriente se pueden consultar las transparencias pdf de Magnetostática del Vacío

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

LEY DE OHM

El movimiento de un electrón libre se puede modelar como un oscilador armónico forzado, sin fuerza elástica ($\omega_0 = 0$), campo $\vec{E}$ constante y velocidad constante:

$$m_e\left(\ddot{x} + \frac{\dot{x}}{t_c} + \omega_0^2 x\right) = q_e E$$

t_c es una constante de tiempo que caracteriza la interacción de la red con el cristal

$$\left.\begin{array}{l} \ddot{x} = 0 \\ \omega_0 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow m_e\left(\frac{\dot{x}}{t_c}\right) = q_e E$$

$$\dot{x} = v = \frac{q_e E}{m_e} t_c$$

En condiciones estacionarias la velocidad es proporcional al campo

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

LEY DE OHM

Es decir: $$\vec{J} = q_e n_e \vec{v} = \frac{q_e^2 n_e t_c}{m_e}\vec{E}$$

Definiendo la constante: $$\sigma_c = \frac{q_e^2 n_e t_c}{m_e}$$

Ley de Ohm microscópica $$\vec{J} = \sigma_c \vec{E}$$

σ_c = Conductividad, Siemens/metro (S/m)

Nota. Los conductores son materiales lineales u óhmicos pues σ_c =cte (existen otros medios en los que la conductividad depende de $\vec{E}$ o es una matriz dando lugar a anisotropía)

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

LEY DE OHM

Utilizando la ecuación de Maxwell:

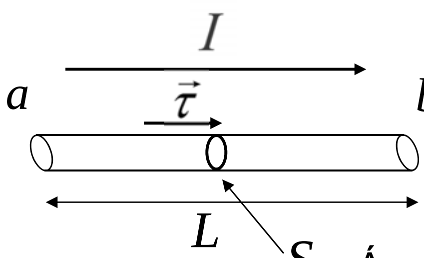
$$\rho = \varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \varepsilon_0 \frac{\nabla \cdot \vec{J}}{\sigma_c} = 0 \rightarrow \rho = 0$$

Para intensidades estacionarias (no dependientes del tiempo):

No se producen acumulaciones de carga. La carga circula por todo el conductor. Si existe carga libre no compensada se encuentra en la superficie.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

LEY DE OHM



$S_\perp$ Área de la sección transversal

$$I = \int_{S_\perp} \vec{J} \cdot d\vec{S}_\perp = J S_\perp$$

$$\vec{J} = \frac{I}{S_\perp} \vec{\tau}$$

Tangente al conductor

$$\sqrt{S_\perp} << L$$

$$d\vec{l} = dl \, \vec{\tau}$$

$$V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_a^b \frac{\vec{J}}{\sigma_c} \cdot d\vec{l} = -\int_a^b \frac{I}{S_\perp \sigma_c} \vec{\tau} \cdot d\vec{l} = -I \int_a^b \frac{dl}{S_\perp \sigma_c}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

LEY DE OHM

$$V_a - V_b = I\int_a^b \frac{dl}{S_\perp \sigma_c}$$

$$R \equiv \int_a^b \frac{dl}{S_\perp \sigma_c} = \frac{L}{S_\perp \sigma_c} = \rho_c \frac{L}{S_\perp}$$

Conductividad y sección transversal constantes

Resistividad (inversa de la conductividad, m/S)

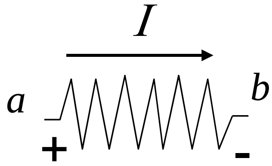
R es la resistencia eléctrica del material, Ohmios (Ω)

Conductancia (G) (inversa de la resistencia, $G = \dfrac{1}{R}$ ($\mathrm{S}=\Omega^{-1}$))

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

LEY DE OHM

Y nos queda la expresión de la Ley de Ohm que proporciona la diferencia de potencial entre dos puntos de un conductor de resistencia R por el que circula una intensidad I de corriente constante



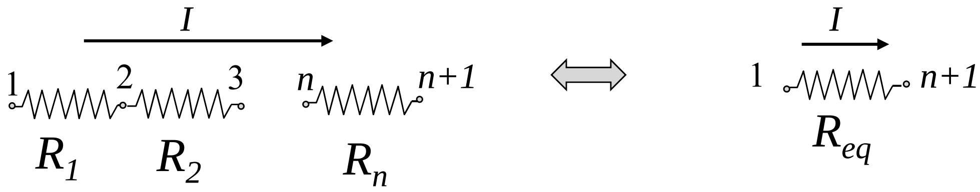
$$V_a - V_b = I\,R$$

La dependencia de la resistencia con la longitud se utiliza en los extensímetros para medir deformaciones

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

ASOCIACIÓN DE RESISTENCIAS

SERIE



$$V_1 - V_2 = R_1 I$$
$$V_2 - V_3 = R_2 I$$
$$\vdots$$
$$V_n - V_{n+1} = R_n I$$

$$V_1 - V_{n+1} = (R_1 + R_2 + \ldots + R_n) I$$

$$V_1 - V_{n+1} = R_{eq} I$$

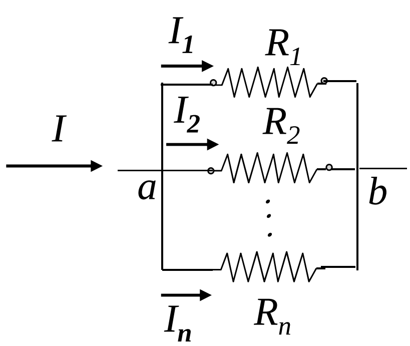
$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \ldots + R_n$$

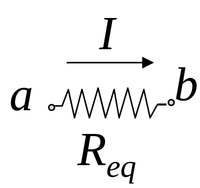
La resistencia equivalente es la suma de las resistencias

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

ASOCIACIÓN DE RESISTENCIAS

PARALELO





$$I_1 = \frac{V_a - V_b}{R_1}$$
$$I_2 = \frac{V_a - V_b}{R_2}$$
$$\vdots$$
$$I_n = \frac{V_a - V_b}{R_n}$$

$$V_a - V_b = R_{eq} I$$

$$I = \frac{V_a - V_b}{R_{eq}}$$

$$I = I_1 + I_2 + \ldots + I_n = (V_a - V_b)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}\right)$$

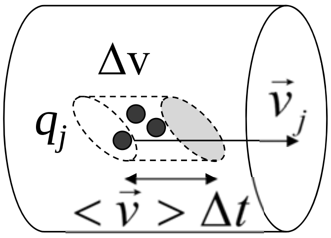
$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}$$

La inversa de la resistencia equivalente es la suma de las inversas de las resistencias

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

EFECTO JOULE

El trabajo realizado por el campo para mover las cargas contenidas en un diferencial de volumen es:



$$\delta W = \sum_j q_j \vec{E}(\vec{r}_j) \cdot d\vec{r}_j$$

Y por unidad de tiempo y volumen (potencia por unidad de volumen):

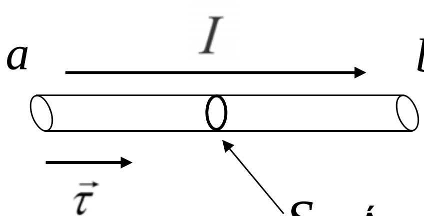
$$\frac{dP}{d\text{v}} = \sum_j \frac{q_j \vec{E}(\vec{r}_j) \cdot \vec{v}_j}{d\text{v}} \simeq \vec{J}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \sigma_c E^2 = \frac{J^2}{\sigma_c}$$

Campo promedio en el diferencial de volumen

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

EFECTO JOULE

Esta energía disipada aumenta la energía interna del cable (efecto Joule) y ésta a su vez la del medio exterior.



$S_\perp$ Área de la sección transversal

La potencia disipada en todo el cable será:

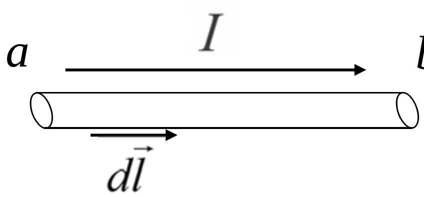
$$P = \int_a^b \vec{J} \cdot \vec{E}\, S_\perp\, dl = \int_a^b I \vec{\tau} \cdot \vec{E}\, dl = \int_a^b I\, \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_a^b I\, (\nabla V \cdot d\vec{l}\,)$$

$$P = I(V_a - V_b) = RI^2 = \frac{(V_a - V_b)^2}{R}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

EFECTO JOULE

Otra forma equivalente sería calcular el trabajo que realiza el campo eléctrico para llevar una carga dq desde a hasta b:

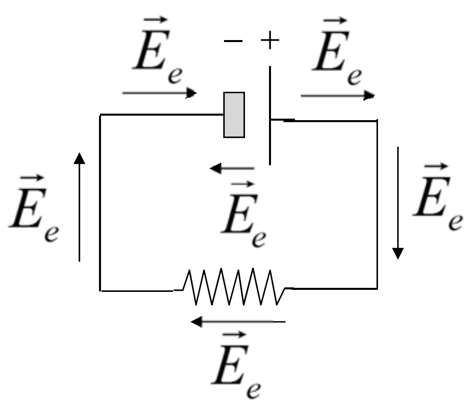


$$\delta W = dq\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} \rightarrow \frac{\delta W}{dt} = \frac{dq}{dt}\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} \rightarrow P = \int_a^b I\,\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$P = -\int_a^b I\,(\nabla V \cdot d\vec{l}) = I(V_a - V_b) = RI^2 = \frac{(V_a - V_b)^2}{R}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

FUERZA ELECTROMOTRIZ (VOLTAJE MOTRIZ)



$\vec{E}_e$

Campo electrostático (lleva los electrones por el circuito del borne negativo al positivo).
Sin embargo, al llegar al borne positivo no los puede pasar al negativo.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

FUERZA ELECTROMOTRIZ (VOLTAJE MOTRIZ)

$$\oint_{circuito} \vec{E}_e \cdot d\vec{l} = 0$$

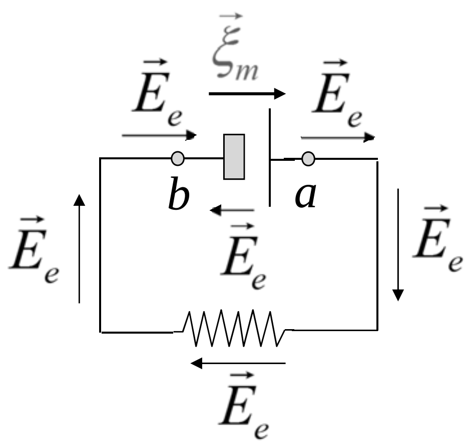
El campo electrostático es conservativo, por tanto, no puede producir una corriente estacionaria.

