



ÓPTICA

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



ÍNDICE

ECUACIÓN DE ONDAS EN MEDIOS DIELECTRICOS
NO HOMOGÉNEOS
ECUACIÓN DE LAS TRAYECTORIAS
PRINCIPIO DE FERMAT
REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN
LA ESFERA EN ZONA PARAXIAL
SUCESIÓN DE SUPERFICIES ESFÉRICAS
ECUACIONES DE CORRESPONDENCIA

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



ECUACIÓN DE ONDAS EN MEDIOS DIELECTRICOS NO HOMOGÉNEOS



$$\nabla \times (\nabla \times \vec{w}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{w}) - \nabla^2 \vec{w} \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} =$$

$$= -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = -\mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \underbrace{\vec{J}}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$



ECUACIÓN DE ONDAS EN MEDIOS DIELECTRICOS NO HOMOGÉNEOS



Medio lineal, no homogéneo
e isótropo

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \nabla(\nabla \cdot \vec{E})$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot \left(\frac{\vec{D}}{\varepsilon} \right) = \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \underbrace{\nabla \cdot \vec{D}}_{\rho=0} + \vec{D} \cdot \nabla \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) = -\vec{D} \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \right) \nabla \varepsilon = -\vec{E} \cdot \nabla \ln \varepsilon$$

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \nabla (\vec{E} \cdot \nabla \ln n^2) = 0$$





ECUACIÓN DE LAS TRAYECTORIAS

Despreciando el último término (basta con que ω sea alta de modo que Φ varíe en distancias pequeñas comparadas con n):

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{n(\vec{r})^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \approx 0 \quad \text{Ecuación de la eikonal}$$

Para hallar la solución de esta ecuación se ensayan soluciones monocromáticas de la forma:

$$\vec{E} = \vec{A}(\vec{r}, k_0) \sin(k_0 \Phi(\vec{r}) - \omega t)$$

donde la amplitud se desarrolla en serie asintótica respecto de $k_0 = 2\pi/\lambda_0 = \omega/c$.



ECUACIÓN DE LAS TRAYECTORIAS



En este desarrollo se obtiene:

$$|\nabla \Phi| = n(\vec{r})$$

Una buena aproximación se obtiene sólo con el término:

$$\vec{E} = \vec{E}_0(\vec{r}) \sin(k_0 \Phi(\vec{r}) - \omega t)$$

Para $n=cte$, se tiene: $k_0 \Phi(\vec{r}) = k_0 \nabla \Phi \cdot \vec{r} = \vec{k} \cdot \vec{r}$





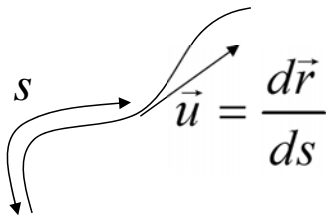
ECUACIÓN DE LAS TRAYECTORIAS

Cálculo del versor de $\nabla \Phi (\vec{u})$

$$n^2 = \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi \rightarrow n \frac{\partial n}{\partial x} = \nabla \Phi \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \Phi) = n \frac{\nabla \Phi}{|\nabla \Phi|} \cdot \nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) =$$

$$= n \frac{\nabla \Phi}{|\nabla \Phi|} \cdot \nabla \left(\frac{n (\partial \Phi / \partial x)}{|\nabla \Phi|} \right) = n \vec{u} \cdot \nabla (n u_x)$$

$$|\nabla \Phi| = n(\vec{r})$$



El versor \vec{u} se puede poner como el versor tangente a una curva $\vec{r}(s)$, siendo el parámetro s la distancia recorrida sobre la curva.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

7/29



ECUACIÓN DE LAS TRAYECTORIAS

$$\frac{\partial n}{\partial x} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \nabla (n u_x) = \frac{d\vec{r} \cdot \nabla (n u_x)}{ds} = \frac{d(n u_x)}{ds} = \frac{d}{ds} \left(n \frac{dx}{ds} \right)$$

La solución es un continuo de rayos perpendiculares a las superficies de igual fase.

De modo análogo para el resto de componentes del gradiente de n , se tiene:

$$\nabla n(\vec{r}(s)) = \frac{d}{ds} \left(n(\vec{r}(s)) \frac{d\vec{r}}{ds} \right)$$

Si n no depende de \vec{r} : $\frac{d^2 \vec{r}}{ds^2} = 0 \rightarrow \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{u} = \vec{cte}$ y el continuo de rayos son todas las rectas del espacio.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

8/29





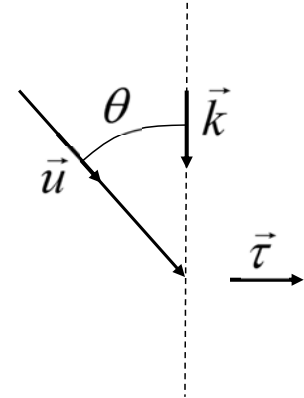
ECUACIÓN DE LAS TRAYECTORIAS

Para $n=n(z)$, $n \sin \theta$ es *cte* a lo largo del rayo:

$$\nabla n = \frac{\partial n}{\partial z} \vec{k} = \frac{d}{ds} \left(n(z) \frac{d\vec{r}}{ds} \right) = \frac{d}{dz} (n(z) \vec{u}) \frac{dz}{ds}$$

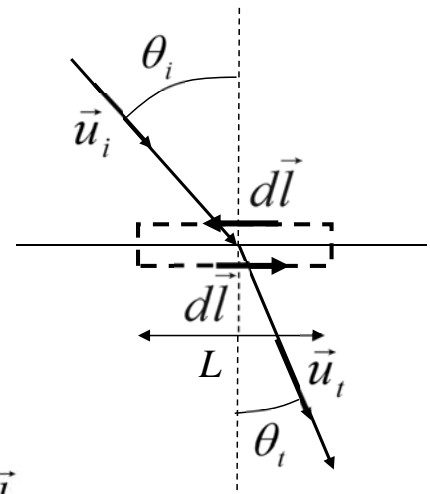
$$0 = \frac{\partial n}{\partial z} \vec{k} \cdot \vec{\tau} = \frac{d}{dz} (n(z) \vec{u} \cdot \vec{\tau}) \frac{dz}{ds}$$

$$n \vec{u} \cdot \vec{\tau} = n \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = n \sin \theta = cte$$



ECUACIÓN DE LAS TRAYECTORIAS

El carácter irrotacional del gradiente permite recuperar la ley de Snell de la refracción:



$$0 = \oint_{\Gamma} \nabla \Phi \cdot d\vec{l} = \oint_{\Gamma} \frac{\omega n(\vec{r})}{c} \vec{u} \cdot d\vec{l}$$

$$0 = -\frac{\omega n_i}{c} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_i\right)L + \frac{\omega n_t}{c} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_t\right)L$$

$$0 = -n_i \sin \theta_i + n_t \sin \theta_t$$



PRINCIPIO DE FERMAT



De la expresión $\nabla n = \frac{d}{ds} \left(n \frac{d\vec{r}}{ds} \right)$ se deduce el principio de Fermat:

Dados $n(\vec{r})$ y dos puntos, la curva del rayo que los une es tal que hace extremo (en general, mínimo) el tiempo de propagación de fase:

$$\delta \left(\int_A^B \frac{ds}{c/n} \right) = \delta \left(\int_A^B n ds / c \right) = 0$$

También hace extremo el camino óptico: $L = \int_A^B n ds$



PRINCIPIO DE FERMAT



Demostración:

$$\delta \left(\int_A^B n ds \right) = \left(\int_A^B \nabla n \cdot \delta \vec{r} ds \right) + \left(\int_A^B n d\delta s \right)$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \rightarrow 2 ds d\delta s = 2(d\vec{r} \cdot d\delta \vec{r})$$

$$d\delta s = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot d\delta \vec{r}$$

$$\int_A^B n d\delta s = \int_A^B n \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot d\delta \vec{r}$$



PRINCIPIO DE FERMAT



Integramos por partes en las coordenadas x , y y z . Por ejemplo en x :

$$\int_A^B n \frac{dx}{ds} \cdot d\delta x = \left[n \frac{dx}{ds} \delta x \right]_A^B - \int_A^B \frac{d}{ds} \left(n \frac{dx}{ds} \right) \delta x ds$$

Como A y B son fijos (todas las trayectorias pasan por ellos), el diferencial $\delta x_A = \delta x_B = 0$, y el primer sumando de la ecuación previa es cero. Por tanto:

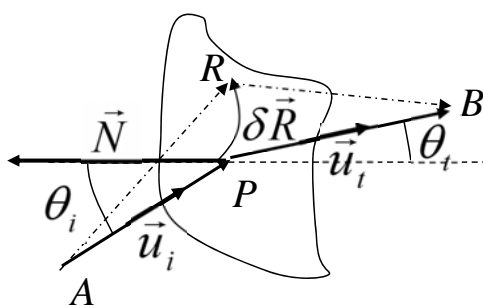
$$\delta \left(\int_A^B n ds \right) = \int_A^B \left[\left(\nabla n - \frac{d}{ds} \left(n \frac{d\vec{r}}{ds} \right) \right) \cdot \delta \vec{r} \right] ds = 0$$

Una trayectoria física real se tendrá entonces cuando:

$$\nabla n - \frac{d}{ds} \left(n \frac{d\vec{r}}{ds} \right) = \vec{0}$$



REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN



Camino óptico

$$L = n_i AR + n_t RB$$

$$L = n_i \vec{u}_i \cdot \vec{AR} + n_t \vec{u}_t \cdot \vec{RB}$$

Fermat

$$0 = \delta L = n_i \vec{u}_i \cdot (\vec{AP} - \vec{AR}) + n_t \vec{u}_t \cdot (\vec{PB} - \vec{RB})$$

$$0 = n_i \vec{u}_i \cdot \delta \vec{R} - n_t \vec{u}_t \cdot \delta \vec{R} = (n_i \vec{u}_i - n_t \vec{u}_t) \cdot \delta \vec{R}$$

Normal a la superficie en I

$$0 = (n_i \vec{u}_i - n_t \vec{u}_t) \cdot \delta \vec{R} \Rightarrow n_i \vec{u}_i - n_t \vec{u}_t = cte \vec{N}$$

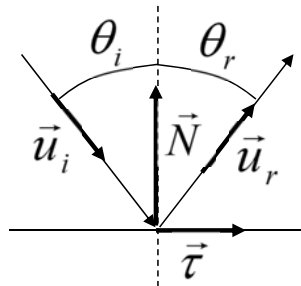




REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN

Ley de la reflexión:

El rayo incidente, el refractado y la normal están en un mismo plano (plano de incidencia)



$$n_i(\vec{u}_i - \vec{u}_r) = cte \vec{N}$$

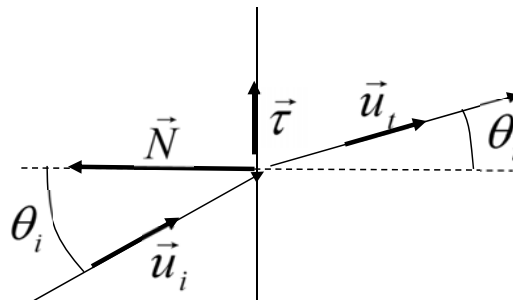
$$n_i(\vec{u}_i - \vec{u}_r) \cdot \vec{\tau} = n_i(\sin \theta_i - \sin \theta_r) = cte \vec{N} \cdot \vec{\tau} = 0$$

$$\theta_i = \theta_r$$



REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN

Ley de Snell de la refracción:



Vector tangente en I

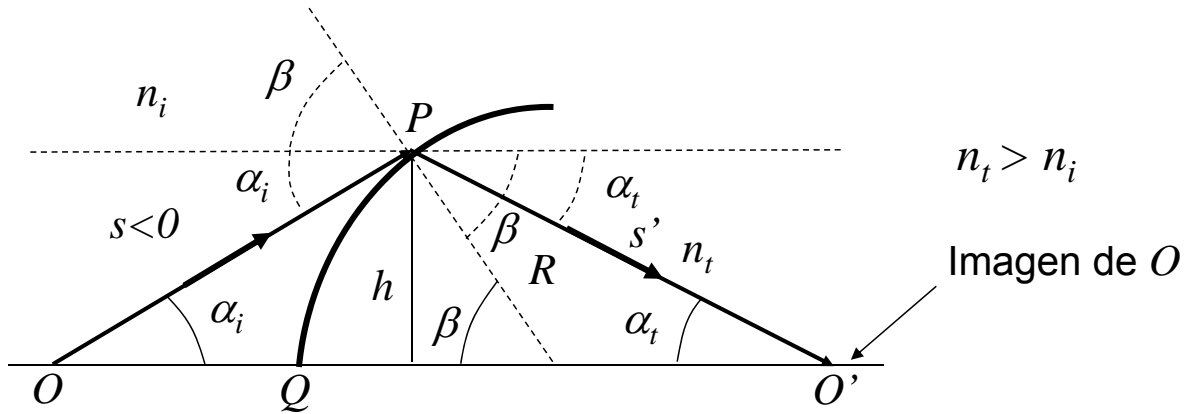
$$(n_i \vec{u}_i - n_r \vec{u}_r) \cdot \vec{\tau} = cte \vec{N} \cdot \vec{\tau} = 0$$

$$n_i \sin \theta_i = n_r \sin \theta_r$$





LA ESFERA EN ZONA PARAXIAL



Por el Principio de Fermat se puede obtener la ley de Snell:

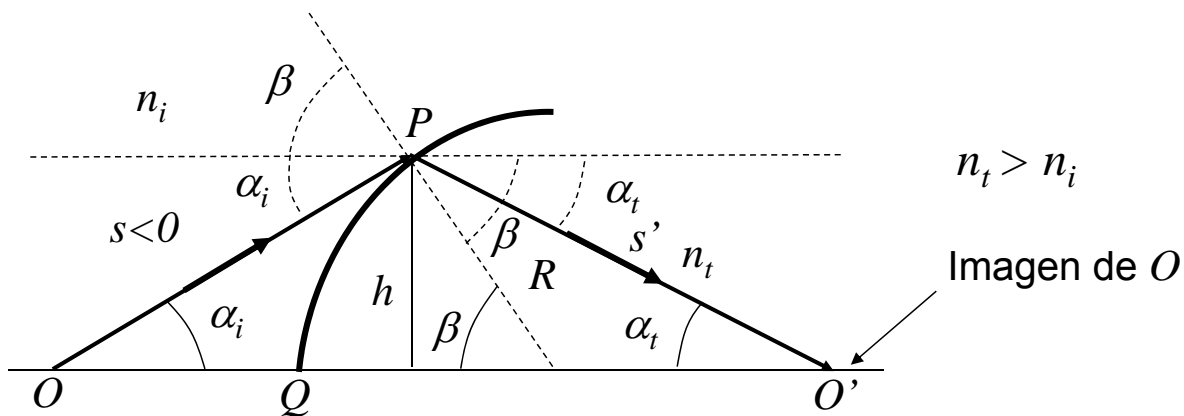
$$\delta L = \delta(n_i |s| + n_t s') = 0 \rightarrow \frac{\delta L}{\delta \beta} = 0$$

$$|s| = \sqrt{R^2 + (|OQ| + R)^2 - 2R(|OQ| + R) \cos \beta}$$

$$s' = \sqrt{R^2 + (|OQ| - R)^2 + 2R(|OQ| - R) \cos \beta}$$



LA ESFERA EN ZONA PARAXIAL



$$\frac{|s|}{\sin \beta} = \frac{|OQ| + R}{\sin \theta_i} \quad \frac{s'}{\sin \beta} = \frac{|OQ| - R}{\sin \theta_t}$$

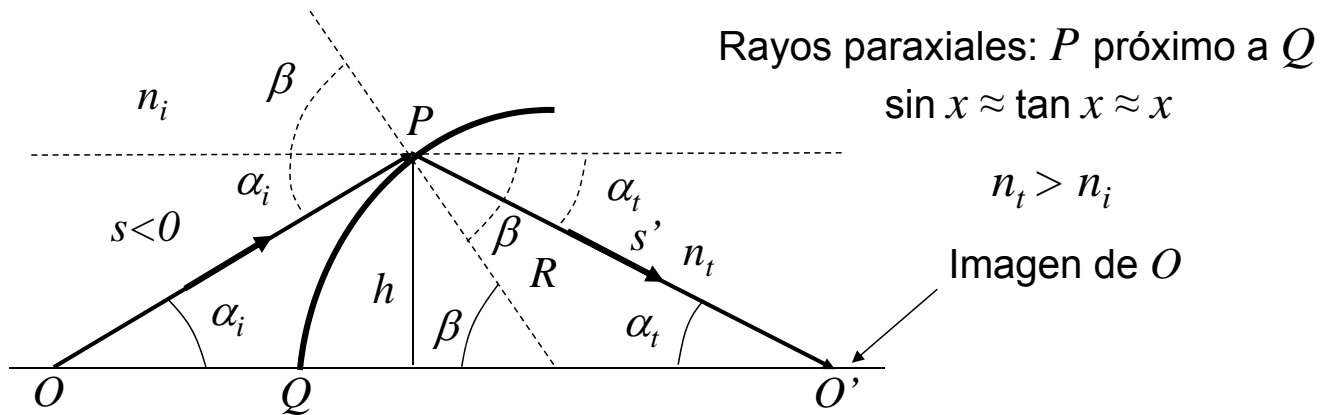
$$\frac{\delta L}{\delta \beta} = \frac{n_i}{|s|} (1/2)(2R(|OQ| + R) \sin \beta) - \frac{n_t}{s'} (1/2)(2R(|OQ| - R) \sin \beta) = 0$$

$$n_i \sin \theta_i - n_t \sin \theta_t = 0$$





LA ESFERA EN ZONA PARAXIAL



Ley de Snell: $n_t \theta_t = n_i \theta_i \rightarrow \begin{cases} \theta_t = \beta - \alpha_t \\ \theta_i = \beta + \alpha_i \end{cases} \rightarrow \left(\frac{h}{R} - \frac{h}{s'} \right) n_t \approx \left(\frac{h}{R} - \frac{h}{s} \right) n_i$

Invariante de Abbe $\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{s'} \right) n_t \approx \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{s} \right) n_i$



LA ESFERA EN ZONA PARAXIAL



$$\frac{n_t - n_i}{R} \approx \frac{n_i}{-s} + \frac{n_t}{s'} \quad s \approx -|O\vec{Q}|; \quad s' \approx |Q\vec{O}'|$$

$$\frac{n_t - n_i}{R} = \frac{n_i}{-s} + \frac{n_t}{s'} = \frac{n_i}{-f} = \frac{n_t}{f'}$$

f = distancia focal relativa al índice de refracción n_i

f' = distancia focal relativa al índice de refracción n_t





LA ESFERA EN ZONA PARAXIAL

Para $s \rightarrow \infty \Rightarrow s' \rightarrow f'$

Para $s \rightarrow f \Rightarrow s' \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{s'} \approx \frac{n_i}{n_t s} + \frac{n_t - n_i}{n_t R}$$

Para $s' < 0$, se habla de imagen virtual (O' a la izquierda de Q)



LA ESFERA EN ZONA PARAXIAL



Criterio de Signos: Norma DIN (Deutsche Industrie Normen)

Los rayos inciden de izquierda a derecha.

Las distancias son positivas por la derecha y por encima del centro del sistema óptico (vértice).

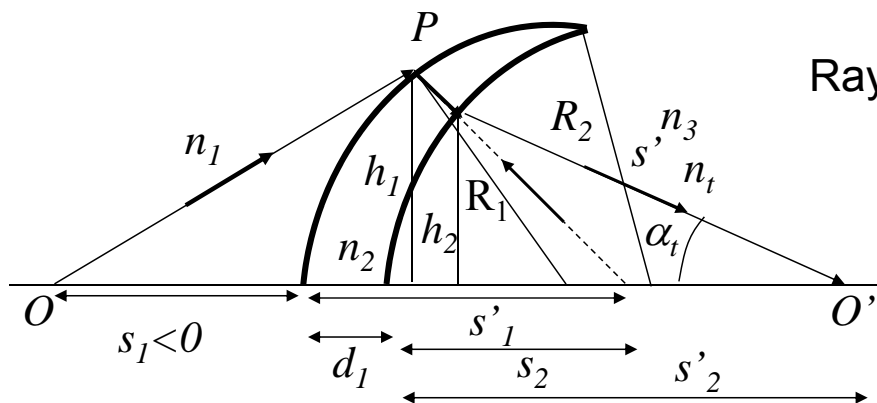
Los ángulos de incidencia y refracción del rayo con la normal son positivos si para hacer coincidir dicho rayo con la normal se debe girar en sentido horario.

Los ángulos de una línea con el eje óptico son positivos si para hacer coincidir dicha línea con la normal se debe girar en sentido antihorario.





SUCESIÓN DE SUPERFICIES ESFÉRICAS



Rayos paraxiales

Ecuación de Paso

$$\frac{1}{s'_1} \approx \frac{n_1}{n_2 s_1} + \frac{n_2 - n_1}{n_2 R_1} \Rightarrow s_2 = s'_1 - d_1 \Rightarrow \frac{1}{s'_2} \approx \frac{n_2}{n_3 s_2} + \frac{n_3 - n_2}{n_3 R_2}$$

$$n_1 = n_3 = n_i$$

$$n_2 = n_t$$

$$\Delta = d_1$$

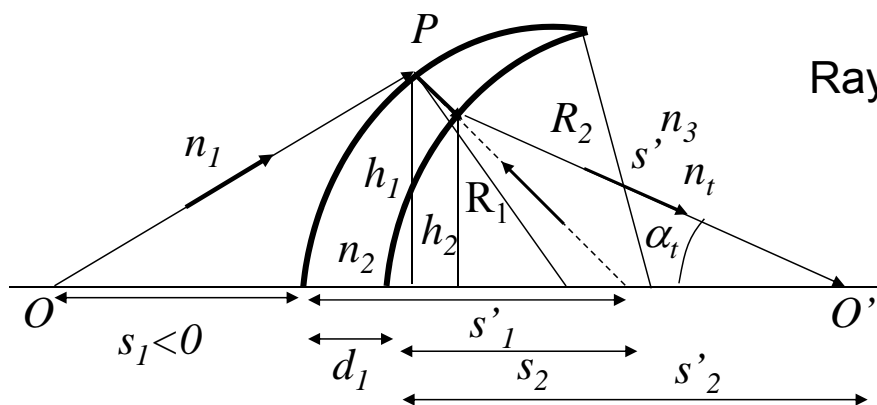
$$\frac{n_t}{s'_1} - \frac{n_i}{s_i} \approx \frac{n_t - n_i}{R_1}$$

$$\frac{n_i}{s_t} - \frac{n_t}{s'_1 - \Delta} \approx \frac{n_i - n_t}{R_2}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



SUCESIÓN DE SUPERFICIES ESFÉRICAS



Rayos paraxiales

$$\frac{n_t}{s'_1} - \frac{n_i}{s_i} \approx \frac{n_t - n_i}{R_1}$$

$$\frac{n_i}{s_t} - \frac{n_t}{s'_1 - \Delta} \approx \frac{n_i - n_t}{R_2}$$

$$n_1 = n_3 = n_i$$

$$n_2 = n_t$$

$$\Delta = d_1$$

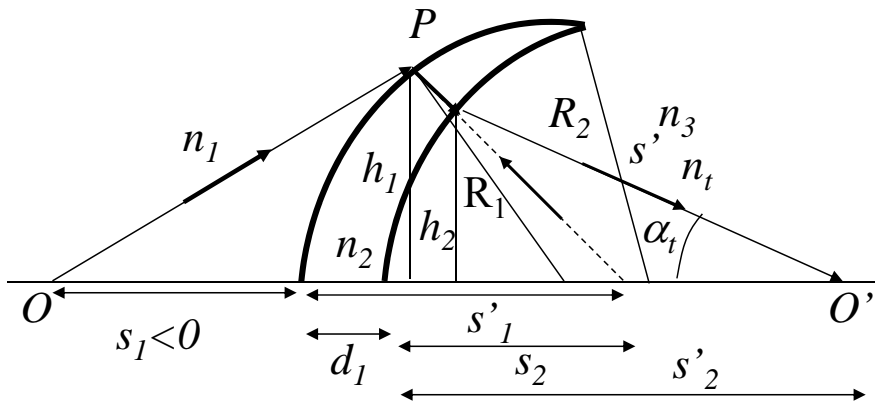
$$\underbrace{\frac{n_t}{s'_1} - \frac{n_t}{s'_1 - \Delta}}_0 + \frac{n_i}{s_t} - \frac{n_i}{s_i} \approx (n_t - n_i) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval





SUCESIÓN DE SUPERFICIES ESFÉRICAS



$f' > 0$ lente convexa
 $f' < 0$ lente cóncava

Por la definición de foco

$$\frac{n_i}{s_t} - \frac{n_i}{s_i} \approx (n_t - n_i) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{n_i}{-f}$$

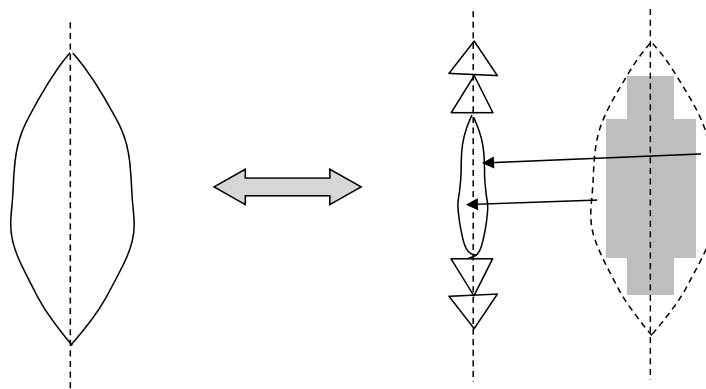
Por tanto: $\frac{1}{s_t} - \frac{1}{s_i} = \frac{1}{-f} = \frac{1}{f'}$ Para sistemas con índices extremos iguales: $f = -f'$



SUCESIÓN DE SUPERFICIES ESFÉRICAS

La refracción, basada en la ley de Snell, depende de la orientación de los rayos en la superficie de la lente y no de su trayectoria fuera de esa interfase:

LENTE DE FRESNEL



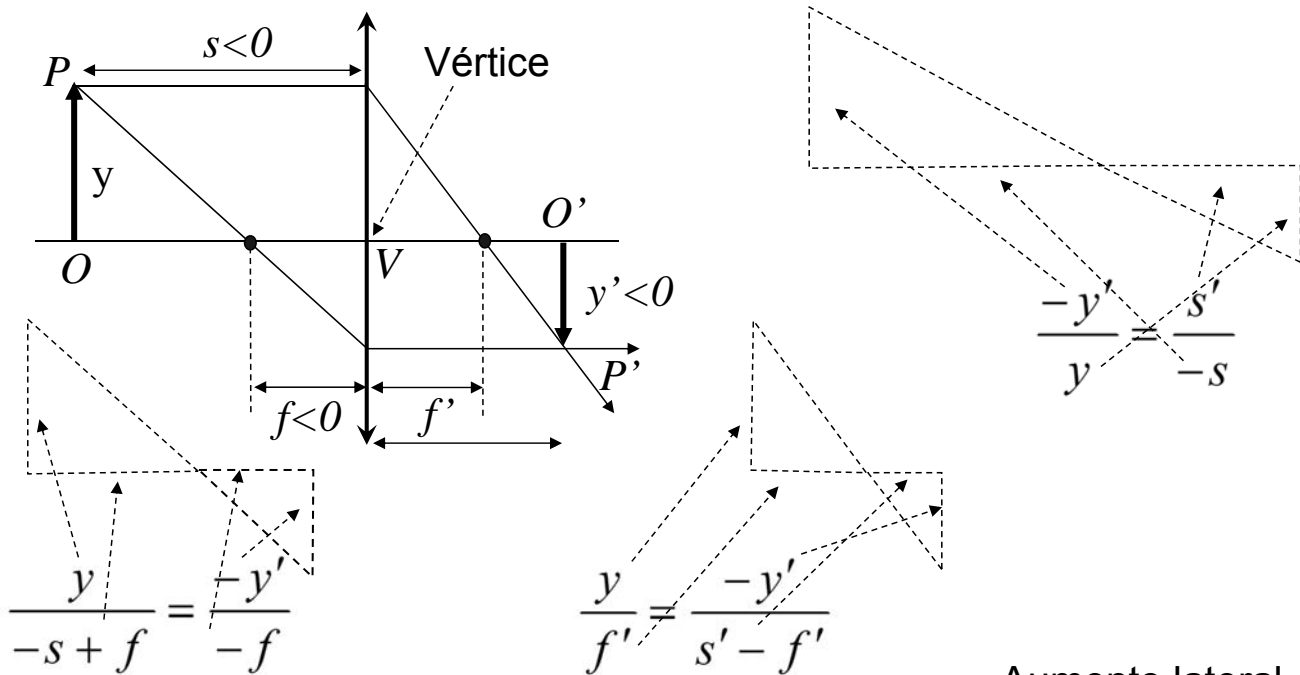
Vaciado de una lente haciéndola más ligera manteniendo invariantes sus superficies y por tanto sus propiedades ópticas



ECUACIONES DE CORRESPONDENCIA



Lente convergente e imagen real invertida



Aumento lateral

$$\frac{-y'}{y} = \frac{-f}{(-s + f)} = \frac{s'}{-s}$$

Ecuación de correspondencia de Newton

$$(-s + f)(s' - f') = -f f'$$

27/29

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

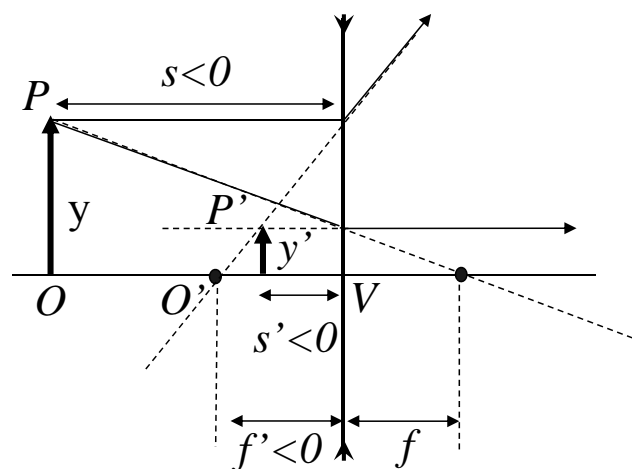


ECUACIONES DE CORRESPONDENCIA



Lente divergente e imagen virtual directa

Físicamente no se forma imagen



Aumento lateral

$$\frac{-y'}{y} = \frac{-f}{(-s + f)} = \frac{s'}{-s}$$

Ecuación de correspondencia de Newton

$$(-s + f)(s' - f') = -f f'$$

28/29

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

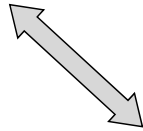




ECUACIONES DE CORRESPONDENCIA

En ambos casos, la imagen de OP es realmente $O'P'$, ya que las ecuaciones de correspondencia coinciden con las de sucesión de superficies.

$$(-s_i - f')(s_t - f') = f'^2$$



$$\frac{1}{s_t} - \frac{1}{s_i} = \frac{1}{f'}$$

