



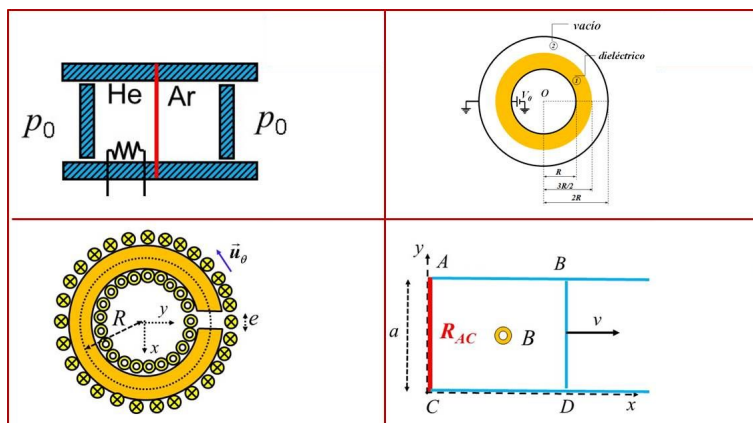
POLITÉCNICA

# ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO

## FÍSICA II

### TEORÍA

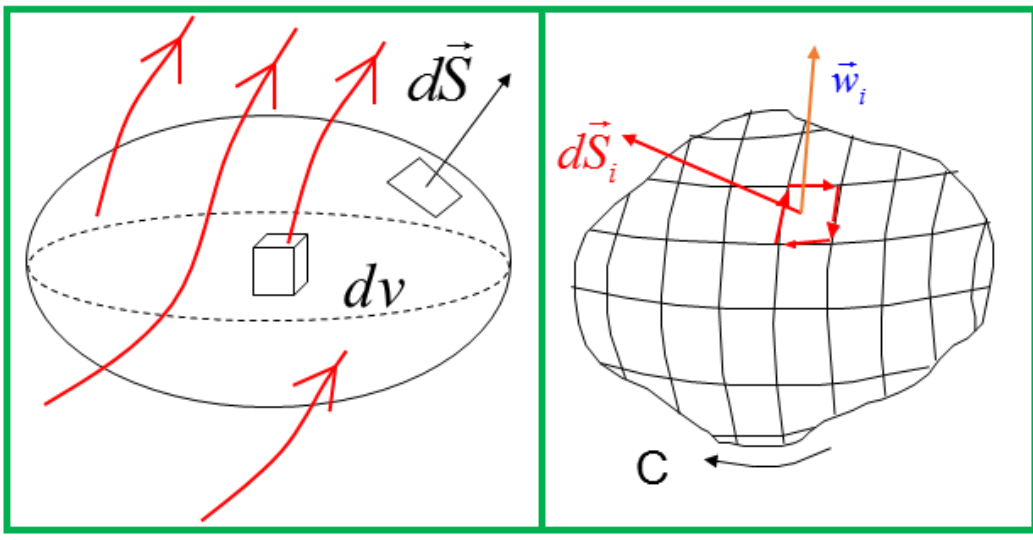
### Termodinámica y Electromagnetismo





POLITÉCNICA

# ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO



## TEMA 2.- OPERADORES DIFERENCIALES

*José Carlos JIMÉNEZ SÁEZ*  
*Santiago RAMÍREZ DE LA PISCINA MILLÁN*

## ÍNDICE OPERADORES DIFERENCIALES

---

<b>2. Operadores Diferenciales</b>	<b>1</b>
2.1. Introducción a los operadores diferenciales . . . . .	1
2.2. Campos escalares . . . . .	1
2.3. Derivada direccional . . . . .	3
2.4. Gradiente de un campo escalar . . . . .	5
2.4.1. El gradiente como límite de una integral de superficie . . . . .	6
2.4.2. Expresiones analíticas del vector gradiente . . . . .	6
2.5. Campos vectoriales . . . . .	9
2.6. El gradiente como campo vectorial . . . . .	11
2.7. Integral de línea de un campo vectorial . . . . .	11
2.8. Flujo de un campo vectorial . . . . .	12
2.9. Divergencia de un campo vectorial . . . . .	13
2.9.1. Expresión analítica de la divergencia . . . . .	15
2.10. Teorema de la divergencia . . . . .	16
2.11. Rotacional de un campo vectorial . . . . .	17
2.11.1. Expresión analítica del rotacional . . . . .	19
2.12. Teorema del rotacional o de Stokes . . . . .	21
2.13. Campos conservativos . . . . .	23
2.13.1. Integral de línea de un gradiente . . . . .	23
2.13.2. Todo vector potencial es irrotacional . . . . .	23
2.14. Campos solenoidales . . . . .	24
2.15. Operador nabla de Hamilton . . . . .	25
2.16. Operador laplaciano . . . . .	27
2.17. Ejemplos operacionales . . . . .	28

# 2

## Operadores Diferenciales

---

### 2.1. Introducción a los operadores diferenciales

Para el estudio de la electricidad y el magnetismo es conveniente utilizar una notación vectorial infinitesimal, basada en la teoría de campos y que simplifica notablemente la notación a utilizar a la vez que pone de manifiesto el significado físico de muchas fórmulas.

Se van a exponer unos cuantos conceptos de la teoría de campos que nos ayuden en el estudio de este curso de física, pero no se piense que esta exposición es, ni mucho menos, completa. A veces, incluso se sacrifica el rigor matemático en aras de presentar únicamente los conceptos de modo que, por ejemplo, diremos “se puede demostrar la equivalencia de estas dos definiciones” pero no efectuaremos tal demostración, lo que no significa que la demostración no exista o sea complicada, sino que simplemente no se considera relevante incluirla en este texto.

### 2.2. Campos escalares

Sea  $D$  el conjunto de los puntos de un cierto dominio que puede o no ocupar todo el espacio. Si a cada punto  $P$  de este dominio le hacemos corresponder, de forma unívoca, el valor de una cierta magnitud escalar  $U$ , decimos que en tal dominio existe un campo escalar  $U$ .

Simbólicamente se representaría esta definición de la siguiente forma

$$D \rightarrow \mathbb{R}$$

$$P \rightarrow U(P)$$

y también, como las coordenadas de  $P$  son  $(x,y,z)$  se escribe  $U(P)$  o  $U(x,y,z)$ .

Para tener un verdadero campo escalar, es necesario que el valor asociado a cada punto dependa solamente del punto y no del sistema de coordenadas elegido para el análisis. Es decir, si tenemos la correspondencia

$$P(x,y,z) \rightarrow U(x,y,z)$$

y hacemos un cambio de ejes, que serán ahora  $(x',y',z')$ , la correspondencia será

$$P(x',y',z') \rightarrow U(x',y',z')$$

y para que sea un campo escalar debe cumplirse

$$U(x, y, z) = U(x', y', z')$$

con lo que vemos que el valor de la magnitud escalar ha de estar ligado al punto y no a sus coordenadas.

Generalmente, en los campos escalares existen conjuntos de puntos a los que les corresponde el mismo valor del escalar. Estos conjuntos de puntos pueden llenar una cierta región del espacio o formar una superficie, que es el caso más frecuente. Cuando existe una cierta región tal que todos sus puntos tiene asociado el mismo valor del escalar, decimos que es un dominio equiescalar. En el caso más general, en el que los conjuntos de puntos a los que corresponde el mismo valor del escalar, sean superficies, hablaremos de superficies equiescales, cuya representación analítica será

$$U(x, y, z) = U_i \quad (2.1)$$

siendo  $U_i$  el valor del escalar, constante. Existirán tantas superficies equiescales como posibles valores  $U_i$  tengamos, normalmente infinitas.

Dado el carácter unívoco con que hemos definido la correspondencia punto  $\rightarrow$  valor escalar, una consecuencia de ello es que dos superficies equiescales cualesquiera no pueden cortarse ni tener puntos comunes porque, en caso contrario, a cada punto común le corresponderían dos valores distintos del escalar, lo que va contra la definición.

Un ejemplo clásico de campo escalar es la distribución de presiones en la atmósfera, en este caso, las superficies equiescales se llaman isobaras. Otros son la distribución de temperaturas o de presiones en un cierto recinto.

Una representación adecuada para los campos escalares consistiría en dibujar distintas superficies de nivel a las que correspondiesen valores de la magnitud escalar  $U_1, U_2, U_3, \dots$  de modo que la diferencia  $U_{i+1} - U_i$  fuese constante.



Figura 2.1: Líneas equiescales.

Nótese con el ejemplo de la presión atmosférica que si dibujásemos **todas** las superficies de nivel llenaríamos el espacio y no se distinguirían unas de otras. Pero aún en el caso de dibujar solamente unas pocas superficies equiescales, la tarea es complicada. Por ello se dibuja la

intersección de las superficies equiescalares con un plano, dando lugar a líneas equiescalares sobre dicho plano. Por convenio se dibujan aquéllas que cumplen  $U_{i+1} - U_i = cte \forall i$ .

En el ejemplo de la distribución de presiones en la atmósfera, estamos acostumbrados a ver gráficos (que llaman mapas) como el de la Fig. 2.1, y nos dicen que se trata del mapa de superficie o del mapa a 5 000 m lo que corresponde a la intersección de las superficies equiescalares (que en este caso se llaman isobaras) con un plano  $z=0$  o  $z=5\ 000$  m respectivamente.

Para hacerse una idea de las superficies equiescalares se puede pensar en unos enormes y deformes sombreros, metidos uno dentro de otro. Cada sombrero sería una superficie equiescalar. Este es el caso de la distribución de presiones en las zonas de borrasca o anticiclones.

Cuando operemos matemáticamente con las funciones  $U(x,y,z)$  supondremos que son  $C^1$ , es decir, de derivadas parciales continuas en todas sus variables.

Cuando los puntos del dominio sobre el que está definida la función escalar están contenidos en un plano, tendremos un campo escalar bidimensional. Es un caso más sencillo que el que se ha expuesto antes de forma general y que puede servir para razonar sobre ciertos conceptos.

Como ejemplo, consideremos un plano OXY paralelo a la superficie de la Tierra y a cada punto  $(x,y)$  le asignamos el valor del escalar  $U(x,y)=h$ , siendo  $h$  la altitud del terreno en ese punto. Hemos construido un campo escalar bidimensional que se utiliza en topografía.

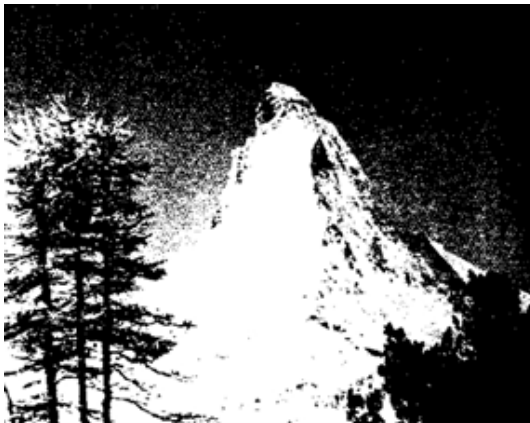


Figura 2.2: Dibujo de un terreno

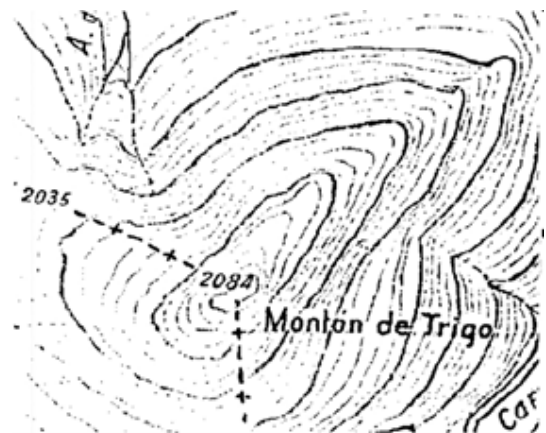


Figura 2.3: Curvas de nivel

Las líneas equiescalares se llaman curvas de nivel y corresponden a puntos de la misma altitud. Este tipo de campos admite una representación espacial tridimensional según se indica en la Fig. 2.2, que no es ni más ni menos que un dibujo del terreno, y una representación plana mediante curvas de nivel (Fig. 2.3), que es la utilizada en topografía.

## 2.3. Derivada direccional

Consideremos un punto  $P$  en la superficie equiescalar  $U$  (en la Fig. 2.4 se indican los casos tridimensional y bidimensional de campos escalares). A partir de  $P$  se pueden trazar infinitas

semirrectas que cortan en puntos  $P_i$  a la superficie equiescalar cuyo valor del escalar es  $U + \Delta U$ . Consideremos una cualquiera de estas semirrectas definida por el versor  $\vec{u}_i$  y sea  $\Delta l$  la distancia  $PP_1$ . Si tomamos el cociente y calculamos su límite cuando las superficies  $U + \Delta U$  y  $U$  están infinitamente próximas, tendremos

$$\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta l} = \frac{dU}{dl} \tag{2.2}$$

A este valor se le llama derivada direccional de  $U$  en el punto  $P$  y en la dirección dada por el versor  $\vec{u}_i$ .

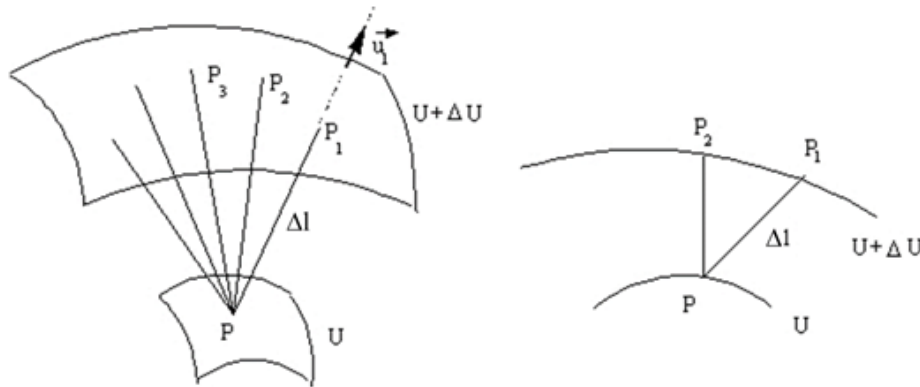


Figura 2.4: Superficies equiescales.

En el proceso de paso al límite, las dos superficies se van acercando,  $\Delta U$  va disminuyendo al igual que  $\Delta l$ . De todas las posibles semirrectas  $PP_i$  hay una que, en el límite, es perpendicular a ambas superficies y entonces, cuando  $\Delta U \rightarrow 0$

$$\lim |PP_n| < \lim |PP_i| \quad \forall i \tag{2.3}$$

con lo que la derivada direccional definida en [2.2] vemos que es máxima en la dirección normal trazada por el punto  $P$  a la superficie  $U$ .

Matemáticamente, la derivada direccional se expresa de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dl} &= \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{U(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - U(x, y, z)}{\Delta l} = \\ &= \frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{dl} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{dl} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{dz}{dl} \end{aligned} \tag{2.4}$$

Dado que  $dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$  y el versor  $\vec{u}_i = \frac{dx}{dl} \vec{i} + \frac{dy}{dl} \vec{j} + \frac{dz}{dl} \vec{k}$  la fórmula [2.4] se puede expresar de forma vectorial

$$\frac{dU}{dl} = \left( \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot \left( \frac{dx}{dl} \vec{i} + \frac{dy}{dl} \vec{j} + \frac{dz}{dl} \vec{k} \right) \tag{2.5}$$

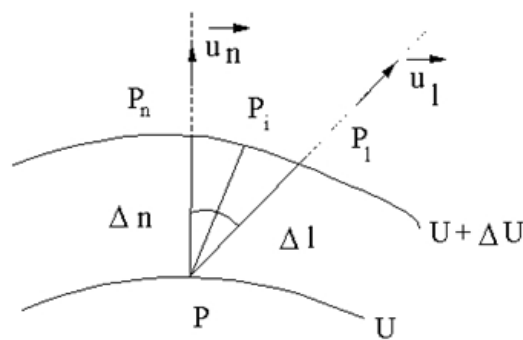
cuya utilidad tendremos tiempo de comprobar más adelante.

## 2.4. Gradiente de un campo escalar

En el campo escalar de la magnitud  $U$  se define el gradiente de  $U$  en el punto  $P$ , Fig. 2.5, y se representa por  $\text{grad } U$  como una magnitud vectorial, asociada al punto  $P$ , cuya dirección es la del mayor crecimiento de  $U$ , sentido el del crecimiento positivo y módulo el crecimiento de  $U$  por unidad de longitud. De acuerdo con esta definición, se puede escribir

$$|\text{grad } U| = \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta n} = \frac{dU}{dn} \quad (2.6)$$

es decir, el módulo del gradiente es la derivada direccional máxima y la dirección es normal a la superficie equiescalar en el punto  $P$ .



**Figura 2.5:** Dos superficies equiescales y distintas direcciones de paso de la una a la otra.

Si consideramos un vector unitario  $\vec{u}_n$  en la dirección de máximo crecimiento de  $U$ , la expresión vectorial del gradiente es

$$\text{grad } U = \frac{dU}{dn} \vec{u}_n \quad (2.7)$$

Mediante el vector gradiente se puede expresar la derivada direccional de  $U$  en cualquier dirección. En efecto, la variación unitaria del escalar  $U$ , a partir del punto  $P$  (Fig. 2.5) en la dirección definida por el versor  $\vec{u}_l = \frac{d\vec{l}}{dl}$  es:

$$\frac{dU}{dl} = \frac{dU}{dn} \frac{dn}{dl} = \frac{dU}{dn} \cos \alpha \quad (2.8)$$

de donde:

$$\frac{dU}{dl} = \text{grad } U \cdot \vec{u}_l \quad (2.9)$$

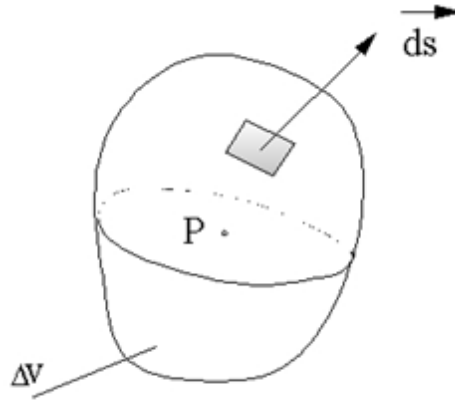
y también, multiplicando por  $dl$ ,

$$dU = \text{grad } U \cdot d\vec{l} \quad (2.10)$$



### 2.4.1. El gradiente como límite de una integral de superficie

Existe otra definición del vector gradiente, equivalente a la anterior y que damos a continuación, sin demostrar la equivalencia. De esta definición haremos uso más adelante para utilizar el vector simbólico nabla ( $\nabla$ ).



**Figura 2.6:** Superficie S que rodea el punto P para definir el gradiente.

En el campo escalar  $U$ , consideramos un punto  $P$  donde queremos definir el gradiente, y alrededor de él un elemento de volumen  $\Delta v$  (Fig. 2.6) de modo que en el paso al límite contenga siempre el punto  $P$ , y se define

$$\text{grad } U = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \oint_S U d\vec{S} \quad (2.11)$$

donde la integral de superficie se refiere a la superficie exterior que limita el volumen  $\Delta v$ .

### 2.4.2. Expresiones analíticas del vector gradiente

La definición de  $\text{grad } U$  se ha realizado sin apoyo de sistema de referencia alguno, como corresponde a una magnitud vectorial. Para encontrar su expresión en un cierto sistema de coordenadas nos basaremos en la ecuación

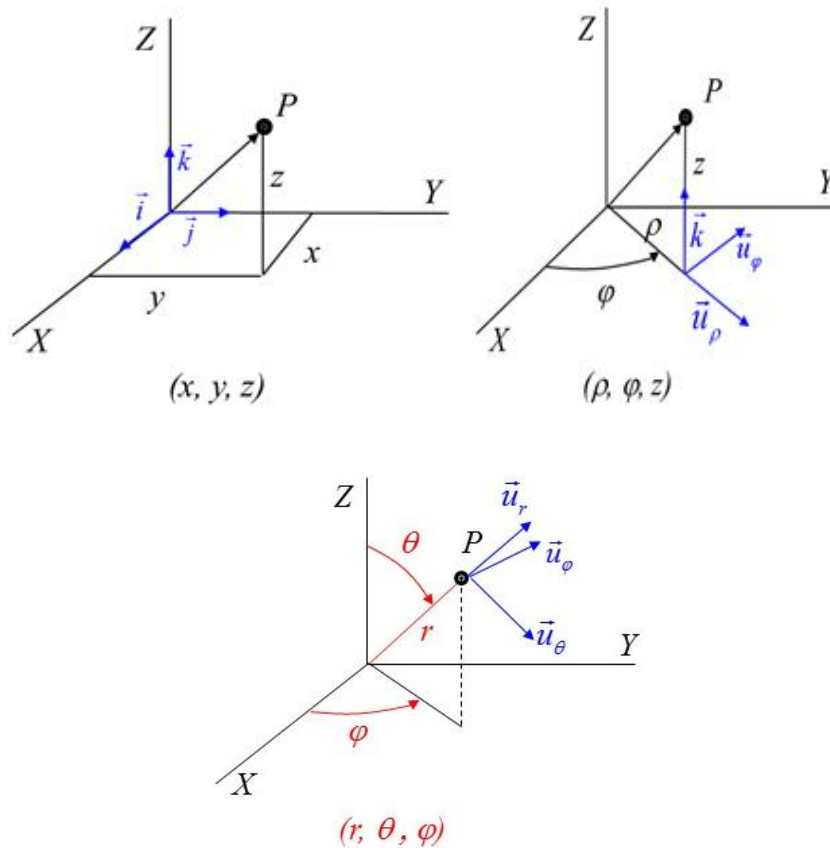
$$dU = \text{grad } U \cdot d\vec{l} \quad (2.12)$$

tomando un sistema de referencia y expresando en él cada uno de los términos que intervienen.

#### a) Coordenadas cartesianas

Si consideramos un sistema de referencia cartesiano OXYZ, la magnitud escalar  $U$  será únicamente función de las coordenadas de los puntos del dominio en el que está definida, es decir,  $U=U(x,y,z)$ , y diferenciando

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \quad (2.13)$$



**Figura 2.7:** Sistemas coordenados: cartesiano (arriba a la izquierda), cilíndrico (arriba a la derecha), esférico (abajo).

Del mismo modo, el vector grad  $U$  tendrá unas componentes que designaremos por grad  $U_x$ , grad  $U_y$  y grad  $U_z$  que son las que tratamos de determinar.

El vector  $d\vec{l}$  será

$$d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} \tag{2.14}$$

y el vector grad  $U$

$$\text{grad } U = (\text{grad } U)_x\vec{i} + (\text{grad } U)_y\vec{j} + (\text{grad } U)_z\vec{k} \tag{2.15}$$

con lo cual

$$dU = (\text{grad } U)_x dx + (\text{grad } U)_y dy + (\text{grad } U)_z dz \tag{2.16}$$

y comparando con [2.13] resulta

$$(\text{grad } U)_x = \frac{\partial U}{\partial x} \quad (\text{grad } U)_y = \frac{\partial U}{\partial y} \quad (\text{grad } U)_z = \frac{\partial U}{\partial z} \tag{2.17}$$

y, por tanto

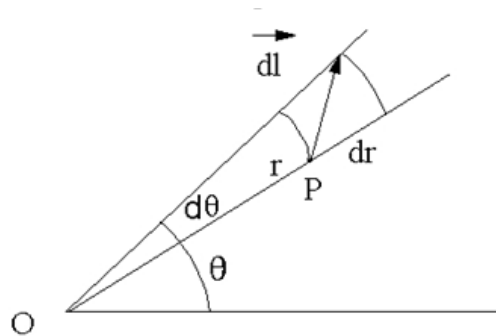
$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k} \quad (2.18)$$

que es la expresión del vector gradiente en coordenadas cartesianas.

### b) Coordenadas polares

Para el caso bidimensional, a veces es útil expresar el vector gradiente en coordenadas polares. El punto  $P$  tiene por coordenadas radial y polar (o angular)  $(r, \theta)$ . La función escalar  $U$  será función de tales coordenadas  $U=U(r, \theta)$ , con lo que

$$dU = \frac{\partial U}{\partial r} dr + \frac{\partial U}{\partial \theta} d\theta \quad (2.19)$$



**Figura 2.8:** Diferencial en coordenadas polares.

El vector gradiente tendrá componente en la dirección radial, dada por el versor  $\vec{u}_r$ , y en la dirección angular, dada por el versor  $\vec{u}_\theta$ , perpendicular a  $\vec{u}_r$  y en el sentido de los valores crecientes del ángulo  $\theta$ , de modo que

$$\text{grad } U = (\text{grad } U)_r \vec{u}_r + (\text{grad } U)_\theta \vec{u}_\theta \quad (2.20)$$

y el vector  $d\vec{l}$  se expresa de la forma

$$d\vec{l} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta \quad (2.21)$$

Utilizando de nuevo la expresión [2.10], tenemos que

$$dU = (\text{grad } U)_r dr + r (\text{grad } U)_\theta d\theta \quad (2.22)$$

expresión que comparada con [2.19] conduce a

$$(\text{grad } U)_r = \frac{\partial U}{\partial r} \quad (\text{grad } U)_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \quad (2.23)$$

con lo cual, la expresión del gradiente en coordenadas polares es

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{u}_\theta \quad (2.24)$$

Indicamos también que en coordenadas cilíndricas (véase Fig. 2.7) la expresión del gradiente es (siendo  $\rho$  la coordenada radial o distancia al eje  $z$ ,  $\varphi$  la azimutal y  $z$  la vertical):

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial \rho} \vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k} \quad (2.25)$$

y en coordenadas esféricas (siendo  $r$  el radio o distancia al origen,  $\theta$  la colatitud y  $\varphi$  el azimut, véase Fig. 2.7):

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi \quad (2.26)$$

## 2.5. Campos vectoriales

Si a cada punto  $P$  de un cierto dominio del espacio le hacemos corresponder, de forma unívoca, el valor de una cierta magnitud vectorial  $\vec{A}$ , decimos que en tal dominio tenemos un campo vectorial.

Simbólicamente se representa esta definición de la siguiente forma

$$\begin{aligned} D &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ P &\rightarrow \vec{A}(P) = \vec{A}(\vec{r}) \end{aligned}$$

En coordenadas cartesianas, las coordenadas de  $P$  son  $(x, y, z)$  y como  $\vec{A}$  es función de tales coordenadas, sus componentes también lo serán,

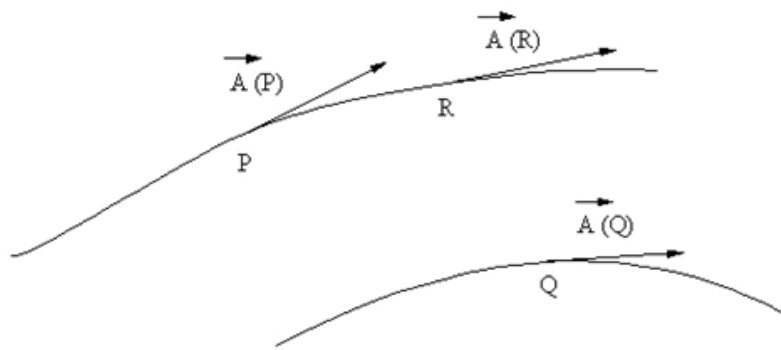
$$\vec{A}(\vec{r}) = A_x(x, y, z) \vec{i} + A_y(x, y, z) \vec{j} + A_z(x, y, z) \vec{k} \quad (2.27)$$

$\mathbb{R}^3$  es el conjunto de los vectores libres del espacio, pero como asignamos un vector libre a cada punto  $P$  del dominio  $D$ , esta asignación convierte a la magnitud vectorial en un vector fijo o ligado al punto  $P$ .

Para que con esta definición se tenga verdaderamente un campo vectorial, es necesario que la asignación no dependa del sistema de coordenadas utilizado. Es decir, si realizamos un cambio de ejes a otro dado por la notación  $(x', y', z')$  es necesario que  $\vec{A}(x, y, z)$  sea igual a  $\vec{A}(x', y', z')$ .

Nótese que como las componentes de un vector varían con los cambios de ejes, la asignación a los puntos del dominio  $D$  de los valores escalares de las componentes de  $\vec{A}$  no constituyen campos escalares.

Los campos vectoriales se representan mediante las llamadas **líneas de campo**, **líneas vectoriales** o **líneas de fuerza** que se caracterizan porque los vectores campo son tangentes a ellas en todo punto (Fig. 2.9).



**Figura 2.9:** Líneas de campo vectorial.

Esta condición se puede expresar analíticamente imponiendo el paralelismo entre el vector campo

$$\vec{A}(\vec{r}) = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k} \quad (2.28)$$

y el vector elemento de línea

$$d\vec{l} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k} \quad (2.29)$$

Para que dos vectores sean paralelos su producto vectorial debe anularse, lo que conduce a la condición de proporcionalidad entre sus componentes:

$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z} \quad (2.30)$$

que es un sistema de dos ecuaciones diferenciales, lineales, de primer orden cuya solución es la familia de líneas de campo.

Las líneas de campo no pueden cortarse ya que entonces, en el punto de intersección el vector  $\vec{A}$  tendría que ser tangente simultáneamente a dos curvas diferentes, lo que no puede suceder. Del mismo modo, las líneas de campo no pueden tener puntos angulosos.

Si se dibujasen todas las líneas de fuerza de un campo vectorial se llenaría todo el dominio  $D$  y no distinguiríamos ninguna. Por ello, se conviene en representar los campos vectoriales mediante líneas de campo de modo que el número de líneas que se dibujan atravesando la unidad de superficie colocada normalmente a ellas, sea igual o proporcional al módulo de  $\vec{A}$  en tal punto. Este tipo de representación indica, de forma cualitativa, que el módulo del vector campo es mayor en las zonas donde las líneas de campo están más próximas que allí donde están más separadas.

## 2.6. El gradiente como campo vectorial

Si en una cierta región del espacio tenemos definido un campo escalar mediante la correspondencia

$$\begin{aligned} D &\rightarrow \mathbb{R} \\ P &\rightarrow U(P) \end{aligned}$$

en esa misma región se puede construir un campo vectorial sin más que asignar a cada punto  $P$  el vector  $\text{grad } U$ . Así,

$$\begin{aligned} D &\rightarrow \mathcal{L} \\ P &\rightarrow \text{grad } U(P) \end{aligned}$$

Esta correspondencia es un campo vectorial ya que el vector  $\text{grad } U$  depende del punto  $P$  pero no de la orientación de los ejes.

Como el vector gradiente es normal a las superficies equiescalares y las líneas de campo son tangentes al vector, resulta que **las líneas de campo del gradiente son siempre perpendiculares a las superficies equiescalares.**

Podría pensarse que para todo campo vectorial existe un conjunto de superficies, perpendiculares a las líneas de campo, de modo que tales superficies constituyesen la familia equiescalar de un campo escalar. Esta suposición no es cierta en general, a menos que el campo vectorial esté construido como el gradiente de un escalar.

## 2.7. Integral de línea de un campo vectorial

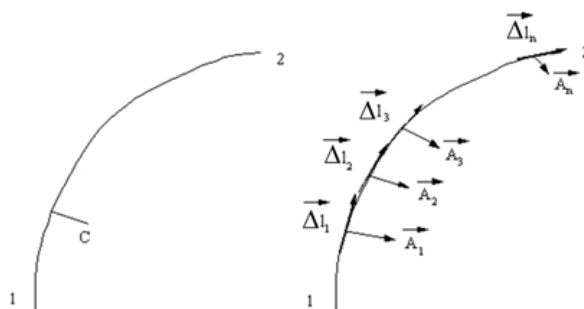


Figura 2.10: Integral de línea en una curva C.

En el campo vectorial  $\vec{A}$ , consideremos una curva  $C$  cualquiera, cuyos extremos designamos por los puntos 1 y 2 y tomemos el sentido desde 1 hacia 2 para recorrer dicha curva.

Sobre la curva tomamos vectores  $\Delta \vec{l}_i$  cuyo sentido viene dado por el del recorrido fijado para la curva. En un punto interior a cada segmento  $\Delta \vec{l}_i$ , calculemos el valor  $\vec{A}_i$  del campo vectorial y formemos los productos escalares  $\vec{A}_i \cdot \Delta \vec{l}_i$  (Fig. 2.10). El límite de la suma de estos productos

escalares cuando el tamaño de los segmentos  $\Delta \vec{l}_i$  tiende a cero se denomina integral de línea del campo vectorial  $\vec{A}$  a lo largo de la curva  $C$ , desde el punto 1 hasta el punto 2, se denota por  $\Gamma$  y se escribe

$$\Gamma = \lim_{\Delta l_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \vec{A}_i \cdot \Delta \vec{l}_i = \int_{1_C}^2 \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (2.31)$$

Es importante darse cuenta que, en general, el valor de la integral de línea de un vector entre dos puntos depende de la curva que tomemos uniendo ambos, por lo que es necesario especificar el camino de integración en este tipo de integrales.

La integral de línea de un vector a lo largo de una curva cerrada recibe el nombre de circulación de un campo vectorial, y se utiliza el siguiente símbolo especial para dicha integral:

$$\Gamma = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (2.32)$$

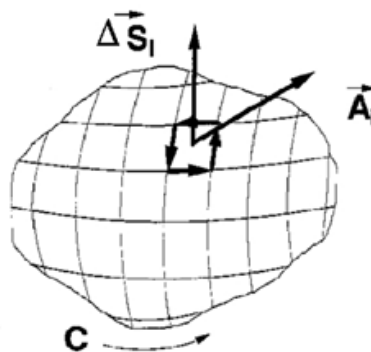
Algunos autores dan el nombre de circulación a todas las integrales de línea.

Evidentemente, de la definición de integral de línea de un vector obtenemos que, para una misma curva recorrida en sentidos contrarios, la integral tiene valores opuestos

$$\int_{1_C}^2 \vec{A} \cdot d\vec{l} = - \int_{2_C}^1 \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (2.33)$$

ya que en uno y otro caso los vectores  $\vec{A}$  son los mismos mientras que los vectores  $d\vec{l}$  tiene sentidos contrarios.

## 2.8. Flujo de un campo vectorial



**Figura 2.11:** Flujo a través de una superficie de contorno  $C$ .

En el campo vectorial  $\vec{A}$  consideramos una superficie  $S$ , limitada por un contorno  $C$  al que hemos asignado un sentido para su recorrido (Fig. 2.11). Dividimos la superficie en pequeños

elementos  $\Delta\vec{S}_i$ , calculamos el vector campo en un punto interior de cada elemento de superficie y formamos los productos escalares  $\vec{A}_i \cdot \Delta\vec{S}_i$ . El sentido de recorrido determina el sentido de los diferenciales de superficie  $\Delta\vec{S}_i$  de acuerdo con la regla de la mano derecha o del tornillo: si hacemos girar un tornillo de la misma manera que el sentido del contorno, los diferenciales de superficie  $\Delta\vec{S}_i$  tendrían el mismo sentido de movimiento que el tornillo.

Se denomina flujo del campo vectorial  $\vec{A}$  a través de la superficie  $S$  al límite de la suma de dichos productos escalares cuando  $\Delta S_i$  tiende a cero. Matemáticamente

$$\phi = \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \vec{A}_i \cdot \Delta\vec{S}_i = \int_S \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad (2.34)$$

Cuando la superficie es diferencial se escribe

$$d\phi = \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad (2.35)$$

y cuando la superficie es cerrada

$$\phi = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad (2.36)$$

Si se utilizan las líneas de campo de forma cuantitativa, el flujo a través de una superficie representaría el número de líneas de campo que atraviesan la superficie considerada, siempre que las líneas se hayan dibujado de forma que el número de ellas que atraviesan la unidad de superficie, colocada normalmente, sea igual al módulo del campo en cada punto.

Si una superficie abierta no está atravesada por líneas de campo, el flujo a través de ella es nulo. Si una superficie cerrada es atravesada por líneas de campo, de modo que **toda** línea que penetra en el volumen por un punto sale por otro, entonces el flujo a través de tal superficie cerrada también es nulo.

## 2.9. Divergencia de un campo vectorial

En el campo vectorial de  $\vec{A}$  consideramos un punto  $P$  (Fig. 2.12) y un volumen  $\Delta v$  que encierre siempre al punto  $P$ . El volumen está limitado por la superficie  $S$ . La divergencia del campo vectorial  $\vec{A}$  en el punto  $P$  es el escalar  $\text{div } \vec{A}$  que se define por el siguiente límite:

$$\text{div } \vec{A} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad (2.37)$$

cuyo signo, positivo o negativo, vendrá dado por el signo del flujo. En una superficie cerrada los diferenciales de superficie  $d\vec{S}$  se toman hacia afuera.

Con el operador divergencia construimos un campo escalar a partir de un campo vectorial, de forma simétrica a como construíamos un campo vectorial, mediante el operador gradiente, a partir de un campo escalar.



La expresión [2.37] tiene un significado físico claro y notable. Si consideramos  $\Delta v=1$  unidad aún en el paso al límite, la divergencia de  $\vec{A}$  en el punto  $P$  es el flujo del vector  $\vec{A}$  a través de una superficie, por pequeña que sea, que rodea al punto  $P$ . Como el flujo está relacionado con el número de líneas de campo que atraviesan la superficie, la divergencia en el punto  $P$  nos indica las líneas de fuerza que nacen (signo positivo) o mueren (signo negativo) en el punto  $P$  por unidad de volumen.

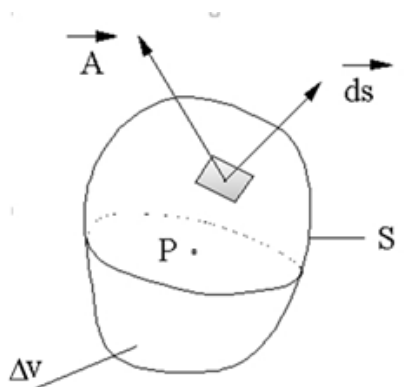


Figura 2.12: Flujo en una superficie cerrada.

Si en un punto se cumple que  $\text{div } \vec{A} = 0$ , en ese punto no nacen ni mueren líneas de campo. Si en **todos** los puntos del dominio en el que el campo  $\vec{A}$  está definido se cumple que  $\text{div } \vec{A} = 0$ , entonces se dice que el campo  $\vec{A}$  es **SOLENOIDAL** o **ADIVERGENTE**. Veremos que este es el caso del campo magnético.

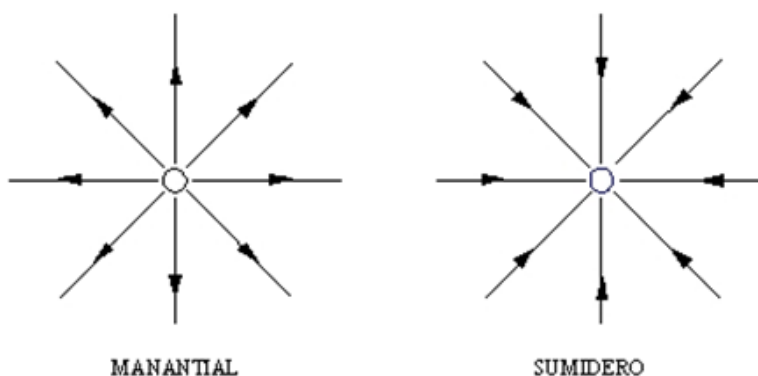


Figura 2.13: Puntos fuentes del campo.

La condición para que un campo sea solenoidal, insistimos, es que debe cumplirse para todo punto del dominio. Con que exista un solo punto en el cual  $\text{div } \vec{A} \neq 0$ , entonces el campo ya no es solenoidal.

Los puntos de un campo vectorial en los que  $\text{div } \vec{A} \neq 0$  se denominan fuentes del campo ya que en ellos nacen o mueren líneas de campo. Si las líneas de campo nacen en el punto, éste se denomina **manantial** y si mueren en el punto se denomina **sumidero**.

En la Fig. 2.13 se representan dos campos vectoriales radiales, uno con una fuente o manantial y otro con un sumidero.

Todas estas denominaciones provienen de la hidrodinámica. En el seno de un fluido, la velocidad de sus partículas es un campo vectorial y puede haber puntos en los que se inyecta fluido (manantiales) y puntos en los que desaparece fluido (sumideros).

### 2.9.1. Expresión analítica de la divergencia

Para obtener la expresión analítica de  $\text{div } \vec{A}$  en los diversos sistemas de coordenadas, se utiliza la expresión [2.37] de su definición, eligiendo un elemento de volumen adecuado y calculando el segundo miembro.

Dicha expresión analítica para la  $\text{div } \vec{A}$  se puede obtener también utilizando la definición de gradiente dada por la ecuación [2.11], cosa que vamos a hacer a continuación con lo cual se pone además de manifiesto la utilidad de las definiciones intrínsecas de estos operadores.

Introduciendo en la definición [2.37] de  $\text{div } \vec{A}$  el vector  $\vec{A}$  expresado en sus componentes cartesianas

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k} \quad (2.38)$$

tenemos

$$\text{div } \vec{A} = \vec{i} \cdot \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \int_S A_x d\vec{S} + \vec{j} \cdot \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \int_S A_y d\vec{S} + \vec{k} \cdot \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \int_S A_z d\vec{S} \quad (2.39)$$

Operemos con cualquiera de los sumandos del segundo miembro

$$\vec{i} \cdot \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \int_S A_x d\vec{S} = \vec{i} \cdot \text{grad } A_x = \vec{i} \cdot \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial A_x}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial A_x}{\partial z} \vec{k} \right) = \frac{\partial A_x}{\partial x} \quad (2.40)$$

donde hemos utilizado la definición [2.11].

Haciendo lo mismo con los otros dos sumandos se llega a:

$$\text{div } \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (2.41)$$

que es la expresión en coordenadas cartesianas de la divergencia del campo vectorial  $\vec{A}$ .

Las expresiones de la divergencia en los sistemas de coordenadas más comunes (véase Fig. 2.7) son:

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_r)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad (2.42)$$

en coordenadas cilíndricas y

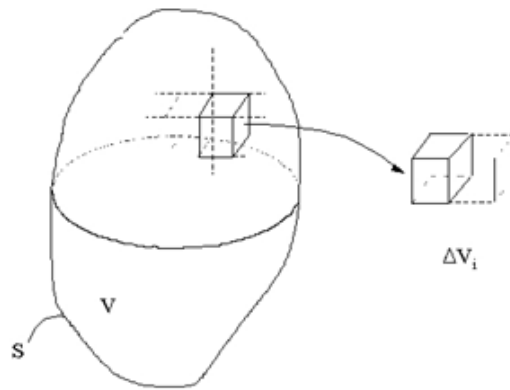
$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \tag{2.43}$$

en coordenadas esféricas.

## 2.10. Teorema de la divergencia

Este teorema, también conocido con el nombre de teorema de Ostrogradsky-Gauss, teorema de Gauss o mejor teorema de la Integral de Gauss para no confundirlo con el teorema de Gauss de la electrostática, relaciona una integral de volumen con una de superficie extendida a la superficie que encierra el volumen.

Para llegar a su expresión matemática, consideremos dentro del campo vectorial de la magnitud  $\vec{A}$ , un cierto volumen  $v$  limitado por una superficie cerrada  $S$  según se indica en la Fig. 2.14. Si el volumen  $v$  le suponemos dividido en pequeños volúmenes  $\Delta v_i$ , uno de los cuales aparece por separado en la figura, donde por puntos se indica también uno de los contiguos.



**Figura 2.14:** Descomposición en volúmenes infinitesimales de un volumen  $v$  de superficie  $S$ .

Aplicando a cada uno de estos pequeños volúmenes la definición [2.37] de divergencia, obtenemos

$$\operatorname{div} \vec{A} \Delta v_i = \oint_{S_i} \vec{A} \cdot d\vec{S} \tag{2.44}$$

donde la integral del segundo miembro está extendida a la superficie que limita el elemento de volumen  $\Delta v_i$ .

Sumando todas las  $n$  ecuaciones [2.44] planteadas para cada elemento de volumen obtenemos

$$\sum_{i=1}^n \operatorname{div} \vec{A} \Delta v_i = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} \tag{2.45}$$

y ahora la integral del segundo miembro se extiende a toda la superficie  $S$  que rodea el volumen  $v$ , ya que los sumandos correspondientes a las superficies comunes a dos elementos  $\Delta v_i, \Delta v_{i+1}$ , contiguos, se anulan, contribuyendo a la suma solamente aquéllos elementos constituyentes de la superficie  $S$ , que pertenecen únicamente a un solo volumen  $\Delta v_i$ .

Si los elementos de volumen  $\Delta v_i$  los vamos haciendo cada vez más pequeños, la suma finita de [2.45] se convierte, en el límite, en una integral de volumen quedando

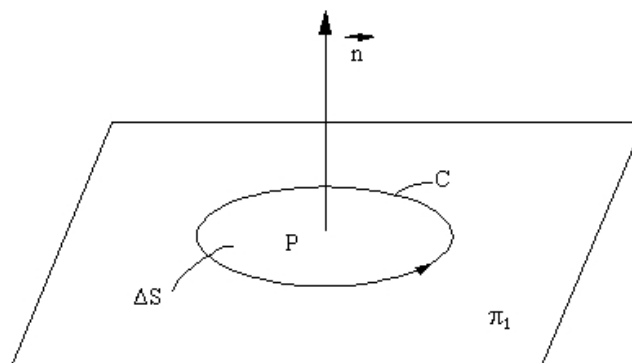
$$\int_v \operatorname{div} \vec{A} dv = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad (2.46)$$

que es la expresión matemática del teorema de la divergencia que relaciona la integral de la divergencia de un vector extendida a un cierto volumen  $v$  con el flujo de ese vector a través de la superficie  $S$  que limita el volumen considerado.

Físicamente puede interpretarse de la siguiente forma. Los puntos del volumen  $v$  en los que la divergencia no es nula son manantiales o sumideros. El primer miembro de [2.46] indica, pues, el número neto de líneas de campo que se crean o desaparecen en el volumen  $v$  y que, por tanto, tiene que ser igual al número neto de líneas de campo que atraviesan la superficie  $S$  que limita el volumen  $v$ , que en definitiva es lo que indica el flujo expresado en el segundo miembro.

## 2.11. Rotacional de un campo vectorial

En cada punto  $P$  del campo vectorial de la magnitud  $\vec{A}$ , vamos a definir un vector asociado al punto  $P$ , que denominaremos rotacional de  $\vec{A}$  en el punto  $P$  y que se escribe  $\operatorname{rot} \vec{A}$ . Daremos dos definiciones, naturalmente equivalentes, para este nuevo vector, una operativa y otra intrínseca.



**Figura 2.15:** Contorno  $C$  de una superficie  $\Delta S$  situada en el plano  $\pi_1$ .

Si queremos calcular el rotacional de  $\vec{A}$  en el punto  $P$ , consideramos un plano  $\pi_1$  que contenga al punto  $P$ . Sobre el plano  $\pi_1$  tomamos un elemento de superficie  $\Delta S$ , limitado por un contorno  $C$  cuyo recorrido fijamos, con lo que así queda definido el vector normal a la superficie  $\Delta S$ , dado por

$$\vec{n} = \frac{\Delta \vec{S}}{\Delta S}$$

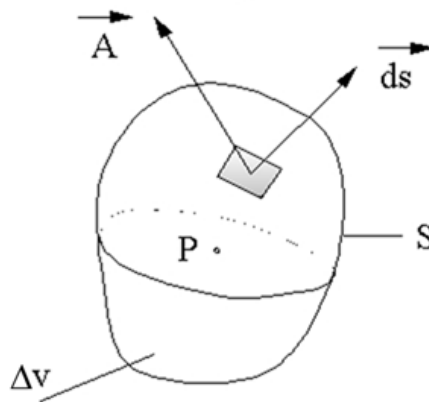
Calculamos la circulación de  $\vec{A}$  a lo largo del contorno  $C$ , dividimos por  $\Delta S$  y pasamos al límite cuando  $\Delta S \rightarrow 0$  conteniendo siempre al punto  $P$ . El resultado que se obtiene es la componente del vector  $\text{rot } \vec{A}$  en el punto  $P$  según la normal  $\vec{n}$  al plano  $\pi_1$ . Matemáticamente, esto se expresa de la siguiente forma

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \vec{n} \cdot \text{rot } \vec{A} \tag{2.47}$$

Con esta definición no se obtiene el vector  $\text{rot } \vec{A}$  sino solamente su proyección según la dirección perpendicular al plano  $\pi_1$ . Para obtener el vector  $\text{rot } \vec{A}$  habría que repetir las operaciones indicadas para los distintos planos que resultan de variar la orientación del plano  $\pi_1$  hasta obtener un valor máximo para el segundo miembro de [2.47].

Está claro que la definición anterior no es buena para obtener el vector  $\text{rot } \vec{A}$ , pero sí es conveniente conocerla porque con ella, de forma operativa, obtendremos la expresión analítica del  $\text{rot } \vec{A}$  y la utilizaremos para la demostración de un importante teorema del análisis vectorial.

Otra definición que nos proporciona directamente el vector  $\text{rot } \vec{A}$  y que guarda una cierta analogía con la definición de divergencia, es la siguiente.



**Figura 2.16:** Superficie que envuelve a P para definir el rotacional.

En el campo vectorial de la magnitud  $\vec{A}$  consideramos un volumen  $\Delta v$  que contiene siempre al punto  $P$  en el cual queremos calcular el  $\text{rot } \vec{A}$ . Este volumen está limitado por una superficie cerrada  $S$  (Fig. 2.16).

Se define el rotacional de  $\vec{A}$  como

$$\text{rot } \vec{A} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \oint_S d\vec{S} \times \vec{A} \tag{2.48}$$

donde la integral del segundo miembro se extiende a la superficie  $S$  que rodea el volumen  $\Delta v$ .

Si comparamos esta definición con la expresión [2.37] de la divergencia vemos que en la divergencia aparece el producto escalar  $d\vec{S} \cdot \vec{A}$  y en el rotacional el producto vectorial  $d\vec{S} \times \vec{A}$ , ambos integrados a lo largo de una superficie y con el mismo paso al límite. En el producto escalar interviene la componente de  $\vec{A}$  normal a la superficie, que representa el flujo, y en el producto vectorial interviene la componente de  $\vec{A}$  tangente a la superficie, por lo que el rotacional, de alguna forma, mide la componente tangencial a la superficie. En el paso al límite, si  $\text{rot } \vec{A} \neq 0$  en un punto, en tal punto las líneas vectoriales tienen que tener la forma indicada en la Fig. 2.17, constando de una línea a la que se superpone una componente tangencial cerrada. Estos puntos se llaman **puntos de remolino**.

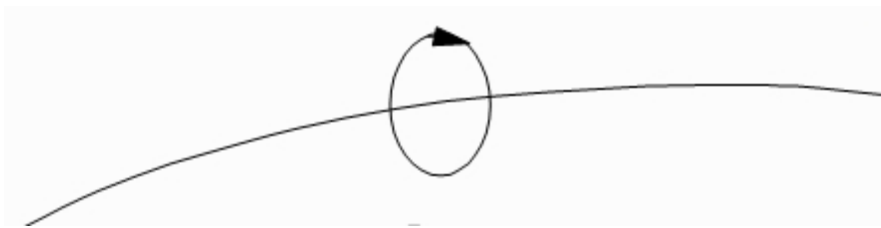


Figura 2.17: Punto de remolino.

Si en **todos** los puntos de un campo vectorial se cumple que  $\text{rot } \vec{A} = 0$ , dicho campo se denomina **irrotacional o conservativo**. Se puede comprobar la equivalencia entre las dos definiciones dadas para el vector rotacional.

### 2.11.1. Expresión analítica del rotacional

Para obtener la expresión analítica en coordenadas cartesianas del rotacional en un punto  $P(x,y,z)$ , tomamos un rectángulo paralelo al plano  $x=0$ , de dimensiones  $dy dz$  y cuyo centro sea el punto  $P$  en el cual el campo vectorial es  $\vec{A}$  (Fig. 2.18) y aplicaremos la definición [2.47] dada para el rotacional.

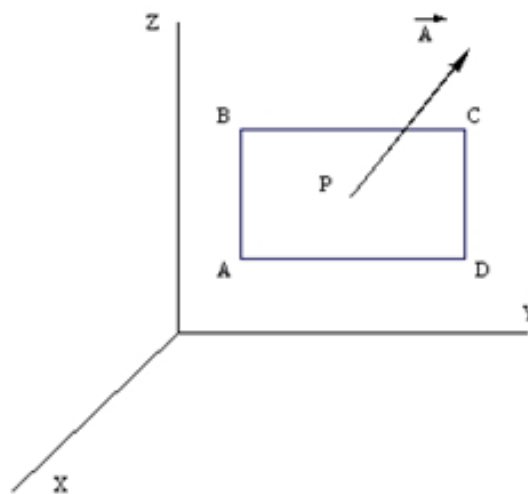


Figura 2.18: Curva para obtener la expresión analítica del rotacional.

El valor del campo vectorial en los lados del rectángulo es:

$$\text{lado AB: } \vec{A} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} \frac{dy}{2}$$

$$\text{lado CD: } \vec{A} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} \frac{dy}{2}$$

$$\text{lado AD: } \vec{A} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} \frac{dz}{2}$$

$$\text{lado BC: } \vec{A} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} \frac{dz}{2}$$

y aplicando la fórmula [2.47], para lo cual asignamos al rectángulo un recorrido dado por el versor  $\vec{i}$ , es decir ADCB, obtenemos

$$\begin{aligned} (\vec{i} \cdot \text{rot } \vec{A}) dydz = & \left( \vec{A} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) \cdot (dy\vec{j}) + \left( \vec{A} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) \cdot (dz\vec{j}) + \\ & + \left( \vec{A} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) \cdot (-dy\vec{j}) + \left( \vec{A} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) \cdot (-dz\vec{j}) \end{aligned} \quad (2.49)$$

teniendo en cuenta que la componente según  $x$  del rotacional es

$$(\text{rot } \vec{A})_x = \vec{i} \cdot \text{rot } \vec{A} \quad (2.50)$$

y simplificando se obtiene

$$(\text{rot } \vec{A})_x = \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} \cdot \vec{k} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} \cdot \vec{j} \quad (2.51)$$

como los versores  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  son constantes, la expresión anterior se puede poner de la forma

$$(\text{rot } \vec{A})_x = \frac{\partial(\vec{A} \cdot \vec{k})}{\partial y} - \frac{\partial(\vec{A} \cdot \vec{j})}{\partial z} \quad (2.52)$$

y escribiendo explícitamente las componentes de  $\vec{A}$ ,

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k} \quad (2.53)$$

se cumple que

$$\vec{A} \cdot \vec{k} = A_z; \quad \vec{A} \cdot \vec{j} = A_y \quad (2.54)$$

y entonces la expresión [2.52] queda finalmente

$$(\text{rot } \vec{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \quad (2.55)$$

Tomando rectángulos paralelos a los planos  $y=0$  y  $z=0$ , se obtiene por el mismo procedimiento

$$(\text{rot } \vec{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \quad (2.56)$$

$$(\text{rot } \vec{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \quad (2.57)$$

y el vector rotacional se puede entonces escribir en forma de determinante simbólico:

$$\text{rot } \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad (2.58)$$

Las expresiones del rotacional en los sistemas de coordenadas más comunes (véase Fig. 2.7) son:

$$\text{rot } \vec{A} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial z} \right) \vec{u}_\rho + \left( \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \vec{u}_\varphi + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right) \vec{k} \quad (2.59)$$

en coordenadas cilíndricas y

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{A} = & \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial(A_\varphi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{u}_r + \\ & + \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r \sin \theta A_\varphi)}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_\varphi \end{aligned} \quad (2.60)$$

en coordenadas esféricas.

## 2.12. Teorema del rotacional o de Stokes

Este teorema, que relaciona el flujo del rotacional de un campo vectorial con la circulación del vector, se enuncia de la siguiente forma:

“El flujo del rotacional de un campo vectorial  $\vec{A}$  a través de una superficie abierta  $S$ , es igual a la circulación del vector a lo largo del contorno  $C$  de dicha superficie”.

Matemáticamente se expresa por la fórmula

$$\int_S \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (2.61)$$



Para demostrarlo, tomemos una superficie cualquiera  $S$ , en el campo vectorial de  $\vec{A}$ , limitada por un contorno  $C$  y elijamos un sentido para el recorrido del contorno lo que nos dará también sentido a los elementos de superficie y a los vectores representativos de tales elementos (Fig. 2.19) de acuerdo con la regla del tornillo.

Dividimos la superficie  $S$  en pequeños elementos de área  $\Delta S_j$  representados por los vectores  $\Delta \vec{S}_j$  y aplicamos a cada uno de ellos la definición de rotacional ( $\Delta \vec{l}_i$  son los cuatro lados que forman el contorno de  $\Delta \vec{S}_j$ )

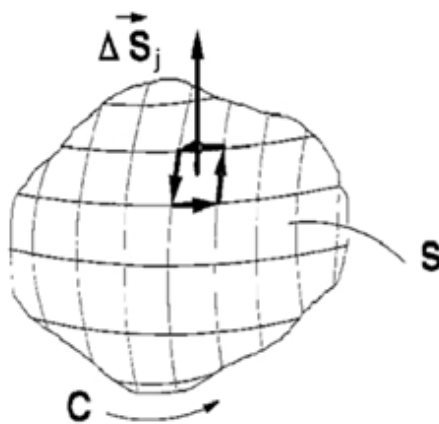
$$\text{rot } \vec{A} \cdot \Delta \vec{S}_j \approx \sum_{i=1}^4 \vec{A} \cdot \Delta \vec{l}_i \tag{2.62}$$

El signo  $\approx$  será un signo  $=$  en el paso al límite, cuando  $\Delta S_j \rightarrow 0$ .

Sumando todas las expresiones [2.62] planteadas para cada elemento de superficie obtenemos

$$\sum_j \text{rot } \vec{A} \cdot \Delta \vec{S}_j \approx \sum_C \vec{A} \cdot d\vec{l} \tag{2.63}$$

donde ahora la suma del segundo miembro se extiende solamente a los elementos del contorno  $C$ , ya que, al sumar, los términos correspondientes a elementos de línea comunes a dos elementos de superficie se cancelan, dado que en un elemento son recorridos en un sentido y en el contiguo son recorridos en sentido contrario.



**Figura 2.19:** Superficie  $S$  de contorno  $C$  usada para demostrar el teorema del rotacional.

Si pasamos al límite, cuando  $\Delta S_j \rightarrow 0$ , el sumatorio se convierte en integral y  $\Delta \vec{S}_j$  en  $d\vec{S}$ , con lo que resulta

$$\int_S \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} \tag{2.64}$$

que es la fórmula que se trataba de deducir.

## 2.13. Campos conservativos

### 2.13.1. Integral de línea de un gradiente

Si calculamos la integral de línea a lo largo de una curva  $C$  entre los puntos  $A$  y  $B$  de un campo vectorial construido como el gradiente de un escalar, tenemos

$$\Gamma = \int_{A_C}^B \text{grad } U \cdot d\vec{l} \quad (2.65)$$

y teniendo en cuenta que, según la ecuación [2.12],

$$dU = \text{grad } U \cdot d\vec{l} \quad (2.66)$$

queda

$$\Gamma = \int_{A_C}^B dU = U(B) - U(A) \quad (2.67)$$

resultado que no depende de la curva  $C$ , sino solamente de sus puntos extremos.

Por tanto, a lo largo de una curva cerrada se puede escribir

$$\oint \text{grad } U \cdot d\vec{l} = 0 \quad (2.68)$$

Todo campo vectorial construido a partir del gradiente,  $\vec{A} = \text{grad } U$ , y que, por tanto, cumple esta condición se denomina **VECTOR POTENCIAL** o **CAMPO VECTORIAL POTENCIAL**. Para el campo  $\vec{A}$  la integral de línea depende solo de los puntos extremos, no de la curva, y la circulación siempre es cero.

### 2.13.2. Todo vector potencial es irrotacional

Si el campo vectorial de  $\vec{A}$  está construido como el gradiente de un escalar  $U$ ,  $\vec{A} = \text{grad } U$ , se trata de un campo irrotacional. Veamos la demostración.

Para ello, tomemos una superficie arbitraria contenida en el campo vectorial y apliquemos el teorema de Stokes

$$\int_S \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (2.69)$$

y como  $\vec{A} = \text{grad } U$ , la circulación a lo largo de  $C$  es

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \oint_C \text{grad } U \cdot d\vec{l} \quad (2.70)$$

y aplicando la fórmula [2.10],  $\text{grad } U \cdot d\vec{l} = dU$ , resulta

$$\oint_C \text{grad } U \cdot d\vec{l} = \oint_C dU = 0 \quad (2.71)$$

con lo cual de [2.69], [2.70] y [2.71] resulta

$$\int_S \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (2.72)$$

y como la superficie  $S$  es arbitraria, la expresión anterior se cumple para toda superficie, lo que supone que

$$\text{rot } \vec{A} = 0 \quad (2.73)$$

y por tanto

$$\text{rot grad } U = 0 \quad (2.74)$$

## 2.14. Campos solenoidales

Si construimos un campo vectorial  $\vec{B}$  a partir del rotacional de otro campo vectorial  $\vec{A}$ , entonces el campo  $\vec{B}$  así construido es solenoidal, es decir,  $\text{div } \vec{B} = 0$ .

Para demostrarlo, tomemos un volumen  $v$  arbitrario en el campo de la magnitud vectorial  $\vec{A}$ , limitado por una superficie  $S$ , que consideraremos dividida en dos superficies abiertas  $S_1$  y  $S_2$ , que se apoyan en la curva  $C$ , en la que fijamos un sentido para su recorrido, lo que dará sentido también a los elementos de superficie tomados sobre  $S_1$  y  $S_2$ , (Fig. 2.20).

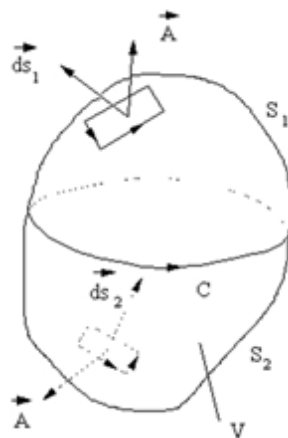


Figura 2.20: Superficies abiertas  $S_1$  y  $S_2$  que apoyan en una curva  $C$ .

Nótese que tanto  $S_1$  como  $S_2$  son superficies abiertas, mientras que su unión  $S = S_1 + S_2$  es una superficie cerrada, lo que incide en el sentido de los vectores  $d\vec{S}_1$  y  $d\vec{S}_2$  que representan elementos de superficie sobre  $S_1$  y  $S_2$  consideradas abiertas.

Aplicamos el teorema de Stokes a la superficie  $S_1$

$$\int_{S_1} \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S}_1 = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (2.75)$$

y también a la superficie  $S_2$

$$\int_{S_2} \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S}_2 = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (2.76)$$

Debido al sentido asignado al recorrido para el contorno  $C$ , los vectores  $d\vec{S}_1$  tienen sentido hacia afuera del volumen y los vectores  $d\vec{S}_2$  van hacia adentro.

Calculamos el flujo de  $\text{rot } \vec{A}$  a través de la superficie  $S = S_1 + S_2$ , en la que, como superficie cerrada que es, todos los elementos de superficie  $d\vec{S}$  tienen sentido hacia afuera del volumen, con lo que

$$\int_S \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S}_1 + \int_{S_2} \text{rot } \vec{A} \cdot (-d\vec{S}_2) \quad (2.77)$$

Y combinando [2.75], [2.76] y [2.77] obtenemos

$$\int_S \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (2.78)$$

Aplicando a esta expresión el teorema de la divergencia (formula [2.46]), resulta

$$\int_v \text{div rot } \vec{A} \, dv = \int_S \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (2.79)$$

y como el volumen  $v$  elegido es arbitrario, el integrando debe ser nulo, es decir

$$\text{div rot } \vec{A} = 0 \quad (2.80)$$

## 2.15. Operador nabra de Hamilton

Este operador, que se designa mediante la letra griega  $\nabla$  (nabra), es un operador diferencial vectorial, que simplifica muchos de los cálculos que se han de realizar con los operadores gradiente, divergencia y rotacional descritos anteriormente.

Recordemos las fórmulas de definición de los citados operadores

$$\text{grad } U = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \int_{\Delta v} U d\vec{S} \quad (2.81)$$

$$\text{div } \vec{A} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \int_{\Delta v} \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad (2.82)$$

$$\text{rot } \vec{A} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \int_{\Delta v} d\vec{S} \times \vec{A} \quad (2.83)$$

para ver que todas ellas tienen una parte común que es la que tomamos para definir el operador simbólico nabla. Así, se define

$$\nabla = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \int_{\Delta v} d\vec{S} \quad (2.84)$$

Cuando nabla opera sobre un escalar se obtiene el gradiente del escalar y se escribe

$$\nabla U \quad \text{o} \quad \text{grad } U$$

indistintamente.

Cuando opera sobre un campo vectorial, al ser un operador vectorial, puede hacerlo de dos formas: escalarmente y vectorialmente.

Si opera escalarmente se obtiene la divergencia del vector, y se escribe

$$\nabla \cdot \vec{A} \quad \text{o} \quad \text{div } \vec{A}$$

y si opera vectorialmente se obtiene el rotacional, cuya notación es

$$\nabla \times \vec{A} \quad \text{o} \quad \text{rot } \vec{A}$$

A partir de la expresión [2.18] del gradiente en coordenadas cartesianas se puede obtener, por simple comparación, la expresión simbólica de  $\nabla$  en tal sistema de coordenadas

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \quad (2.85)$$

y también de la ecuación [2.24] obtenemos la expresión de  $\nabla$  en coordenadas polares

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{u}_\theta \quad (2.86)$$

Del mismo modo se obtienen expresiones de  $\nabla$  para cualquier otro tipo de coordenadas.

## 2.16. Operador laplaciano

El operador  $\nabla$  se puede combinar consigo mismo o con otro vector (real, no simbólico) para obtener nuevos operadores. Veamos como ejemplo uno de ellos que es muy utilizado.

Supongamos que tenemos la ecuación diferencial siguiente

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} U) = f(x, y, z) \quad (2.87)$$

que relaciona la divergencia de un vector potencial ( $\operatorname{grad} U$ ) con una cierta función  $f(x, y, z)$ .

La ecuación [2.87] se escribe de forma simbólica

$$\nabla \cdot \nabla U = f(x, y, z) \quad (2.88)$$

y también, dado que  $\nabla \cdot \nabla$  es el producto escalar de dos vectores simbólicos, se representa por

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$$

y también por  $\Delta \equiv \nabla \cdot \nabla$ , denominándose a esta última notación ( $\Delta$ ) operador de Laplace o laplaciano.

Así, la ecuación [2.87] escrita de forma simbólica es

$$\Delta U = f(x, y, z) \quad (2.89)$$

y se lee “laplaciano de  $U$  igual a  $f(x, y, z)$ ”.

El operador de Laplace se aplica tanto a escalares como a vectores. En el caso de vectores se debe tomar el laplaciano de las tres componentes cartesianas:

$$\Delta \vec{A} = \Delta A_x \vec{i} + \Delta A_y \vec{j} + \Delta A_z \vec{k} \quad (2.90)$$

Además es un operador lineal, es decir,

$$\Delta(a + b) = \Delta a + \Delta b \quad (2.91)$$

$$\Delta(\lambda a) = \lambda \Delta a \quad (2.92)$$

para escalares y,

$$\Delta(\vec{A} + \vec{B}) = \Delta \vec{A} + \Delta \vec{B} \quad (2.93)$$

$$\Delta(\lambda \vec{A}) = \lambda \Delta \vec{A} \quad (2.94)$$

para vectores.

La expresión [2.89] se denomina ecuación de POISSON y cuando  $f(x,y,z) \equiv 0$  se denomina ecuación de LAPLACE y se escribe

$$\Delta U = 0 \quad (2.95)$$

La expresión de la ecuación de Laplace, en coordenadas cartesianas se obtiene inmediatamente

$$\begin{aligned} \Delta U &= \nabla \cdot \nabla U = \left( \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot \left( \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \end{aligned} \quad (2.96)$$

y de ella se deduce directamente que  $\Delta$ , en coordenadas cartesianas, tiene por expresión

$$\Delta U = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.97)$$

Finalmente diremos que un nuevo operador que resulta de la combinación de un vector o campo vectorial  $\vec{A}$  con el operador laplaciano es:

$$(\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} \equiv \vec{i}(\vec{A} \cdot \nabla B_x) + \vec{j}(\vec{A} \cdot \nabla B_y) + \vec{k}(\vec{A} \cdot \nabla B_z) \quad (2.98)$$

## 2.17. Ejemplos operacionales

Hay muchas combinaciones posibles de operadores algebraicos con operadores diferenciales sobre campos escalares y vectores. Otras no son posibles.

Veamos como ejemplo algunas combinaciones, en concreto, las más utilizadas. Las identidades que siguen se pueden verificar fácilmente en coordenadas cartesianas, prueba suficiente para asegurar su validez en cualquier otro sistema de coordenadas.

Para su obtención hay que recordar que  $\nabla$  es un operador diferencial vectorial. Los ejemplos que siguen, si son cuidadosamente comprobados, nos permitirán afianzar su manejo. Sean  $a$ ,  $b$  y  $c$  campos escalares y  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  y  $\vec{C}$  campos vectoriales. Se verifica:

$$\nabla(a + b) = \nabla a + \nabla b \quad (2.99)$$

$$\nabla(ab) = b\nabla a + a\nabla b \quad (2.100)$$

$$\nabla \cdot (a\vec{B}) = a\nabla \cdot \vec{B} + \vec{B} \cdot \nabla a \quad (2.101)$$

$$\nabla \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = \nabla \cdot \vec{A} + \nabla \cdot \vec{B} \quad (2.102)$$

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B}) \quad (2.103)$$

$$\nabla \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = \nabla \cdot \vec{A} + \nabla \cdot \vec{B} \quad (2.104)$$

$$\nabla \times (a\vec{B}) = a\nabla \times \vec{B} + \nabla a \times \vec{B} \quad (2.105)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} \quad (2.106)$$

Esta última ecuación es utilizada por algunos autores para la definición del operador Laplaciano sobre una función vectorial.