OPERADORES DIFERENCIALES

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

Curso 2014/15

ÍNDICE

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

ÍNDICE

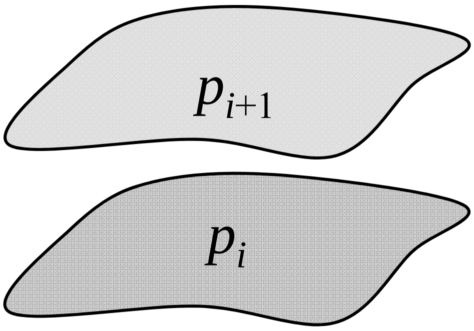
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CAMPO ESCALAR

Se tiene un campo escalar cuando a cada punto del espacio se le hace corresponder, de forma unívoca, el valor de una magnitud escalar:

$$(x, y, z) \rightarrow p(x, y, z)$$
$$\vec{r} \rightarrow p(\vec{r})$$

A cada punto del espacio se le asigna un valor



Superficies Equiescalares:

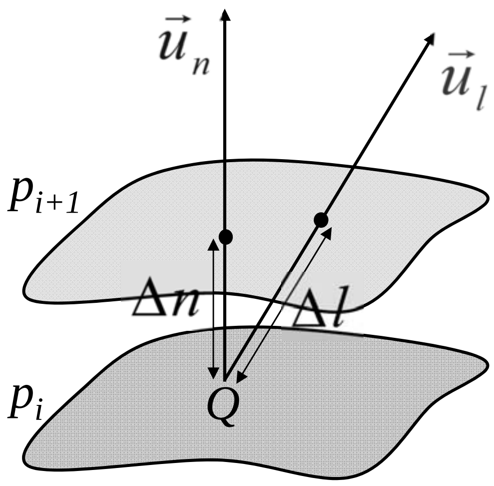
Superficies con $p=cte=p_i=p_{i+1}$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CAMPO ESCALAR

Derivada Direccional en la dirección $\vec{u}_l$:

Variación del escalar p por unidad de longitud en esa dirección



$$\frac{dp}{dl}(Q) = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{p_{i+1} - p_i}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta p}{\Delta l}$$

El valor máximo de $\frac{dp}{dl}(Q)$ se obtiene en la dirección normal, pues la distancia entre superficies equiescalares es la menor $\Delta n < \Delta l$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

GRADIENTE

En el campo escalar de la magnitud p se define el gradiente de p en el punto Q, y se representa por

$$\nabla p \equiv grad\ p$$

Es una magnitud vectorial, asociada al punto Q, cuya dirección es la del mayor variación de p, sentido el del crecimiento y módulo la variación de p por unidad de longitud.

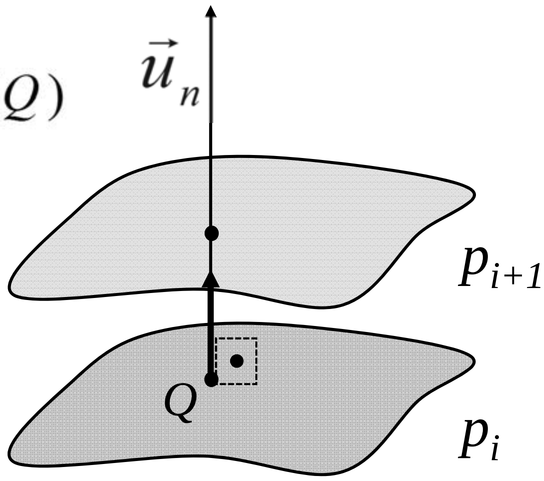
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

GRADIENTE

De acuerdo con la definición anterior, se puede escribir

$$\nabla p(Q) \equiv grad\ p(Q) = \frac{dp}{dn}(Q)\,\vec{u}_n(Q)$$

$$\left|grad\ p(Q)\right| = \lim_{\Delta n \to 0} \frac{\Delta p}{\Delta n}(Q) = \frac{dp}{dn}(Q)$$



$$\nabla p(Q) \equiv grad\, p(Q)$$

$$p_i < p_{i+1}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

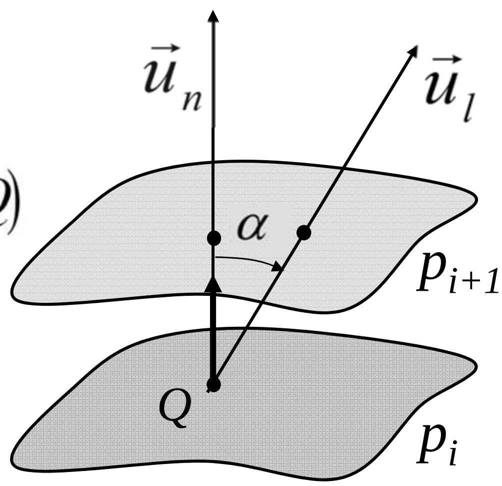
GRADIENTE

La derivada direccional se puede calcular en función del gradiente:

$$\frac{dp}{dl} = \frac{dp}{dn} \cdot \frac{dn}{dl} = \frac{dp}{dn} \cos\alpha = \frac{dp}{dn} \vec{u}_n \cdot \vec{u}_l \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dp}{dl} = grad\ p \cdot \vec{u}_l$$

$$\nabla p(Q) \equiv grad\, p(Q)$$



También se puede escribir:

$$dp = grad\ p \cdot (dl\,\vec{u}_l) = grad\ p \cdot d\vec{l}$$

$$p_i < p_{i+1}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

GRADIENTE

Expresión analítica del vector gradiente en coordenadas cartesianas

$$\left.\begin{aligned} dp &= grad\ p \cdot d\vec{l} \\ dp &= \frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz \\ d\vec{l} &= dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k} \end{aligned}\right\} \Rightarrow grad\ p = \frac{\partial p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k}$$

$$\Delta p = p(\vec{r} + \Delta\vec{r}) - p(\vec{r}) \simeq \nabla p \cdot \Delta\vec{r} = \frac{\partial p}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial p}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial p}{\partial z}\Delta z$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

GRADIENTE

Expresión analítica del vector gradiente en coordenadas cilíndricas en simetría axial $p=p(r)$:

$$grad\ p = \frac{\partial p}{\partial r}\vec{u}_r$$

r es la distancia al eje y $\vec{u}_r$ el vector unitario en esa dirección

Expresión analítica del vector gradiente en coordenadas esféricas en simetría esférica $p=p(r)$:

$$grad\ p = \frac{\partial p}{\partial r}\vec{u}_r$$

r es la distancia al origen y $\vec{u}_r$ el unitario en esa dirección

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

GRADIENTE

Vector simbólico NABLA

Este operador diferencial vectorial se define sin necesidad de apoyo en ningún sistema de coordenadas.
Para su manejo operacional, en coordenadas cartesianas, su expresión es:

$$\nabla \equiv \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$$

Y aplicado al campo escalar p,

$$\nabla p \equiv grad\ p = \frac{\partial p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

GRADIENTE

Ejemplo: Gradiente de una función radial $p(x,y,z)=p(r(x,y,z))$

$$\nabla p = \frac{dp}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}\vec{i} + \frac{dp}{dr}\frac{\partial r}{\partial y}\vec{j} + \frac{dp}{dr}\frac{\partial r}{\partial z}\vec{k} =$$

$$= \frac{dp}{dr}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial r}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial r}{\partial z}\vec{k}\right)$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial(\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{\partial x} = \frac{x}{r};$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}; \qquad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

GRADIENTE

Ejemplo: Gradiente de una función radial $p(x,y,z)=p(r(x,y,z))$

$$\nabla p = \frac{dp}{dr}\left(\frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{r}\right) = \frac{\vec{r}}{r}\frac{dp}{dr}$$

En coordenadas esféricas:

$$\nabla p = \frac{dp}{dr}\vec{u}_r$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CAMPO VECTORIAL

Se tiene un campo vectorial cuando a cada punto del espacio se le hace corresponder, de forma unívoca, el valor de una magnitud vectorial

$$(x,y,z) \rightarrow w_x(x,y,z)\vec{i} + w_y(x,y,z)\vec{j} + w_z(x,y,z)\vec{k}$$

$$\vec{r} \rightarrow \vec{w}(\vec{r})$$

A cada punto del espacio le asocia un vector.

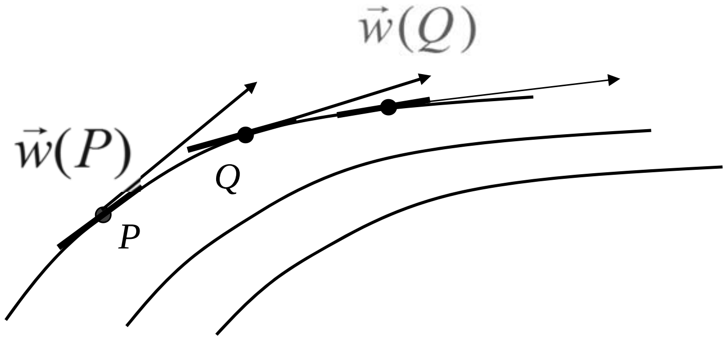
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CAMPO VECTORIAL

Se representa mediante líneas de campo, también llamadas líneas vectoriales o líneas de fuerza.

Son líneas tangentes a los vectores campo en cada punto.

Las líneas de fuerza no pueden cortarse.



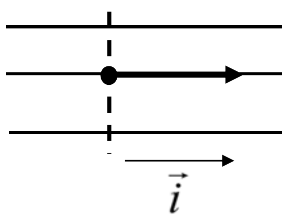
Línea de Campo
Unión de las sucesivas tangentes a los vectores campo en cada punto

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CAMPO VECTORIAL

¿Cuántas líneas de campo se pintan en un punto P?

$\left|\vec{w}(P)\right|$ indica el número de líneas perpendiculares que atraviesan la superficie unidad colocada normalmente al vector

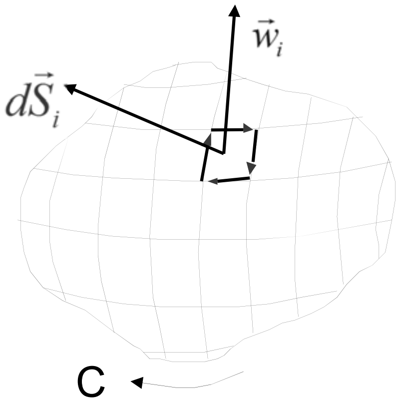


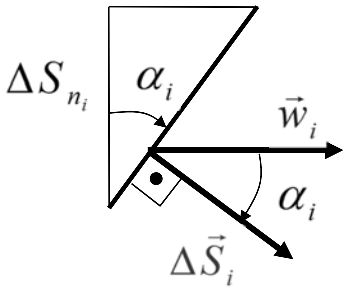
$$\vec{w}(P) = 3\vec{i}$$

Ecuación matemática de las líneas: $\vec{w} \parallel d\vec{l} \Rightarrow \dfrac{dx}{w_x} = \dfrac{dy}{w_y} = \dfrac{dz}{w_z}$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

FLUJO





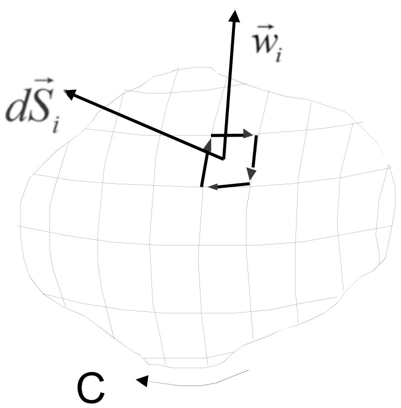
$$\vec{w}_i \cdot \Delta\vec{S}_i = |\vec{w}_i|\left|\Delta\vec{S}_i\right|\cos\alpha_i = |\vec{w}_i|\Delta\vec{S}_{n_i} =$$

= nº de líneas por unidad de superficie perpendicular a $\vec{w}_i$ × superficie perpendicular a $\vec{w}_i$ =

= nº de líneas que atraviesan ΔS_{n_i} y por ende $\Delta\vec{S}_i$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

FLUJO



Sumamos las líneas que atraviesan todos los diferenciales de superficie $\sum_{i=1}^{n}\vec{w}_i\cdot\Delta\vec{S}_i$

$$\phi_S = \int_S \vec{w}\cdot d\vec{S} \equiv \lim_{\Delta S_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\vec{w}_i\cdot\Delta\vec{S}_i$$

Significado Físico:

nº de líneas de campo que atraviesan S

intensidad de campo que atraviesa S

Si la superficie es cerrada se representa por: $\oint_S \vec{w}\cdot d\vec{S}$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

FLUJO

Si se utilizan las líneas de campo de forma cuantitativa, el flujo a través de una superficie representaría el número de líneas de campo que atraviesan la superficie considerada, siempre que las líneas se hayan dibujado de forma que el número de ellas que atraviesan la unidad de superficie, colocada normalmente, sea igual al módulo del campo en cada punto.

El flujo es aditivo:

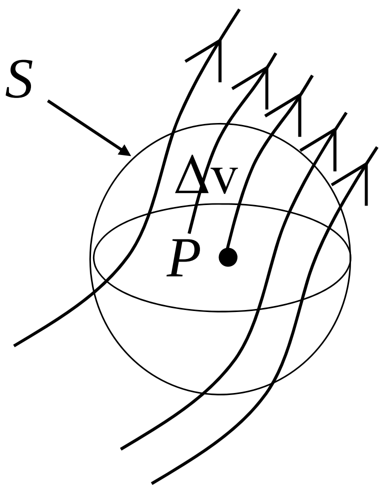
$$S = S_1 + S_2 \rightarrow \ \phi_S = \int_S \vec{w} \cdot d\vec{S} = \phi_{S_1} + \phi_{S_2}$$

El flujo a través de una superficie suma de otras dos es la suma de los flujos a través de cada una de ellas

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

DIVERGENCIA

Número de líneas de campo que atraviesan una superficie S dividido por el volumen encerrado.



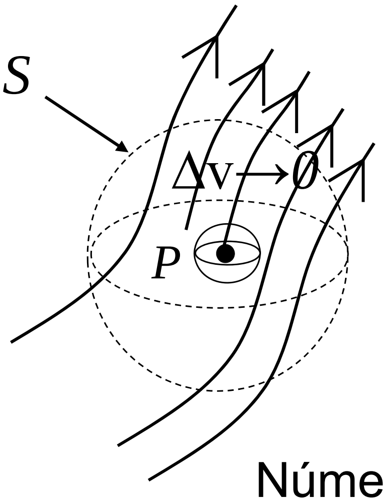
$$\frac{1}{\Delta v}\int_S \vec{w} \cdot d\vec{S}$$

Si salen suman, si entran restan

$$\frac{1}{\Delta v}\int_S \vec{w} \cdot d\vec{S} = \frac{+5-3}{\Delta v} = \frac{+2}{\Delta v}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

DIVERGENCIA



Al hacer $\Delta v \rightarrow 0$ nos quedamos con las que nacen o mueren en P.

$$\lim_{\Delta v \to 0} \frac{1}{\Delta v} \int_S \vec{w} \cdot d\vec{S} = \frac{+1}{\Delta v}$$

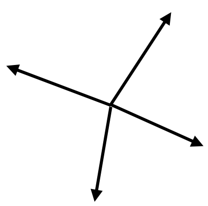
Número de líneas de campo que nacen (+) o mueren (-) dentro de S por unidad de volumen

$$\nabla \cdot \vec{w} \equiv div\ \vec{w} \equiv \lim_{\Delta v \to 0} \frac{1}{\Delta v} \int_S \vec{w} \cdot d\vec{S}$$

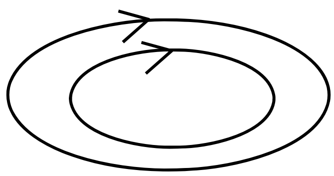
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

DIVERGENCIA

Si la divergencia de un campo es cero, las líneas de campo no nacen ni mueren en ningún punto, se cierran sobre sí mismas (Campo vectorial solenoidal).



$\exists$ puntos con $\nabla \cdot \vec{w} \neq 0$



$\nabla \cdot \vec{w} = 0 \ \forall$ punto

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

DIVERGENCIA

Expresión analítica del vector divergencia en coordenadas cartesianas:

$$\nabla \cdot \vec{w} = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

DIVERGENCIA

Expresión analítica del vector divergencia en coordenadas cilíndricas en simetría axial $\vec{p} = p(r)\vec{u}_r$

$$div\ p = \frac{1}{r}\frac{\partial (r\ p)}{\partial r}$$

r es la distancia al eje y $\vec{u}_r$ el vector unitario en esa dirección

Expresión analítica del vector divergencia en coordenadas esféricas en simetría esférica $\vec{p} = p(r)\vec{u}_r$

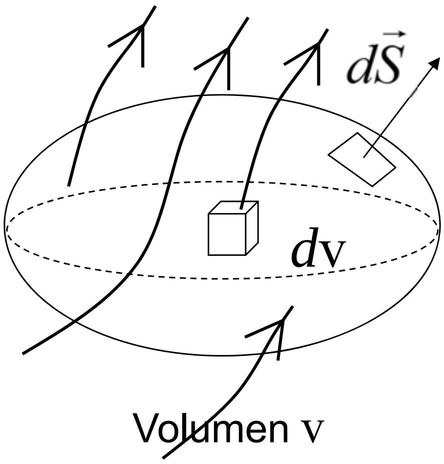
$$div\ p = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2\ p)}{\partial r}$$

r es la distancia al origen y $\vec{u}_r$ el unitario en esa dirección

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

TEOREMA DE GAUSS O DE LA DIVERGENCIA

En una superficie cerrada (el sentido del diferencial de superficie es la normal hacia afuera) se verifica:



Flujo   Integral de la divergencia

$$\oint_S \vec{w} \cdot d\vec{S} = \int_{\mathrm{v}} \nabla \cdot \vec{w} \, d\mathrm{v}$$

Número neto de líneas de campo que atraviesan la superficie (Ej:+3-2)

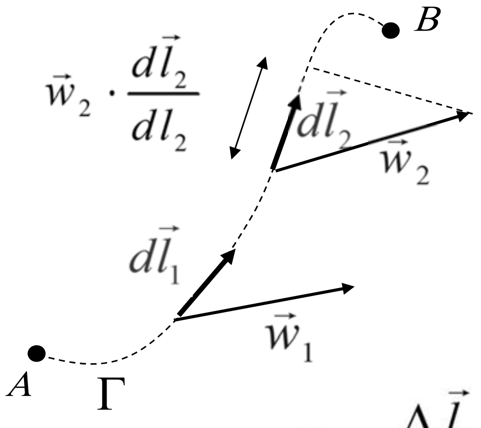
Volumen v

Superficie de área S

Número de líneas que nacen o mueren por unidad de volumen por volumen = Número de líneas que nacen o mueren en v (Ej:+2–1)

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CIRCULACIÓN (INTEGRAL DE LÍNEA)



$$\vec{w}_i \cdot \frac{\Delta \vec{l}_i}{\left|\Delta \vec{l}_i\right|}$$

Proyección del campo (Intensidad del campo en la dirección de la curva)

$$\vec{w}_i \cdot \frac{\Delta \vec{l}_i}{\left|\Delta \vec{l}_i\right|} \quad \underbrace{\left|\Delta \vec{l}_i\right|}_{Longitud\ de\ Curva}$$

Multiplicamos la proyección por la longitud de la curva en la que se tiene tal proyección

Suma de proyecciones pesadas por la longitud asociada

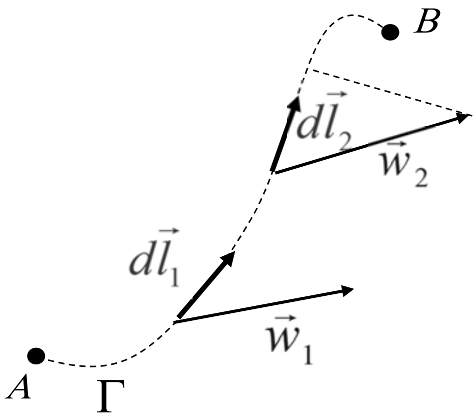
$$\sum_{i=1}^{n} \vec{w}_i \cdot \frac{\Delta \vec{l}_i}{\left|\Delta \vec{l}_i\right|} \left|\Delta \vec{l}_i\right| = \sum_{i=1}^{n} \vec{w}_i \cdot \Delta \vec{l}_i$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CIRCULACIÓN (INTEGRAL DE LÍNEA)

En el campo vectorial de la magnitud $\vec{w}$, se define la integral de línea entre dos puntos A y B, a lo largo de la curva Γ:

$$\lim_{\Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \vec{w}_i \cdot \Delta \vec{l}_i = \int_{A_{Curva\ \Gamma}}^{B} \vec{w} \cdot d\vec{l}$$



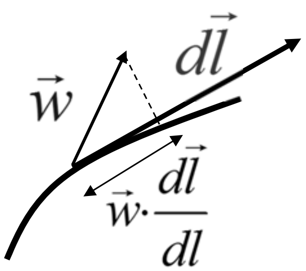
Si la línea es cerrada recibe el nombre de circulación

$$\oint_{Curva\ \Gamma} \vec{w} \cdot d\vec{l}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CIRCULACIÓN (INTEGRAL DE LÍNEA)

Significado físico:



Intensidad local del campo en la dirección de la curva ponderado por la longitud en la que se tiene ese valor del campo:

$$\left(\vec{w} \cdot \frac{d\vec{l}}{dl} \right) dl$$

Cuantifica la intensidad del campo a lo largo de la curva:

$$\int_{A\ \Gamma}^{B} \vec{w} \cdot d\vec{l}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CIRCULACIÓN (INTEGRAL DE LÍNEA)

PROPIEDADES

$$\int_{A_{(\Gamma)}}^{B} \vec{w} \cdot d\vec{l} = -\int_{B_{(\Gamma)}}^{A} \vec{w} \cdot d\vec{l}$$

Es aditiva $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 \rightarrow$

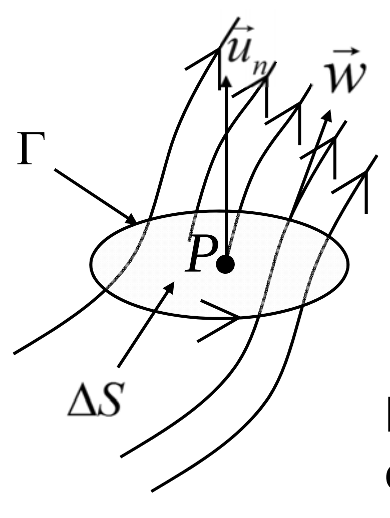
$$C_{\Gamma_1} + C_{\Gamma_2} = \int_{\Gamma_1} \vec{w} \cdot d\vec{l} + \int_{\Gamma_2} \vec{w} \cdot d\vec{l} = \int_{\Gamma} \vec{w} \cdot d\vec{l} = C_{\Gamma}$$

La integral de línea en una curva suma de dos es la suma de las integrales de línea

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

ROTACIONAL

$$\Delta\vec{S} = \Delta S\,\vec{u}_n$$



$$\frac{1}{\Delta S}\int_{\Gamma} \vec{w} \cdot d\vec{l}$$

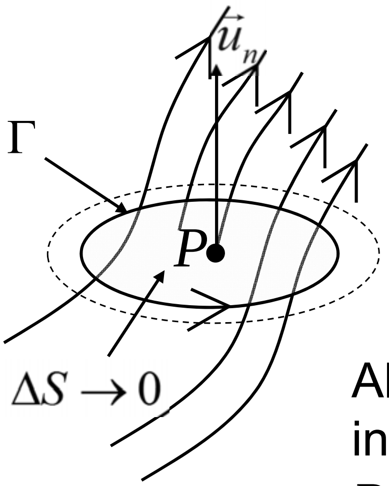
Suma de proyecciónes pesadas por la longitud asociada en la curva circular Γ dividido por el área que encierra

Da una idea de la intensidad del campo en torno a la curva normalizado por el área encerrada

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

ROTACIONAL

$\Delta\vec{S} = \Delta S\,\vec{u}_n$

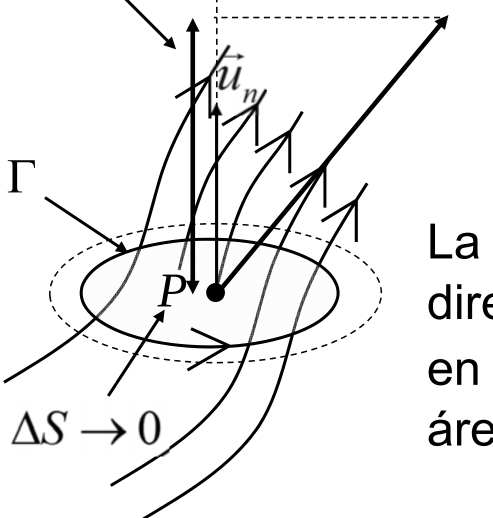


Al hacer $\Delta S \to 0$ eliminamos la dependencia de la curva y le asignamos el valor al punto P

Al ser la curva muy pequeña, sería la intensidad de remolino del campo en P por unidad de área en torno a $\vec{u}_n$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

ROTACIONAL



$$(\nabla\times\vec{w})\cdot\vec{u}_n \equiv (rot\ \vec{w})\cdot\vec{u}_n \equiv$$

$$= \lim_{\Delta S\to 0}\frac{1}{\Delta S}\int_\Gamma \vec{w}\cdot d\vec{l}$$

La proyección del rotacional en P en la dirección de $\vec{u}_n$ = Intensidad de remolino en el punto P en torno a $\vec{u}_n$ por unidad de área

La dirección del rotacional en un punto es aquella en torno a la cual las líneas de campo se asemejan más a un remolino.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

ROTACIONAL

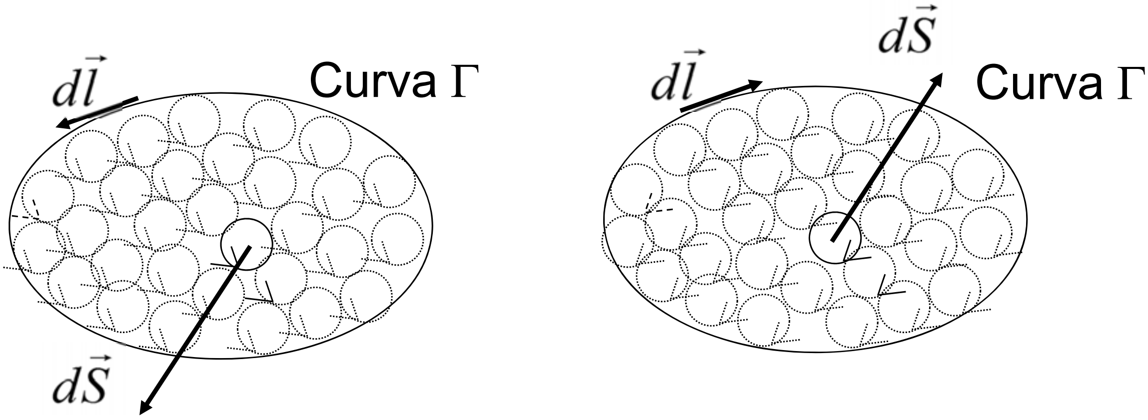
Expresión analítica del rotacional en coordenadas cartesianas:

$$\nabla \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

TEOREMA DE STOKES

En una superficie S se elige como sentido del diferencial de superficie el del avance de un tornillo girando con el diferencial $d\vec{l}$ de la curva de contorno.



S=cualquier superficie abarcada por Γ

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

TEOREMA DE STOKES

En una línea cerrada se verifica:

Circulación — Flujo del rotacional

$$\oint_{\Gamma} \vec{w}\cdot d\vec{l} = \int_{S} \nabla\times\vec{w}\cdot d\vec{S}$$

Intensidad del campo en torno a la curva Γ

Suma de las intensidades de remolino locales en torno a cada dS por unidad de área por el diferencial de superficie. En el interior las intensidades se compensan unas con otras en diferenciales contiguos. Solo dan resultado neto en el contorno, es decir, la intensidad del campo en la curva Γ.

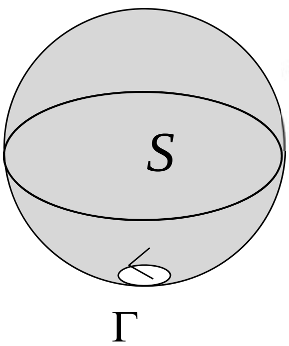
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

TEOREMA DE STOKES

Propiedad: $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{w}) = 0$

El rotacional es un campo sin fuentes.

Dem.: Si Γ colapsa a un punto, la circulación tiende a 0 y S es cerrada. Entonces se tiene:



$$0 \leftarrow \oint_{\Gamma\to 0} w\cdot d\vec{l} = \int_{S\to cerrada} \nabla\times\vec{w}\cdot d\vec{S} = \int_{v} \nabla\cdot(\nabla\times\vec{w})\, dv$$

Flujo del rotacional — *Teorema de Gauss*

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CAMPO VECTORIAL CONSERVATIVO

Si un campo vectorial $\vec{w}$ se obtiene del gradiente de uno escalar V, la circulación de ese campo entre dos puntos no depende del camino Γ (al campo escalar V del que se obtiene se le llama función potencial).

$$\vec{w} = grad\, V \Leftrightarrow \int_{A\,\Gamma}^{P} \vec{w}\cdot d\vec{l} = V(P) - V(A)$$

Si la integral de línea de un campo vectorial $\vec{w}$ entre dos puntos no depende de la curva Γ, se puede definir un campo escalar V tal que su gradiente es el campo $\vec{w}$.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CAMPO VECTORIAL CONSERVATIVO

$$Si\ \vec{w} = grad\, V \Rightarrow \int_{A\,\Gamma}^{P} \vec{w}\cdot d\vec{l} = V(P) - V(A)$$

Demostración:

$$\int_{A\,\Gamma}^{P} \vec{w}\cdot d\vec{l} = \int_{A\,\Gamma}^{P} grad\, V \cdot d\vec{l} = \int_{A}^{P} dV = V(P) - V(A)$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CAMPO VECTORIAL CONSERVATIVO

Si $\int_{A\,\Gamma}^{P} \vec{w}\cdot d\vec{l} = V(P) - V(A) \Rightarrow \vec{w} = grad\, V$

Demostración:

$$V(\vec{r}) = V(A) + \int_{A}^{\vec{r}} \vec{w}\cdot d\vec{l}$$

A se suele tomar en el ∞, y si la integral no es impropia, se puede hacer $V(\vec{r}\to\infty) = 0$

$$\left.\begin{aligned} V(\vec{r}+\Delta\vec{r}) - V(\vec{r}) &= \int_{\vec{r}}^{\vec{r}+\Delta\vec{r}} \vec{w}\cdot d\vec{l} \simeq \vec{w}\cdot\Delta\vec{r} \\ V(\vec{r}+\Delta\vec{r}) - V(\vec{r}) &\simeq \nabla V\cdot\Delta\vec{r} \end{aligned}\right\} \longrightarrow \vec{w} = grad\, V$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CAMPO VECTORIAL CONSERVATIVO

$$\oint_{\Gamma} \vec{w}\cdot d\vec{l} \underset{\forall\Gamma}{=} 0 \Leftrightarrow \int_{A\,\Gamma_1}^{P} \vec{w}\cdot d\vec{l} \underset{\forall\Gamma_1,\Gamma_2}{=} \int_{A\,\Gamma_2}^{P} \vec{w}\cdot d\vec{l} = V(P) - V(\mathrm{A})$$

Es equivalente que la circulación para toda curva cerrada sea cero, y que la integral de línea entre dos puntos no dependa del camino

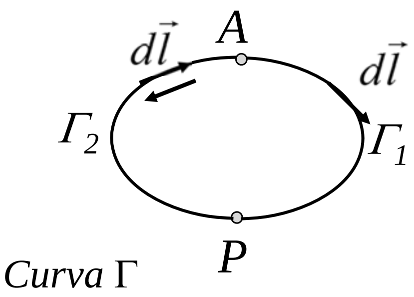
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CAMPO VECTORIAL CONSERVATIVO

Demostración:

La circulación a lo largo de cualquier curva cerrada Γ es nula:

$$\oint_{\Gamma} w \cdot d\vec{l} = 0$$



$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$$

$$\int_{A\,\Gamma_1}^{P} w \cdot d\vec{l} = -\int_{P\,\Gamma_2}^{A} w \cdot d\vec{l} = \int_{A\,\Gamma_2}^{P} w \cdot d\vec{l}$$

para toda curva Γ_1 *y* Γ_2

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CAMPO VECTORIAL CONSERVATIVO

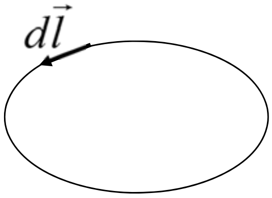
$$\nabla \times \vec{w} = \vec{0} \Leftrightarrow \oint_{\Gamma} \vec{w} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \forall \Gamma$$

Es equivalente que el rotacional de un campo vectorial sea cero, y que su integral de línea en una curva cerrada sea cero.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CAMPO VECTORIAL CONSERVATIVO

Demostración:



Curva Γ

$$\nabla \times \vec{w} = \vec{0} \leftrightarrow 0 = \int_S \nabla \times \vec{w} \cdot d\vec{S} = \oint_\Gamma \vec{w} \cdot d\vec{l}$$

Teorema de Stokes

La circulación a lo largo de cualquier curva cerrada Γ es nula

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CAMPO VECTORIAL CONSERVATIVO

$$\vec{w} = grad\, V \Leftrightarrow \nabla \times \vec{w} = 0$$

Propiedad:

$$\nabla \times (\nabla V) = 0$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

OPERADOR LAPLACIANO

Expresión analítica en coordenadas cartesianas:

$$\nabla \cdot (\nabla p) = (\nabla \cdot \nabla) p = \nabla^2 p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}$$

Laplaciano de un campo vectorial:

$$\nabla^2 \vec{w} = \nabla^2 w_x \vec{i} + \nabla^2 w_y \vec{j} + \nabla^2 w_z \vec{k}$$

Propiedad:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{w}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{w}) - \nabla^2 \vec{w}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

OPERADOR LAPLACIANO

Significado físico:

Desarrollo de Taylor

$$p = p(O) + (\nabla p) \cdot \vec{r} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} x^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} y^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} z^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} xy + \ldots$$

Integrando en un cubo centrado en el origen *O*:

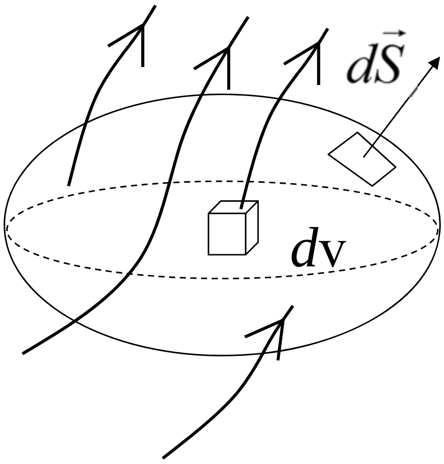
$$< p >= \frac{1}{\Delta \mathrm{v}} \int_{\Delta \mathrm{v}} p \, d\mathrm{v} = p(O) + \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) Cte$$

$$\nabla^2 p = Cte(< p > - p(O))$$

El laplaciano es proporcional a la diferencia entre el valor medio del campo cerca del punto y el valor en el punto

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

SEGUNDO TEOREMA DE GAUSS



$$\oint_S d\vec{S} \times \vec{w} = \int_{\mathrm{V}} d\mathrm{v}\ \nabla \times \vec{w}$$

Otra definición de rotacional:

$$\nabla \times \vec{w} = \lim_{\Delta \mathrm{v} \to 0} \frac{1}{\Delta \mathrm{v}} \oint_S d\vec{S} \times \vec{w}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

OTROS OPERADORES

Operador sobre un campo vectorial:

$$(\vec{a} \cdot \nabla)$$

$$(\vec{a} \cdot \nabla)\vec{b} \equiv \vec{i}\,(\vec{a} \cdot \nabla b_x) + \vec{j}\,(\vec{a} \cdot \nabla b_y) + \vec{k}\,(a \cdot \nabla b_z)$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval