



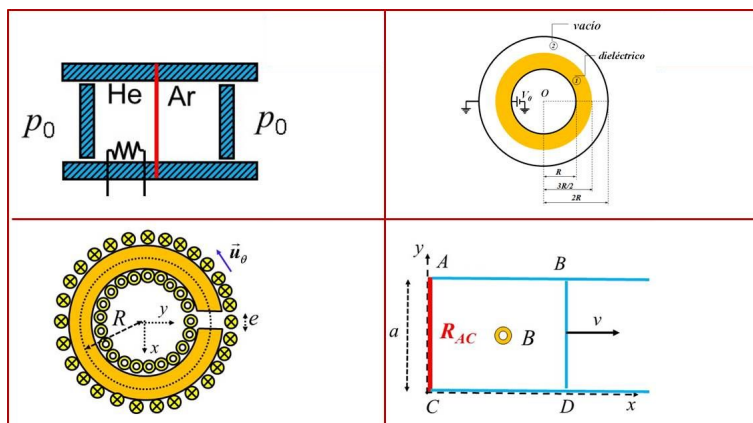
POLITÉCNICA

# ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO

## FÍSICA II

### TEORÍA

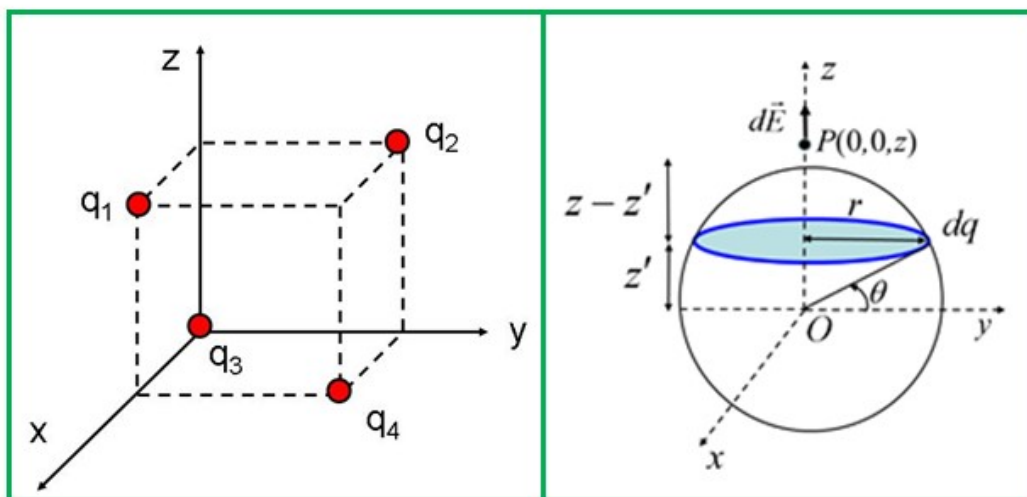
#### Termodinámica y Electromagnetismo





**POLITÉCNICA**

## ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO



### TEMA 3.- ELECTROSTÁTICA DEL VACÍO

*Cecilio SÁNCHEZ GUILLÉN (Texto)*

*José Carlos JIMÉNEZ SÁEZ (Ilustraciones)*

*Santiago RAMÍREZ DE LA PISCINA MILLÁN (Composición)*

## ÍNDICE OPERADORES DIFERENCIALES

---

<b>3. Electrostática del Vacío</b>	<b>1</b>
3.1. Introducción	1
3.2. Carga eléctrica	1
3.2.1. Cuantificación	1
3.2.2. Dualidad	2
3.2.3. Conservación	3
3.2.4. Invariancia relativista	3
3.2.5. Concepto de carga puntual	3
3.3. Clasificación de los materiales en cuanto a sus propiedades eléctricas	3
3.3.1. Materiales conductores	3
3.3.2. Materiales aislantes o dieléctricos	4
3.3.3. Materiales semiconductores	4
3.4. Ley de Coulomb	5
3.4.1. Ley de Coulomb para dos cargas puntuales	5
3.4.2. Principio de superposición	6
3.5. Campo electrostático	8
3.5.1. Campo electrostático creado por una carga puntual	8
3.5.2. Campo electrostático creado por un conjunto de cargas puntuales	9
3.5.3. Comportamiento del campo electrostático con la distancia	10
3.5.4. Campo electrostático creado por distribuciones continuas de carga	13
3.5.5. Cálculo del campo electrostático por integración	16
3.6. Teorema de Gauss	22
3.6.1. Enunciado del teorema de Gauss	22
3.6.2. Ángulo sólido	22
3.6.3. Teorema de Gauss para una carga puntual	24
3.6.4. Teorema de Gauss para un conjunto de cargas puntuales	25
3.6.5. Teorema de Gauss para una carga distribuida en un volumen	25
3.6.6. Forma diferencial del teorema de Gauss	26
3.6.7. Aplicaciones del teorema de Gauss	27
3.7. Potencial electrostático	33
3.7.1. Campos centrales radiales	33
3.7.2. Potencial electrostático para una carga puntual	34
3.7.3. Potencial electrostático para un conjunto de cargas puntuales	35
3.7.4. Potencial electrostático para una distribución continua de carga	36
3.7.5. Comportamiento del potencial electrostático con la distancia	37
3.7.6. Continuidad del potencial electrostático	38
3.7.7. Cálculo de potenciales electrostáticos	39
3.8. Energía electrostática	45
3.8.1. Trabajo en un campo electrostático	45

3.8.2.	Energía electrostática de un sistema formado por dos cargas puntuales .	46
3.8.3.	Energía electrostática de un sistema formado por $N$ cargas puntuales .	48
3.8.4.	Energía electrostática de un sistema de cargas distribuidas en un volumen	49
3.8.5.	Aplicaciones . . . . .	51
3.9.	Ecuaciones de Maxwell en electrostática . . . . .	53



# 3

## Electrostática del Vacío

---

### 3.1. Introducción

La teoría electromagnética clásica es la parte de la Física que se ocupa de estudiar los fenómenos asociados con las cargas eléctricas. Estos fenómenos dependen del estado de movimiento de las cargas, dando lugar a las magnitudes vectoriales que conocemos como campos eléctrico,  $\vec{E}$ , y de inducción magnética,  $\vec{B}$ .

Las leyes que permiten estudiar estos fenómenos se concretan en las cuatro ecuaciones de Maxwell, que han demostrado su validez en una amplia escala de dimensiones, desde distancias del orden del tamaño molecular hasta distancias intergalácticas. Algunos fenómenos a escala muy pequeña quedan fuera del ámbito de esta teoría y su explicación requiere recurrir a la teoría cuántica. Por otra parte, la teoría electromagnética es coherente con la teoría especial de la relatividad y contribuyó al desarrollo de ésta última.

Siguiendo el método habitual, comenzaremos estudiando la situación más sencilla, que consiste en considerar que las cargas se encuentran en reposo respecto de un sistema de referencia. A este supuesto se le conoce como “electrostática” y en él aparecen sólo campos eléctricos, pero no campos magnéticos. Estos últimos, presentes cuando las cargas están en movimiento, se estudiarán más adelante.

### 3.2. Carga eléctrica

La carga eléctrica es una propiedad de la materia, que se puede detectar y medir por los efectos que produce. Dos sistemas con carga eléctrica interactúan entre sí intercambiando fuerzas. A continuación se exponen las principales propiedades de la carga eléctrica.

#### 3.2.1. Cuantificación

Existe un valor mínimo de la carga eléctrica observable en estado libre, que se denomina “carga elemental”,  $e$ . Su valor es:

$$e = 1.60206 \cdot 10^{-19} C \quad (3.1)$$

donde el culombio (C) es la unidad de carga en el Sistema Internacional, en el que la carga es una magnitud derivada.

Está relacionada con la magnitud fundamental intensidad de corriente eléctrica, cuya unidad es el amperio (A), de forma que

$$1\text{C} = 1\text{s} \cdot \text{A} \quad (3.2)$$

lo que significa que el culombio es la cantidad de carga eléctrica que atraviesa, en un segundo, la sección de un cable conductor por el que circula una intensidad de un amperio.

Que la carga eléctrica está cuantificada quiere decir que cualquier cantidad de carga observable en la naturaleza corresponde a un número entero de cargas elementales. Así, la cantidad de cargas elementales necesarias para completar una carga total de un culombio será:

$$N_e(1\text{C}) = \frac{1\text{C}}{e} = \frac{1\text{C}}{1.60206 \cdot 10^{-19} \frac{\text{C}}{\text{carga elemental}}} \approx 6.7 \cdot 10^{18} \text{cargas elementales} \quad (3.3)$$

En los hadrones, como son las partículas constituyentes del núcleo atómico (protón y neutrón), se han detectado componentes internos, los “quarks” con valores fraccionarios de la carga elemental ( $2/3 e$  y  $1/3 e$ ). No obstante aún no ha sido posible observar quarks en estado libre. Así, la afirmación de que la carga elemental  $e$  es el valor mínimo de carga medible en estado libre sigue siendo válida.

### 3.2.2. Dualidad

A diferencia de la masa gravitatoria, de la que hay un único tipo, se observan en la naturaleza dos tipos diferentes de cargas eléctricas. Dos masas ejercen entre sí fuerzas gravitatorias de atracción, siempre. Sin embargo, dos cargas eléctricas ejercen entre sí fuerzas de repulsión, si son del mismo tipo, y fuerzas de atracción si son de tipo diferente. Para caracterizar el tipo de carga se utilizan los signos  $+$  y  $-$ . Así hablaremos de cargas positivas y de cargas negativas.

Por convenio se asigna al protón carga positiva y al electrón carga negativa, siendo su valor igual al de la carga elemental, de forma que:

$$q_{\text{protón}} = +e \quad q_{\text{electrón}} = -e$$

es decir, protón y electrón tienen el mismo valor de la carga, pero de distinto tipo. Esta asignación es convencional, esto es, se podría haber hecho al revés sin ningún cambio sustancial en la teoría electromagnética. Las partículas constituyentes de los átomos son el protón, el neutrón y el electrón. El neutrón no tiene carga eléctrica y las otras dos tienen las cargas ya indicadas.

Como en un átomo completo el número de protones del núcleo es igual al de electrones en la corteza, su carga total neta es nula. En consecuencia, los sistemas materiales tienden a compensar las cargas positivas con las negativas. Cuando en un objeto este equilibrio se rompe parcialmente decimos que está cargado eléctricamente. Así, si en un sistema material macroscópico hay un total de  $N_p$  protones y  $N_e$  electrones, su carga total será:  $q = (N_p - N_e) e$ . Si  $N_p = N_e$  el objeto está descargado, es decir su carga total es nula, pero si  $N_p \neq N_e$  estará cargado eléctricamente con carga positiva o negativa, según el caso. Esto último implica que se ha roto parcialmente, por algún procedimiento, la tendencia al equilibrio entre cargas positivas y negativas.

### 3.2.3. Conservación

En todo sistema cerrado la carga eléctrica total es constante independientemente de los procesos que tengan lugar en su interior (por sistema cerrado se entiende aquel que no intercambia materia con el exterior, y por carga total, la suma de todas las cargas presentes en el sistema, con su signo). La conservación de la carga eléctrica es un hecho observado a todas las escalas, desde subatómicas hasta escalas macroscópicas.

### 3.2.4. Invariancia relativista

El valor de una carga eléctrica es independiente de su estado de movimiento relativo a un observador. No ocurre lo mismo con la masa. Supongamos que un observador respecto al que una carga dada está en reposo mide un valor de su masa igual a  $m_0$  (“masa en reposo”) y un valor de su carga igual a  $q_0$ . Otro observador respecto al que la misma carga se está moviendo con velocidad  $v$  mediría los valores:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad q = q_0 \quad (3.4)$$

siendo  $c$  la velocidad de la luz en el vacío. Es decir, la masa cambia con la velocidad pero la carga no.

### 3.2.5. Concepto de carga puntual

Por carga puntual se entiende un sistema que almacena una carga neta  $q$  pero cuyas dimensiones se asimilan a un punto. Es un concepto análogo al de partícula material puntual. El concepto de carga puntual es una idealización, dado que todas las cargas eléctricas ocupan un cierto volumen en el espacio, pero es útil en ocasiones para simplificar con buena aproximación algunas situaciones que se plantean en teoría electromagnética.

Dado un sistema de carga neta  $q$  y que ocupa un volumen  $v$ , observado desde distancias del mismo rango que las dimensiones del volumen no se puede considerar como una carga puntual. Sin embargo, a distancias suficientemente grandes respecto de sus dimensiones sí es posible tratarla como si fuera una carga puntual, con tanta mejor aproximación cuanto mayor sea la distancia

## 3.3. Clasificación de los materiales en cuanto a sus propiedades eléctricas

### 3.3.1. Materiales conductores

Materiales conductores son aquellos en los que hay cargas libres que pueden moverse con relativa facilidad por el material. Cuando se aplica en ellos un campo eléctrico, aunque sea



pequeño, las cargas libres positivas se mueven en el sentido del campo y las negativas en el opuesto, colaborando todas en un proceso de conducción que se traduce en corrientes eléctricas por el material. A estas cargas se les suele llamar cargas libres de conducción. Los conductores oponen una cierta resistencia a las corrientes y el valor de esta depende del tipo de material conductor. Cuando se elimina el campo aplicado las cargas móviles buscan sus posiciones de equilibrio en el material, en un proceso transitorio que sucede muy rápidamente.

Los materiales conductores más comunes son los conductores metálicos (metales puros o aleaciones). Están constituidos por átomos fijos, salvo movimiento térmico en torno a sus posiciones de equilibrio, y por una “nube electrónica” constituida por electrones libres que pueden moverse a lo largo del material bajo la acción de campos eléctricos externos. Cada átomo proporciona un factor comprendido entre uno y dos electrones, dependiendo del tipo de conductor, a la nube electrónica.

Otros tipos de materiales conductores son las disoluciones electrolíticas (en las que hay cargas libres positivas y negativas) o el plasma. También el vacío se comporta como un medio conductor. En lo sucesivo, cuando hablemos de materiales conductores nos referiremos implícitamente a los conductores metálicos convencionales si no se especifica ningún otro supuesto.

### 3.3.2. Materiales aislantes o dieléctricos

En los dieléctricos todas las cargas están ligadas a sus posiciones y no reaccionan apreciablemente a la acción de campos eléctricos de pequeña intensidad. Si se aplican campos suficientemente intensos el material dieléctrico reacciona de forma que se producen pequeños desplazamientos locales entre cargas positivas y negativas, pero no se generan corrientes eléctricas. Los materiales aislantes suelen ser sustancias inorgánicas no metálicas o sustancias orgánicas.

### 3.3.3. Materiales semiconductores

Los materiales semiconductores tienen un comportamiento intermedio entre los conductores y los dieléctricos. En un semiconductor al aplicar un campo eléctrico el movimiento de cargas es local (a pequeñas distancias) y tienen resistencias eléctricas muy grandes. Materiales semiconductores típicos son el germanio (Ge) y el silicio (Si).

#### Ejercicio 1.

Una esfera metálica maciza, de radio  $R=1\text{cm}$ , dispone de 1.5 electrones libres de conducción por cada átomo metálico.

Si está descargada y el diámetro de cada átomo es  $d = 1.2 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ , hállese:

a) el número de átomos en la esfera.

$$N_{at} = \frac{V_{esfera}}{V_{átomo}} = \frac{(4/3)\pi R^3}{(4/3)\pi (d/2)^3} = (2R/d)^3 = \left(2 \frac{10^{-2}\text{m}}{1.2 \cdot 10^{-10}\text{m}}\right)^3 = 4.6 \cdot 10^{24} \text{ átomos} \quad (3.5)$$



b) la carga total que acumulan los electrones libres de conducción.

$$q_L = -N_{el.cond} \cdot e = -1.5N_{at} \cdot e = -1.1 \cdot 10^6 \text{ C} \quad (3.6)$$

Si se carga la esfera positivamente, extrayendo de ella electrones libres hasta que su carga total sea  $q=1\text{mC}$ :

c) hállese el número de electrones extraídos.

$$N_{el} = \frac{q}{e} = \frac{10^{-3}\text{C}}{1.6 \cdot 10^{-19}\text{C/el}} = 6.2 \cdot 10^{15} \text{ electrones} \quad (3.7)$$

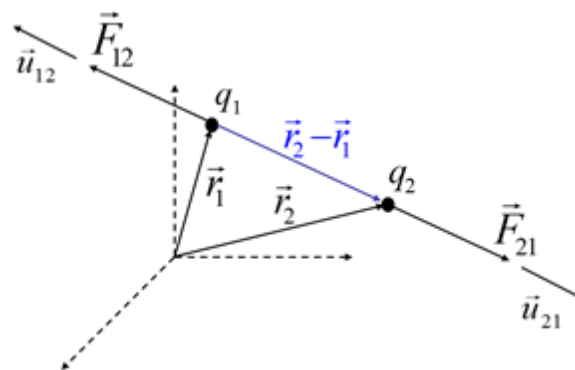
d) hállese la relación entre el número de electrones extraídos y el número total de electrones libres de conducción.

$$\frac{N_{el}}{N_{el.cond}} = \frac{q}{q_L} = \frac{10^{-3}\text{C}}{1.1 \cdot 10^6\text{C}} = 9.1 \cdot 10^{-10} \frac{\text{electrones extraídos}}{\text{electrones libres totales}} \quad (3.8)$$

lo que equivale a que se ha extraído un electrón por cada  $1.1 \cdot 10^9$  electrones libres de conducción.

## 3.4. Ley de Coulomb

### 3.4.1. Ley de Coulomb para dos cargas puntuales



**Figura 3.1:** Fuerza electrostática entre cargas puntuales.

La ley de Coulomb es una ley empírica que establece cómo son las fuerzas de interacción electrostática que actúan entre dos cargas en reposo. Dadas dos cargas puntuales  $q_1$  y  $q_2$ , cuyos vectores de posición respecto a un sistema de referencia en el que están en reposo son respectivamente  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$ , la expresión de la fuerza de interacción que actúa sobre cada una de ellas es:

$$\vec{F}_{21} = k \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2} \vec{u}_{21} = -\vec{F}_{12} \quad (3.9)$$

donde  $\vec{F}_{21}$  representa la fuerza sobre la carga  $q_2$  y  $\vec{F}_{12}$  la que actúa sobre  $q_1$ ,  $|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$  es la distancia entre las dos cargas,  $\vec{u}_{21}$  es el vector unitario cuya dirección es la recta que contiene las dos cargas y cuyo sentido apunta desde  $q_1$  hacia  $q_2$  y  $k$  es una constante que debe determinarse experimentalmente y cuyo valor depende del medio en el que estén situadas las cargas.

Como se indica en la Fig. 3.1 las dos fuerzas cumplen la ley fuerte de acción y reacción (esto no es así para las fuerzas de interacción entre cargas en movimiento como se verá en capítulos posteriores).

En la ley de Coulomb las cargas tienen signo implícito de forma que si son del mismo tipo, ambas positivas o ambas negativas, entonces  $q_1 q_2 > 0$  y las fuerzas son repulsivas, pero si son de distinto signo, entonces  $q_1 q_2 < 0$  y las fuerzas son atractivas. Si el espacio en que se encuentran las cargas es el vacío entonces el valor numérico de la constante, que llamaremos  $k_0$ , depende de las unidades que empleemos para aplicar la ley de Coulomb. Utilizando el Sistema Internacional de unidades su valor es:  $k_0 = 8.988 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2\text{C}^{-2}$ , que significa que si suponemos dos cargas de 1C separadas entre sí por una distancia de un metro, en el vacío, la fuerza que actuaría sobre cada una de ellas sería del orden de  $9 \cdot 10^9 \text{ N}$ . Este valor es enorme si lo comparamos con el de la constante  $G$  que aparece en la ley de gravitación universal.

En lo sucesivo expresaremos la constante  $k_0$  en la forma:  $k_0 = 1/(4\pi\epsilon_0)$ , donde  $\epsilon_0$  es la permitividad eléctrica del vacío, cuyo valor es  $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2\text{N}^{-1}\text{m}^{-2}$ . La razón de escribirla de esta forma es porque así las ecuaciones de Maxwell adoptan una expresión más sencilla y más fácil de interpretar. Todo medio material eléctricamente homogéneo e isotrópico tiene una permitividad eléctrica característica,  $\epsilon$ , cuyo valor es siempre mayor que la del vacío. Así, si las cargas estuvieran en un medio de permitividad eléctrica  $\epsilon = 2 \epsilon_0$ , entonces el valor de la fuerza que actúa entre ellas sería la mitad que en el vacío. En este capítulo sólo se desarrollará la electrostática en el vacío, dejando el caso de medios materiales para más adelante. Por ello, la expresión definitiva de la ley de Coulomb que utilizaremos a partir de ahora es:

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = -\vec{F}_{12} \quad (3.10)$$

donde se ha tenido en cuenta que  $\vec{u}_{21}$  es el vector unitario asociado al vector  $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ .

El módulo de la fuerza es de la forma:

$$|\vec{F}_{21}| = |\vec{F}_{12}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1 q_2|}{r_{12}^2} \quad (3.11)$$

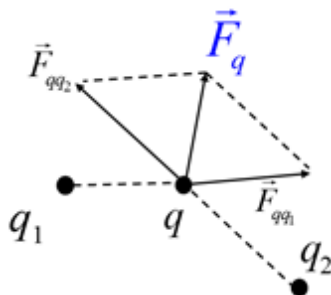
esto es, directamente proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia,  $r_{12}$ , entre ellas. En este sentido hay analogías entre la ley de gravitación y la ley de Coulomb, pero difieren en la intensidad relativa de la fuerza como se ha mencionado antes.

### 3.4.2. Principio de superposición

La fuerza que ejercen un conjunto de cargas sobre otra es la suma vectorial de las fuerzas que cada una de aquellas ejerce por separado sobre ésta.

En la Fig. 3.2 se muestra la fuerza resultante  $\vec{F}_q$  que actúa sobre  $q$  debida a su interacción electrostática con  $q_1$  y  $q_2$ . En el supuesto de  $N$  cargas, la expresión para la fuerza sobre  $q$  es

$$\vec{F}_q = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{qq_i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i q}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i) \quad (3.12)$$



**Figura 3.2:** Principio de superposición de fuerzas.

### Ejercicio 2.

Dos esferas metálicas de 1cm de radio, del mismo material de densidad  $\rho=5 \text{ g/cm}^3$ , están cargadas con cargas  $q_1=2 \text{ mC}$  y  $q_2=-1 \text{ mC}$  y separadas entre sí una distancia de 10 m.

- Hállese la fuerza electrostática que actúa sobre cada una.

$$\vec{F}_{12}^E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \vec{u}_{12} = -180 \vec{u}_{12} \text{ (N)} = -\vec{F}_{21}^E \quad (3.13)$$

- Hállese la fuerza de atracción gravitatoria entre ambas.

$$M_1 = M_2 = \rho V = 5(\text{g/cm}) \cdot (4/3)\pi(1\text{cm})^3 = 20.94 \text{ g} \quad (3.14)$$

$$\vec{F}_{12}^G = -G \frac{M_1 M_2}{r_{12}^2} \vec{u}_{12} = -2.93 \cdot 10^{-16} \vec{u}_{12} \text{ (N)} = -\vec{F}_{21}^G \quad (3.15)$$

- Hállese el cociente entre los módulos de la fuerza electrostática y gravitatoria.

$$\left| \vec{F}_{12}^E \right| / \left| \vec{F}_{12}^G \right| = 6.15 \cdot 10^{17} \quad (3.16)$$

Es mucho más intensa la fuerza electrostática.

- Hállese a qué distancia de  $q_1$ , medida sobre la recta que une ambas cargas, podríamos colocar una tercera carga  $q$  para que estuviera en equilibrio.

Para que  $q$  esté en equilibrio la fuerza que ejercen sobre ella  $q_1$  y  $q_2$  ha de ser nula. Usando unos ejes en los que  $q_1$  esté en el origen y  $q_2$  en el punto (10m,0,0), la distancia  $x$  a la que ha de situarse la carga  $q$  sólo puede ser mayor que 10m en este caso. La fuerza total sobre la carga  $q$  es

$$\vec{F}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{x^2} + \frac{q_2}{(x - r_{12})^2} \right) \vec{i} = 0 \quad (3.17)$$

donde  $r_{12}=10$  m. Sustituyendo valores y simplificando, resulta

$$x^2 - 40x + 200 = 0 \quad (3.18)$$

cuya única solución admisible es

$$x = 20 + 10\sqrt{2} \text{ m} \quad (3.19)$$

### 3.5. Campo electrostático

El estudio del efecto que produce un sistema de cargas eléctricas sobre otra carga resulta complicado mediante el análisis de fuerzas por aplicación del principio de superposición para cada posible supuesto. Es más útil utilizar el concepto de campo electrostático creado por ese sistema de cargas en cada punto del espacio.

Antiguamente se pensaba que la acción del campo sobre la carga era instantánea, es decir, que si el sistema de cargas modificaba sus posiciones, la carga sufría inmediatamente los efectos de ese cambio. Sin embargo, se ha demostrado que hay un tiempo de retardo entre causa y efecto de modo que el sistema de cargas produce una perturbación en el espacio que las rodea y tal perturbación se propaga a la velocidad de la luz en el vacío o en el medio material en que se encuentren (velocidad tan alta que justifica la antigua creencia de las acciones instantáneas). Así se puede considerar que cuando en un espacio, inicialmente vacío, colocamos una carga eléctrica, aparece “algo” en ese espacio, que representa una magnitud física medible y que denominamos campo eléctrico. El campo eléctrico se manifiesta mediante fuerzas cuando actúa sobre otras cargas situadas en el espacio.

#### 3.5.1. Campo electrostático creado por una carga puntual

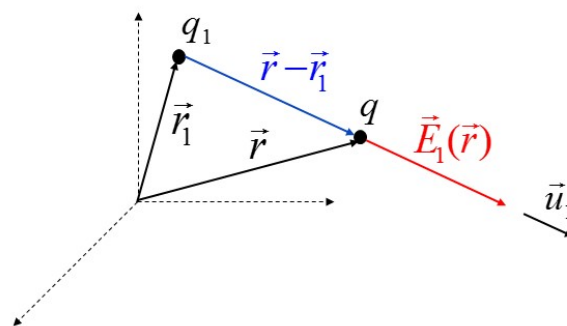


Figura 3.3: Campo electrostático creado por una carga puntual.

Para definir el campo electrostático que crea una carga puntual  $q_1$ , cuyo vector de posición respecto de un sistema de referencia es  $\vec{r}_1$ , en un punto genérico del espacio definido por el vector de posición  $\vec{r}$ , suponemos que colocamos otra carga puntual  $q$  en este punto (Fig. 3.3). Se define entonces el campo como

$$\vec{E}_1(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_{qq_1}}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} (\vec{r} - \vec{r}_1) \quad (3.20)$$

que representa la fuerza que actuaría sobre  $q$  por unidad de carga. Las unidades de campo electrostático son N/C o, equivalentemente, V/m (ésta se justificará más adelante). Otra forma de expresar el campo, en función del vector unitario asociado al vector  $\vec{r} - \vec{r}_1$ , que denotamos por  $\vec{u}_1$ , es

$$\vec{E}_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^2} \vec{u}_1 \quad (3.21)$$

donde  $|\vec{r} - \vec{r}_1|$  representa la distancia entre la carga que crea el campo,  $q_1$ , y el punto en el que está expresado el campo. La intensidad del campo varía con el inverso del cuadrado de la distancia a la carga y tiene un alcance teórico infinito. Cuando la distancia a la carga tiende a cero el campo tiende a infinito. Esta singularidad es debida al modelo de carga puntual. Como cualquier carga real ocupa un cierto volumen en el espacio, aunque sea pequeño, el límite a cero de la distancia al punto donde está situada la carga no es aplicable.

En la expresión del campo el valor de la carga que lo crea puede ser positivo o negativo. Así, cargas positivas crean campos cuyo sentido apunta hacia afuera de la carga y cargas negativas crean campos cuyo sentido apunta hacia la carga. La fuerza que actúa sobre una carga  $q$  situada en un punto por interacción de la carga con el campo es:

$$\vec{F}_{qE} = q\vec{E}(\vec{r}) \quad (3.22)$$

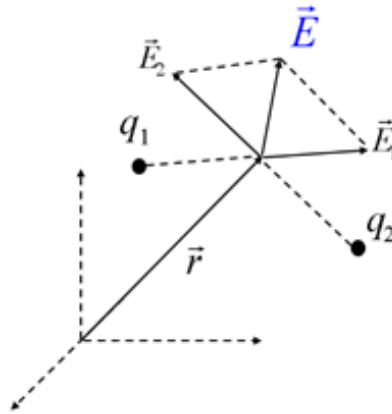
### 3.5.2. Campo electrostático creado por un conjunto de cargas puntuales

Para calcular el campo debido a un conjunto de cargas puntuales se aplica el principio de superposición. El campo total en cada punto es la suma vectorial de los campos que crean cada una de las cargas en ese punto.

Dadas  $N$  cargas  $q_i$  cuyos vectores de posición respectivos son  $\vec{r}_i$ , el campo que crean en un punto definido por el vector de posición  $\vec{r}$  (Fig. 3.4) es

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i) \quad (3.23)$$

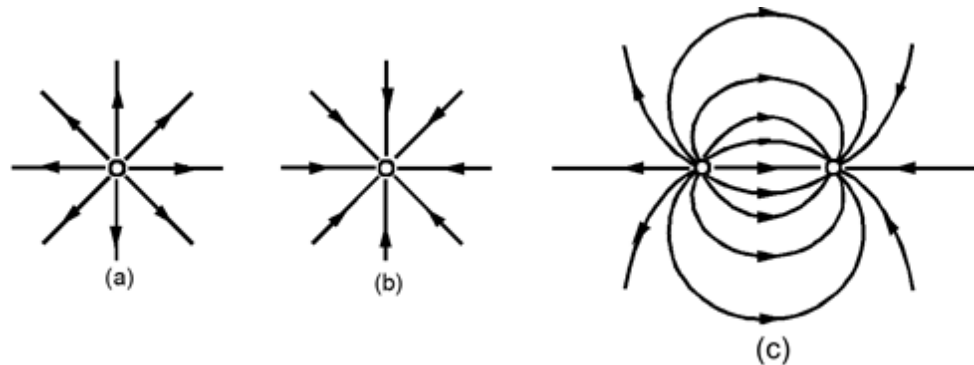
que expresa el campo electrostático en todos los puntos del espacio. La fuerza que aparece sobre una carga  $q$  por la acción de este campo tiene la misma expresión que en el caso del campo creado por una única carga puntual.



**Figura 3.4:** Principio de superposición del campo electrostático.

La representación gráfica del campo electrostático mediante líneas de campo para un conjunto de cargas depende de sus valores y sus posiciones.

En la Fig. 3.5 se muestran las líneas de campo para una carga puntual positiva (monopolo eléctrico positivo), para una carga puntual negativa (monopolo eléctrico negativo) y para dos cargas del mismo valor pero de signo contrario separadas entre sí (dipolo eléctrico). Se observa que las líneas nacen o mueren en las cargas positivas y negativas y que el campo tiene un alcance infinito.



**Figura 3.5:** Líneas de campo de una carga puntual positiva (izquierda), negativa (centro) y dipolo (derecha).

### 3.5.3. Comportamiento del campo electrostático con la distancia

Un sistema de cargas puntuales con posiciones definidas en torno al origen de un sistema de referencia ocupa una cierta región del espacio. Para distancias del orden de las dimensiones de esa región el campo electrostático se calcula según hemos visto, y a distancias tendiendo a infinito el campo tiende a cero. Para distancias intermedias, pero grandes respecto de las dimensiones del sistema de cargas, el conjunto se ve como una carga puntual, de valor

$$Q = \sum_{i=1}^N q_i \quad (3.24)$$



y en consecuencia la expresión del campo será como la del que crearía una carga puntual  $Q$  situada en el centro de carga del sistema a esa distancia, con tanta mejor aproximación cuanto mayor sea tal distancia. El centro de carga está definido por

$$\vec{r}_Q = \frac{1}{Q} \sum_{i=1}^N q_i \vec{r}_i \quad (3.25)$$

donde el valor de las cargas ha de incluir su signo.

Si  $Q \neq 0$ , positiva o negativa, el centro de carga está definido y la expresión del campo a grandes distancias se aproxima a

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\vec{r} - \vec{r}_Q|^3} (\vec{r} - \vec{r}_Q) \quad (3.26)$$

Si  $Q = 0$  el centro de cargas no está definido. No obstante la separación entre las cargas que constituyen el sistema hace que, en general, el campo no sea nulo, aunque su valor sea comparativamente pequeño al del caso de carga total no nula para sistemas de carga del mismo rango. Es el caso del dipolo eléctrico, por ejemplo.

### Ejercicio 3.

Dadas dos cargas puntuales,  $q_1=2q$  situada en el punto  $(0,0,0)$  y  $q_2=q$  situada en el punto  $(l,0,0)$ .

1. La expresión del campo que crean en el punto  $(x,y,0)$  es

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, y, 0) &= \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \left( \frac{2x}{(x^2 + y^2)^3} + \frac{x-l}{[(x-l)^2 + y^2]^3} \right) \vec{i} + \left( \frac{2y}{(x^2 + y^2)^3} + \frac{y}{[(x-l)^2 + y^2]^3} \right) \vec{j} \right] \end{aligned} \quad (3.27)$$

2. El campo en los puntos  $A(x,0,0)$  para  $x>l$ , es

$$\vec{E}(x, 0, 0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{2}{x^2} + \frac{1}{(x-l)^2} \right] \vec{i} \quad (3.28)$$

3. La posición del centro de carga del sistema es

$$\vec{r}_Q = \frac{l}{3} \vec{i} \quad (3.29)$$

4. Para distancias  $x \gg l$  el campo tiende a

$$\vec{E} \simeq \frac{3q}{4\pi\epsilon_0 x^2} \vec{i} \quad \text{si } |x-l|^2 \simeq x^2 \quad (3.30)$$

que si se calcula en función del campo creado por la carga  $3q$  situada en el centro de carga es

$$\vec{E} \simeq \frac{3q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x - l/3}{(x - l/3)^3} \vec{i} \simeq \frac{3q}{4\pi\epsilon_0 x^2} \vec{i} \quad (3.31)$$

bajo la misma aproximación.

#### Ejercicio 4.

Un dipolo eléctrico está formado por una carga puntual  $-q$  situada en el punto  $(l/2, 0, 0)$  de un sistema de referencia y por otra,  $+q$ , situada en el punto  $(-l/2, 0, 0)$ .

1.- El valor del campo que crea el dipolo en un punto  $P(x, 0, 0)$ , para  $x \gg l/2$ , es

$$\vec{E}(x, 0, 0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{(x - l/2)^2} - \frac{1}{(x + l/2)^2} \right) \vec{i} \quad (3.32)$$

2.- Para grandes distancias,  $x \gg l$ , tiende a

$$\vec{E}_D \simeq \frac{ql}{2\pi\epsilon_0 x^3} \vec{i} \quad (3.33)$$

3.- Comparado con el campo que crearía un monopolo eléctrico,  $q$ , situado en el origen de coordenadas, el cociente entre ambos para grandes distancias es

$$\frac{|\vec{E}_D|}{|\vec{E}_M|} \simeq \frac{ql/(2\pi\epsilon_0 x^3)}{q/4\pi\epsilon_0 x^2} = \frac{2l}{x} \quad (3.34)$$

de forma que si  $x = 10^3 l$  por ejemplo, entonces el cociente entre los dos campos es del orden de  $2 \cdot 10^{-3}$ . La resolución del ejercicio para puntos del eje  $Oy$  se hace de forma similar, aunque el resultado es diferente.

#### Ejercicio 5.

La Fig. 3.6 muestra un cuadrupolo eléctrico, formado por cuatro cargas de valores  $+q$  y  $-q$  situadas en los vértices de un cuadrado de lado  $l$  centrado respecto a un sistema de referencia, según se indica. Constituye un sistema de carga total nula, como el dipolo.

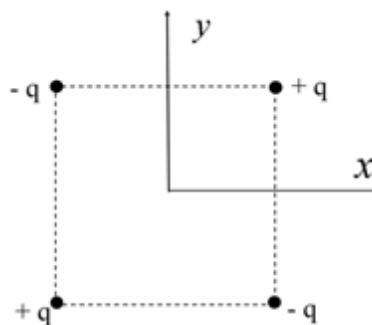


Figura 3.6: Cuadrupolo eléctrico.

1. Hállese el campo electrostático que crea el cuadrupolo para distancias grandes ( $x \gg l$ ), en el punto  $(x, 0, 0)$ .

$$\vec{E}_C(x, 0, 0) \simeq -\frac{3ql^2}{4\pi\epsilon_0 x^4} \vec{j} \quad (3.35)$$

2. Hállese el cociente entre el módulo del campo del cuadrupolo y el del campo del dipolo obtenido en el ejercicio anterior, para el mismo punto  $(x, 0, 0)$  con  $x \gg l$ .

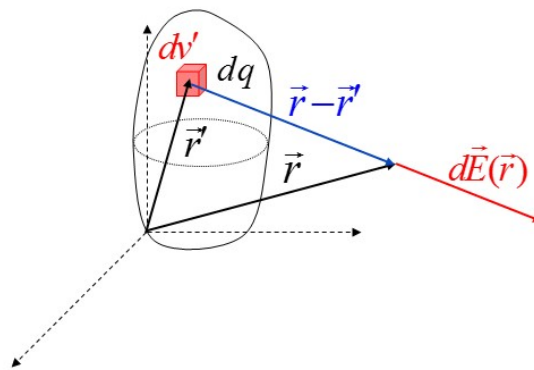
$$\left| \vec{E}_C \right| / \left| \vec{E}_D \right| \simeq \frac{3l}{2x} \quad (3.36)$$

de forma que si  $x = 10^3 l$ , por ejemplo, el cociente anterior es del orden de  $1.5 \cdot 10^{-3}$ .

### 3.5.4. Campo electrostático creado por distribuciones continuas de carga

En este apartado se planteará el caso del campo electrostático creado por sistemas cargados eléctricamente que no pueden tratarse como cargas puntuales. Consideremos el caso de un sistema material que ocupa un volumen  $v'$  y que está cargado con una carga total  $q$ .

Que el cuerpo está cargado quiere decir que en torno a algunos de sus puntos se ha roto el equilibrio natural entre cargas positivas y negativas. Así, si consideramos un pequeño volumen  $\Delta v'$  en torno a un punto del material cuya posición está definida por el vector de posición  $\vec{r}'$ , la carga total  $\Delta q$  contenida en  $\Delta v'$  puede ser distinta de cero, positiva o negativa (Fig. 3.7).



**Figura 3.7:** Campo de una distribución continua volumétrica.

Se define la densidad de carga eléctrica en ese punto como

$$\rho(\vec{r}') = \lim_{\Delta v' \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta v'} = \frac{dq}{dv'} \quad (3.37)$$

La densidad de carga representa en cada punto del sistema la concentración de carga por unidad de volumen en torno a ese punto. Es un campo escalar que puede tomar valores positivos, negativos o nulos en cada punto del cuerpo cargado. Su unidad en el Sistema Internacional es el  $C/m^3$ . En la definición anterior hay que tener en cuenta que la carga neta  $\Delta q$  se obtiene como la suma total de cargas elementales positivas y negativas contenidas en el volumen  $\Delta v'$  y que estas cargas corresponden a las de electrones o iones atómicos o moleculares. Así en el proceso

del paso al límite a cero de  $\Delta v'$  consideraremos que el número total de cargas elementales contenidas en él es siempre suficientemente grande como para poder considerar que la carga está distribuida de forma continua. Esto permite utilizar las técnicas del cálculo infinitesimal para obtener el campo electrostático que crea todo el cuerpo cargado en el espacio por el principio de superposición, aunque con la precaución de que las dimensiones de  $\Delta v'$  no deben aproximarse demasiado a las dimensiones moleculares en el límite que define la densidad de carga.

La expresión de la carga  $dq$  en función de  $\rho$  es

$$dq = \rho(\vec{r}') dv' \quad (3.38)$$

y la carga total del sistema

$$q = \int_{v'} \rho(\vec{r}') dv' \quad (3.39)$$

En consecuencia, podemos tratar la carga  $dq$  como si fuera puntual y el campo que crea esta carga en un punto cuyo vector de posición es  $\vec{r}$  es el correspondiente al de un carga puntual, esto es

$$d\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}') dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (3.40)$$

El campo que crea todo el cuerpo cargado se obtiene por superposición, pero como aquí se trata de una distribución continua de carga en un volumen la expresión de sumatorio que vimos para cargas puntuales se convierte en una integración a todo el volumen del cuerpo cargado, es decir

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{v'} \frac{(\vec{r} - \vec{r}') dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{v'} \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}') dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (3.41)$$

Para poder calcular el campo son necesarios como datos la geometría del volumen  $v'$ , que define el recinto de integración, y el valor del campo  $\rho$  en cada punto del sistema cargado. En el caso de que la distribución de carga sea uniforme (carga igualmente distribuida en todos los puntos del volumen)  $\rho$  es constante y su valor igual a  $\rho = q/v'$  y el campo electrostático se puede expresar como

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{v'} \frac{(\vec{r} - \vec{r}') dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 v'} \int_{v'} \frac{(\vec{r} - \vec{r}') dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (3.42)$$

En este caso para calcular el campo es necesario el valor de  $\rho$  y la geometría del volumen  $v'$ .

En ocasiones resulta útil considerar distribuciones de carga asociadas a superficies en lugar de a volúmenes. En la Fig. 3.8 se representa el vector de posición de un punto de la superficie  $S'$ , siendo  $\Delta S'$  un trozo pequeño de la superficie en torno a ese punto. Si la carga contenida en  $\Delta S'$  es  $\Delta q$ , se define la densidad superficial de carga eléctrica en ese punto como

$$\sigma(\vec{r}') = \lim_{\Delta S' \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S'} = \frac{dq}{dS'} \tag{3.43}$$

Según esta definición,  $\sigma$  representa la concentración de carga por unidad de superficie en torno a cada punto de la misma. Su unidad en el sistema Internacional es C/m<sup>2</sup>. Es un campo escalar definido en todos los puntos de la superficie cargada. Siguiendo un tratamiento similar al del apartado anterior, la expresión del campo electrostático en este caso adopta la forma

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{(\vec{r} - \vec{r}') dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{\sigma(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}') dS'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \tag{3.44}$$

que nos permite calcular el campo electrostático si se conoce la geometría de la superficie y la forma de la función  $\sigma$ . En el caso de distribuciones superficiales homogéneas de carga  $\sigma$  es constante.

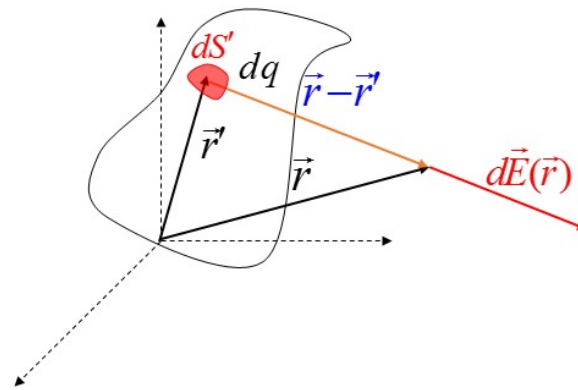


Figura 3.8: Campo de una distribución superficial.

Con un tratamiento similar podemos considerar una distribución de carga eléctrica asociada a una línea de longitud  $L'$ . Se define en este caso la densidad longitudinal de carga eléctrica como (Fig. 3.9)

$$\lambda(\vec{r}') = \lim_{\Delta l' \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l'} = \frac{dq}{dl'} \tag{3.45}$$

que representa la concentración de carga por unidad de longitud en cada punto. Su unidad en el Sistema Internacional es el C/m. En este caso la expresión del campo electrostático creado por toda la distribución de carga adopta la forma

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{L'} \frac{(\vec{r} - \vec{r}') dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{L'} \frac{\lambda(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}') dl'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \tag{3.46}$$

con las mismas consideraciones que en los casos anteriores.

A distancias muy grandes respecto de las dimensiones de una distribución de carga eléctrica el campo que crea tiende al de una carga puntual, de valor igual a la carga total de la distribución

$$q = \int_{V'} \rho(\vec{r}') dv' \tag{3.47}$$

situada en su centro de carga, centro que en este caso se define como

$$\vec{r}_q = \frac{1}{q} \int_{V'} \rho(\vec{r}') \vec{r}' dv' \tag{3.48}$$

La expresión del campo electrostático en este supuesto es

$$\vec{E}(\vec{r}) \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_q}{|\vec{r} - \vec{r}_q|^3} \quad \text{si } |\vec{r} - \vec{r}_q|^2 \simeq r^2 \tag{3.49}$$

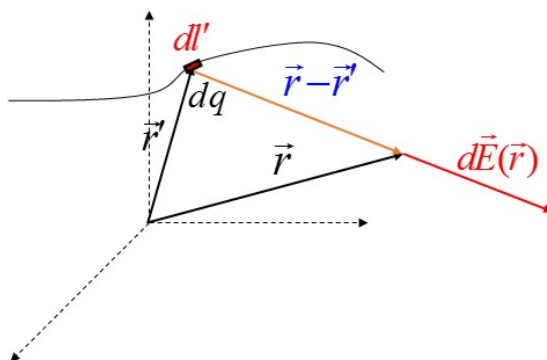


Figura 3.9: Campo de una distribución longitudinal.

Para distribuciones de carga no homogéneas pero cuya carga total sea nula no es aplicable lo anterior. No obstante, en este caso el campo electrostático a grandes distancias será en general no nulo, de forma similar a lo que sucede con el dipolo y con el cuadrupolo eléctrico.

### 3.5.5. Cálculo del campo electrostático por integración

Para ilustrar el apartado anterior plantearemos algunos supuestos típicos de cálculos de campos electrostáticos.

**Ejercicio 6.**

Campo electrostático creado por un hilo rectilíneo uniformemente cargado.

En la Fig. 3.10 se representa un hilo rectilíneo  $AB$  de sección despreciable y longitud  $L$ , cargado uniformemente con una densidad de carga por unidad de longitud  $\lambda$ . Para calcular el campo electrostático que crea en el punto  $P(x,y,0)$  utilizaremos la expresión del campo correspondiente a este supuesto (ec. [3.46]).

Llamando  $Oy$  al eje que contiene al hilo, en este caso:

$$\lambda = cte; \quad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}; \quad \vec{r}' = y'\vec{j}; \quad dl' = dy'$$

de donde  $\vec{r} - \vec{r}' = x\vec{i} + (y - y')\vec{j}$ ;  $|\vec{r} - \vec{r}'| = (x^2 + (y - y')^2)^{1/2}$ .

Sustituyendo en la expresión del campo se obtiene:



$$\vec{E}(x, y, 0) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left( x \int_A^B \frac{dy'}{[x^2 + (y - y')^2]^{3/2}} \vec{i} + \int_A^B \frac{(y - y') dy'}{[x^2 + (y - y')^2]^{3/2}} \vec{j} \right) \quad (3.50)$$

donde  $x$  e  $y$  son constantes a efectos de integración. Las dos integrales se pueden resolver con el cambio de variable:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y' - y}{x} \rightarrow \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{dy'}{x} \quad (3.51)$$

con lo que

$$\cos \alpha = \frac{x}{(x^2 + (y - y')^2)^{3/2}}; \quad \sin \alpha = \frac{y' - y}{(x^2 + (y - y')^2)^{3/2}} \quad (3.52)$$

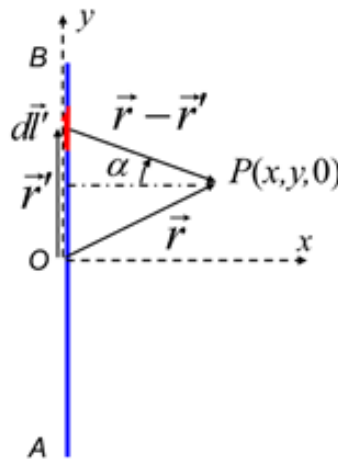


Figura 3.10: Campo de un hilo finito.

Efectuando el cambio se obtiene:

$$\vec{E}(x, y, 0) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 x} \int_{\alpha_A}^{\alpha_B} \cos \alpha d\alpha \vec{i} - \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 x} \int_{\alpha_A}^{\alpha_B} \sin \alpha d\alpha \vec{j} \quad (3.53)$$

$$\vec{E}(x, y, 0) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 x} \left[ (\operatorname{sen} \alpha_B - \operatorname{sen} \alpha_A) \vec{i} + (\cos \alpha_B - \cos \alpha_A) \vec{j} \right] \quad (3.54)$$

Como la variable  $\alpha$  puede ser positiva o negativa,  $\operatorname{sen} \alpha_A$  y  $\operatorname{sen} \alpha_B$  pueden ser también positivos o negativos, según la posición del punto  $P$  respecto al hilo cargado, pero  $\cos \alpha_A$  y  $\cos \alpha_B$  son siempre positivos porque  $\alpha$  sólo toma valores entre  $-\pi/2$  rad y  $\pi/2$  rad. Para expresar el resultado en función de la carga total del hilo hay que sustituir  $\lambda$  de  $q = \lambda L$ .

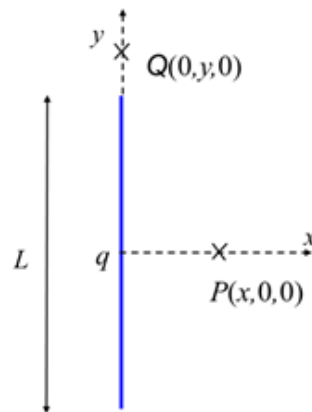
La aplicación de este resultado al caso de un hilo muy largo, que trataremos como si fuera infinito, conduce a lo siguiente: si  $\alpha_A \rightarrow -\pi/2$  rad y  $\alpha_B \rightarrow \pi/2$  rad

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x} \vec{i} \quad (3.55)$$

donde  $x$  representa la distancia del punto donde está expresado el campo al hilo infinito. La dirección del campo es perpendicular al hilo y su sentido alejándose del hilo si  $\lambda$  es positivo y acercándose al hilo si  $\lambda$  es negativo. Este resultado, aunque no es realista, se utiliza en ocasiones para aproximar el campo creado por un hilo cargado muy largo o para puntos próximos a la zona central del hilo.

### Ejercicio 7.

Hállese el campo electrostático que crea el hilo de la Fig. 3.11, cargado con una carga total  $q$  distribuida uniformemente a lo largo del hilo, en puntos del eje  $Ox$ , en puntos del eje  $Oy$  y en puntos del eje  $Oz$ .



**Figura 3.11:** Campo de un hilo.

El campo en un punto del eje  $x$  se calcula aplicando el resultado del ejercicio anterior para el caso

$$\sin \alpha_B = \frac{L}{\sqrt{L^2 + 4x^2}} = -\sin \alpha_A \quad (3.56)$$

que conduce a la solución

$$\vec{E}(x, 0, 0) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 x \sqrt{L^2 + 4x^2}} \vec{i} \quad (x \neq 0) \quad (3.57)$$

Por analogía, el campo en puntos del eje  $z$  es

$$\vec{E}(0, 0, z) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 z \sqrt{L^2 + 4z^2}} \vec{k} \quad (3.58)$$

Sin embargo este método no es aplicable para el cálculo del campo en puntos del eje  $y$ , porque el hilo está contenido en este eje. Para calcularlo se debe tener en cuenta que

$$\vec{r} = y \vec{j}; \quad \vec{r}' = y' \vec{j}; \quad d\vec{l}' = dy' \vec{j}; \quad |\vec{r} - \vec{r}'| = y - y'$$

y se plantea la integral de la expresión general del campo para este supuesto. La integración es inmediata y conduce a

$$\vec{E}(0, y, 0) = \pm \frac{q}{\pi\epsilon_0(4y^2 - L^2)} \vec{j} \quad (|y| > L/2) \tag{3.59}$$

Es inmediato observar en esta solución que el campo a grandes distancias tiende al de una carga puntual  $q$  situada en el origen de coordenadas.

**Ejercicio 8.**

Obtener la expresión del campo electrostático creado por la espira cuadrada de la Fig. 3.12, de lado  $L$  y que almacena una carga total  $q$  uniformemente distribuida, en los puntos del eje  $Oz$ .

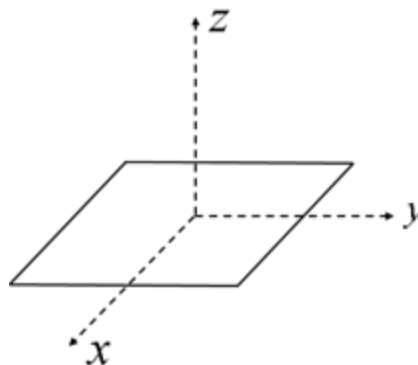


Figura 3.12: Espira cuadrada.

Por la simetría del problema, en los puntos del eje  $z$  el campo no puede tener ninguna componente perpendicular a dicho eje. Así, planteando el campo como superposición del que crean los cuatro lados y teniendo en cuenta lo anterior, se llega a:

$$\vec{E}(0, 0, z) = \frac{2qz}{\pi\epsilon_0(L^2 + 4z^2)\sqrt{L^2 + 2z^2}} \vec{k} \tag{3.60}$$

**Ejercicio 9.**

Campo creado por una espira circular en puntos de su eje (Fig. 3.13).

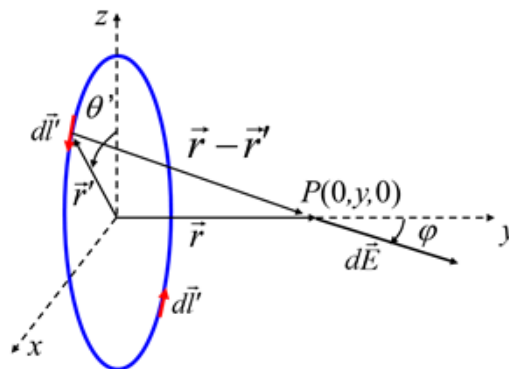


Figura 3.13: Campo de una espira en puntos de su eje.

Como en el caso anterior, el campo ha de tener la dirección del eje de la espira. Además, todos los puntos de la espira equidistan del punto  $(0, y, 0)$ . Teniendo en cuenta esto, llamando  $dq$  a la carga infinitesimal contenida en el arco  $dl'$  de la espira y proyectando el campo que crea esta carga sobre el eje  $y$ , resulta:

$$\vec{E}(0, y, 0) = \int_{\text{espira}} \cos \varphi dE \vec{j} \quad (3.61)$$

donde  $\varphi$  es el ángulo entre el vector campo  $d\vec{E}$  que crea  $dq$  y el eje  $y$ . En consecuencia:

$$\vec{E}(0, y, 0) = \int_{\text{espira}} \frac{\cos \varphi \lambda dl'}{4\pi\epsilon_0(R^2 + y^2)^{3/2}} \vec{j} \quad \cos \varphi = \frac{y}{\sqrt{R^2 + y^2}} \quad (3.62)$$

Todos los términos del integrando son constantes y la integral de  $dl'$  a toda la espira es  $2\pi R$ . Así:

$$\vec{E}(0, y, 0) = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0} \frac{y}{(R^2 + y^2)^{3/2}} \vec{j} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{(R^2 + y^2)^{3/2}} \vec{j} \quad (3.63)$$

### Ejercicio 10.

Campo creado por un disco circular en puntos de su eje (Fig. 3.14).

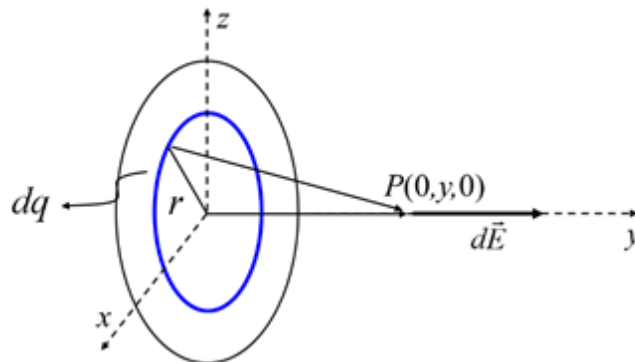


Figura 3.14: Campo de un disco en puntos de su eje.

Considérese ahora un disco circular cargado con una carga total  $q$  uniformemente distribuida en toda su superficie. El disco está contenido en el plano  $y=0$ . La densidad superficial de carga en los puntos del disco es

$$\sigma = \frac{q}{\pi R^2} \quad (3.64)$$

Si se considera una corona circular infinitesimal concéntrica con el disco de radio interior  $r < R$  y exterior  $r + dr$ , la carga contenida en ella, en aproximación a infinitésimos de primer orden, es  $dq = 2\pi r \sigma dr$ . Para esta corona se puede utilizar el resultado del campo creado por una espira circular visto en el ejercicio anterior:

$$d\vec{E}(0, y, 0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{y dq}{(r^2 + y^2)^{3/2}} \vec{j} \quad (3.65)$$

El campo creado por todo el disco se obtiene sustituyendo  $dq$  e integrando la expresión anterior en la variable  $r$ , entre los límites 0 y  $R$ . Resulta:

$$\vec{E}(0, y, 0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{y}{\sqrt{R^2 + y^2}}\right) \vec{j} = \frac{q}{2\pi R^2 \epsilon_0} \left(1 - \frac{y}{\sqrt{R^2 + y^2}}\right) \vec{j} \quad (3.66)$$

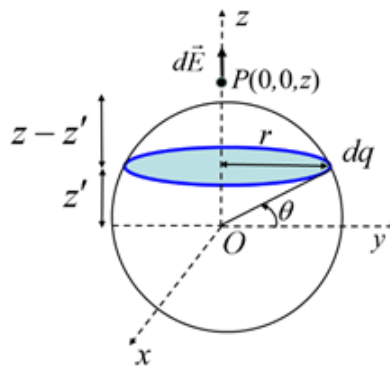
Si aplicamos este resultado al supuesto de  $R$  muy grande, se obtiene

$$R \rightarrow \infty \Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_\perp \quad (3.67)$$

que corresponde al campo creado por un plano infinito cargado con densidad de carga  $\sigma$  constante. Es un campo uniforme perpendicular al plano, alejándose del mismo si  $\sigma$  es positiva y acercándose si es negativa. Aunque es un supuesto teórico se utiliza en ocasiones para aproximar el campo creado por planos finitos cargados uniformemente.

**Ejercicio 11.**

Campo creado en puntos exteriores de una esfera cargada uniformemente (Fig. 3.15).



**Figura 3.15:** Esfera cargada uniformemente.

En los ejercicios anteriores se han visto casos de distribuciones de carga longitudinales y superficiales. Un ejemplo de distribución volumétrica de carga es el de una esfera de radio  $R$  y centro  $O$  cargada uniformemente en todo su volumen con una densidad de carga  $q$ . La densidad de carga en este caso es:

$$\rho = \frac{3q}{4\pi R^3} \quad (3.68)$$

El campo que crea esta carga en puntos exteriores a la esfera ( $r > R$ ) se puede calcular por integración utilizando el resultado del ejercicio anterior. Para ello se divide la esfera en un conjunto de discos perpendiculares a un diámetro de la esfera, de radio  $r$  variable y de espesor infinitesimal  $dz'$ . La carga contenida en uno de estos discos se puede expresar como  $dq = \pi r^2 \rho dr$ . Sustituyendo este valor  $dq$  por  $q$  en el resultado del ejercicio anterior, cambiando la  $y$  por  $z-z'$ , teniendo en cuenta la relación de  $z'$  y  $r$  e integrando a toda la esfera, se obtiene:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \quad (3.69)$$

que está expresado en función del vector unitario radial de coordenadas esféricas, desde  $O$ , dada la simetría esférica del problema. Para este caso el proceso de integración resulta más trabajoso que si se utiliza el teorema de Gauss, como veremos en la siguiente sección.

## 3.6. Teorema de Gauss

### 3.6.1. Enunciado del teorema de Gauss

Consideremos un conjunto cualquiera de cargas eléctricas en reposo, que crean un campo electrostático en todo punto del espacio. Sea  $S$  una superficie cerrada cualquiera. El teorema de Gauss, para el vacío, establece que el flujo del campo electrostático a través de cualquier superficie cerrada es igual a la carga neta contenida en el interior de la superficie dividida por la permitividad eléctrica del vacío, es decir

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad (3.70)$$

El campo lo crean todas las cargas, pero el flujo depende sólo de la carga contenida en el interior de la superficie. En los siguientes apartados justificaremos el teorema y veremos algunas de sus aplicaciones.

### 3.6.2. Ángulo sólido

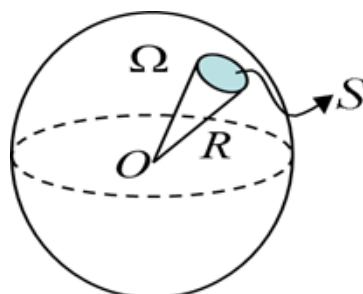


Figura 3.16: Ángulo sólido.

Para demostrar el teorema es conveniente tener unas nociones claras sobre el concepto de ángulo sólido. El ángulo sólido es una generalización del concepto de ángulo plano para el espacio tridimensional. Para definir el ángulo plano se consideran dos semirrectas que parten de un mismo punto  $O$  y se imagina una circunferencia de centro en  $O$  y radio  $R$  arbitrario, coplanaria con las dos semirrectas. Entonces, si la longitud del arco de circunferencia entre los dos puntos en los que las semirrectas cortan a la circunferencia es igual a  $s$ , el valor del ángulo plano correspondiente es  $\theta = s/R$ . La unidad natural de ángulo plano es el radián (rad). Así, un ángulo de un radián es aquel en que la longitud de arco de circunferencia que abarca es  $s=R$ .

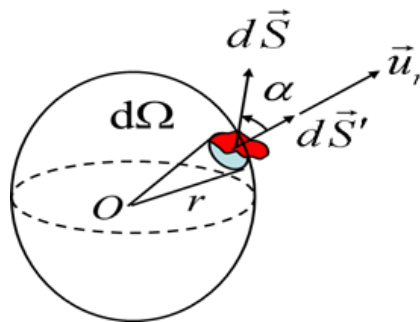


De forma análoga, para definir el ángulo sólido se considera una superficie esférica de centro  $O$  y radio  $R$  arbitrario y una parte de esta superficie esférica de valor  $S$  ( $S \leq 4\pi R^2$ ) (Fig. 3.16). El ángulo sólido correspondiente a esta superficie, desde  $O$ , es:

$$\Omega = \frac{S}{R^2} \quad (3.71)$$

La unidad natural de ángulo sólido es el estereorradián (sr). Así, un ángulo de un estereorradián es aquel en que la superficie de la esfera que abarca es  $S=R^2$ . Un mismo ángulo sólido abarca superficies  $S$  mayores cuando crece el radio de la superficie esférica. De la misma forma en que el ángulo plano total (plano completo) corresponde a  $2\pi$  rad, el ángulo sólido total (todo el espacio tridimensional) corresponde a  $4\pi$  sr. El ángulo sólido abarcado por los tres semiejes positivos de un sistema triortogonal es igual a  $\pi/2$  sr.

La definición de ángulo sólido desde un punto  $O$  está asociada a considerar superficies esféricas con centro en  $O$ . Cuando la superficie que contiene a  $O$  no es esférica, sino cualquiera, ya no es posible definir el ángulo sólido para valores finitos (del ángulo y de la superficie interceptada) pero sí es posible para ángulos sólidos y superficies correspondientes infinitesimales.



**Figura 3.17:** Diferencial de ángulo sólido.

Dado un punto  $O$  interior a una superficie cerrada cualquiera, considérese un valor infinitesimal  $dS$  en torno a un punto de la superficie que está a una distancia  $r$  de  $O$  (Fig. 3.17). Como la superficie no es esférica, el área  $dS$  y el unitario asociado a la distancia  $r$  no son perpendiculares en general. Si se considera una superficie esférica de centro  $O$  y radio  $r$ , el mismo ángulo sólido  $d\Omega$  que abarca la superficie  $dS$  interceptaría sobre la superficie esférica indicada una superficie  $dS'$  diferente a  $dS$ . Los vectores área asociados correspondientes forman entre sí un ángulo  $\alpha$ . La relación entre ambos es  $dS' = \cos \alpha dS$ . Como  $dS'$  sí pertenece a una superficie esférica de centro  $O$  y radio  $r$ , a ella se le puede aplicar la definición de ángulo sólido, de forma que:

$$d\Omega = \frac{dS'}{r^2} = \frac{\cos \alpha dS}{r^2} = \frac{\vec{r} \cdot d\vec{S}}{r^3} \quad (3.72)$$

En la expresión anterior el vector  $\vec{r}$  tiene origen en  $O$  y extremo en  $dS$ , de forma que al dividirlo por su módulo se obtiene el vector unitario radial desde  $O$ , lo que justifica el último paso.

### 3.6.3. Teorema de Gauss para una carga puntual

Comenzaremos considerando el campo creado por una única carga puntual. Si imaginamos una superficie  $S$  cerrada tal que la carga está en un punto  $O$  interior a ella, el campo que crea la carga en un punto de la superficie cuyo vector de posición desde  $O$  es  $\vec{r}$ , será (Fig. 3.18):

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r} \quad (3.73)$$

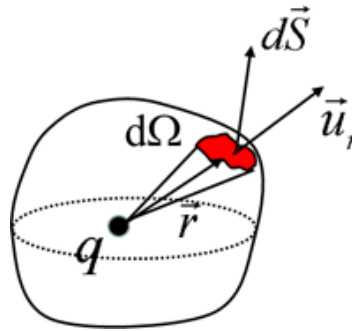


Figura 3.18: Carga en el interior de una superficie.

El flujo del campo a través de toda la superficie cerrada es en este caso:

$$\phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\vec{r} \cdot d\vec{S}}{r^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_S d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Omega_{TOTAL} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (3.74)$$

donde se ha tenido en cuenta que el ángulo sólido extendido a una superficie cerrada abarca todo el espacio y es igual a  $4\pi$  sr.

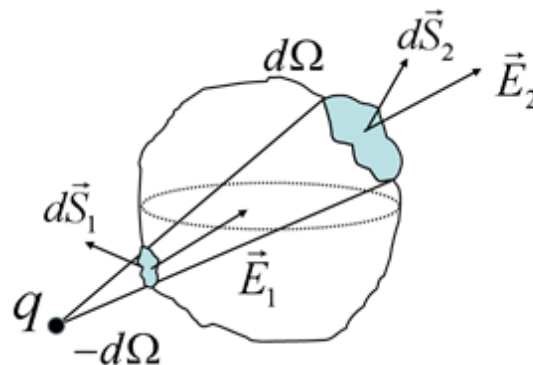


Figura 3.19: Carga en el interior de una superficie.

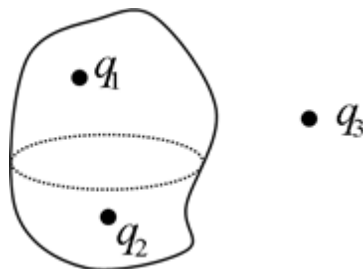
Para una superficie cerrada que no contenga a la carga (Fig. 3.19), considérese un ángulo sólido infinitesimal desde la posición de la carga, que sí intercepta a la superficie al entrar en ella con un área  $d\vec{S}_1$ , entonces tiene que interceptarla al salir de ella con un área  $d\vec{S}_2$ . Como para calcular el flujo los vectores área asociados se toman siempre con sentido hacia afuera de la superficie cerrada mientras que el campo creado por la carga  $q$  tiene el mismo sentido en las dos superficies infinitesimales, entonces el flujo infinitesimal debido a las dos superficies es:

$$d\phi = \vec{E}_1 \cdot d\vec{S}_1 + \vec{E}_2 \cdot d\vec{S}_2 = \frac{q\vec{r}_1 \cdot d\vec{S}_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^3} + \frac{q\vec{r}_2 \cdot d\vec{S}_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}(-d\Omega + d\Omega) = 0 \quad (3.75)$$

Dado que el ángulo sólido es el mismo para ambas salvo el signo, ya que en el primer punto el flujo es entrante y en el segundo saliente, al integrar  $d\phi$  a toda la superficie cerrada el resultado es nulo, evidentemente. Así pues, si la carga está dentro de la superficie el flujo es distinto de cero, pero si la carga está fuera de la superficie el flujo es nulo.

El teorema de Gauss se cumple debido a que el campo electrostático decrece con el inverso del cuadrado de la distancia a las cargas en la misma medida en la que crece el área vista desde las cargas y ambos efectos se cancelan. Si la dependencia del campo con la distancia fuera de otro tipo no se cumpliría el teorema de Gauss.

### 3.6.4. Teorema de Gauss para un conjunto de cargas puntuales



**Figura 3.20:** Varias cargas dentro y fuera de una superficie gaussiana.

Para un conjunto de cargas puntuales el campo en cada punto es la suma vectorial de los campos que crean cada una de las cargas, luego el flujo del campo total es la suma de los flujos de los campos individuales. Si se considera una superficie cerrada parte de las cargas estarán dentro de ella y parte fuera (Fig. 3.20). Según lo visto en el apartado anterior las primeras contribuirán al flujo, pero las segundas no. Así, si  $q_{int}$  representa la carga neta contenida en el interior de la superficie y  $q_{ext}$  la carga en el exterior de la misma, resulta

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} \quad (3.76)$$

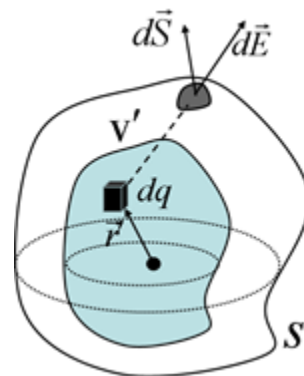
donde  $q_{int} = \sum_i q_i$  (interior). Recordemos que en el sumatorio de cargas anterior hay que tener en cuenta el signo.

### 3.6.5. Teorema de Gauss para una carga distribuida en un volumen

Para una carga distribuida en un volumen también es aplicable el principio de superposición. El resultado del flujo en una superficie  $S$  es el mismo

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} \quad (3.77)$$

pero ahora  $q_{int} = \int_{v'} \rho(\vec{r}') dv'$  si todo el volumen que ocupa la carga,  $v'$ , está contenido dentro de la superficie cerrada  $S$  (Fig. 3.21). En caso contrario,  $q_{int} = \int_{v'_{int}} \rho(\vec{r}') dv'$ , es decir, la integral se realiza sólo sobre el volumen interior a  $S$ ,  $v'_{int}$ , es decir, aquel que representa la intersección entre el volumen de la distribución de carga y el volumen interior a la superficie cerrada  $S$ . El resto del volumen  $v'$  es exterior y no contribuye al flujo.



**Figura 3.21:** Carga distribuida dentro una superficie gaussiana.

### 3.6.6. Forma diferencial del teorema de Gauss

Consideremos un volumen cualquiera  $v'$  en una región del espacio en la que existe una distribución de carga  $\rho$ . Sea  $S$  la superficie cerrada contorno del volumen  $v'$ . Si aplicamos el teorema de Gauss a esta superficie y utilizamos los resultados del apartado anterior, obtenemos

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{v'} \rho(\vec{r}') dv' \quad (3.78)$$

y aplicando el teorema de la divergencia al primer miembro de la ecuación, resulta

$$\int_{v'} \nabla \cdot \vec{E} dv' = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{v'} \rho(\vec{r}') dv' \quad (3.79)$$

Como el volumen de integración es arbitrario, los dos integrandos han de ser iguales, es decir

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.80)$$

A esta ecuación se la conoce como primera ecuación de Maxwell o, equivalentemente, como teorema de Gauss en forma diferencial. De ella se deduce que las líneas del campo electrostático nacen en los puntos donde  $\rho$  es mayor que cero y mueren en los puntos donde  $\rho$  es menor que cero. En los puntos donde  $\rho$  es cero la divergencia es nula.

### 3.6.7. Aplicaciones del teorema de Gauss

El teorema de Gauss es aplicable para cualquier campo electrostático. En una primera lectura permite conocer la carga contenida en cualquier volumen si se calcula el flujo del campo a través de la superficie contorno de ese volumen. También resuelve el problema inverso.

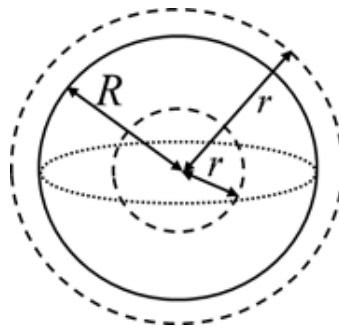
Además, en ciertas situaciones el teorema es muy útil para calcular el campo electrostático creado por un conjunto de cargas de valores y posiciones conocidas. Para que esto sea posible deben existir ciertas simetrías en la distribución de las cargas que satisfagan las dos condiciones siguientes:

1.- La dirección y sentido del campo en cada punto del espacio se conoce con precisión antes de resolver el problema. Si esto es así solo falta determinar el módulo del campo en cada punto.

2.- Es posible seleccionar superficies cerradas (“superficies gaussianas”) en las que el flujo se pueda resolver en una expresión sencilla que permita obtener el valor del módulo del campo al aplicar el teorema.

Veremos a continuación algunos casos, necesarios para comprender bien lo que quiere decir esto.

#### a) Esfera cargada uniformemente en todo su volumen (Simetría esférica)



**Figura 3.22:** Esfera cargada uniformemente.

Para una esfera de centro  $O$  y radio  $R$  cargada uniformemente en todo el volumen que ocupa (Fig. 3.22), por simetría, la dirección del campo sólo puede ser la del vector unitario radial desde  $O$  y su sentido coincidente con él si la carga es positiva y opuesto si es negativa.

Para calcular el módulo del campo en puntos exteriores a la esfera consideramos una superficie gaussiana de centro  $O$  y radio  $r$  ( $r > R$ ). En todos sus puntos la dirección del campo y de los vectores  $d\vec{S}$  es paralela y el módulo del campo vale lo mismo, por simetría, y el flujo a través de ella se reduce a:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E dS = E \oint_S dS = 4\pi r^2 E \quad (3.81)$$

Por otra parte, la carga total en el interior de la superficie gaussiana es, en este caso, igual a la carga de toda la distribución,  $q$ . Teniendo en cuenta todo lo anterior, aplicando el teorema de Gauss y despejando  $E$ , obtenemos:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \quad r \geq R \quad (3.82)$$

Este resultado es sencillo de recordar: el campo es el mismo que crearía toda la carga si estuviera concentrada en el origen.

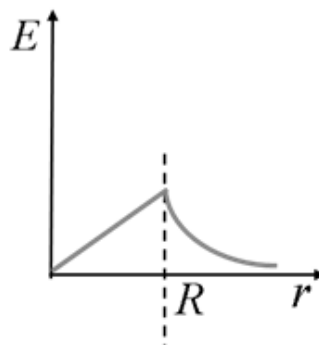
Para puntos interiores de la distribución, tomando también una superficie gaussiana esférica con centro en  $O$  y con radio  $r$  (pero  $r < R$  ahora) las consideraciones anteriores sobre simetría y el desarrollo del flujo siguen siendo válidos. Lo que cambia es que la carga total contenida dentro de la superficie gaussiana es solo una parte,  $q_r$ , de la carga total. Su valor es:

$$q_r = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \rho = \frac{3q}{4\pi R^3} \quad (3.83)$$

Aplicando ahora el teorema de Gauss tomando este valor como el de la carga interior y despejando el campo, se obtiene:

$$E = \frac{q_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \vec{E} = \frac{\rho \vec{r}}{3\epsilon_0} \quad r \leq R \quad (3.84)$$

Como se ve, el campo en puntos interiores tiene dirección radial y es directamente proporcional a la distancia al centro de la esfera. El campo en  $O$  es nulo. En la Fig. 3.23 se representa el campo en función de la distancia a  $O$ .



**Figura 3.23:** Gráfica del campo en función de la distancia para una esfera cargada uniformemente.

### b) Superficie esférica cargada uniformemente

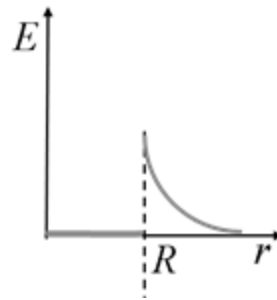
El caso de una esfera cargada uniformemente sólo en su superficie admite un tratamiento idéntico al caso anterior. La diferencia es que ahora no hay cargas en el interior, luego el resultado es, evidentemente, el siguiente:

$$\vec{E} = 0 \quad r \leq R \quad (3.85)$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \quad r \geq R \quad (3.86)$$



En la Fig. 3.24 se representa el campo en función de la distancia al origen.



**Figura 3.24:** Gráfica del campo con la distancia para una superficie cargada uniformemente.

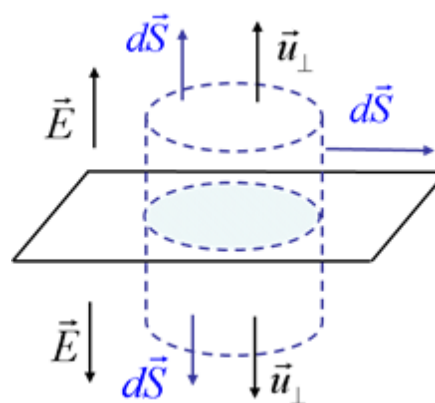
### c) Plano infinito cargado uniformemente (Simetría plana)

Si se considera el caso de una superficie plana cargada uniformemente con densidad de carga superficial  $\sigma$  y la tratamos como si fuera un plano infinito (Fig. 3.25), entonces la simetría de este supuesto permite afirmar que el campo en cualquier punto ha de ser perpendicular al plano, huyendo de él si la carga es positiva y apuntando hacia él si es negativa.

Para determinar el módulo del campo se puede considerar una superficie gaussiana cilíndrica, de bases de área  $S$  arbitraria paralelas al plano y situadas simétricamente a ambos lados de él a una distancia  $h$  perpendicular al plano.

En ese caso el flujo del campo en la superficie lateral del cilindro es nulo, porque en ella los vectores  $\vec{E}$  y  $d\vec{S}$  son perpendiculares. En las bases el campo y los vectores  $d\vec{S}$  son estrictamente paralelos, luego el producto escalar es igual al producto de sus módulos. Además el flujo tiene el mismo valor en cada una de las dos bases, ya que están a la misma distancia del plano. Así:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{Lateral} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{Bases} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 + 2ES \quad (3.87)$$



**Figura 3.25:** Gaussiana para un plano infinito cargado uniformemente.

Además, la carga interior a esta superficie gaussiana es la del círculo de área  $S$  definido por su intersección con el plano, esto es:  $q_{\text{int}} = \sigma S$ .

Así que aplicando el teorema de Gauss a los dos valores anteriores se obtiene:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_\perp \quad (3.88)$$

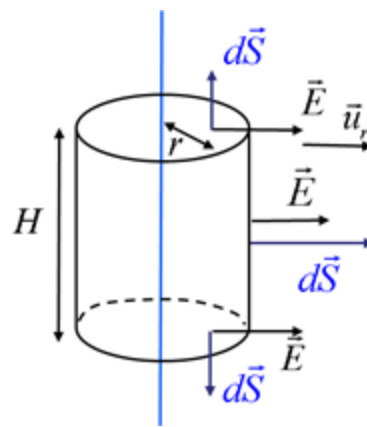
El campo obtenido es uniforme en cada uno de los dos semiespacios que determina el plano. El vector unitario que aparece es el perpendicular al plano y alejándose de él. A este resultado llegamos ya en el ejercicio 10.

#### d) Hilo infinito cargado uniformemente (Simetría axial)

Para un hilo recto de sección despreciable, cargado con densidad de carga  $\lambda$  constante, si lo tratamos como si fuese infinito entonces, por simetría, la dirección del campo que crea en cualquier punto ha de ser perpendicular al hilo en dirección radial. Para determinar el módulo del campo a una distancia  $r$  del hilo suponemos una superficie gaussiana cilíndrica coaxial con el hilo, de bases de radio  $r$  perpendiculares al hilo y altura  $H$  arbitraria (Fig. 3.26).

El flujo del campo en las bases es nulo, ya que en ellas campo y vectores  $d\vec{S}$  son perpendiculares. En la superficie lateral campo y vectores  $d\vec{S}$  son paralelos y su producto escalar es igual al producto de sus módulos. Además el módulo del campo es el mismo en todos los puntos de la superficie lateral. Por todo ello:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_{lateral}} E dS = E \int_{S_{lateral}} dS = E S_{S_{lateral}} = E 2\pi r H \quad (3.89)$$



**Figura 3.26:** Superficie gaussiana para un hilo infinito cargado uniformemente.

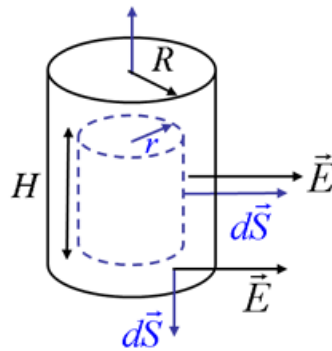
Además, la carga contenida en el interior de la superficie gaussiana es la correspondiente a una longitud de hilo igual a  $H$ , es decir:  $q_{int} = \lambda H$ . Sustituyendo todo lo anterior en la expresión del teorema de Gauss y despejando el campo, se obtiene:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r \quad (3.90)$$

donde el vector unitario que aparece es el radial de coordenadas cilíndricas. Este es el mismo resultado que se obtuvo anteriormente por integración.

### e) Cilindro infinito cargado uniformemente en todo su volumen

Para un cilindro macizo con sección de radio  $R$ , cargado con densidad de carga  $\rho$  constante y tratado como si fuera infinito, las consideraciones de simetría del caso anterior también son aplicables. La superficie gaussiana adecuada es igual y la expresión del flujo también (Fig. 3.27). Lo que difiere es la expresión de la carga contenida en el interior de la superficie gaussiana y además hay dos supuestos.



**Figura 3.27:** Superficie gaussiana en un cilindro infinito cargado uniformemente.

Para puntos exteriores al cilindro ( $r > R$ , siendo  $r$  la coordenada cilíndrica radial desde el eje del cilindro), la carga contenida en el interior de la superficie gaussiana es  $q_{\text{int}} = \rho\pi R^2 H$ . Esta carga se puede expresar también en función de una densidad de carga por unidad de altura,  $\lambda$ , asociada a  $\rho$  de la siguiente forma:

$$q_{\text{int}} = \rho\pi R^2 H = \lambda H \rightarrow \lambda = \pi R^2 \rho \quad (3.91)$$

Para puntos interiores al cilindro, ( $r < R$ ) la carga interior a la superficie gaussiana es  $q_{\text{int}} = \rho\pi r^2 H$ .

Aplicando el teorema de Gauss en cada uno de los dos supuestos se obtiene:

$$\vec{E} = \frac{\lambda r}{2\pi\epsilon_0 R^2} \vec{u}_r \quad r \leq R, \quad \lambda = \pi R^2 \rho \quad (3.92)$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r \quad r \geq R, \quad \lambda = \pi R^2 \rho \quad (3.93)$$

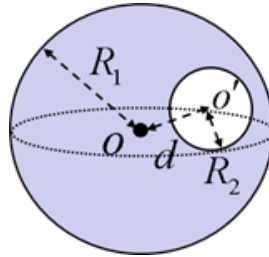
#### Ejercicio 12.

Dada una esfera de radio  $R_1$  con un hueco esférico vacío de radio  $R_2$  cuyo centro está situado a una distancia  $d < R_1 - R_2$  del centro de la esfera y siendo  $\rho$  la densidad de carga del sistema, constante, hállese el valor del campo en todos los puntos del hueco (Fig. 3.28).

Se puede considerar a la esfera con el hueco como superposición de una esfera sin hueco con densidad de carga  $\rho$  más una esfera que ocupa el volumen del hueco y con densidad de carga  $-\rho$ . El campo creado en un punto cualquiera  $P$  del hueco será la suma vectorial de los dos campos indicados, cuya expresión es la correspondiente al campo creado en puntos interiores de una esfera cargada uniformemente que ya se ha visto en el apartado a).

Así, el campo en  $P$  es:

$$\vec{E}(P) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{OP} - \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{O'P} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{OO'}$$
(3.94)

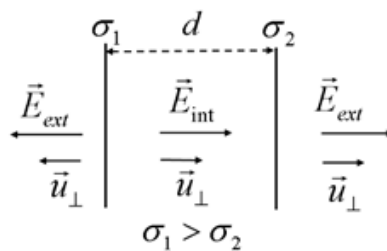


**Figura 3.28:** Esfera con un hueco esférico.

siendo  $O$  el centro de la esfera y  $O'$  el centro del hueco. El resultado no depende de  $P$ . Así el campo tiene el mismo valor en todos los puntos del hueco.

**Ejercicio 13.**

Dados dos planos infinitos paralelos situados a una distancia  $d$  y cargados uniformemente (Fig. 3.29), hállese el campo que crean en todos los puntos del espacio. Hágase aplicación para el supuesto de que las densidades de carga son iguales y para el supuesto en que son iguales y opuestas.



**Figura 3.29:** Planos infinitos paralelos cargados uniformemente.

Los dos planos dividen el espacio en tres regiones. En cada una de ellas el campo total es la suma del que crea cada uno de los dos planos. Así, a la derecha del plano de densidad  $\sigma_2$ :

$$\vec{E} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\epsilon_0} \vec{u}_\perp$$
(3.95)

donde el vector unitario es normal a los dos planos y con sentido hacia la derecha en la figura. A la izquierda del plano de densidad  $\sigma_1$  el valor del campo es el mismo, pero el sentido es opuesto.

Entre los dos planos:

$$\vec{E} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\epsilon_0} \vec{u}_\perp$$
(3.96)

La aplicación a los casos  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$  y  $\sigma_1 = -\sigma_2 = \sigma$  es inmediata.

### 3.7. Potencial electrostático

El campo electrostático de una carga puntual (ec. [3.20], y por superposición, el de cualquier distribución es irrotacional,

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (3.97)$$

y en consecuencia tiene un campo escalar asociado que llamaremos potencial electrostático,  $V$ , como justificaremos a continuación.

#### 3.7.1. Campos centrales radiales

Decimos que un campo es central y radial si su expresión en coordenadas esféricas es de la forma

$$\vec{R}(r) = R(r)\vec{u}_r \quad (3.98)$$

donde  $R(r)$  es el valor del campo (positivo o negativo),  $r$  la coordenada esférica radial y  $\vec{u}_r$  el vector unitario radial asociado a  $r$ . También se conocen como campos de simetría esférica, dado que el valor de  $R(r)$  es el mismo en todos los puntos de una superficie esférica de radio  $r$  y con centro en el origen del campo.

Los campos de este tipo son irrotacionales. En efecto, sus componentes  $R_\theta$  y  $R_\phi$  son nulas, de forma que si se utiliza para este caso la expresión del rotacional en coordenadas esféricas vista en el capítulo anterior

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{R} = & \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (R_\phi \sin \theta) - \frac{\partial R_\theta}{\partial \phi} \right] \vec{u}_r + \\ & + \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial R_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (r R_\phi)}{\partial r} \right] \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial (r R_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial R_r}{\partial \theta} \right] \vec{u}_\phi \end{aligned} \quad (3.99)$$

es inmediato darse cuenta de que

$$\nabla \times \vec{R} = 0 \quad (3.100)$$

Como el rotacional del gradiente de cualquier campo escalar es nulo, existe un campo escalar radial,  $\Phi(r)$ , asociado al campo vectorial, definido por

$$\vec{R} = \nabla \Phi \quad (3.101)$$

que verifica, evidentemente, que

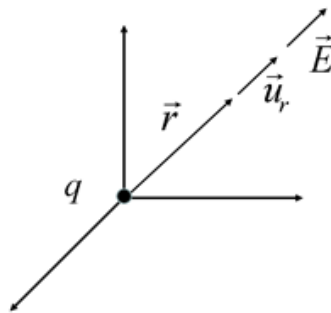
$$\nabla \times \vec{R} = \nabla \times (\nabla \Phi) = 0 \quad (3.102)$$

Además, la expresión del gradiente para campos de este tipo es de la forma

$$\nabla\Phi = \frac{d\Phi}{dr} \vec{u}_r \quad (3.103)$$

A los campos de fuerzas irrotacionales se les denomina campos conservativos y en ese supuesto al campo escalar  $\Phi$  asociado se le llama potencial.

### 3.7.2. Potencial electrostático para una carga puntual



**Figura 3.30:** Carga puntual en el origen.

Consideremos una carga puntual  $q$ , situada en el origen de un sistema de referencia (Fig. 3.30). El campo electrostático que crea en cualquier punto es

$$\vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \quad (3.104)$$

que es central y radial, luego irrotacional. A su campo escalar asociado le llamaremos potencial electrostático,  $V$ . Se define por la expresión

$$\vec{E}(r) = -\nabla V(r) \quad (3.105)$$

El signo negativo se adopta por convenio. Equivale a decir que el sentido del campo electrostático en cada punto apunta hacia los valores decrecientes del potencial desde ese punto. Para obtener el valor de  $V$  en este caso hay que invertir la ecuación, integrándola. Como aquí

$$\nabla V(r) = \frac{dV}{dr} \vec{u}_r \quad (3.106)$$

sustituyendo esta última y el valor del campo resulta

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = -\frac{dV}{dr} \quad (3.107)$$

es decir

$$\int dV = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dr}{r^2} \quad (3.108)$$



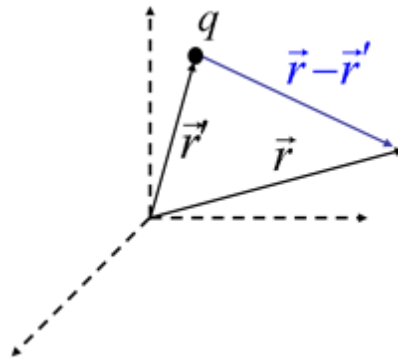
La integración es inmediata y resulta

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + C \quad (3.109)$$

Sea cual sea el valor de la constante  $C$ , al calcular el gradiente de  $V$  desaparece y conduce al mismo valor del campo electrostático. La asignación de un valor dado a  $C$  equivale a adoptar un convenio de referencia para el potencial. El convenio habitual consiste en asignar un valor del potencial cero a una distancia infinita de la carga. En este caso la constante  $C$  se anula y resulta

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (3.110)$$

En el Sistema Internacional la unidad de potencial electrostático es el voltio (V) y la unidad de campo electrostático se suele expresar como V/m.



**Figura 3.31:** Carga puntual fuera del origen.

Si el origen del sistema de referencia no coincide con la posición de la carga, no cambia sustancialmente nada de lo dicho. Hay que tener en cuenta que en las ecuaciones anteriores  $r$  representaba la distancia entre la carga  $q$  y el punto donde calculamos el valor del potencial. Así, para adaptar el resultado anterior al caso de la Fig. 3.31 sólo hay que expresar esa distancia para este caso, es decir

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (3.111)$$

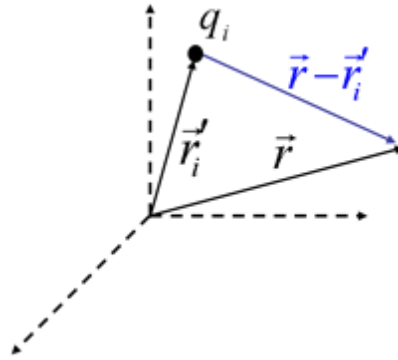
### 3.7.3. Potencial electrostático para un conjunto de cargas puntuales

El potencial electrostático creado por un conjunto de  $N$  cargas puntuales se calcula mediante el principio de superposición. El campo total creado por las cargas  $q_i$  situadas en  $\vec{r}'_i$  en el punto  $\vec{r}$  es (Fig. 3.32)

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i = - \sum_{i=1}^N \nabla V_i = - \sum_{i=1}^N \nabla \left( \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'_i|} \right) \quad (3.112)$$

y como las posiciones  $\vec{r}_i'$  de las cargas son fijas, el gradiente se calcula únicamente en  $\vec{r}$ , que no depende del índice del sumatorio. En consecuencia el sumatorio del gradiente es igual al gradiente del sumatorio y resulta

$$\vec{E} = -\nabla\left(\sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_i'}|\right) = -\nabla \sum_{i=1}^N V_i \quad (3.113)$$



**Figura 3.32:** Conjunto de cargas puntuales.

Resultado que indica que el principio de superposición es aplicable también al potencial. El potencial del conjunto de las  $N$  cargas es

$$V(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N V_i(\vec{r}) \quad (3.114)$$

que cumple

$$\vec{E} = -\nabla V \quad (3.115)$$

Al obtener la expresión del potencial como suma de los potenciales de cada carga hay que tener la precaución de que la referencia de potencial sea la misma para todo el sistema de cargas (por ejemplo la habitual de potencial cero a una distancia infinita).

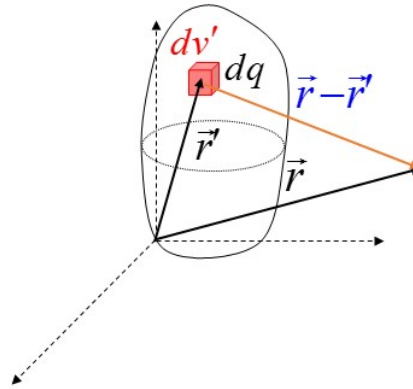
### 3.7.4. Potencial electrostático para una distribución continua de carga

Dada una distribución de carga en un volumen  $v'$ , podemos asignar una carga  $dq$  a cada punto como hicimos para el campo electrostático (Fig. 3.33). El potencial que crea la carga “puntual”  $dq$  es

$$dV(\vec{r}) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} \quad , \quad dq = \rho(\vec{r}')dv' \quad (3.116)$$

El potencial que crea toda la distribución de carga en cada punto se calcula por el principio de superposición, que conduce en este caso a

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}') dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (3.117)$$



**Figura 3.33:** Distribución continua de carga.

La adaptación de este resultado para el caso de una distribución superficial de carga es inmediata:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{\sigma(\vec{r}') dS'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (3.118)$$

Lo mismo podemos afirmar para una distribución longitudinal de carga:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{L'} \frac{\lambda(\vec{r}') dl'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (3.119)$$

Todas las expresiones anteriores permiten calcular el potencial que crea un sistema cargado, si se conocen los valores y las posiciones de las cargas o, equivalentemente, la forma de las distribuciones de carga, como veremos después con algunas aplicaciones.

### 3.7.5. Comportamiento del potencial electrostático con la distancia

Como se aprecia en todas las expresiones que se acaban de ver, el potencial electrostático decrece con el inverso de la distancia, por tanto, más suavemente que el módulo del campo. Esto implica que, con el convenio de referencia habitual para el potencial, su valor absoluto tiende a cero cuando la distancia a las cargas tiende a infinito (decimos su valor absoluto, porque el potencial puede ser positivo o negativo según los signos de las cargas que lo crean). Esto siempre es aplicable para sistemas cargados reales, en los que las cargas están confinadas en regiones del espacio finitas.

No obstante, se pueden plantear supuestos teóricos no reales en los que las cargas se distribuyen sobre dimensiones de tamaño infinito, como para un hilo o un plano infinitos cargados que resolvimos en las aplicaciones del teorema de Gauss. El cálculo del potencial para estos casos puede conducir, como se verá en el siguiente apartado, a potenciales cuyos valores

absolutos crecen con la distancia y para ellos la referencia de potencial cero en el infinito carece de sentido (su valor absoluto tiende a infinito en el infinito). En estos supuestos hay que adoptar un criterio de referencia diferente del habitual para cargas acotadas. Para hacerlo podemos seleccionar un punto cualquiera del espacio como referencia. Sean sus coordenadas en un sistema de ejes  $P_R(x_R, y_R, z_R)$ . Se asocia a este punto un valor del potencial  $V_R$ , que puede ser cualquier valor de potencial o incluso cero, de forma que la condición:

$$V_R = V(x_R, y_R, z_R) \quad (3.120)$$

permite obtener el potencial en todo punto sin ambigüedad, porque determina el valor de la constante de integración que aparece al resolver el potencial integrando el campo.

Por otra parte, a medias distancias, suficientemente mayores que las dimensiones de la distribución de cargas, el potencial tiende al que crearía una carga puntual, como sucedía para el campo electrostático. El tratamiento es similar al que se hizo para este caso.

Para comprender completamente el significado del potencial nos queda por ver cómo está relacionado con la energía electrostática del sistema de cargas. Esto se analizará en el apartado 3.8.

### 3.7.6. Continuidad del potencial electrostático

Como todo campo escalar, el potencial electrostático ha de ser una función continua en todo punto del espacio. En los casos en los que las cargas están distribuidas en diferentes regiones existen límites o fronteras de separación entre ellas. En cada una de las  $N$  regiones el campo electrostático tendrá una forma diferente, en general. Al integrar estos campos para obtener el potencial en cada región aparecerán  $N$  constantes de integración  $C_i$ . Como el criterio de referencia para el potencial ha de ser único y el mismo para todo el sistema de cargas, para obtener el potencial electrostático en todo el espacio se puede proceder de la siguiente forma:

Si todas las regiones donde hay cargas ocupan volúmenes finitos:

1.- Se adopta el criterio de potencial cero en el infinito. Éste determina la constante en la región comprendida entre la frontera exterior mayor, que contiene al conjunto de las regiones, y el infinito.

2.- Las otras  $N-1$  constantes se determinan por continuidad del potencial en todas las fronteras, de donde se obtienen las correspondientes  $N-1$  ecuaciones.

Si algunas de las regiones (o todas) plantean el supuesto teórico de distribuciones infinitas de carga:

1. - Se selecciona un punto de referencia  $P_R$ , en una región  $i$  cualquiera, en el que el potencial no diverja y se le asocia un valor de referencia al potencial,  $V_R$ . Esto determina el valor de la constante de integración en esa región.

2. - Como en el caso anterior el resto de las  $N-1$  constantes se determinan por continuidad del potencial en las fronteras.

### 3.7.7. Cálculo de potenciales electrostáticos

Para calcular el potencial electrostático que crea un conjunto de cargas utilizaremos dos métodos:

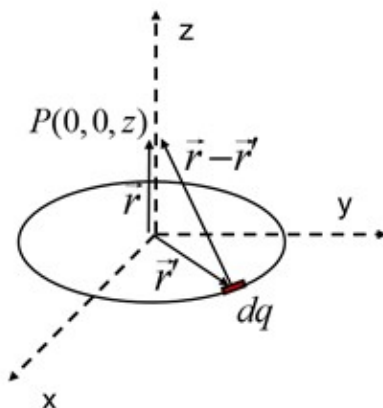
1. - Si no se conoce el campo correspondiente o es complicado de calcular,  $V$  se obtiene utilizando las fórmulas que hemos visto, que requieren un proceso de integración en el caso de cargas distribuidas.

2. - Si se conoce el campo correspondiente o bien es más sencillo de calcular que el potencial, entonces podemos determinarlo realizando la siguiente integral de línea:

$$\vec{E} = -\nabla V \rightarrow \int \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int -\nabla V \cdot d\vec{r} = - \int dV = -\Delta V \quad (3.121)$$

$$V(\vec{r}) - V_R = - \int_{(x_R, y_R, z_R)}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (3.122)$$

a) **Potencial que crea una espira circular uniformemente cargada en puntos de su eje**



**Figura 3.34:** Espira circular uniformemente cargada.

El potencial que crea una espira circular cargada con carga total  $q$  en cada punto  $P$  de su eje (Fig. 3.34) es muy sencillo de calcular ya que cualquier carga  $dq$  sobre la espira está a la misma distancia de  $P$ , con lo que:

$$V(0, 0, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\sqrt{R^2 + z^2}} \int_{\text{espira}} dq = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{R^2 + z^2}} \quad (3.123)$$

Con el convenio habitual, que es adecuado al ser una carga acotada. El cálculo del campo correspondiente es inmediato.

**b) Superficie esférica cargada uniformemente**

En este caso lo más sencillo es calcular primero el campo electrostático mediante el teorema de Gauss, como ya se hizo, y a partir de él calcular el potencial por integración inmediata a lo largo de una curva radial:

$$V(r) = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_{\infty}^r E dr, \quad \vec{E} = \frac{q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad r \geq R \quad (3.124)$$

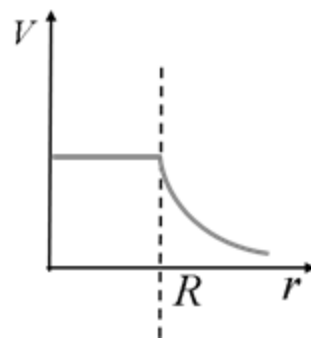
que conduce a

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad r \geq R \quad (3.125)$$

Este resultado equivale a considerar que el potencial fuera de la esfera es como el de una carga puntual  $q$  situada en su centro. En el interior de la superficie esférica el campo es nulo, luego el potencial es constante. El valor de esa constante se determina por continuidad con el potencial en el exterior para  $r = R$ . Resulta:

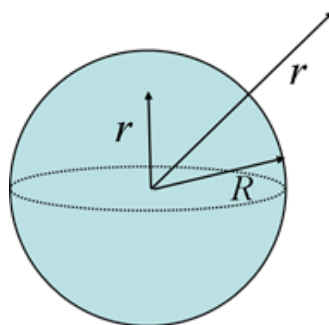
$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}, \quad R \geq r \geq 0 \quad (3.126)$$

En la Fig. 3.35 se representa la gráfica del potencial en función de la distancia al origen.



**Figura 3.35:** Gráfica del potencial de una superficie esférica cargada uniformemente.

### c) Esfera cargada uniformemente en todo su volumen



**Figura 3.36:** Esfera cargada uniformemente.

Para una esfera de radio  $R$  cargada uniformemente (Fig. 3.36) el potencial fuera de la esfera se calcula de forma idéntica al ejercicio anterior. Resulta:



$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad r \geq R \quad (3.127)$$

Sin embargo, ahora el campo en el interior no es nulo, pero podemos obtener el potencial integrando el campo interior que se calculó previamente en el caso a) del apartado 3.6.7. Así:

$$V(r) = - \int \vec{E} \cdot d\vec{r} + C, \quad \vec{E} = \frac{\rho \vec{r}}{3\epsilon_0} \quad r \leq R \quad (3.128)$$

$$V(r) = - \int_R^r E dr + C \quad (3.129)$$

Al realizar la integral se obtiene:

$$V(r) = -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} + C \quad \rho = \frac{3q}{4\pi R^3} \quad (3.130)$$

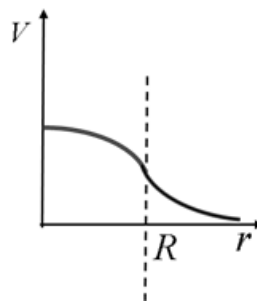
El valor de la constante  $C$  se obtiene imponiendo que los valores del potencial dentro y fuera de la esfera coincidan para  $r = R$ . Resulta:

$$V(r) = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right), \quad R \geq r \geq 0 \quad (3.131)$$

En el centro de la esfera el potencial es:

$$V(0) = \frac{3q}{8\pi\epsilon_0 R} \quad (3.132)$$

En la Fig. 3.37 se representa la gráfica del potencial en función de la distancia al origen.



**Figura 3.37:** Gráfica del potencial de una esfera cargada uniformemente.

#### d) Plano infinito cargado uniformemente

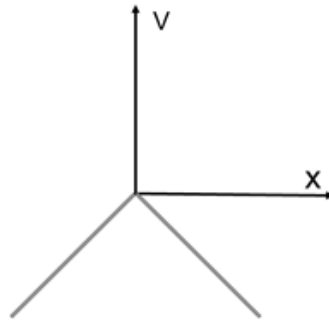
Para cualquier campo uniforme conocido la obtención del potencial asociado es inmediata. Así, si situamos el eje  $x$ , por ejemplo coincidiendo con la dirección del campo resulta:

$$\vec{E} = E \vec{i} \quad E = cte \quad \rightarrow \quad V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{r} + C = -Ex + C \quad (3.133)$$

En este supuesto no tiene sentido el convenio habitual de potencial cero en el infinito, porque para  $x$  tendiendo a infinito el potencial diverge. El convenio más adecuado aquí es el de

potencial nulo para  $x=0$ , que hace que la constante  $C$  se anule. La aplicación de lo anterior al caso del campo creado por un plano infinito cargado uniformemente conduce a

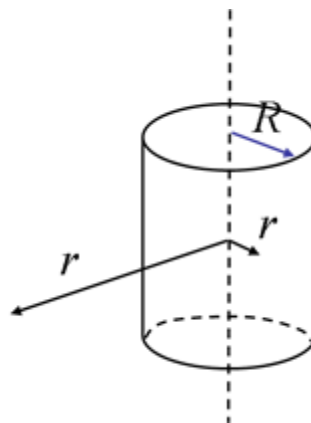
$$V(x) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} |x| \quad (3.134)$$



**Figura 3.38:** Potencial de un plano cargado uniformemente.

con el convenio de potencial nulo en el plano. En la Fig. 3.38 se representa la gráfica del potencial en función de la coordenada  $x$ .

e) Cilindro de longitud infinita cargado uniformemente en todo su volumen



**Figura 3.39:** Cilindro de longitud infinita cargado uniformemente.

Para un cilindro infinito cargado uniformemente (Fig. 3.39) también resulta más sencillo calcular primero el campo por el teorema de Gauss y obtener el potencial a partir de él. Utilizando los resultados correspondientes calculados previamente para el campo en la sección 3.6.7, el potencial en puntos interiores al cilindro se obtiene así:

$$\begin{aligned} V &= -\int \vec{E} \cdot d\vec{r} + C = -\int \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \vec{u}_r \cdot d\vec{r} + C = \\ &= -\frac{\rho}{2\epsilon_0} \int r dr + C = -\frac{\rho}{4\epsilon_0} r^2 + C \quad r \leq R \end{aligned} \quad (3.135)$$

Utilizando el convenio  $V(r=R)=0$  para el potencial, que resulta adecuado en este caso, queda determinada la constante  $C$  y resulta:

$$V(r) = \frac{\rho}{4\epsilon_0}(R^2 - r^2), \quad r \leq R \tag{3.136}$$

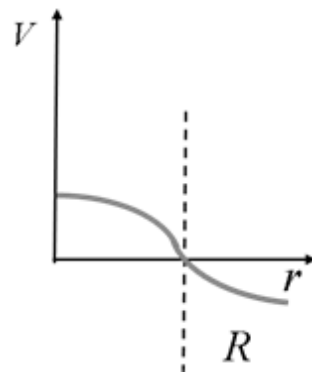
Para puntos exteriores al cilindro resulta:

$$V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{r} + C' = - \int \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r} \vec{u}_r \cdot d\vec{r} + C' = -\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln r + C' \quad r \geq R \tag{3.137}$$

La continuidad del potencial en  $r=R$  determina  $C'$ . Resulta:

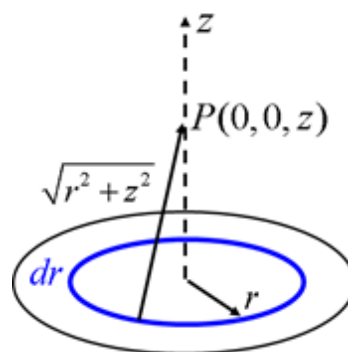
$$V(r) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln \frac{R}{r}, \quad R \geq r \geq 0 \tag{3.138}$$

En la Fig. 3.40 se representa la gráfica del potencial en función de la distancia al eje del cilindro.



**Figura 3.40:** Gráfica del potencial de un cilindro infinito cargado uniformemente.

**Ejercicio 14.**



**Figura 3.41:** Disco circular uniformemente cargado.

Hállese la expresión del potencial que crea un disco circular uniformemente cargado en los puntos de su eje (Fig. 3.41) por integración directa. Hallar el campo a partir de la expresión del potencial.

Para un disco de radio  $R$  cargado uniformemente en toda su superficie la obtención directa del potencial en puntos de su eje, por integración es sencilla. Se considera una espira de centro  $O$  de radio interior  $r$  ( $r < R$ ) y radio exterior  $r+dr$ . La carga total en esta espira es:  $dq = \sigma dS = \sigma 2\pi r dr$  y el potencial  $dV$  que crea en un punto del eje  $z$  es:

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0\sqrt{r^2 + z^2}} \tag{3.139}$$

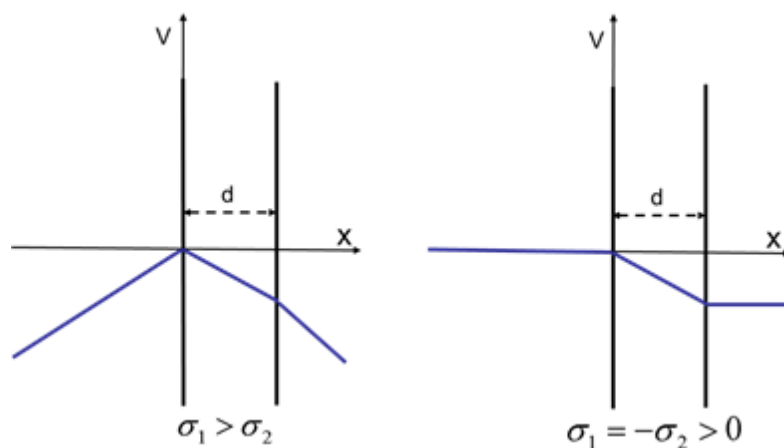
con el convenio de potencial cero en el infinito.

Para obtener el potencial debido a todo el disco se integra la expresión anterior en la variable  $r$  con límites de integración 0 y  $R$ . Se obtiene:

$$V(0, 0, z) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\sqrt{R^2 + z^2} \tag{3.140}$$

**Ejercicio 15.**

Dados dos planos infinitos paralelos situados a una distancia  $d$  y cargados uniformemente (Fig. 3.42), hállese el potencial que crean en todos los puntos del espacio. Representétese gráficamente el potencial en función de la distancia. Hágase aplicación para el supuesto de que las densidades de carga son iguales y para el supuesto en que son iguales y opuestas.



**Figura 3.42:** Planos infinitos paralelos cargados uniformemente.

Los planos definen tres zonas en el espacio. En cada una de ellas el campo es uniforme y ya se ha visto la solución para el potencial en este supuesto. Hay que tener en cuenta que al adoptar un criterio de referencia para el potencial debe de ser único y el mismo para todo el sistema. Así, para el espacio entre los dos planos:

$$V = -\int \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\epsilon_0} dx + C_1 = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\epsilon_0}x + C_1 \tag{3.141}$$

Si se adopta el criterio  $V(x=0)=0$  como referencia, en esta zona, entonces la constante  $C_1$  se anula, pero este mismo criterio se ha de mantener para las otras dos zonas. Así, para  $x > d$ :

$$V = -\int \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\epsilon_0} dx + C_2 = -\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\epsilon_0}x + C_2 \tag{3.142}$$

Ahora la constante  $C_2$  se determina por continuidad del potencial en la frontera definida por el plano de la derecha.

$$V(x \rightarrow d^-) = V(x \rightarrow d^+) \rightarrow C_2 = \frac{\sigma_2 d}{\epsilon_0} \quad (3.143)$$

y el potencial en esta zona resulta:

$$V = \frac{\sigma_2 d}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\epsilon_0} x \quad x \geq d \quad (3.144)$$

Operando de la misma manera se obtiene el potencial en la zona de la izquierda:

$$V = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\epsilon_0} x \quad x \leq 0 \quad (3.145)$$

La aplicación para  $\sigma_1 = \sigma_2$  y  $\sigma_1 = \sigma_2 > 0$  es inmediata. En la Fig. 3.42 se representa la gráfica del potencial en función de la coordenada  $x$ .

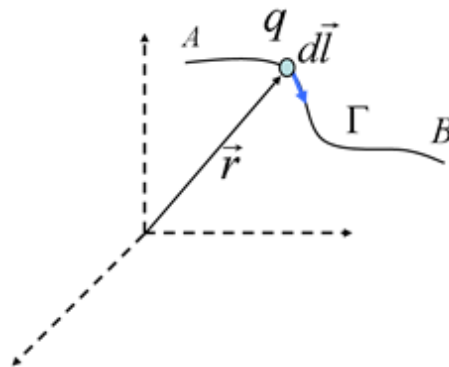
## 3.8. Energía electrostática

En este apartado se desarrollarán los aspectos concernientes a la energía en un sistema de cargas en reposo (energía electrostática).

### 3.8.1. Trabajo en un campo electrostático

Consideremos una carga puntual que se mueve, lentamente para considerar en todo instante la situación estática, a lo largo de una trayectoria,  $\Gamma$ , en una zona donde existe un campo electrostático (Fig. 3.43). La carga puede estar sometida a diferentes fuerzas y ligaduras, pero una de las fuerzas que actúan sobre ella es la de interacción entre el campo y la carga, que es

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad (3.146)$$



**Figura 3.43:** Carga puntual moviéndose lentamente a lo largo de una curva.

El trabajo de esta fuerza cuando la carga se mueve entre los puntos  $A$  y  $B$  de la trayectoria es

$$W_{AB}^{\Gamma} = \int_{A(\Gamma)}^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = q \int_{A(\Gamma)}^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (3.147)$$

Como el campo electrostático es conservativo no depende de la trayectoria, sino sólo de los puntos  $A$  y  $B$ . En efecto

$$W_{AB} = q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = -q \int_A^B \nabla V \cdot d\vec{l} = -q \int_A^B dV = qV(A) - qV(B) \quad (3.148)$$

donde  $V$  es el potencial electrostático asociado al campo.

Se define la energía potencial de interacción entre la carga  $q$  y el campo como

$$U_q = qV \quad (3.149)$$

cuyo valor depende de la posición de la carga  $q$ . En unidades del Sistema Internacional la ecuación anterior expresa que  $1\text{J}=1\text{C}\cdot\text{V}$ . La energía potencial representa la energía de interacción entre las cargas que crean el campo y la carga  $q$ .

Así el trabajo es

$$W_{AB} = U_q(A) - U_q(B) = -\Delta U_{qAB} \quad (3.150)$$

El potencial representa la energía potencial por unidad de carga.  $V(A)-V(B)$  es la diferencia de potencial entre los puntos  $A$  y  $B$  y representa el trabajo de la fuerza electrostática que actuaría sobre una carga unidad si se moviera entre  $A$  y  $B$  por cualquier trayectoria.

### 3.8.2. Energía electrostática de un sistema formado por dos cargas puntuales

Consideremos dos cargas  $q_1$  y  $q_2$  en reposo y separadas una distancia  $d$ , formando un sistema aislado, es decir, suponiendo que no actúa sobre ellas ninguna otra fuerza que no sea la de interacción electrostática entre ambas. En estas condiciones las cargas dejarían de estar en reposo instantáneamente.

En efecto, si las cargas son del mismo signo las fuerzas de repulsión eléctrica entre ellas harían que se separasen alejándose hacia el infinito. La velocidad de cada una aumentaría a lo largo del proceso hasta un valor límite y lo mismo sucedería con su energía cinética. Esto indica que en la posición inicial las dos cargas almacenan una energía, que llamaremos energía electrostática del sistema y que representa la energía potencial de interacción entre ambas.

Otra forma de contemplar lo anterior es la siguiente: la energía electrostática es igual al trabajo que hay que hacer para construir el sistema desde una situación en la que no haya interacción entre las cargas. La energía electrostática, que es debida a una cierta configuración



de cargas, está almacenada en el espacio donde existe campo eléctrico. Por esta razón la energía electrostática no se almacena en las cargas ni en el interior de los conductores.

Para el caso contemplado en este apartado supongamos que la carga  $q_1$  está en su posición y que la carga  $q_2$  está a una distancia infinita, de forma que la fuerza de interacción entre ambas es nula en esta situación. Para llevar a la carga  $q_2$  desde el infinito hasta una distancia  $d$  de  $q_1$  tenemos que contrarrestar la fuerza de repulsión electrostática que a lo largo del proceso ejerce  $q_1$  sobre  $q_2$ . Para ello hay que aplicar una fuerza opuesta sobre  $q_2$ , es decir

$$\vec{F} = -\vec{F}_{21} = -q_2\vec{E}_1(2) \quad (3.151)$$

El trabajo total de esta fuerza en el recorrido desde el infinito hasta la posición final es

$$W = \int_{\infty}^d \vec{F} \cdot d\vec{l} = -q_2 \int_{\infty}^d \vec{E}_1(2) \cdot d\vec{l} = q_2 [V_1(d) - V_1(\infty)] \quad (3.152)$$

El potencial que crea la carga  $q_1$  en el infinito es nulo y a una distancia  $d$  es

$$V_1(d) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 d} \quad (3.153)$$

Sustituyendo en la expresión del trabajo obtenemos la energía electrostática del sistema formado por las dos cargas a una distancia  $d$  entre sí

$$W = U_e = U_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 d} \quad (3.154)$$

Ecuación que expresa que el trabajo necesario para construir el sistema es igual a la energía potencial del mismo. Le llamamos energía electrostática del sistema. La expresión anterior sólo tiene en cuenta la energía de interacción entre las dos cargas. No se considerará aquí la parte de energía correspondiente a la configuración de cada una de las dos cargas por separado.

Cuando las dos cargas tienen el mismo signo la energía es positiva. En este caso el sistema es inestable. Si no se sujetan las cargas mediante alguna fuerza, las cargas se separarían hasta el infinito. Cuando las dos cargas tienen signo opuesto la energía es negativa. Este caso puede conducir a situaciones estables (considérese, por ejemplo el caso del átomo de hidrógeno).

Conviene recalcar que la energía potencial del sistema no es de la carga  $q_1$  ni de la carga  $q_2$ , sino de la interacción entre las dos cargas, es decir sólo hay un término de energía potencial para el par de cargas  $q_1 q_2$ .

Obsérvese también que la ecuación anterior se puede escribir como

$$W = U_e = U_{12} = q_1 V_2(1) = q_2 V_1(2) \quad (3.155)$$

### Ejercicio 16.

Dos cargas iguales de valor  $q=10\text{mC}$  y con la misma masa  $m=10\text{g}$  situadas a una distancia de  $1\text{m}$  se abandonan desde el reposo, sometidas únicamente a su repulsión eléctrica. Hállese su energía cinética y su velocidad en el límite en el que la distancia entre ambas tiende a infinito.

$$T = 4.5 \cdot 10^5 J ; \quad v \simeq 9500 m/s \quad (3.156)$$

### 3.8.3. Energía electrostática de un sistema formado por $N$ cargas puntuales

Un sistema formado por  $N$  cargas puntuales  $q_i$  incluye  $N(N-1)/2$  pares de cargas posibles, para cada uno de los cuales hay un término de energía potencial  $U_{ij}$ . La energía electrostática del sistema es entonces la suma de todos estos términos de energía potencial

$$U_e = \sum_{\text{pares } ij} U_{ij} = \sum_{\text{pares } ij} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \quad (3.157)$$

que, como se ve, representa un sumatorio a pares de cargas. La transformación en un sumatorio extendido a cargas individuales viene dada por

$$U_e = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j(i \neq j)} U_{ij} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j(i \neq j)} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \quad (3.158)$$

El factor  $1/2$  se debe a que al hacer el sumatorio a todos los posibles valores de  $i$  y a todos los de  $j$  (con  $i \neq j$ ) cada par aparece dos veces (par  $ij$  más par  $ji$ ) lo que implica contar dos veces el término de energía potencial correspondiente. Por otra parte la estructura del doble sumatorio es

$$\sum_i \sum_{j(i \neq j)} U_{ij} = \sum_{j(j \neq 1)} U_{1j} + \sum_{j(j \neq 2)} U_{2j} + \dots + \sum_{j(j \neq N)} U_{Nj} \quad (3.159)$$

Además, como

$$U_{ij} = \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = q_i V_j(\vec{r}_i) \quad (3.160)$$

lo que permite expresar  $U_e$  como

$$U_e = \frac{1}{2} \sum_i q_i \sum_{j(i \neq j)} \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = \frac{1}{2} \sum_i q_i \sum_{j(i \neq j)} V_j(\vec{r}_i) \quad (3.161)$$

donde el segundo sumatorio del último miembro es el potencial que crean todas las cargas, excepto la  $q_i$ , en el punto que ocupa  $q_i$

$$V(\vec{r}_i) = \sum_{j(i \neq j)} V_j(\vec{r}_i) \quad (3.162)$$

y en consecuencia

$$U_e = \frac{1}{2} \sum_i q_i V(\vec{r}_i) \quad (3.163)$$

Esta expresión sólo tiene en cuenta la parte de energía electrostática correspondiente a la interacción mutua entre las  $N$  cargas.

Si se aplica esto al sistema de dos cargas visto en el apartado anterior, en ese caso  $N(N-1)=2$  es el número de términos que aparecen en el doble sumatorio y  $N(N-1)/2=1$  el número de pares (un único par). El valor de la energía electrostática es

$$U_e = \frac{1}{2} \sum_i q_i V(\vec{r}_i) = \frac{1}{2} (q_1 V_2(\vec{r}_1) + q_2 V_1(\vec{r}_2)) = \frac{1}{2} \left( q_1 \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 d} + q_2 \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 d} \right) \quad (3.164)$$

$$U_e = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 d} \quad (3.165)$$

### Ejercicio 17

Hallar la energía electrostática de un sistema de tres cargas puntuales,  $q_1=q$ ,  $q_2=2q$  y  $q_3=-3q$ , situadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado  $l$ . Hágase aplicación numérica para  $q=2\text{mC}$  y  $l=2\text{m}$ .

$$U_e = -\frac{7q^2}{4\pi\epsilon_0 l} = -126 \text{ kJ} \quad (3.166)$$

Otra forma de desarrollar el sumatorio de pares [3.157] es convertir dicho sumatorio en un doble donde la variable  $j$  tome siempre valores mayores que  $i$ :

$$U_e = \sum_{\text{pares } ij} U_{ij} = \sum_i \sum_{j>i} U_{ij} = \sum_i \sum_{j=i+1} U_{ij} = \sum_i q_i \left( \sum_{j=i+1} \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \right) = \sum_i q_i V_{q_i} \quad (3.167)$$

En el resultado final aparecería un potencial que hemos llamado  $V_{q_i}$  que sería el que crean las cargas  $i+1, i+2, \dots, N$  sobre la carga  $i$ . El término  $q_i V_{q_i}$  representa pues el trabajo para traer desde un punto infinitamente alejado la carga  $i$  cuando se supone que hemos traído previamente las cargas  $i+1, i+2, \dots, N$ . Por tanto, el sumatorio en sí representa un proceso de cálculo de la energía en el que se comienza trayendo la carga  $N$  (lo cual no contribuye a la energía); a continuación se trae la carga  $N-1$ , y se calcula la energía ya que se hace en presencia de la carga  $N$ ; a continuación se trae la carga  $N-2$ , y se calcula la energía ya que se hace en presencia de las cargas  $N$  y la  $N-1$ ; y así sucesivamente hasta traer la carga 1, que se hace en presencia de las  $N-1$  cargas restantes. Este método de cálculo de la energía electrostática es totalmente equivalente al de la ecuación [3.163].

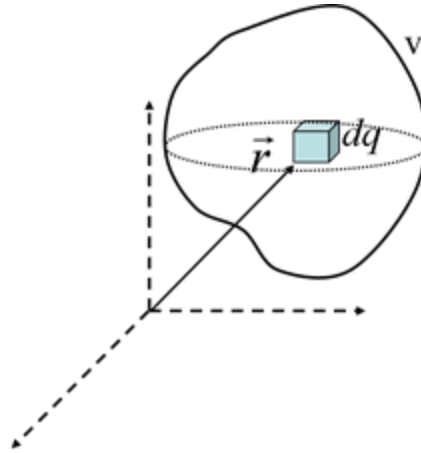
### 3.8.4. Energía electrostática de un sistema de cargas distribuidas en un volumen

La expresión [3.163] de la energía electrostática para un sistema de cargas distribuidas en un volumen  $v$  (Fig. 3.44) se adapta de la siguiente forma

$$U_e = \frac{1}{2} \int_v V(\vec{r}) dq \quad (3.168)$$

En la que  $dq$  es una carga infinitesimal cuya posición está determinada por  $\vec{r}$  y  $V$  es el potencial que crean todas las cargas (salvo  $dq$ ) en ese punto. Esto equivale a

$$U_e = \frac{1}{2} \int_v \rho(\vec{r}) V(\vec{r}) dv \quad (3.169)$$



**Figura 3.44:** Distribución continua de carga.

Integral extendida a todos los puntos donde está definida  $\rho$ , esto es, al volumen  $v$ . Como según la ecuación [3.80]:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.170)$$

despejando  $\rho$  y sustituyendo resulta

$$U_e = \frac{\epsilon_0}{2} \int_v V \nabla \cdot \vec{E} dv \quad (3.171)$$

que como

$$\nabla \cdot (V \vec{E}) = V \nabla \cdot \vec{E} + \vec{E} \cdot \nabla V, \quad \vec{E} = -\nabla V \quad (3.172)$$

conduce a

$$V \nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot (V \vec{E}) + E^2 \quad (3.173)$$

Sustituyendo en la expresión de la energía electrostática se obtiene

$$U_e = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{v \rightarrow \infty} \nabla \cdot (V \vec{E}) dv + \frac{\epsilon_0}{2} \int_{v \rightarrow \infty} E^2 dv \quad (3.174)$$

cuyos integrandos están definidos para todos los puntos donde existen los campos  $\vec{E}$  y  $V$ . Como su alcance es infinito las integrales se extienden a todo el espacio (esto es lo que se quiere indicar con la notación  $v \rightarrow \infty$ ).

Aplicando el teorema de la divergencia a la primera integral resulta

$$\int_{v \rightarrow \infty} \nabla \cdot (V \vec{E}) dv = \oint_{S \rightarrow \infty} V \vec{E} dS = 0 \quad (3.175)$$

porque los puntos de la superficie contorno de todo el espacio están a una distancia infinita y en ellos el campo y el potencial son nulos.

Así pues, la energía electrostática es

$$U_e = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{v \rightarrow \infty} E^2 dv \quad (3.176)$$

que para distribuciones reales de carga tiene un valor finito aunque el dominio de integración sea infinito. Esto se debe a que a grandes distancias el cuadrado del campo decrece con el inverso de la cuarta potencia de la distancia, mientras que el volumen crece con el cubo de la distancia. La expresión no es aplicable a los casos ideales de cargas puntuales o de distribuciones infinitas de carga. En ambos supuestos el resultado sería una energía electrostática tendente a infinito.

Se define la densidad de energía de un campo electrostático, en el vacío, como

$$u_e = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \quad (3.177)$$

Representa la concentración de energía por unidad de volumen en cada punto del espacio debida a ese campo. Toma valores en todos los puntos del espacio, aunque como se ha dicho tiende a cero a distancias infinitas de las cargas que crean ese campo.

La expresión [3.167] de la energía electrostática se adapta de la siguiente forma

$$U_e = \int V_{dq} dq \quad (3.178)$$

En este caso al tratarse de una distribución continua traemos diferenciales de carga  $dq$  en puntos donde las cargas previamente traídas crean un potencial  $V_{dq}$ . De esta manera, a base de traer estos diferenciales de carga vamos creando la distribución completa. El potencial que aparece en esta ecuación es el creado sólo por una parte de la distribución, la previamente traída, no por la distribución completa como ocurre en el caso de la ecuación [3.168].

### 3.8.5. Aplicaciones

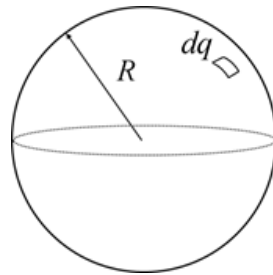
#### a) Esfera cargada uniformemente sólo en puntos de su superficie

En el caso de una esfera cargada uniformemente (Fig. 3.45) es muy sencillo calcular la energía electrostática mediante

$$U_e = \frac{1}{2} \int_v V(\vec{r}) dq \quad (3.179)$$

Considerando una carga infinitesimal  $dq$  en cualquier punto de la superficie, el potencial que crea el conjunto de las cargas en ese punto es

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (3.180)$$



**Figura 3.45:** Superficie esférica cargada uniformemente.

constante, es decir, tiene el mismo valor para todas las posibles  $dq$ . Luego

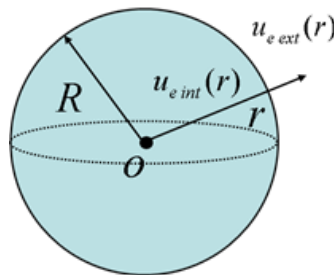
$$U_e = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 R} \int dq = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R} \quad (3.181)$$

### Ejercicio 18.

Como se verá en el capítulo siguiente, las cargas se sitúan en las superficies de los conductores cargados en equilibrio. Utilizando este resultado, hallar la energía necesaria para cargar una esfera metálica de 1 cm de radio con una carga de 1mC.

$$U_e = 450 \text{ kJ} \quad (3.182)$$

### b) Esfera maciza cargada uniformemente en todos sus puntos



**Figura 3.46:** Esfera maciza cargada uniformemente.

Usaremos aquí el concepto de densidad de energía electrostática. Para integrar a todo el espacio hay dos regiones: los puntos interiores y los puntos exteriores a la esfera (Fig. 3.46).

Llamando  $q$  a la carga total, en puntos interiores ( $r < R$ ):

$$\vec{E}_{\text{int}} = \frac{\rho \vec{r}}{3\epsilon_0} = \frac{q \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 R^3} \quad \rightarrow \quad u_{e \text{ int}} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 = \frac{q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 R^6} r^2 \quad (3.183)$$

y en puntos exteriores ( $r > R$ ):

$$\vec{E}_{\text{ext}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \rightarrow \quad u_{e \text{ ext}} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 = \frac{q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 r^4} \quad (3.184)$$



La energía electrostática total del sistema es

$$U_e = \int_0^R u_{e \text{ int}} dv + \int_R^\infty u_{e \text{ ext}} dv \quad (3.185)$$

Dada la simetría esférica del problema es adecuado tomar como diferenciales de volumen cortezas esféricas de radio interior  $r$  y de radio exterior  $r+dr$ , en cuyo caso  $dv = 4\pi r^2 dr$ .

Sustituyendo todo en la expresión de  $U_e$ :

$$U_e = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R^6} \int_0^R r^4 dr + \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{3q^2}{20\pi\epsilon_0 R} \quad (3.186)$$

A este mismo resultado se puede llegar mediante:

$$U_e = \frac{1}{2} \int_v V(\vec{r}) dq \quad (3.187)$$

En este caso la integral está extendida a los puntos donde hay cargas  $dq$ , es decir a los puntos de la esfera. Por la simetría esférica del problema es adecuado tomar como carga infinitesimal  $dq$  la contenida en una corteza esférica concéntrica con la distribución, de radio interior  $r$  y exterior  $r+dr$ , que contiene una carga total:  $dq = \rho dv = 4\pi r^2 dr$ .

El potencial creado por toda la distribución de carga en un punto interior a una distancia  $r$  del centro se ha calculado previamente, de forma que la integral se plantea como sigue:

$$U_e = \frac{1}{2} \int_v V(\vec{r}) dq = \frac{1}{2} \int_0^R \frac{q}{8\pi\epsilon_0 R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right) 4\pi r^2 dr \quad (3.188)$$

Sustituyendo  $q$  en función de la densidad de carga  $\rho$  e integrando, se obtiene:

$$U_e = \frac{4\pi R^5 \rho^2}{15\epsilon_0} \quad (3.189)$$

que es la energía electrostática del sistema en función de  $\rho$ . Es inmediato comprobar que coincide con el resultado previo expresado en función de  $q$ .

### 3.9. Ecuaciones de Maxwell en electrostática

Las ecuaciones de Maxwell para el vacío, en el ámbito de la electrostática son

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.190)$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (3.191)$$

La primera es el teorema de Gauss en forma diferencial. En el supuesto general de cargas en movimiento (electrodinámica) tiene la misma forma aunque en este caso el campo eléctrico no es electrostático y depende del tiempo, como también lo hace  $\rho$ .

En su forma integral esta ecuación es el teorema de Gauss:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad (3.192)$$

La segunda establece el carácter conservativo del campo electrostático. En electrodinámica cambia apareciendo un término adicional en el segundo miembro (así, el campo eléctrico no es conservativo en ese caso). La forma integral de esta ecuación es:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (3.193)$$

para cualquier curva cerrada  $\Gamma$ .

Por ser conservativo el campo electrostático tiene un potencial escalar asociado relacionado con él por:

$$\vec{E} = -\nabla V \quad (3.194)$$

Si se combinan esta ecuación con la primera de Maxwell se obtiene:

$$\nabla^2 V = \nabla \cdot \nabla V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.195)$$

conocida como ecuación de Poisson.

En muchos casos no son conocidas como datos las posiciones de las cargas, pero las condiciones del problema permiten definir regiones en las que se sabe que no hay cargas eléctricas. Para estas regiones se cumple que:

$$\nabla^2 V = 0 \quad (3.196)$$

conocida como ecuación de Laplace.

### Ejercicio 19.

Obtégase el potencial en los puntos contenidos entre dos planos infinitos paralelos separados por una distancia  $d$  mediante la ecuación de Laplace. Se sabe que los planos están a potenciales  $V_1$  y  $V_2$ , con  $V_1 > V_2$ .

Tomando el eje  $Ox$  perpendicular a los planos siendo  $V_1$  el potencial en el plano  $x=0$ :

$$V(x) = V_1 - \frac{V_1 - V_2}{d} x \quad (3.197)$$