Necesitamos devolver los electrones del borne positivo al negativo o llevar iones positivos del borne negativo al positivo para que allí se recombinen con los electrones que llevamos por el circuito, y así se mantenga la diferencia de potencial.

GENERADOR

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

FUERZA ELECTROMOTRIZ (VOLTAJE MOTRIZ)



$\vec{\xi}_m$ = Campo motriz

Es el encargado de llevar los electrones del borne negativo al positivo o los iones positivos del negativo al positivo.
En pilas es el gradiente del potencial químico (partido de la carga) el que mueve los iones. Por tanto, en este caso, el campo electromotor no tiene origen eléctrico.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

FUERZA ELECTROMOTRIZ (VOLTAJE MOTRIZ)

Ley de Ohm en el generador:

$$\vec{J} = \sigma_c(\vec{E}_e + \vec{\xi}_m)$$

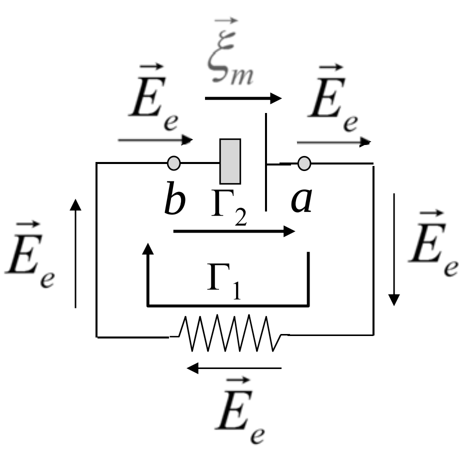
Se define la fuerza electromotriz (f.e.m.) como:

$$\oint_C \vec{E}_e \cdot d\vec{l} + \oint_C \vec{\xi}_m \cdot d\vec{l} = 0 + \int_b^a \vec{\xi}_m \cdot d\vec{l}$$

$$\varepsilon = \int_b^a \vec{\xi}_m \cdot d\vec{l}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CIRCUITO CON RESISTENCIA Y GENERADOR



En el circuito:

$$\int_{a\,\Gamma_1}^{b} \vec{E}_e \cdot d\vec{l} = -\int_{a\,\Gamma_1}^{b} dV = V_a - V_b$$

$$\int_{\Gamma_1} \frac{\vec{J}}{\sigma_c} \cdot d\vec{l} = \int_{\Gamma_1} \frac{I\vec{\tau}}{S_\perp \sigma_c} \cdot d\vec{l} = I\int_{\Gamma_1} \frac{dl}{S_\perp \sigma_c} = IR$$

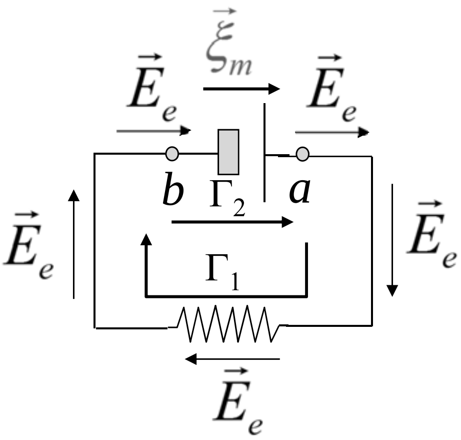
$$V_a - V_b = I\,R$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CIRCUITO CON RESISTENCIA Y GENERADOR

En el generador:

$$\int_{b\,\Gamma_2}^{a} \vec{E}_e \cdot d\vec{l} + \int_{b\,\Gamma_2}^{a} \vec{\xi}_m \cdot d\vec{l} = \int_{b\,\Gamma_2}^{a} \frac{\vec{J}}{\sigma_c} \cdot d\vec{l} = I\,r$$



$$-(V_a - V_b) + \varepsilon = I\,r \Rightarrow \varepsilon = (V_a - V_b) + I\,r$$

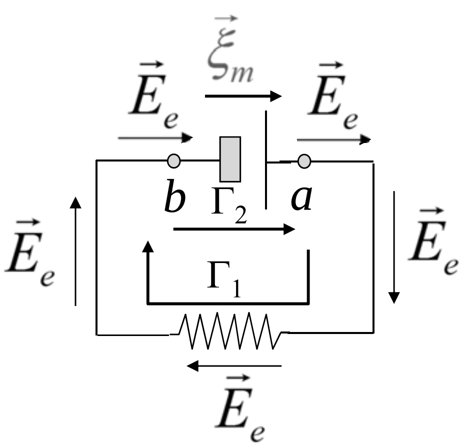
$$(V_a - V_b) = \varepsilon - I\,r$$

Resistencia interna del generador

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CIRCUITO CON RESISTENCIA Y GENERADOR

En el circuito y el generador:



$$\oint_{\Gamma_1+\Gamma_2} (\vec{\xi}_m + \vec{E}_e) \cdot d\vec{l} = \int_b^a \vec{\xi}_m \cdot d\vec{l} = \varepsilon$$

$$\oint_{\Gamma_1+\Gamma_2} \frac{\vec{J}}{\sigma_c} \cdot d\vec{l} = I(r+R)$$

$$\varepsilon = I(r+R)$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CIRCUITO CON RESISTENCIA Y GENERADOR

Balance de energía en el generador:

Potencia disponible

$$\varepsilon = Ir + IR \;\Rightarrow\; \varepsilon I = I^2 r + I^2 R$$

Potencia disipada en la resistencia

Potencia disipada en el generador

Si lo que consideramos aprovechable es la energía calorífica disipada en la resistencia de carga, el rendimiento del circuito es el cociente entre la potencia (energía) aprovechable y la potencia (energía) disponible en el generador:

Rendimiento: $$\eta = \frac{\varepsilon I - I^2 r}{\varepsilon I} = \frac{\varepsilon - Ir}{\varepsilon}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

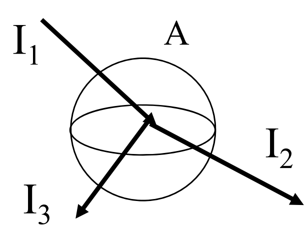
LEYES DE KIRCHHOFF

Si aplicamos la ley de conservación de la carga a una superficie cerrada S que contenga un nodo o confluencia:

Teorema de la divergencia

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \rightarrow \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \sum_i I_i = 0$$

$$-I_1 + I_2 + I_3 = 0$$



Primera Ley:
La suma de intensidades de rama que confluyen en un nodo es cero.

En una red con *N* nodos solo hay *N*-1 ecuaciones de nodo independientes.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

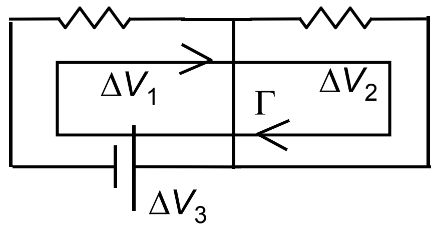
LEYES DE KIRCHHOFF

Como $\vec{E}_e$ es irrotacional, calculando su circulación a lo largo de una línea cerrada formada a partir de ramas del circuito (malla):

Teorema de Stokes

$$\nabla \times \vec{E}_e = 0 \rightarrow \oint_\Gamma \vec{E}_e \cdot d\vec{l} = \sum_i \Delta V_i = 0$$

$$\Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 = 0$$



Segunda Ley:
La suma de diferencias de potencial de los elementos que componen una malla es cero.

En una red con *M* mallas simples (no contienen a otras), solo hay *M* ecuaciones de malla independientes.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

LEYES DE KIRCHHOFF

La primera ley se conoce también con el nombre de
LEY DE LOS NODOS

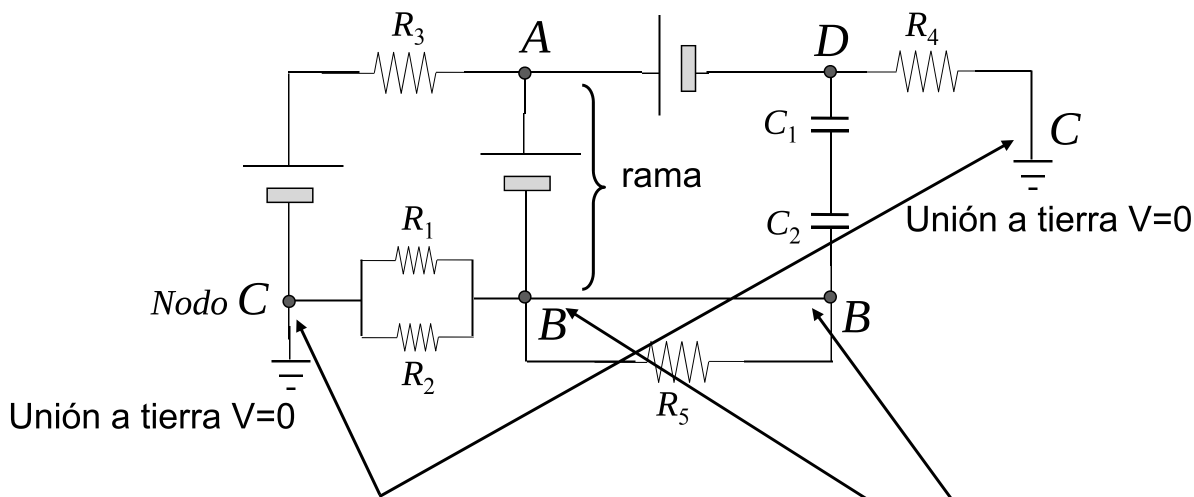
La segunda ley se conoce también con el nombre de
LEY DE LAS MALLAS

"Las *N*-1 ecuaciones de nodo junto con las *M* ecuaciones de malla permiten obtener todas las intensidades de rama"

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

APLICACIÓN DE LAS LEYES DE KIRCHHOFF

1. Nombramos todos los nodos



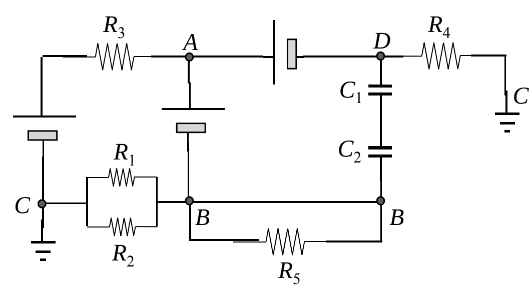
Los nodos unidos a tierra son idénticos

Los nodos cortocircuitados también

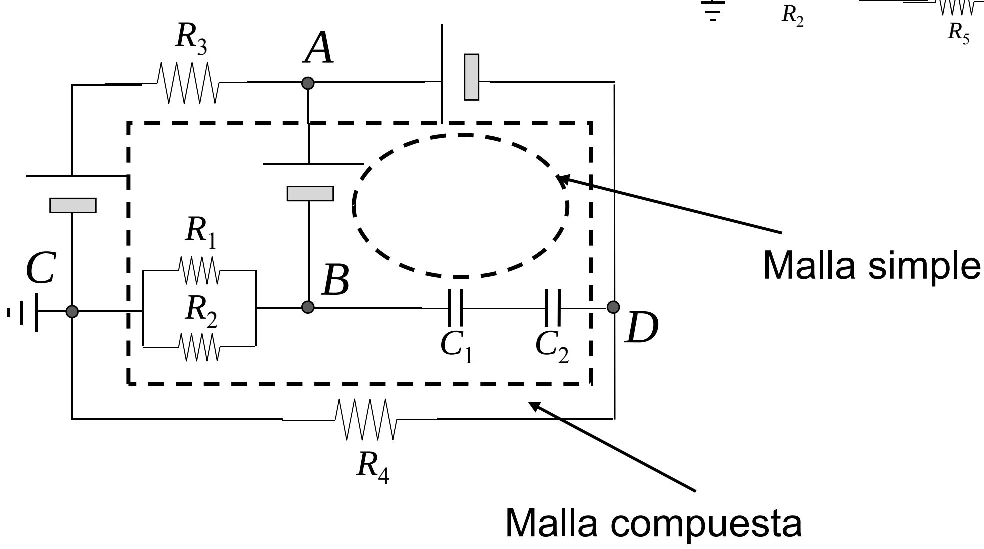
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

APLICACIÓN DE LAS LEYES DE KIRCHHOFF

2. Eliminamos nodos superfluos



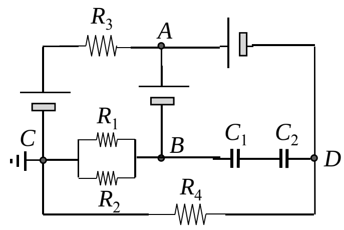
Dejamos un único nodo B y C



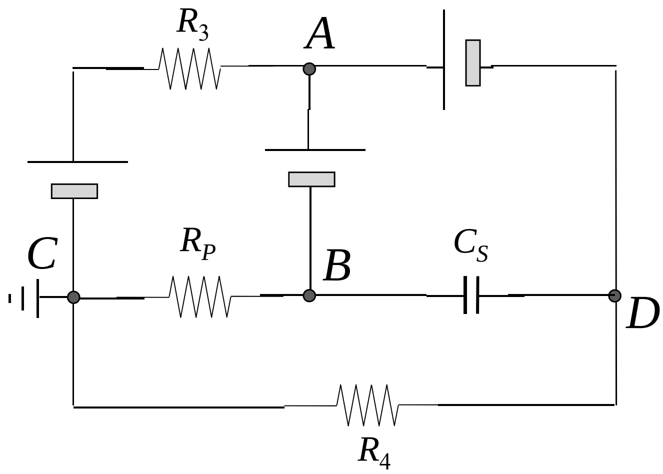
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

APLICACIÓN DE LAS LEYES DE KIRCHHOFF

3. Asociamos resistencias y condensadores en serie y paralelo



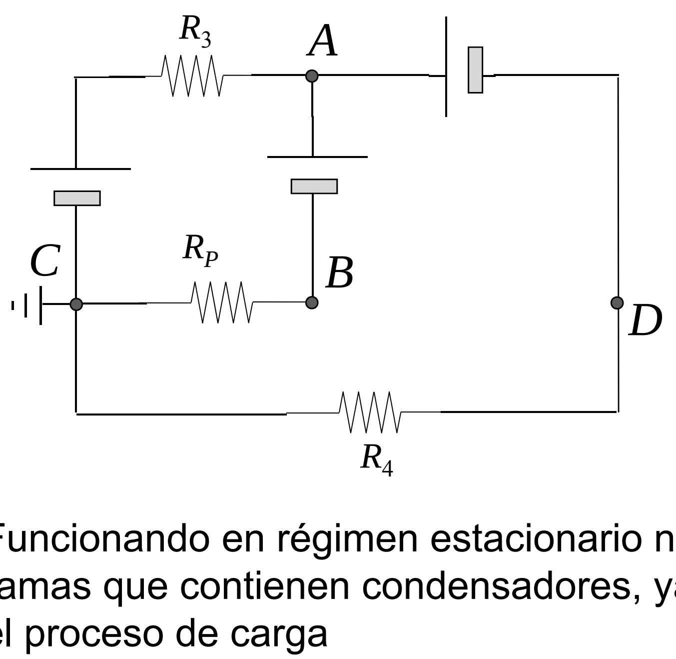
$$\frac{1}{R_p}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}; \qquad \frac{1}{C_s}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}$$

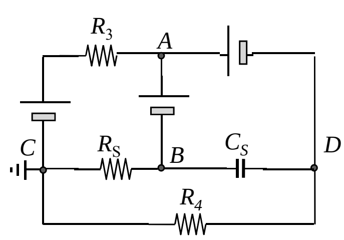


J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

APLICACIÓN DE LAS LEYES DE KIRCHHOFF

4. Eliminamos las ramas con condensadores



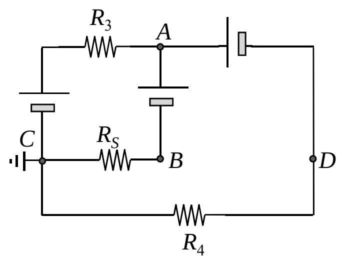


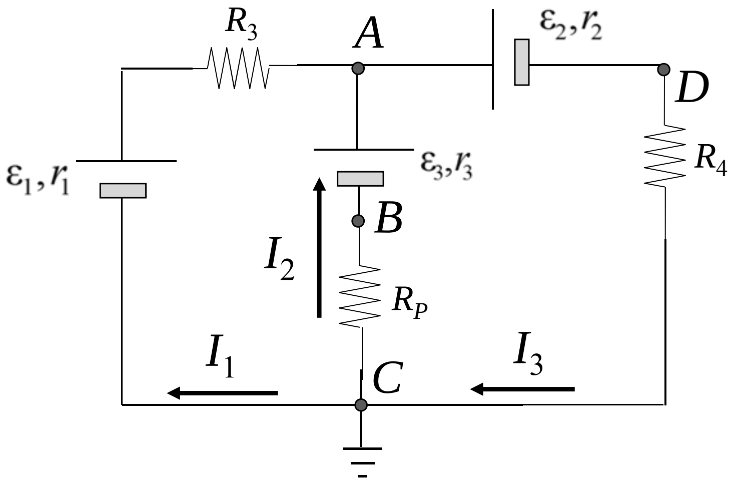
Funcionando en régimen estacionario no circula intensidad por las ramas que contienen condensadores, ya que, estos han terminado el proceso de carga

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

APLICACIÓN DE LAS LEYES DE KIRCHHOFF

5. Asignamos intensidades a cada rama del circuito asignándoles un sentido arbitrario:



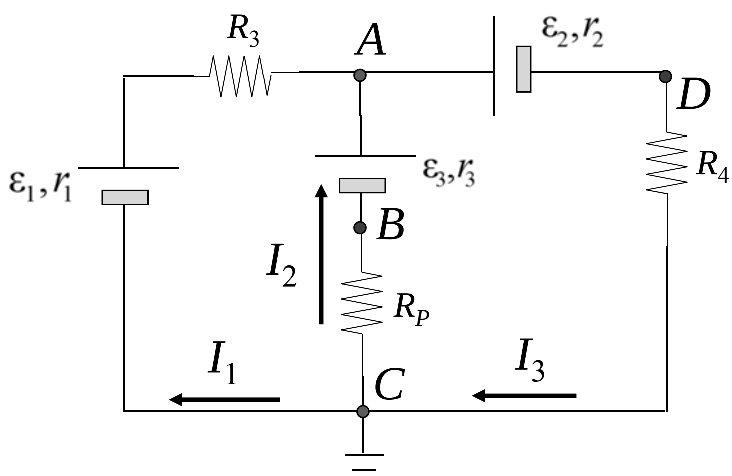


J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

APLICACIÓN DE LAS LEYES DE KIRCHHOFF

6. Planteamos las Ecuaciones de Nodos

Nº de ecuaciones de nodos: nº de nodos-1 = 2-1 = 1



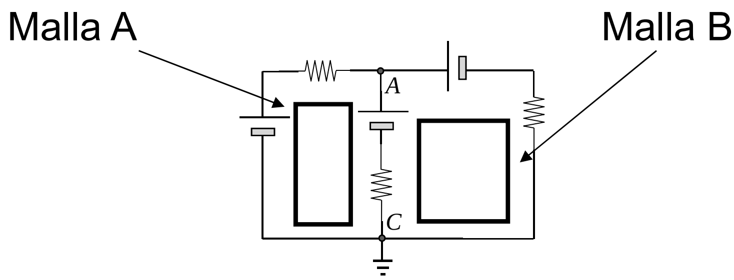
Nodo C:

$$I_1 + I_2 = I_3$$

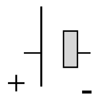
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

APLICACIÓN DE LAS LEYES DE KIRCHHOFF

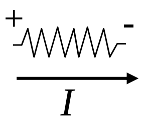
7. Establecemos las malla simples de nuestro circuito



Nº de ecuaciones de mallas: nº de mallas simples = 2



$\Delta V = \varepsilon$ Pila: Su d.d.p. no depende de la intensidad

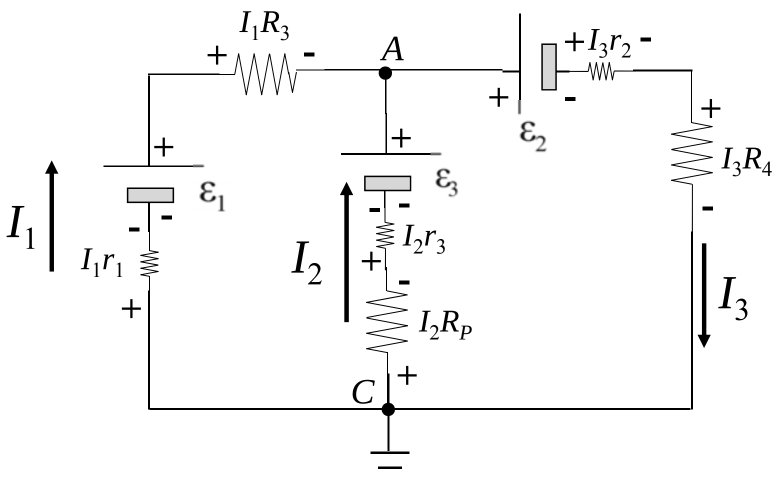


$\Delta V = RI$ Resistencia: Su d.d.p. depende de la I, el potencial es mayor por donde entra la intensidad

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

APLICACIÓN DE LAS LEYES DE KIRCHHOFF

8. Planteamos las Ecuaciones de Mallas



Se recorre la malla en un sentido y se consideran positivas las subidas de potencial y negativas las caídas (o a la inversa)

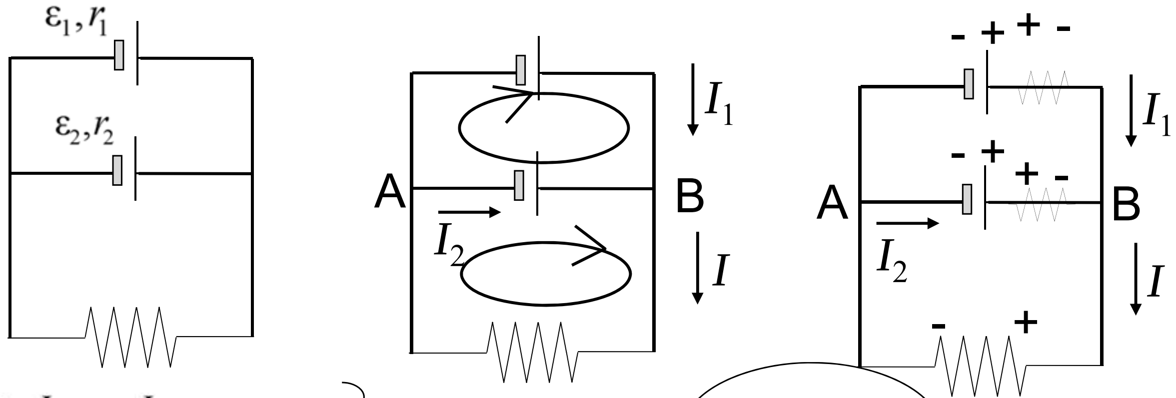
Malla A: $\boxed{\varepsilon_1 - R_3 I_1 - \varepsilon_3 + I_2 r_3 + R_p I_2 - I_1 r_1 = 0}$

Malla B: $\boxed{\varepsilon_3 - \varepsilon_2 - r_2 I_3 - R_4 I_3 - R_p I_2 - I_2 r_3 = 0}$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

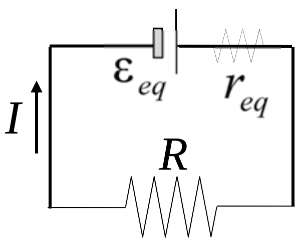
APLICACIÓN DE LAS LEYES DE KIRCHHOFF

CIRCUITO CON DOS GENERADORES EN PARALELO



$$\left.\begin{aligned} I_1 + I_2 &= I \\ \varepsilon_1 - r_1 I_1 - \varepsilon_2 + r_2 I_2 &= 0 \\ \varepsilon_2 - r_2 I_2 - RI &= 0 \end{aligned}\right\} \longrightarrow I = \frac{\dfrac{\varepsilon_1 r_2 + \varepsilon_2 r_1}{r_1 + r_2}}{R + \dfrac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}}$$

$$\frac{\varepsilon_1 r_2 + \varepsilon_2 r_1}{r_1 + r_2} = \varepsilon_{eq} \qquad \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = r_{eq}$$



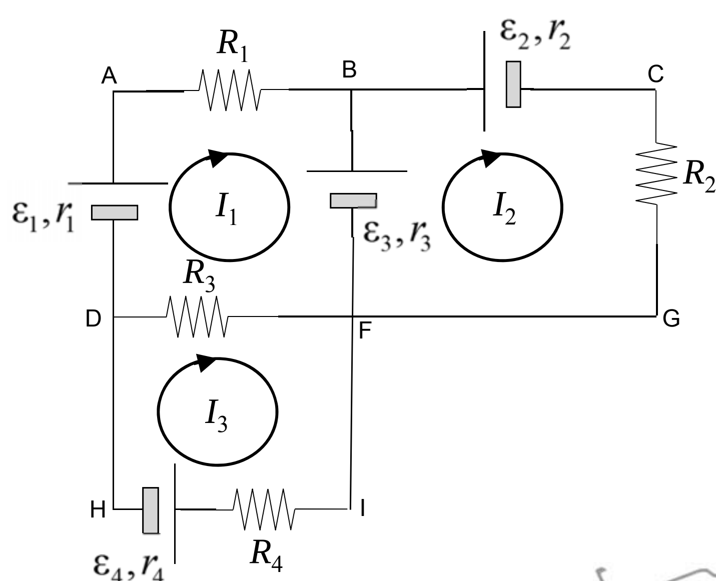
$$\varepsilon_{eq} - r_{eq} I - RI = 0 \longrightarrow I = \frac{\varepsilon_{eq}}{R + r_{eq}}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

MÉTODO DE LAS INTENSIDADES DE MALLA

Este método tiene la ventaja de que minimiza el número de ecuaciones a resolver y, si se siguen ciertas reglas, las ecuaciones se pueden plantear directamente de forma matricial

Se asigna a cada malla simple de la red una intensidad que la recorra en sentido horario.



J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

MÉTODO DE LAS INTENSIDADES DE MALLA

Escribimos la matriz vector de f.e.m. de cada malla:

$$\begin{pmatrix} \sum \varepsilon_i \ \textit{en malla}\ 1 \\ \sum \varepsilon_i \ \textit{en malla}\ 2 \\ \sum \varepsilon_i \ \textit{en malla}\ 3 \end{pmatrix}$$

El **vector de f.e.m**. contiene, para cada elemento la suma de las fuerzas electromotrices de cada malla, con los signos que haya que asignar cuando se recorre la malla en el sentido dado a su intensidad.

Signo positivo Signo negativo

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

MÉTODO DE LAS INTENSIDADES DE MALLA

Escribimos la matriz de resistencias de cada malla:

$$\begin{pmatrix} \sum R_i \ \textit{en malla}\ 1 & -\sum R_i \ \textit{comunes en mallas}\ 1\ y\ 2 & -\sum R_i \ \textit{comunes en mallas}\ 1\ y\ 3 \\ -\sum R_i \ \textit{comunes en mallas}\ 2\ y\ 1 & \sum R_i \ \textit{en malla}\ 2 & -\sum R_i \ \textit{comunes en mallas}\ 2\ y\ 3 \\ -\sum R_i \ \textit{comunes en mallas}\ 3\ y\ 1 & -\sum R_i \ \textit{comunes en mallas}\ 3\ y\ 2 & \sum R_i \ \textit{en malla}\ 3 \end{pmatrix}$$

La **matriz de resistencias** (caso particular de la matriz de impedancias en corriente alterna) contiene:

- En los elementos de la diagonal principal las resistencias de cada malla, sumadas todas con signo positivo.
- En el resto de los elementos están las resistencias comunes a las dos mallas correspondientes a sus subíndices, sumadas y con signo negativo.

La matriz de resistencias es simétrica.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

MÉTODO DE LAS INTENSIDADES DE MALLA

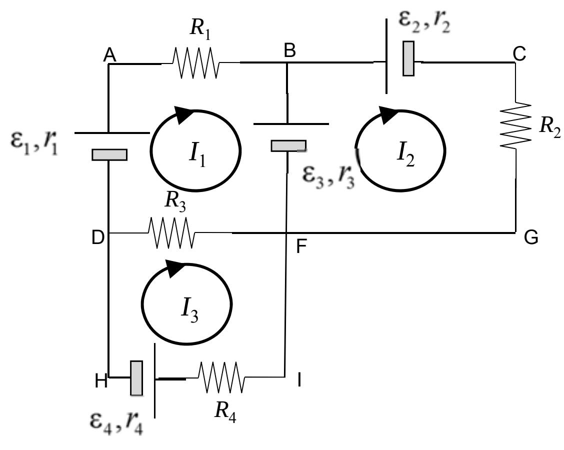
Escribimos la matriz vector de intensidades de cada malla:

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}$$

El **vector de intensidades** tiene las intensidades de malla colocadas en orden.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

MÉTODO DE LAS INTENSIDADES DE MALLA



Escribimos la relación matricial:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 - \varepsilon_3 \\ \varepsilon_3 - \varepsilon_2 \\ -\varepsilon_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 + R_1 + r_1 + R_3 & -r_3 & -R_3 \\ -r_3 & r_2 + R_2 + r_3 & 0 \\ -R_3 & 0 & r_4 + R_3 + R_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

MÉTODO DE LAS INTENSIDADES DE MALLA

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_3 = I_1\left(r_1 + R_1 + r_1 + R_3\right) - I_2 r_3 - I_3 R_3$$
$$\varepsilon_3 - \varepsilon_2 = -I_1 r_3 + I_2\left(r_2 + R_2 + r_3\right)$$
$$-\varepsilon_4 = -I_1 R_3 + I_3\left(r_4 + R_3 + R_4\right)$$

Una vez resulto el sistema y obtenidas las intensidades de malla, se pueden hallar las intensidades que pasan por cada rama y el sentido en el que lo hacen, según se explica en la siguiente transparencia.

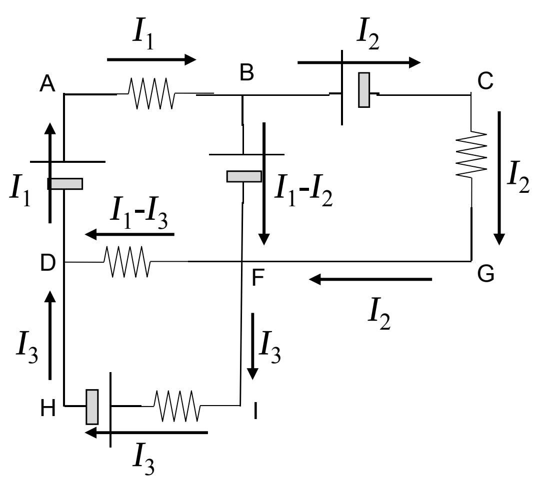
Si una intensidad de malla sale negativa, es que la intensidad va en sentido contrario al asignado.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

MÉTODO DE LAS INTENSIDADES DE MALLA

Por las ramas que solo pertenecen a una malla pasa la intensidad correspondiente a esa malla. Por la rama DAB pasa I_1, por la rama BCGF pasa I_2 y por la rama FIHD pasa I_3.

Por las ramas compartidas por dos mallas pasan las intensidades de las dos mallas sumadas algebraicamente. Por la rama BF pasa una intensidad I_1-I_2 desde B hacia F. Por la rama DF pasa I_1-I_3 en el sentido de F hacia D.



J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval