ELECTROSTÁTICA DEL VACÍO

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

Curso 2014/15

ÍNDICE

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

ÍNDICE

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

ÍNDICE

APLICACIONES

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

ÍNDICE

APLICACIONES

POTENCIAL ELECTROSTÁTICO

Disco de σ=cte y radio R en un punto de su eje

Esfera de ρ=cte y radio R en

Cilindro infinito de ρ=cte y radio R

Plano Infinito de σ=cte

ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

Esfera de ρ=cte y radio R

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

INTRODUCCIÓN

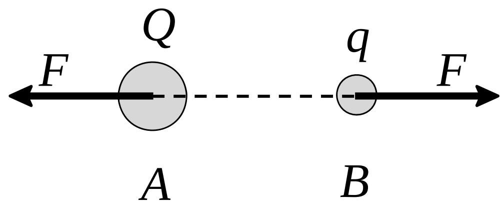
ELECTROSTÁTICA

Es la parte del electromagnetismo que estudia la interacción entre cargas eléctricas en reposo respecto a un sistema de referencia inercial. En estas condiciones no aparecen efectos magnéticos y hablaremos de interacción electrostática.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CARGA ELÉCTRICA

DEFINICIÓN OPERACIONAL



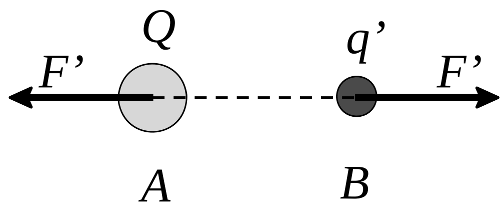
Situamos dos cargas desconocidas Q y q en dos puntos A y B fijos en un sistema inercial de referencia.

Experimentalmente se comprueba que aparece una fuerza F sobre cada una de ellas. Estas dos fuerzas forman un par de acción reacción en el sentido estricto de la 3ª Ley de Newton.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CARGA ELÉCTRICA

DEFINICIÓN OPERACIONAL



Sustituimos la carga q por otra diferente q'.

Experimentalmente se comprueba que la nueva interacción es otro par de acción reacción pero con un valor de la fuerza diferente F'.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CARGA ELÉCTRICA

DEFINICIÓN OPERACIONAL

También como resultado del experimento se obtiene:

$$\frac{q'}{q} = \frac{F'}{F}$$

Donde F y F' son los módulos de las fuerzas.

Si aceptamos por convenio que $q=1$ unidad de carga eléctrica en cierto sistema de unidades que nos sirva de referencia, el valor de cualquier otra carga q' se puede obtener de:

$$q' = \frac{F'}{F}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CARGA ELÉCTRICA

PROPIEDADES

DUALIDAD

Existen cargas de dos tipos: positivas (+) y negativas (–)

Mismo tipo se repelen, distinto se atraen.

CARÁCTER ADITIVO

Se puede aplicar el principio de superposición.

CUANTIFICACIÓN

No hay una cantidad de carga tan pequeña como nos podamos imaginar. Hay una carga “mínima” que es la carga del electrón o del protón ($e = 1.60206 \cdot 10^{-19}$ C) y por lo tanto cualquier carga será un múltiplo de ésta.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CARGA ELÉCTRICA

PROPIEDADES

INVARIANCIA RELATIVISTA

A diferencia de la masa la carga no depende de la velocidad del sistema de referencia

CONSERVACIÓN

Se conserva en un sistema cerrado (aquel que no intercambia masa).

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CLASIFICACIÓN DE LOS MATERIALES

CONDUCTORES

Están formados por átomos cuyos electrones de las capas exteriores están muy débilmente sujetos a los núcleos y pueden moverse a largas distancias a través de la estructura del material.

En un material conductor las cargas libres se mueven reaccionando incluso a campos infinitesimales (muy pequeños) y tienden a ocupar posiciones de equilibrio casi instantáneamente.

Materiales conductores típicos son los metales y las aleaciones.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CLASIFICACIÓN DE LOS MATERIALES

AISLANTES O DIELÉCTRICOS

Sus electrones están fuertemente ligados y no reaccionan apreciablemente ante campos externos de pequeña intensidad.

En presencia de campos eléctricos apreciables reaccionan de forma que se producen pequeños desplazamientos entre cargas positivas y negativas.

Los materiales aislantes típicos son sustancias inorgánicas no metálicas o sustancias orgánicas en general.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CLASIFICACIÓN DE LOS MATERIALES

SEMICONDUCTORES

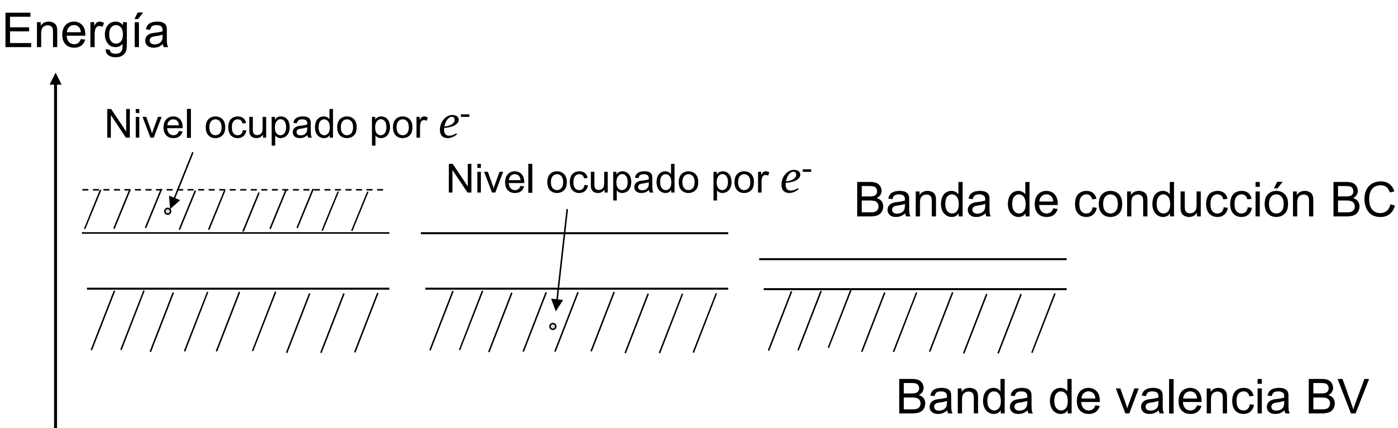
Presentan un comportamiento intermedio entre los conductores y los dieléctricos.

En un material semiconductor el movimiento de cargas es local (a distancias pequeñas) y el medio ofrece mucha resistencia.

Ejemplos de semiconductores típicos son el germanio, el silicio y otros.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

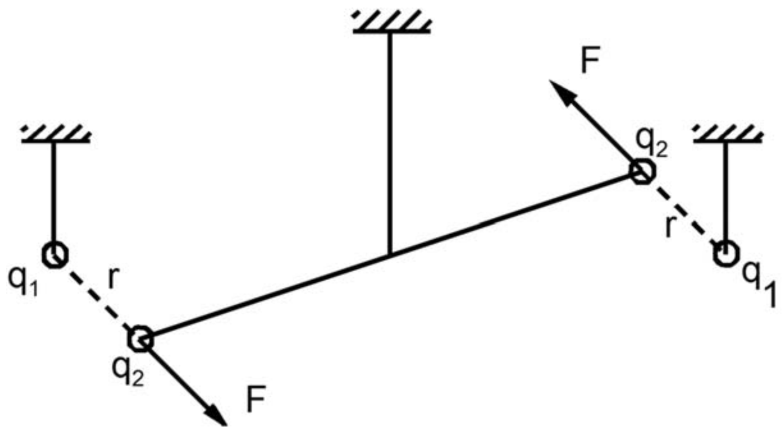
CLASIFICACIÓN DE LOS MATERIALES



Conductores	Dieléctricos	Semiconductores
BC semillena	BV llena pero lejos de la BC vacía	BV llena pero cerca de la BC vacía

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

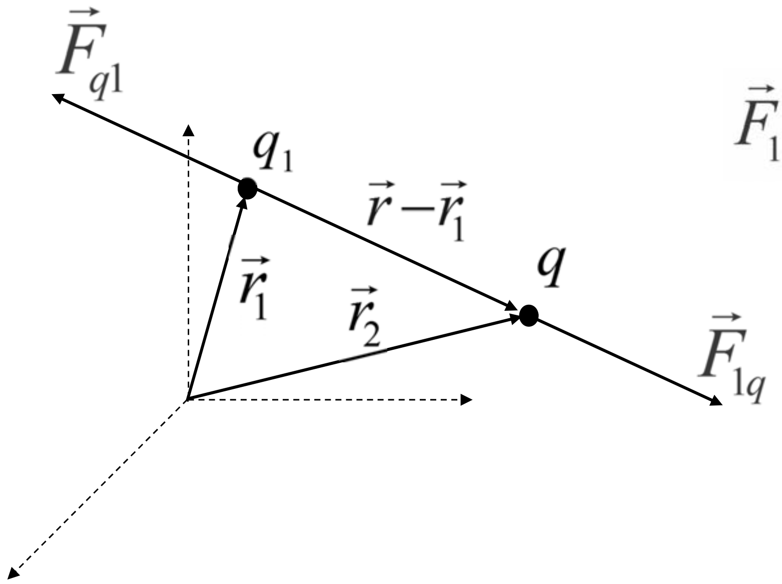
LEY DE COULOMB



La fuerza mutua que se ejerce entre dos partículas cargadas es proporcional al producto de los números que miden las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

LEY DE COULOMB



$$\vec{F}_{1q} = -\vec{F}_{q1}$$

$$\vec{F}_{1q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q(\vec{r}-\vec{r}_1)}{\left|\vec{r}-\vec{r}_1\right|^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q}{\left|\vec{r}-\vec{r}_1\right|^2}\frac{(\vec{r}-\vec{r}_1)}{\left|\vec{r}-\vec{r}_1\right|}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

LEY DE COULOMB

$$\vec{F}_{1q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q}{\left|\vec{r}-\vec{r}_1\right|^2}\frac{(\vec{r}-\vec{r}_1)}{\left|\vec{r}-\vec{r}_1\right|}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$$

ε_0 permitividad del vacío o constante dieléctrica del vacío

c velocidad de la luz en el vacío

Se define: $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\ T\cdot m/A$

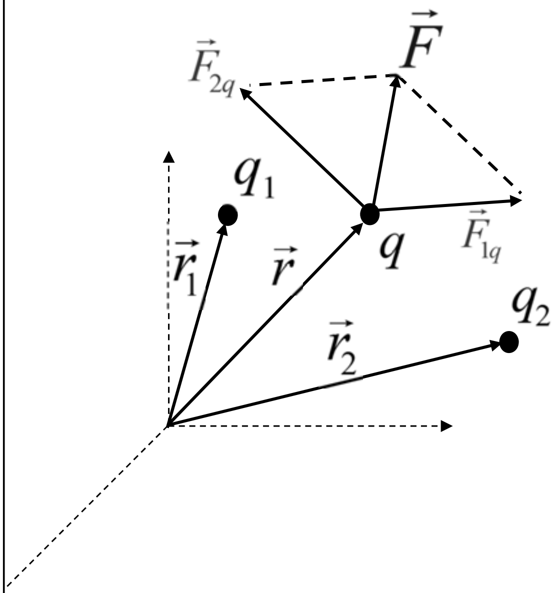
Con lo que: $\varepsilon_0 = 8.854\cdot 10^{-12}\ N^{-1}\cdot m^{-2}\cdot C^2$

En el SI: $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9\cdot 10^9\ N\cdot m^2\cdot C^{-2}$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

LEY DE COULOMB

PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN



La acción de varias cargas en un punto se obtiene superponiendo (sumando vectorialmente) los efectos individuales de cada una.

Generalizando para el efecto de n cargas q_i sobre otra carga q:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iq} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i q(\vec{r} - \vec{r}_i)}{\left|\vec{r} - \vec{r}_i\right|^3}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CAMPO ELECTROSTÁTICO

Las cargas producen una perturbación en el espacio que las rodea y esa perturbación se propaga a la velocidad de la luz en el vacío (lo que justifica la antigua creencia de acciones instantáneas).

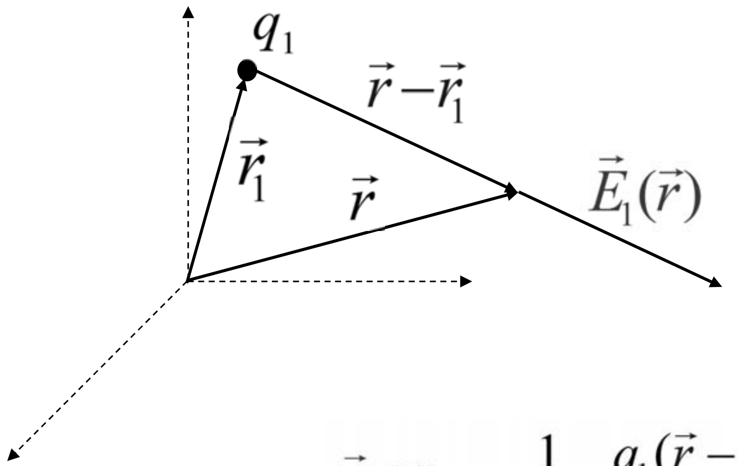
Tal perturbación, que denominamos campo eléctrico, es la que actúa sobre las nuevas cargas que podamos situar en dicho espacio.

El vector intensidad de campo electrostático cuantifica el valor de esa perturbación.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CAMPO ELECTROSTÁTICO

CARGAS PUNTUALES



$$\vec{E}_1(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1(\vec{r}-\vec{r}_1)}{\left|\vec{r}-\vec{r}_1\right|^3}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{\left|\vec{r}-\vec{r}_1\right|^2}\frac{(\vec{r}-\vec{r}_1)}{\left|\vec{r}-\vec{r}_1\right|}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CAMPO ELECTROSTÁTICO

CARGAS PUNTUALES

$\vec{E}(\vec{r})$ se puede definir como la fuerza que el campo ejerce sobre la carga unidad colocada en $\vec{r}$

Es un campo vectorial.

Unidades SI del campo electrostático: N/C o V/m

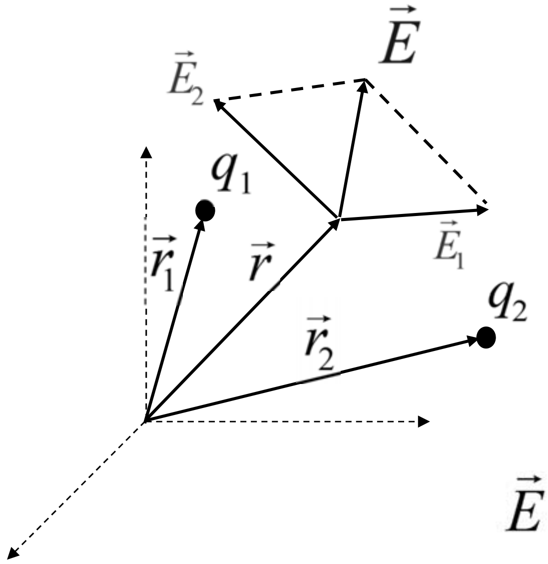
Fuerza sobre una carga q en $\vec{r}$:

$$\vec{F}=q\vec{E}_1(\vec{r})$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CAMPO ELECTROSTÁTICO

PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN



La acción de varias cargas en un punto se obtiene superponiendo (sumando vectorialmente) los efectos individuales de cada una.

Generalizando para el efecto de n cargas q_i:

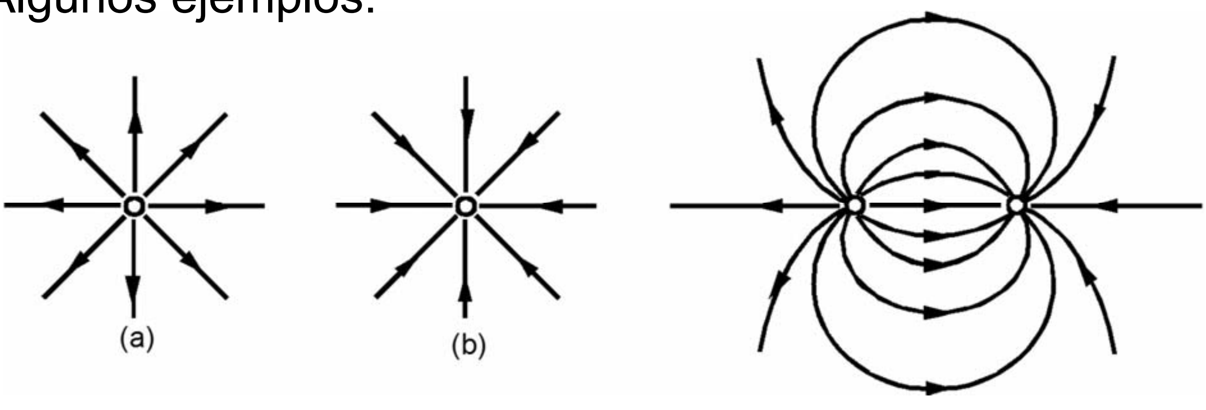
$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i(\vec{r}-\vec{r}_i)}{\left|\vec{r}-\vec{r}_i\right|^3}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CAMPO ELECTROSTÁTICO

LÍNEAS DE CAMPO

Algunos ejemplos:



CARGA POSITIVA

CARGA NEGATIVA

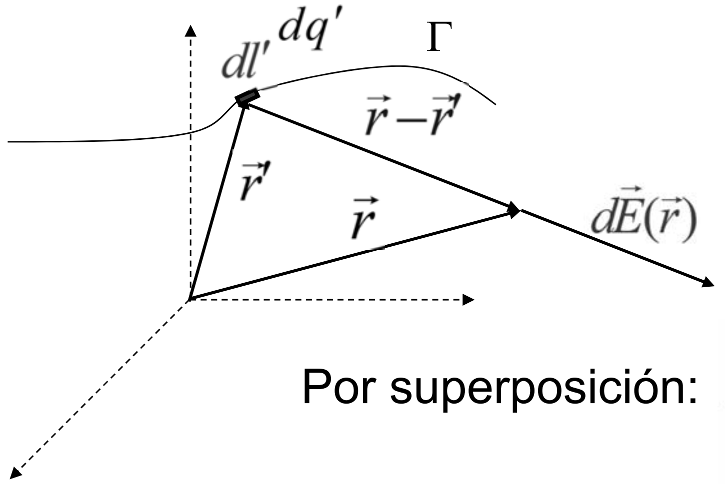
CARGAS PRÓXIMAS IGUALES Y DE SIGNO CONTRARIO (dipolo eléctrico)

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CAMPO ELECTROSTÁTICO

DISTRIBUCIONES CONTINUAS DE CARGA (LINEAL)

Densidad Lineal $\lambda(\vec{r}') \equiv \lim_{\Delta l' \to 0} \frac{\Delta q'}{\Delta l'} = \frac{dq'}{dl'} \Longrightarrow dq' = \lambda(\vec{r}')dl'$



$$d\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq'(\vec{r}-\vec{r}')}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}$$

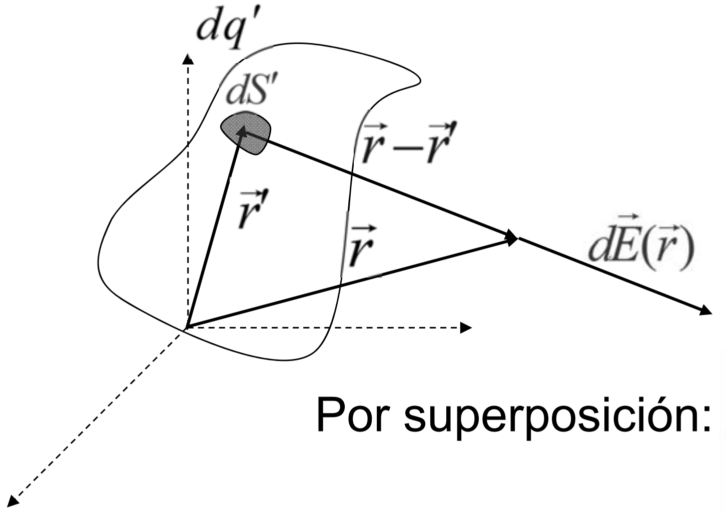
Por superposición: $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\Gamma \frac{\lambda(\vec{r}')dl'(\vec{r}-\vec{r}')}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CAMPO ELECTROSTÁTICO

DISTRIBUCIONES CONTINUAS DE CARGA (SUPERFICIAL)

Densidad Superficial $\sigma(\vec{r}') \equiv \lim_{\Delta S' \to 0} \frac{\Delta q'}{\Delta S'} = \frac{dq'}{dS'} \Longrightarrow dq' = \sigma(\vec{r}')dS'$



$$d\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq'(\vec{r}-\vec{r}')}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}$$

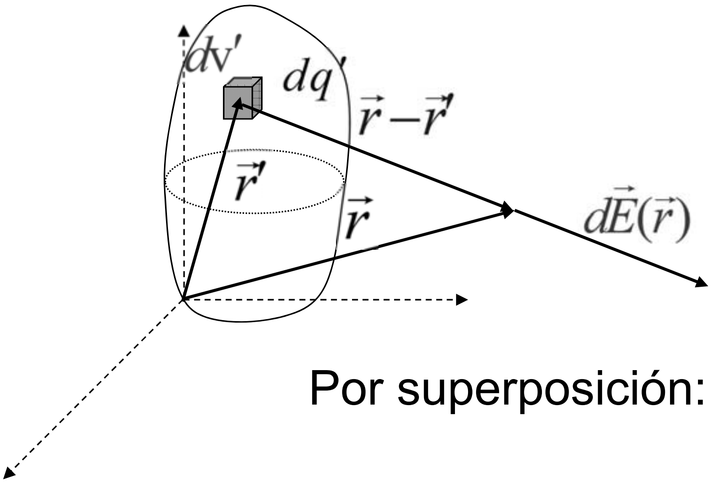
Por superposición: $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\sigma(\vec{r}')dS'(\vec{r}-\vec{r}')}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CAMPO ELECTROSTÁTICO

DISTRIBUCIONES CONTINUAS DE CARGA (VOLUMÉTRICA)

Densidad Volumétrica $\rho(\vec{r}') \equiv \lim_{\Delta v' \to 0} \frac{\Delta q'}{\Delta v'} = \frac{dq'}{dv'} \Longrightarrow dq' = \rho(\vec{r}')dv'$



$$d\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq'(\vec{r}-\vec{r}')}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}$$

Por superposición: $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')dv'(\vec{r}-\vec{r}')}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CAMPO ELECTROSTÁTICO

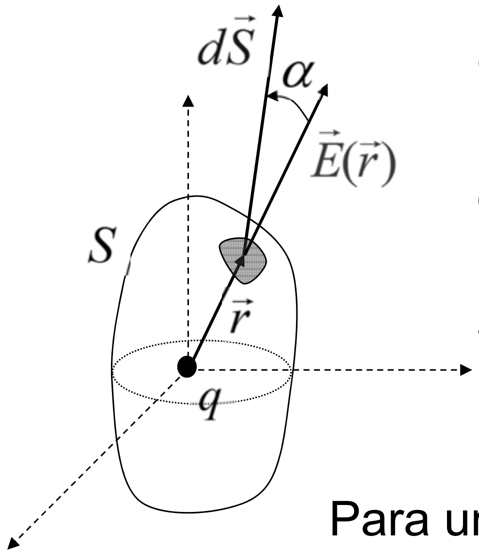
CARGAS PUNTUALES Y DISTRIBUCIONES CONTINUAS DE CARGA

Tanto las distribuciones continuas como las cargas puntuales serán consideradas cargas LIBRES en el estudio de la Electrostática de Materiales.

En cualquier caso no dejan de ser materiales con agrupaciones de carga creadas “artificialmente”.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

TEOREMA DE GAUSS



Queremos calcular el flujo a través de una superficie cerrada S del campo creado por una carga q situada en el interior del volumen que encierra la superficie S.

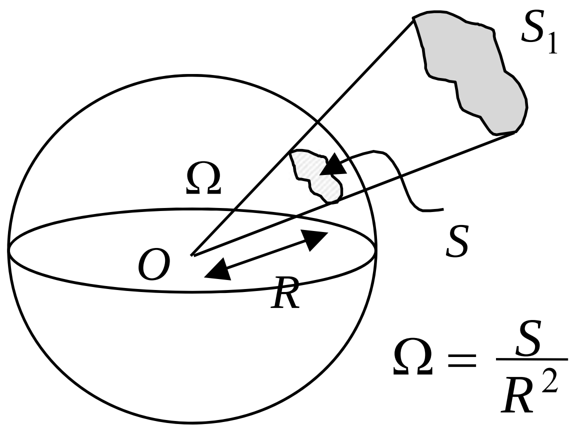
Para un elemento diferencial de superficie

$$d\phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r} \cdot d\vec{S}}{r^3} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dS \cos\alpha}{r^2}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

TEOREMA DE GAUSS

ÁNGULO SÓLIDO



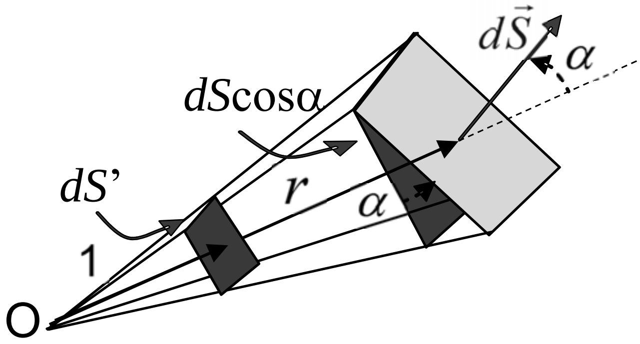
$$\Omega = \frac{S}{R^2}$$

El ángulo sólido subtendido por la superficie S_1 visto desde el punto O es igual al área (S) sobre la esfera de radio R dividido por el radio al cuadrado (unidad = estereoradián).

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

TEOREMA DE GAUSS

ÁNGULO SÓLIDO



$$d\Omega \equiv \frac{\vec{r}\cdot d\vec{S}}{r^3} = \frac{dS\cos\alpha}{r^2} = \frac{dS'}{1^2}$$

El ángulo sólido coincide con el área subtendida en una esfera de radio 1.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

TEOREMA DE GAUSS

$$d\phi = \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}\cdot d\vec{S}}{r^3} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dS\cos\alpha}{r^2}$$

Y como $d\Omega = \dfrac{dS\cos\alpha}{r^2} \longrightarrow d\phi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega$

Para una superficie cerrada, el ángulo sólido: $\oint_S d\Omega = 4\pi$

Y el flujo total será:

$$\phi = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

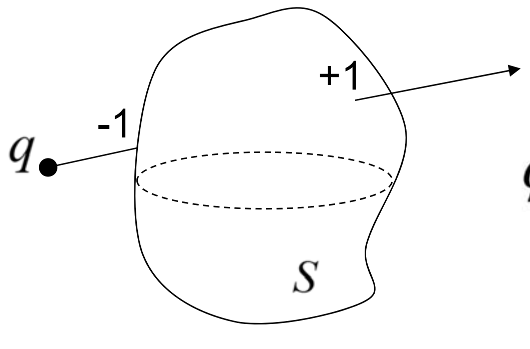
TEOREMA DE GAUSS

$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

El número neto de líneas (intensidad de campo) que atraviesan la superficie S es proporcional a la carga encerrada.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

TEOREMA DE GAUSS



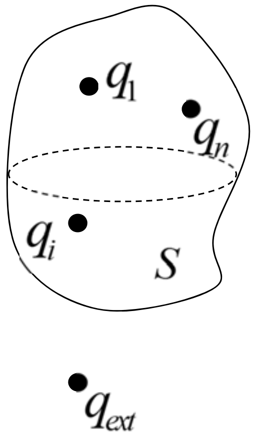
$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

Si la carga q estuviera fuera de la superficie, el flujo sería cero, puesto que todas las líneas producidas por la carga que entran en la superficie (flujo negativo) saldrían de ella (flujo positivo).

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

TEOREMA DE GAUSS

Si en el interior de S hay n cargas puntuales, aplicando el principio de superposición, el flujo es:



$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i}{\varepsilon_0}$$

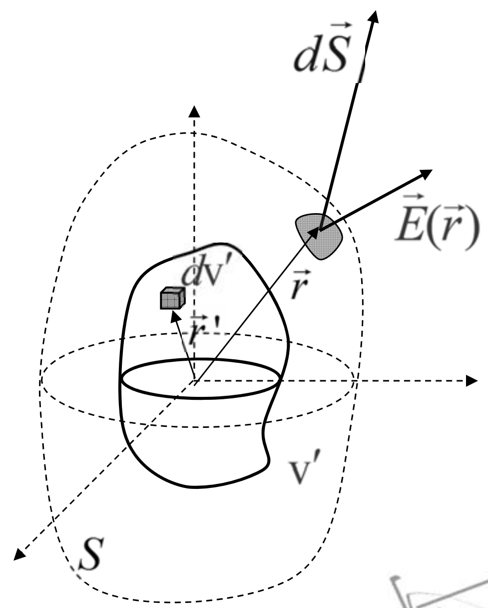
Las cargas exteriores q_{ext} no se tienen en cuenta

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

TEOREMA DE GAUSS

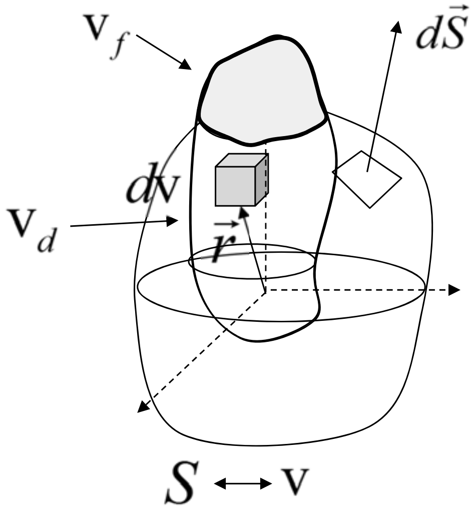
Si en el interior de S hay carga distribuida en un volumen v', aplicando el principio de superposición, el flujo es:

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \oint_{v'} \rho(\vec{r}\,')\, dv'$$



J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

TEOREMA DE GAUSS



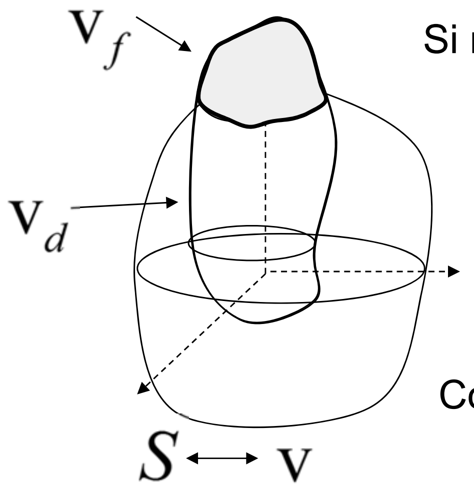
Para una carga distribuida en un volumen $\mathrm{v}_d + \mathrm{v}_f$ (v_d dentro y v_f fuera de S):

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\mathrm{v}_d} \rho(\vec{r}) d\mathrm{v} = \frac{Q_d}{\varepsilon_0}$$

Carga contenida dentro de S (volumen v_d) y no fuera (volumen v_f)

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

TEOREMA DE GAUSS



Si no existieran cargas exteriores:

Densidad de cargas interiores

$$\oint_S \vec{E}_{\mathrm{int}} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\mathrm{v}_d} \rho(\vec{r}) d\mathrm{v}$$

Campo producido por las cargas interiores

Como existen: $\vec{E}_{total} = \vec{E}_{ext} + \vec{E}_{\mathrm{int}}$

El flujo de las cargas exteriores es cero

$$\oint_S \vec{E}_{total} \cdot d\vec{S} = \overbrace{\oint_S \vec{E}_{ext} \cdot d\vec{S}}^{0} + \oint_S \vec{E}_{\mathrm{int}} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\mathrm{v}_d} \rho(\vec{r}) d\mathrm{v}$$

Por tanto, el teorema de Gauss lo verifica tanto $\vec{E}_{total}$ como $\vec{E}_{\mathrm{int}}$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

TEOREMA DE GAUSS

El flujo del campo electrostático a través de una superficie cerrada es igual al cociente entre la carga neta encerrada por la superficie y la permitividad ε_0

A la superficie cerrada que en cada caso se considere para la aplicación de este teorema se le denomina superficie gaussiana.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

TEOREMA DE GAUSS

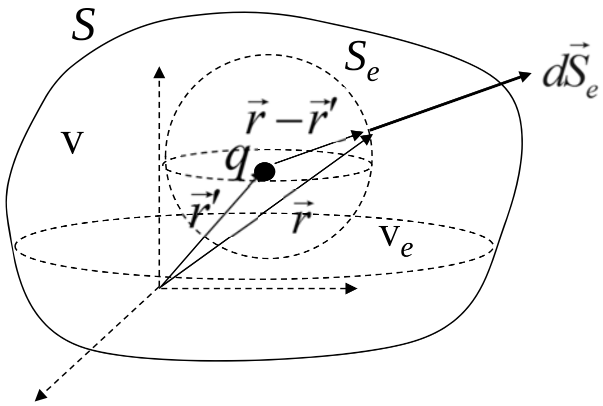
El teorema de Gauss, "per se“, no es suficiente para calcular el campo electrostático en un punto de la superficie gaussiana salvo en condiciones de simetría apropiada donde el campo puede salir de la integral del flujo.

Por tanto, para su aplicación en el cálculo de campos electrostáticos se necesita, adicionalmente, aplicar alguna condición de simetría.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

TEOREMA DE GAUSS

Otra demostración:



Teorema de la divergencia

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{\mathrm{v}} \nabla\cdot\vec{E}\, d\mathrm{v} = \int_{\mathrm{v}_e} \nabla\cdot\vec{E}\, d\mathrm{v}_e = \oint_{S_e} \vec{E}\cdot d\vec{S}_e$$

$\nabla\cdot\vec{E} = 0$ excepto en la posición de la carga que nacen o mueren líneas

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

TEOREMA DE GAUSS

Otra demostración:

$$d\vec{S}_e = \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{\left|(\vec{r}-\vec{r}')\right|} dS_e$$

El diferencial es perpendicular a la esfera y paralelo al campo

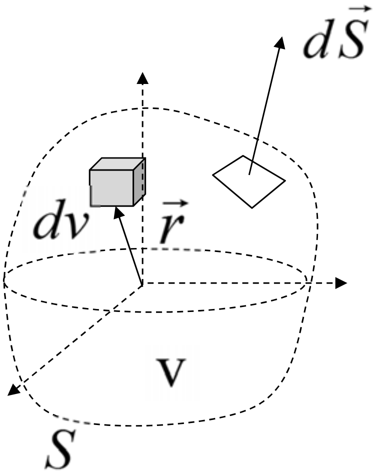
$$\oint_{S_e} \vec{E}\cdot d\vec{S}_e = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_{S_e} \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{\left|(\vec{r}-\vec{r}')\right|^3}\cdot\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{\left|(\vec{r}-\vec{r}')\right|} dS_e = \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0}\oint_{S_e}\frac{dS_e}{\left|(\vec{r}-\vec{r}')\right|^2} =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\oint_{S_e} dS_e = \frac{qS_e}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\left|(\vec{r}-\vec{r}')\right| = R$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

ECUACIONES DE MAXWELL EN ELECTROSTÁTICA



TEOREMA DE GAUSS

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\oint_{\mathrm{v}} \rho(\vec{r})\, d\mathrm{v}$$

TEOREMA DE LA DIVERGENCIA

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{S} = \oint_{\mathrm{v}} \nabla\cdot\vec{E}(\vec{r})\, d\mathrm{v}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

ECUACIONES DE MAXWELL EN ELECTROSTÁTICA

Combinando ambas igualdades

$$\oint_{\mathrm{v}} \nabla\cdot\vec{E}(\vec{r})\, d\mathrm{v} = \frac{1}{\varepsilon_0}\oint_{\mathrm{v}} \rho(\vec{r})\, d\mathrm{v} \longrightarrow \boxed{\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

ECUACIÓN DE MAXWELL

La fuente del campo electrostático son las cargas, las líneas de campo nacen y mueren en ellas.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

ECUACIONES DE MAXWELL EN ELECTROSTÁTICA

Propiedad: $$\nabla \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

Demostración:

$$\nabla \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\vec{i}}{\left((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right)^{1/2}} + \frac{\partial}{\partial y}\ldots\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\ldots\vec{k} =$$

$$= -\frac{(x-x')\vec{i}}{\left((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right)^{3/2}} - \frac{(y-y')}{(\quad)^{3/2}}\ldots\vec{j} - \frac{(z-z')}{(\quad)^{3/2}}\ldots\vec{k} = -\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

Propiedad: $$\nabla \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -\nabla' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

ECUACIONES DE MAXWELL EN ELECTROSTÁTICA

$$\nabla \times \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla \times \left(\int_{\mathrm{v}'} \rho(\vec{r}\,')\,d\mathrm{v}\,\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\right)$$

Y como $$-\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} = \nabla \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{v'} \rho(\vec{r}\,')\,dv\,\nabla \times \left[\nabla\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)\right] = \vec{0}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

ECUACIONES DE MAXWELL EN ELECTROSTÁTICA

ECUACIÓN DE MAXWELL $\boxed{\nabla \times \vec{E} = \vec{0}}$

El campo electrostático es conservativo.

Y puede expresarse mediante una función potencial:

$$\nabla \times \vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \vec{E} = -\nabla V$$

V es el potencial electrostático

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

ECUACIONES DE MAXWELL EN ELECTROSTÁTICA

Y recordando la ecuación de Maxwell $\nabla \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$ Ecuación de Poisson

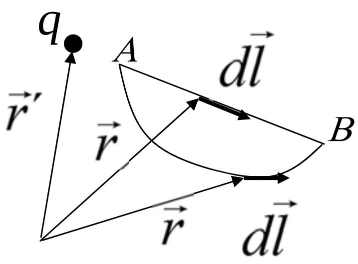
Si ρ =0

$$\nabla^2 V = 0$$ Ecuación de Laplace

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

POTENCIAL ELECTROSTÁTICO

Si calculamos $\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l}$ para el campo creado por una carga puntual por cualquier camino:



$$\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_A^B \frac{q(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\varepsilon_0\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}\cdot d\vec{l}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

POTENCIAL ELECTROSTÁTICO

Y como $\dfrac{(\vec{r}-\vec{r}')}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3} = -\nabla\dfrac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}$

$$\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_A^B -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}\cdot d\vec{l} = \int_A^B -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|} =$$

$$= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left|\vec{r}_B-\vec{r}'\right|} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left|\vec{r}_A-\vec{r}'\right|}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

POTENCIAL ELECTROSTÁTICO

Observamos que el resultado solo depende de la posición inicial y final podemos asignar una función escalar V(x, y, z) a cada punto del espacio, que cumpla

$$-\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = V(x_B, y_B, z_B) - V(x_A, y_A, z_A) \equiv V(B) - V(A)$$

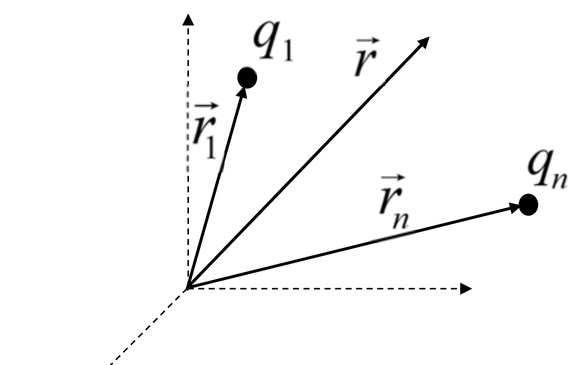
Expresado en función de coordenadas de puntos fuente y puntos campo:

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|} \quad \text{tomando} \quad V(\vec{r}=\infty)=0$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

POTENCIAL ELECTROSTÁTICO

Si hay n cargas puntuales:



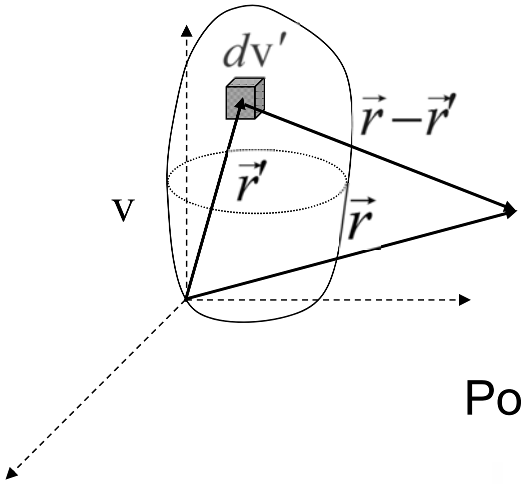
Aplicando el principio de superposición:

$$V(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{n} V_i(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{\left|\vec{r}-\vec{r}_i\right|} \qquad V(\infty)=0$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

POTENCIAL ELECTROSTÁTICO

Para una distribución volumétrica continua finita de cargas:



$$dq' = \rho(\vec{r}')d\mathrm{v}'$$

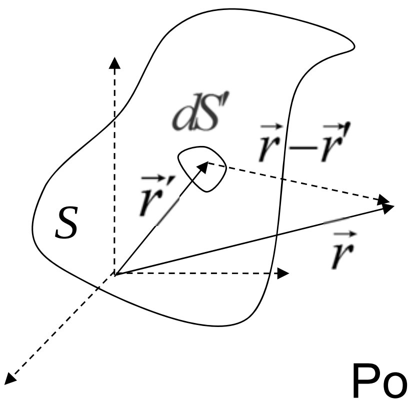
Por superposición:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathrm{v}} \frac{\rho(\vec{r}')d\mathrm{v}'}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|} \qquad V(\infty)=0$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

POTENCIAL ELECTROSTÁTICO

Para una distribución superficial continua finita de cargas:



$$dq' = \sigma(\vec{r}')dS'$$

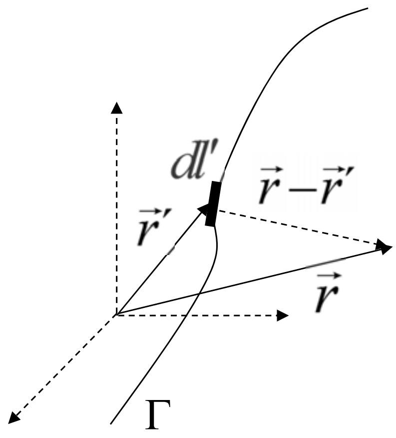
Por superposición:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{S} \frac{\sigma(\vec{r}')dS'}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|} \qquad V(\infty)=0$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

POTENCIAL ELECTROSTÁTICO

Para una distribución lineal continua finita de cargas:



$$dq' = \lambda(\vec{r}')dl'$$

Por superposición:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\Gamma}\frac{\lambda(\vec{r}')dl'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad V(\infty)=0$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

POTENCIAL ELECTROSTÁTICO

Si la distribución de carga es infinita no sirven las fórmulas anteriores pues no se puede suponer $V(\infty)=0$, entonces debemos usar la fórmula general para calcular el potencial:

$$V(\vec{r})-V(\vec{r}_0) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}}\vec{E}\cdot d\vec{l} \ \text{ donde } V(\vec{r}_0)=cte \ \text{ arbitraria}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

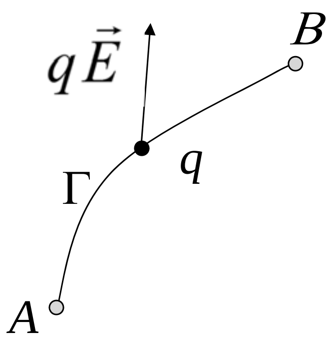
POTENCIAL ELECTROSTÁTICO

A esta función escalar $V(\vec{r})$ que solo depende del punto se la denomina potencial electrostático o potencial eléctrico y veremos que representa salvo signo el trabajo que realiza el campo para llevar la carga unidad positiva.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

TRABAJO EN EL CAMPO ELECTROSTÁTICO

Si en un campo electrostático $\vec{E}$ introducimos una carga q, estará sometida a una fuerza $\vec{F}=q\vec{E}$



El trabajo realizado por el campo para llevar la carga puntual q de A a B es:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{l} = q\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = q\int_A^B -\nabla V\cdot d\vec{l} = -q(V(B)-V(A))$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

TRABAJO EN EL CAMPO ELECTROSTÁTICO

Si traemos la carga desde $A = \infty$, y allí suponemos potencial cero:

$$W = -qV(B)$$

El potencial en un punto es pues el trabajo para llevar la unidad de carga desde el infinito a dicho punto.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

TRABAJO EN EL CAMPO ELECTROSTÁTICO

La expresión $V_B - V_A$, o $V(B) - V(A)$ o también V_{AB}, se denomina diferencia de potencial (ddp) entre los puntos B y A.

Físicamente, $V(B) - V(A)$ representa salvo signo el trabajo que realizan las fuerzas del campo para llevar la carga unidad positiva desde el punto A hasta el punto B.

De aquí deducimos que si en un campo electrostático dejamos libre una carga positiva, por efecto de las fuerzas del campo se moverá hacia puntos de potenciales decrecientes.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

La energía electrostática de una distribución espacial de cargas es la energía necesaria para formar esa configuración de cargas a partir de un estado inicial en que las cargas estuviesen infinitamente separadas.

Una vez formada una cierta configuración de cargas, éstas crean un campo electrostático que actúa sobre las demás cargas produciendo fuerzas sobre ellas.

La energía electrostática, debida a una cierta configuración de cargas, está almacenada en el espacio donde existe campo eléctrico.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

Distribución formada por n cargas puntuales:

$$W_{\text{int}} = -\Delta U_e = -\Delta \sum_{pares(i,j)} U_{ij}$$

$$U_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = \underbrace{U_{ij}(|\vec{r}_{i_0} - \vec{r}_{j_0}|)}_{0} - \int_{\vec{r}_{i0}-\vec{r}_{j0}}^{\vec{r}_i-\vec{r}_j} \vec{F}_{ij} \cdot d(\vec{r}_i - \vec{r}_j) =$$

$$= -\int_{\vec{r}_{i0}-\vec{r}_{j0}}^{\vec{r}_i-\vec{r}_j} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{|(\vec{r}_i - \vec{r}_j)|^3} \cdot d(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

$$2(\vec{r}_i-\vec{r}_j)\cdot d(\vec{r}_i-\vec{r}_j)=d((\vec{r}_i-\vec{r}_j)\cdot(\vec{r}_i-\vec{r}_j))=d\left|\vec{r}_i-\vec{r}_j\right|^2=2\left|\vec{r}_i-\vec{r}_j\right|d\left|\vec{r}_i-\vec{r}_j\right|$$

Sustituyendo:

$$U_{ij}(\left|\vec{r}_i-\vec{r}_j\right|)=-\int_{\left|\vec{r}_{i0}-\vec{r}_{j0}\right|}^{\left|\vec{r}_i-\vec{r}_j\right|}\frac{q_iq_j}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\left|\vec{r}_i-\vec{r}_j\right|}{\left|(\vec{r}_i-\vec{r}_j)\right|^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_iq_j}{\left|(\vec{r}_i-\vec{r}_j)\right|},, \quad \left|\vec{r}_{i_0}-\vec{r}_{j_0}\right|\rightarrow\infty$$

$$U_e=\sum_{pares(i,j)}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_iq_j}{\left|(\vec{r}_i-\vec{r}_j)\right|}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

En función del potencial:

$$U_e=\sum_{pares(i,j)}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_iq_j}{\left|(\vec{r}_i-\vec{r}_j)\right|}=\sum_{i}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_iq_j}{\left|(\vec{r}_i-\vec{r}_j)\right|}=$$

$$=\sum_i q_i\left(\sum_{j=i+1}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_iq_j}{\left|(\vec{r}_i-\vec{r}_j)\right|}\right)=\sum_i q_iV_{qi}$$

$$U_e=\sum_i q_iV_{qi}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

Para tres cargas:

La carga 1 ve como traemos a la 2 y a la 3, la carga 2 ve como traemos solo a la 3.

Por tanto, es como si primero trajéramos la 3 desde ∞, luego la 2 y luego la 1.

El potencial V_{qi} es el creado solo por las cargas ya traídas hasta el momento de traer la carga q_i en la posición de la carga i.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

En el paso i se trae la carga q_i desde ∞ y previamente se han traído la $1,2,3,\ldots,i$-1. No están todavía la $i+1,\ldots,n$.

$$U_e = -\sum_{i=1}^{n} W_i = \sum_{i=1}^{n} q_i V_{qi}$$

Potencial creado por las i-1 cargas ya traídas en la posición de la carga i

El potencial en un punto es pues la energía para llevar la unidad de carga desde el infinito a dicho punto.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

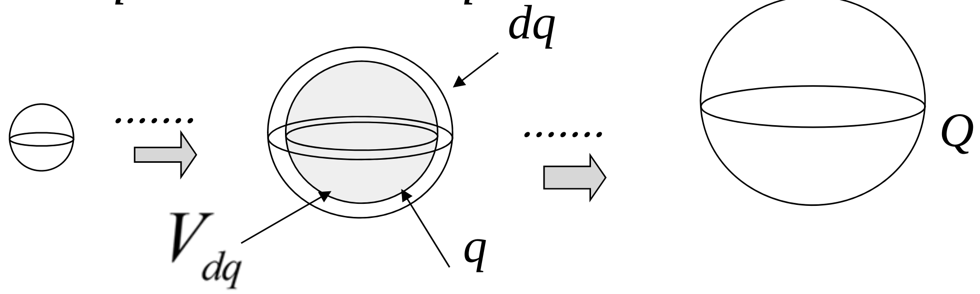
ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

Cargas distribuidas:

$$U_e = -\int dW = \int_Q dq V_{dq}$$

Potencial creado por las q cargas ya traídas en la posición del dq que se trae

Traemos el dq, hemos traído q



J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

Teniendo en cuenta que: $\sum_{pares(i,j)} (a_{ij} + a_{ji}) = \sum_i \sum_{\substack{j \\ j\neq i}} a_{ij}$

$$a_{ij} = a_{ji} \rightarrow \sum_i \sum_{j>i} a_{ij} = \sum_{pares(i,j)} a_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{pares(i,j)} (a_{ij} + a_{ji}) = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{\substack{j \\ j\neq i}} a_{ij}$$

También se puede razonar de la siguiente forma:

$$U_e = \sum_{pares(i,j)} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i q_j}{\left|(\vec{r}_i - \vec{r}_j)\right|} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{\substack{j \\ j\neq i}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i q_j}{\left|(\vec{r}_i - \vec{r}_j)\right|} =$$

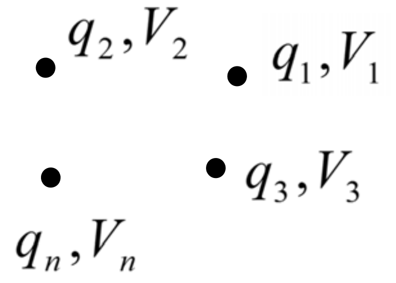
$$= \frac{1}{2} \sum_i q_i \left(\sum_{\substack{j \\ j\neq i}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_j}{\left|(\vec{r}_i - \vec{r}_j)\right|} \right) = \frac{1}{2} \sum_i q_i V(\vec{r}_i)$$

Donde ahora, a diferencia del caso anterior V es el potencial creado por todas las cargas en la posición de la carga i.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

Sistema de n cargas puntuales:



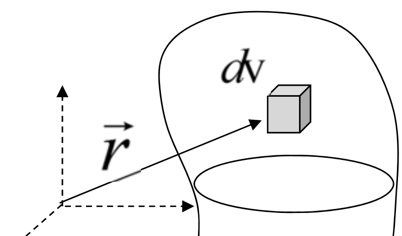
$$U_e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i V_i$$

Potencial creado por las n-1 cargas restantes en la posición de la carga i

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

Cargas distribuidas:



$$U_e = \frac{1}{2}\int_{\mathrm{v}} \rho(\vec{r})V(\vec{r})d\mathrm{v}$$

Potencial creado en $\vec{r}$ por todas las cargas

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

$$U_e = \frac{1}{2}\int_{\mathrm{v}} \rho(\vec{r})V(\vec{r})d\mathrm{v} = -\frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\mathrm{v}} V(\vec{r})\nabla^2 V d\mathrm{v}$$

$$\nabla\cdot(g\vec{A}) = g\nabla\cdot\vec{A} + \vec{A}\cdot\nabla g \rightarrow g = V$$

$$\vec{A} = \nabla V \rightarrow -g\nabla\cdot\vec{A} = -\nabla\cdot(g\vec{A}) + \vec{A}\cdot\nabla g$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

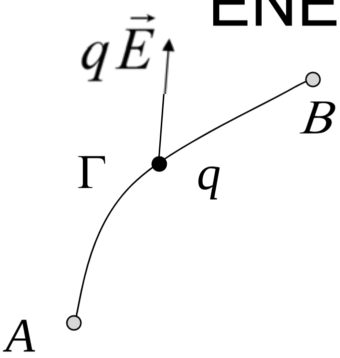
$$U_e = \underbrace{\frac{\varepsilon_0}{2}\oint_S V\ \vec{E}\cdot d\vec{S}}_{\rightarrow 0} + \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\mathrm{v}} E^2 d\mathrm{v} = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\mathrm{v}} E^2 d\mathrm{v}$$

Se comprueba que es cero si v cubre todo el espacio para una distribución finita de carga ya que $V\sim 1/r$, $E\sim 1/r^2$ y $dS\sim r^2$

NOTA: Esta expresión diverge aplicada al campo de una carga puntual, no pudiéndose por tanto aplicar en configuraciones discretas.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

ENERGÍA ELECTROSTÁTICA



Recordando la definición de trabajo:

$$W_{AB} = -q(V(B) - V(A))$$

$$W_{AB} = -\Delta U_e = -(U_e(\vec{r}_B) - U_e(\vec{r}_A)) = -(\sum_i^n q_i V_{qi} - \sum_i^n q_i V_{qi})$$

$$W_{AB} = -(qV(B) + \sum_i^{n-1} q_i V_{qi} - qV(A) + \sum_i^{n-1} q_i V_{qi}) = -(qV(B) - qV(A))$$

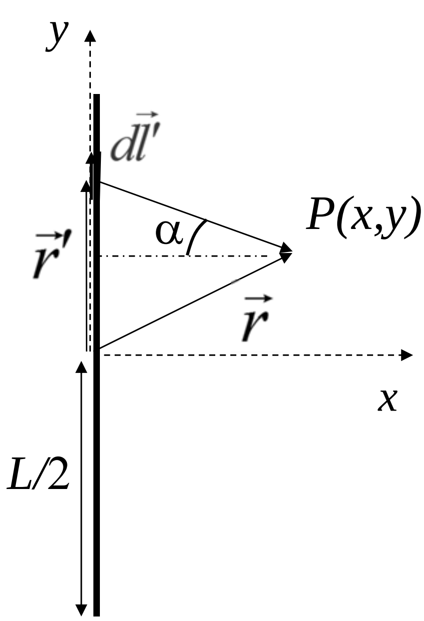
Traemos el resto de cargas.

No hemos traído la carga q: son idénticos

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CAMPO ELECTROSTÁTICO (INTEGRACIÓN)

Hilo de $\lambda=cte$ y longitud L en cualquier punto



$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda dl'(\vec{r} - \vec{r}')}{\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|^3}$$

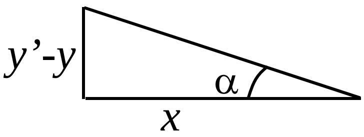
$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}; \quad \vec{r}' = y'\,\vec{j}; \quad dl' = dy'$$

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda dy'(x\vec{i} + (y - y')\,\vec{j})}{(x^2 + (y - y')^2)^{3/2}}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CAMPO ELECTROSTÁTICO (INTEGRACIÓN)

Hilo de λ=*cte* y longitud L en cualquier punto



$$\cos\alpha = \frac{x}{(x^2+(y-y')^2)^{1/2}} \qquad \operatorname{sen}\alpha = \frac{y'-y}{(x^2+(y-y')^2)^{1/2}}$$

$$tg\,\alpha = \frac{y'-y}{x} \longrightarrow \frac{d\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{dy'}{x}$$

$$dy' = x\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{x^2+(y-y')^2}{x}d\alpha$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CAMPO ELECTROSTÁTICO (INTEGRACIÓN)

Hilo de λ=*cte* y longitud L en cualquier punto

Sustituyendo:

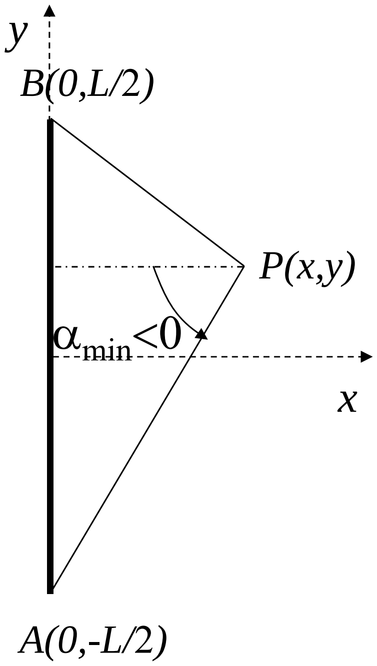
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}\int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}}\cos\alpha\, d\alpha\,\vec{i} - \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}\int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}}\sin\alpha\, d\alpha\,\vec{j}$$

Donde los límites de integración serán los ángulos correspondientes a los valores mínimo y máximo de y'.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CAMPO ELECTROSTÁTICO
(INTEGRACIÓN)

Hilo de $\lambda=cte$ y longitud L en cualquier punto



$$\alpha_{\min} = tg^{-1}\left(\frac{-\frac{L}{2}-y}{x}\right)$$

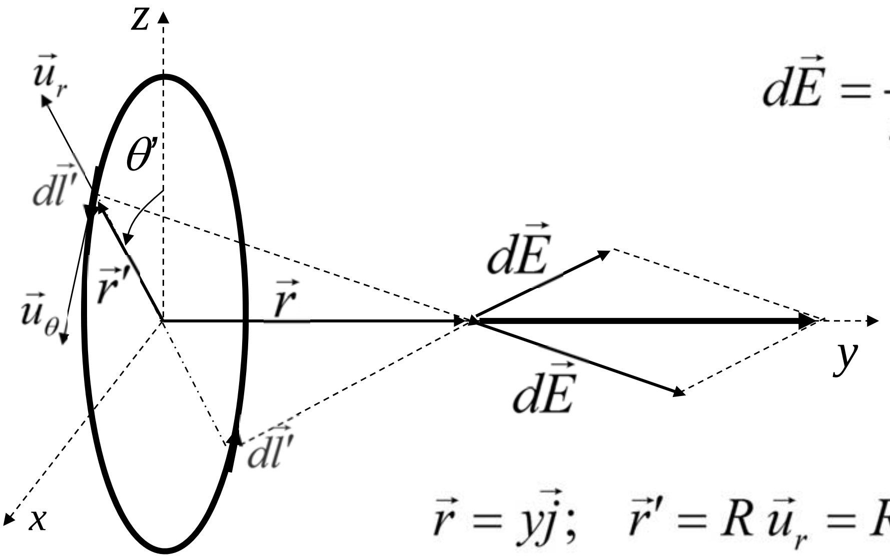
$$\alpha_{\max} = tg^{-1}\left(\frac{\frac{L}{2}-y}{x}\right)$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CAMPO ELECTROSTÁTICO
(INTEGRACIÓN)

Aro de $\lambda=cte$ y radio R en un punto de su eje

Elegimos el sistema de referencia de manera que el aro tenga su centro en el origen y esté contenido en el plano xz.



$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dl'(\vec{r}-\vec{r}')}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}$$

$$dl' = Rd\theta'$$

$$\vec{r} = y\vec{j}; \quad \vec{r}' = R\,\vec{u}_r = R(\cos\theta'\vec{k} + \sin\theta'\vec{i})$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CAMPO ELECTROSTÁTICO (INTEGRACIÓN)

Aro de λ=*cte* y radio R en un punto de su eje

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda d\theta'(y\vec{j} - R(\sin\theta'\vec{i} + \cos\theta'\vec{k}))}{\left(y^2 + R^2\right)^{3/2}}$$

Integrando para toda la longitud del aro y teniendo en cuenta que por simetría el campo resultante solo tiene componente según el eje Oy:

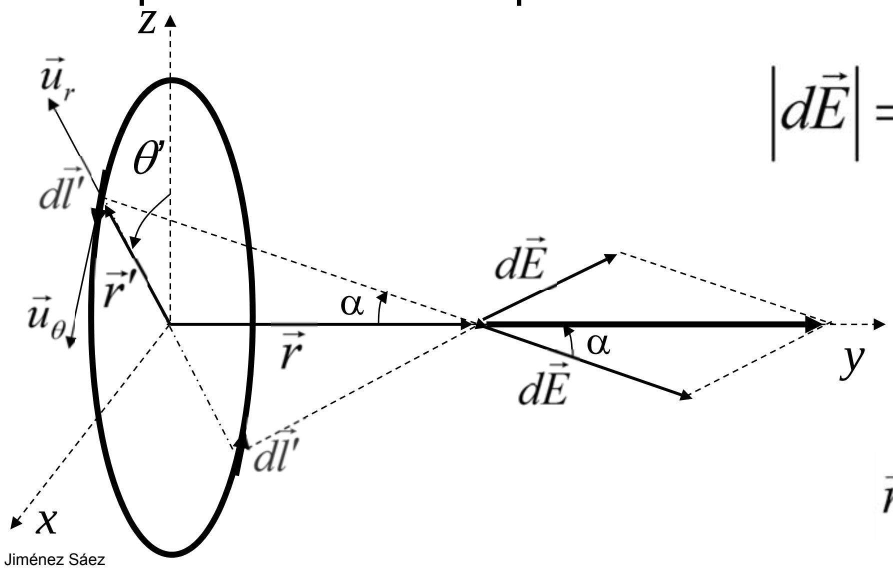
$$\vec{E}(y) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\frac{Rd\theta'\, y\,\vec{j}}{(y^2+R^2)^{3/2}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ry}{(y^2+R^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi} d\theta'\vec{j}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CAMPO ELECTROSTÁTICO (INTEGRACIÓN)

Aro de λ=*cte* y radio R en un punto de su eje

Otra forma de hacerlo es calculando el módulo del diferencial del campo y proyectando sobre el eje Oy. Nuevamente tenemos en cuenta la simetría para asegurar que la resultante del campo solo tiene componente sobre este eje.



$$\left|d\vec{E}\right| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dl'}{\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|^2}$$

$$dl' = Rd\theta'$$

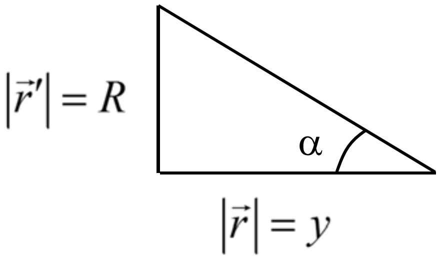
$$\vec{r} = y\vec{j}; \quad \vec{r}' = R\,\vec{u}_r$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CAMPO ELECTROSTÁTICO (INTEGRACIÓN)

Aro de $\lambda = cte$ y radio R en un punto de su eje

$$\vec{E} = \int \left| d\vec{E} \right| \cos\alpha \, \vec{j}$$



$$\cos\alpha = \frac{y}{(y^2 + R^2)^{1/2}}$$

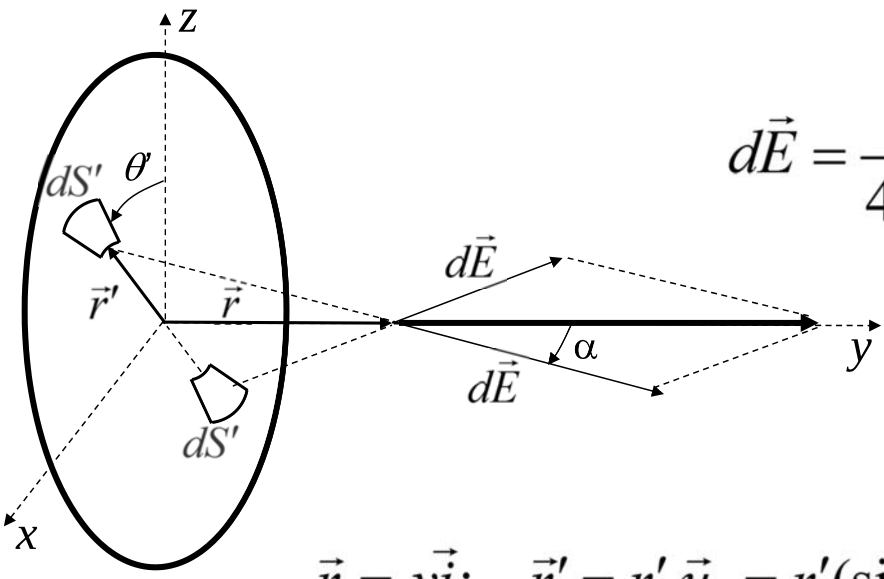
$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{R d\theta'}{(y^2 + R^2)} \cos\alpha \, \vec{j} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Ry}{(y^2 + R^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\theta' \, \vec{j}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CAMPO ELECTROSTÁTICO (INTEGRACIÓN)

Disco de $\sigma = cte$ y radio R en un punto de su eje

Elegimos el sistema de referencia de manera que el disco tenga su centro en el origen y esté contenido en el plano xz.



$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sigma dS'(\vec{r} - \vec{r}')}{\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|^3}$$

$$dS' = r' d\theta' dr'$$

$$\vec{r} = y\vec{j}; \quad \vec{r}' = r' \, \vec{u}_r = r'(\sin\theta' \vec{i} + \cos\theta' \vec{k})$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CAMPO ELECTROSTÁTICO (INTEGRACIÓN)

Disco de $\sigma = cte$ y radio R en un punto de su eje

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sigma r' d\theta' dr' (y\vec{j} - r'(\sin\theta' \vec{i} + \cos\theta' \vec{k}))}{\left(y^2 + r'^2\right)^{3/2}}$$

Integrando para toda la superficie del disco y teniendo en cuenta que por simetría el campo resultante solo tiene componente según el eje Oy:

$$\vec{E}(y) = \frac{\sigma y}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^R \frac{r' dr'}{(y^2 + r'^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\theta' \vec{j}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CAMPO ELECTROSTÁTICO (INTEGRACIÓN)

Disco de $\sigma = cte$ y radio R en un punto de su eje

La integral anterior se resuelve haciendo el cambio de variable:

$$tg\alpha = \frac{r'}{y} (\text{ó} \;\; también \quad y^2 + r'^2 = \xi)$$

Y queda:

$$\vec{E}(y) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \int_0^{\alpha_{\max}} \sin\alpha \, d\alpha \, \vec{j}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CAMPO ELECTROSTÁTICO (TEOREMA DE GAUSS)

En los problemas en los que se quiera utilizar el Teorema de Gauss, lo primero es estudiar qué simetría tiene el campo eléctrico: esférica, cilíndrica....

Se debe elegir como superficie de integración una superficie cerrada que tenga una simetría lo más parecida posible a la del campo eléctrico.

Así conseguimos que el campo tenga la misma dirección que el diferencial de superficie y el mismo módulo en todos los puntos de la superficie:

$$\vec{E} \cdot d\vec{S} = EdS \quad y \quad \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \oint_S dS$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CAMPO ELECTROSTÁTICO (TEOREMA DE GAUSS)

No siempre será posible elegir una superficie cerrada que cumpla esas dos condiciones.

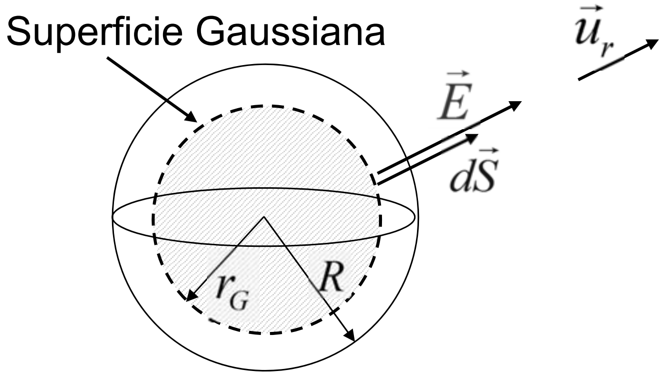
Sin embargo, si el campo eléctrico tiene la suficiente simetría, sí podremos elegir una superficie cerrada donde se cumplan las dos condiciones en algunos de sus puntos y que para el resto de puntos la contribución al flujo sea nula (campo perpendicular al diferencial de superficie).

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CAMPO ELECTROSTÁTICO (TEOREMA DE GAUSS)

Esfera de $\rho = cte$ y radio R en cualquier punto

Elegimos como superficie Gaussiana una esfera (todos los puntos de la superficie cumplen las dos condiciones mencionadas).



$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{dentro}}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E} = E\,\vec{u}_r; \quad d\vec{S} = dS\,\vec{u}_r$$

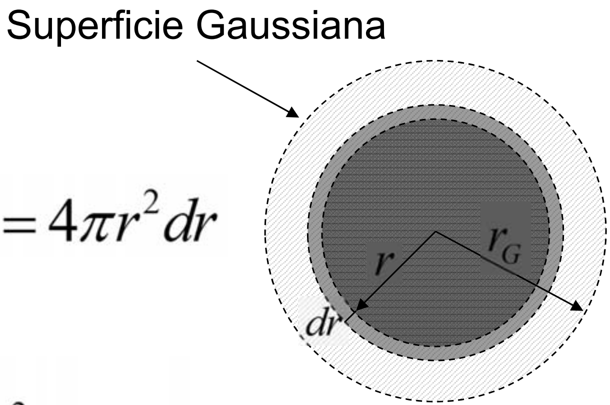
$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E\,\vec{u}_r \cdot dS\,\vec{u}_r = \oint_S E(r_G)\,dS = E(r_G)\,S = E(r_G) 4\pi r_G^{\,2}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CAMPO ELECTROSTÁTICO (TEOREMA DE GAUSS)

Esfera de $\rho = cte$ y radio R en cualquier punto

$$q_{dentro} = \int_0^{r_G} \rho d\mathrm{v}$$



$$d\mathrm{v} = 4\pi r^2 dr$$

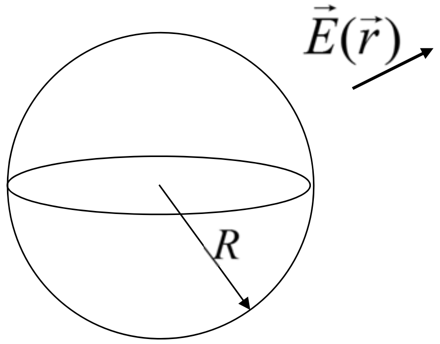
$$q_{dentro} = \int_0^{r_G} \rho 4\pi r^2 dr = \rho \frac{4}{3}\pi r_G^{\,3}; \quad r_G \le R$$

$$q_{dentro} = \int_0^{r_G} \rho 4\pi r^2 dr = \int_0^{R} \rho 4\pi r^2 dr = \rho \frac{4}{3}\pi R^3; \quad r_G > R$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CAMPO ELECTROSTÁTICO (TEOREMA DE GAUSS)

Esfera de $\rho = cte$ y radio R en cualquier punto



Llamando r = r_G, se tiene:

$$E(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}; \quad r \leq R$$

$$E(r) = \frac{\rho R^3}{3r^2\varepsilon_0}; \quad r > R$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\vec{u}_r$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CAMPO ELECTROSTÁTICO (TEOREMA DE GAUSS)

Cilindro infinito de $\rho = cte$ y radio R en cualquier punto

El campo tiene dirección radial y perpendicular al eje del cilindro:

• Su módulo vale lo mismo para todos los puntos que estén a la misma distancia del eje del cilindro.

• Al ser un cilindro de longitud infinita, no tiene componente paralela al eje del cilindro.

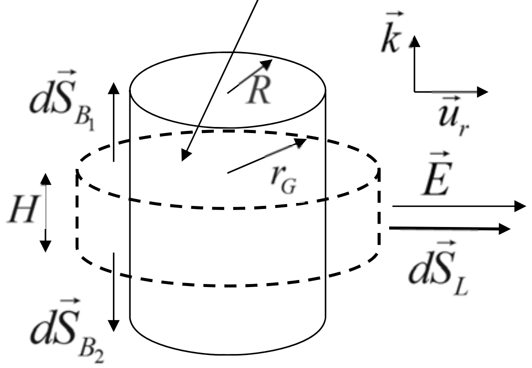
Así, elegiremos como superficie Gaussiana un cilindro de radio r_G y altura H.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CAMPO ELECTROSTÁTICO (TEOREMA DE GAUSS)

Cilindro infinito de $\rho = cte$ y radio R en cualquier punto

Superficie Gaussiana



$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{dentro}}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E} = E\,\vec{u}_r\,; \quad d\vec{S}_L = dS_L\,\vec{u}_r$$

$$d\vec{S}_{B_1} = -d\vec{S}_{B_2} = dS\,\vec{k};$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{S_L} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \oint_{S_{B_1}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \oint_{S_{B_2}} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CAMPO ELECTROSTÁTICO (TEOREMA DE GAUSS)

Cilindro infinito de $\rho = cte$ y radio R en cualquier punto

$$\oint_{S_L} \vec{E} \cdot d\vec{S}_L = \oint_{S_L} E\,\vec{u}_r \cdot dS_L\,\vec{u}_r = \oint_{S_L} E(r_G)\,dS_L = E(r_G)\,S_L$$

$$\oint_{S_{B_1}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{S_{B_2}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{S_{B_2}} E\,\vec{k} \cdot dS\,\vec{u}_r = 0$$

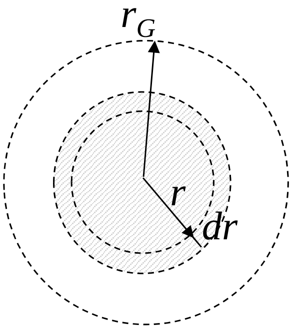
$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{S_L} E\,\vec{u}_r \cdot dS_L\,\vec{u}_r = \oint_{S_L} E(r_G)\,dS_L = E(r_G)\,S_L$$

$$S_L = 2\pi r_G H \qquad \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(r_G) 2\pi r_G H$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CAMPO ELECTROSTÁTICO (TEOREMA DE GAUSS)

Cilindro infinito de ρ=*cte* y radio R en cualquier punto



$$q_{dentro} = \int_0^{r_G} \rho d\mathrm{v}$$

$$d\mathrm{v} = 2\pi r h dr$$

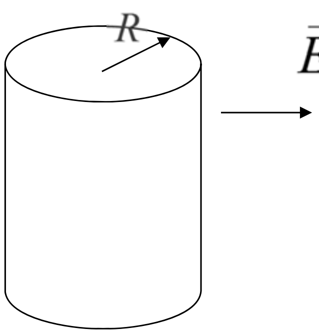
$$q_{dentro} = \int_0^{r_G} \rho 2\pi r h dr = \rho \pi {r_G}^2 h; \quad r_G \le R$$

$$q_{dentro} = \int_0^{r_G} \rho 2\pi r h dr = \int_0^{R} \rho 2\pi r h dr = \rho \pi R^2 h; \quad r_G > R$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CAMPO ELECTROSTÁTICO (TEOREMA DE GAUSS)

Cilindro infinito de ρ=*cte* y radio R en cualquier punto



$$\vec{E}(\vec{r})$$

Llamando r = r_G, se tiene:

$$E(r) = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}; \quad r \le R$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\vec{u}_r$$

$$E(r) = \frac{\rho R^2}{2r\varepsilon_0}; \quad r > R$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CAMPO ELECTROSTÁTICO (TEOREMA DE GAUSS)

Plano infinito de $\sigma = cte$ en cualquier punto

El campo tiene dirección perpendicular al plano.

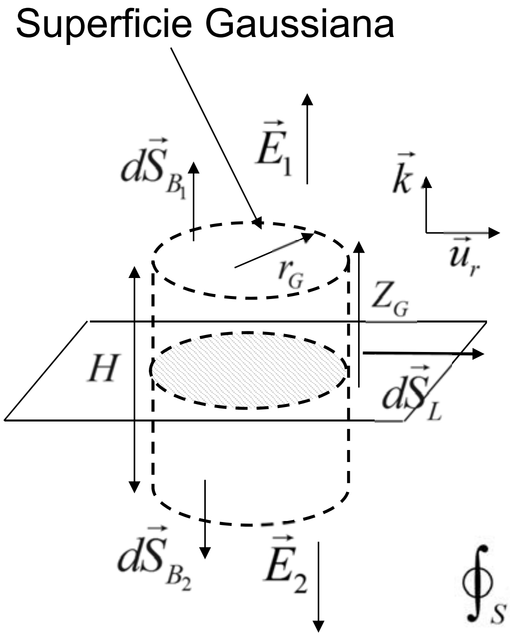
Elegiremos como superficie Gaussiana un cilindro de radio r_G y altura H = $Z_G/2$ para que solo exista flujo por las bases del cilindro.

El cilindro debe ser simétrico respecto al plano para que el campo en la cara superior e inferior sea idéntico.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CAMPO ELECTROSTÁTICO (TEOREMA DE GAUSS)

Plano infinito de $\sigma = cte$ en cualquier punto



$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{dentro}}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E}_1 = -\vec{E}_2 = E\,\vec{k}; \quad d\vec{S}_L = dS_L\,\vec{u}_r$$
$$d\vec{S}_{B_1} = -d\vec{S}_{B_2} = dS\,\vec{k};$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{S_L} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \oint_{S_{B_1}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \oint_{S_{B_2}} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CAMPO ELECTROSTÁTICO (TEOREMA DE GAUSS)

Plano infinito de $\sigma = cte$ en cualquier punto

$$\oint_{S_L} \vec{E}\cdot d\vec{S}_L = \oint_{S_L} E\,\vec{k}\cdot dS_L\,\vec{u}_r = 0$$

$$\oint_{S_{B_1}} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint_{S_{B_1}} E\,\vec{k}\cdot dS\,\vec{k} = E(Z_G)\,S_{B_1}$$

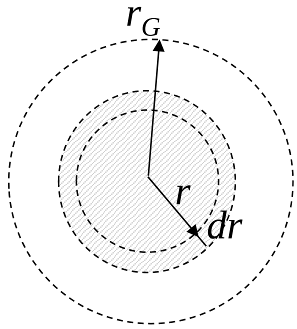
$$\oint_{S_{B_2}} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint_{S_{B_2}} -E\,\vec{k}\cdot dS\,(-\vec{k}) = E(Z_G)S_{B_2}$$

$$S_{B_1} = S_{B_2} = \pi r_G^2 \qquad \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = 2E(Z_G)\pi r_G^2$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CAMPO ELECTROSTÁTICO (TEOREMA DE GAUSS)

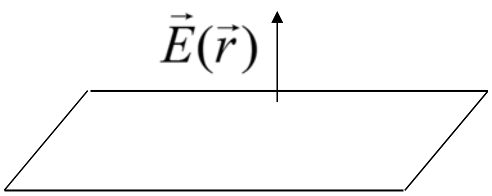
Plano infinito de $\sigma = cte$ en cualquier punto



$$q_{dentro} = \int_0^{r_G} \sigma ds$$

$$ds = 2\pi r dr \qquad q_{dentro} = \int_0^{r_G} \sigma 2\pi r dr = \sigma\pi r_G{}^2$$

Llamando $z = Z_G$, se tiene:



$$E(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}; \quad z > 0$$

Por simetría para z<0:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(z)\vec{k}$$

$$E(z) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}; \quad z < 0$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

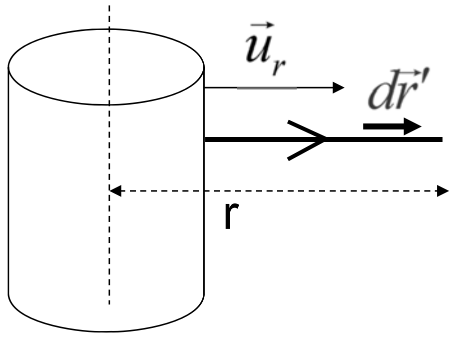
POTENCIAL ELECTROSTÁTICO

Cilindro infinito de ρ=*cte* y radio R en cualquier punto

Teniendo en cuenta que:

$$\vec{E}(\vec{r}\,') = E(r')\vec{u}_r$$

$$d\vec{r}\,' = dr'\,\vec{u}_r$$



Y tomando la referencia *V(R)=0*:

$$V(r) = \overbrace{V(R)}^{0} - \int_R^r E(r')\vec{u}_r \cdot dr'\,\vec{u}_r = -\int_R^r E(r')\,dr'$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

POTENCIAL ELECTROSTÁTICO

Cilindro infinito de ρ=*cte* y radio R en cualquier punto

$r \geq R$

$$V(r) = -\int_R^r \frac{\rho R^2}{2r'\varepsilon_0}\,dr' = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\ln\frac{r}{R}$$

$r < R$

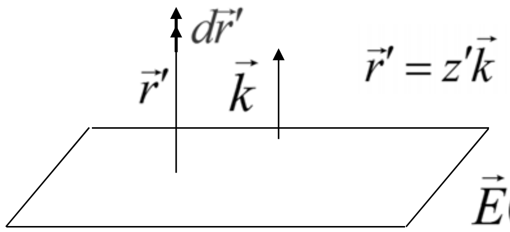
$$V(r) = -\int_R^r \frac{\rho r'}{2\varepsilon_0}dr' = \frac{\rho}{4\varepsilon_0}\left(R^2 - r^2\right)$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

POTENCIAL ELECTROSTÁTICO

Plano infinito de σ=*cte* en cualquier punto

Recordamos la expresión del campo eléctrico creado por un plano:



$$\vec{E}(\vec{r}') = E(z')\vec{k} \begin{cases} E(z') = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}; & z' > 0 \\ E(z') = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}; & z' < 0 \end{cases}$$

En general, el potencial es:

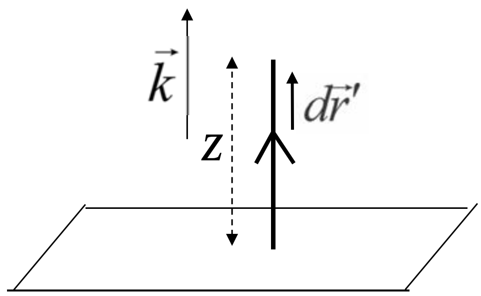
$$V(\vec{r}) = \overbrace{V(\vec{r}_0)}^{0} - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}(r') \cdot d\vec{r}'$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

POTENCIAL ELECTROSTÁTICO

Plano infinito de σ=*cte* en cualquier punto

Teniendo en cuenta que:



$$\vec{E}(\vec{r}') = E(z')\vec{k}$$

$$d\vec{r}' = dz'\,\vec{k}$$

Y tomando la referencia *V(0)=0*:

$$V(z) = \overbrace{V(0)}^{0} - \int_0^z E(z')\vec{k} \cdot dz'\,\vec{k} = -\int_0^z E(z')\,dz'$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

POTENCIAL ELECTROSTÁTICO

Plano infinito de $\sigma = cte$ en cualquier punto

$z \geq 0$

$$V(z) = -\int_0^z \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} dz' = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} z$$

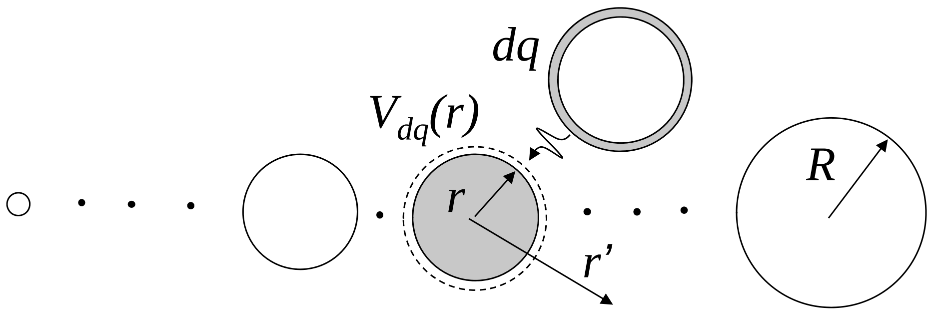
$z < 0$

$$V(z) = -\int_0^z \left(-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \right) dz' = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} z$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

POTENCIAL ELECTROSTÁTICO

Esfera de $\rho = cte$ y radio R



$$E\, 4\pi r'^2 = \frac{\rho (4/3) \pi r^3}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\rho r^3}{3\varepsilon_0 r'^2}; \quad r' \geq r$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

Esfera de ρ=*cte* y radio R

$$V_{dq}(r) = -\int_{\infty}^{r} \frac{\rho r^3}{3\varepsilon_0 r'^2} dr' = \left.\frac{\rho r^3}{3\varepsilon_0 r'}\right|_{\infty}^{r} = \frac{\rho r^2}{3\varepsilon_0}$$

$$U_e = \int dq V_{dq} = \int_0^R \rho 4\pi r^2 dr \frac{\rho r^2}{3\varepsilon_0} = \frac{4\pi\rho^2 R^5}{15\varepsilon_0}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval