



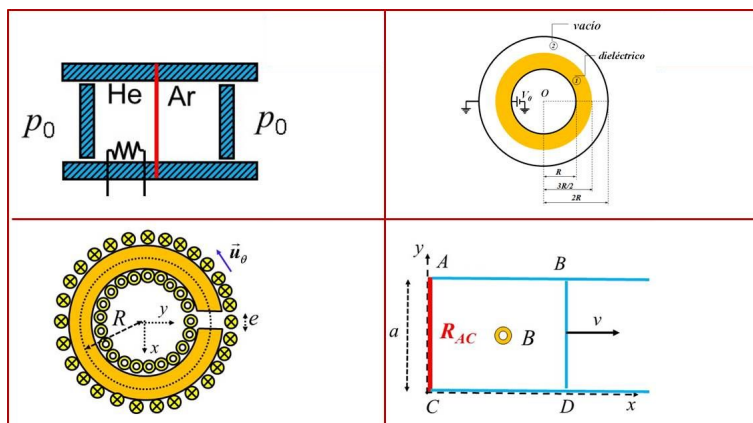
POLITÉCNICA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO

FÍSICA II

TEORÍA

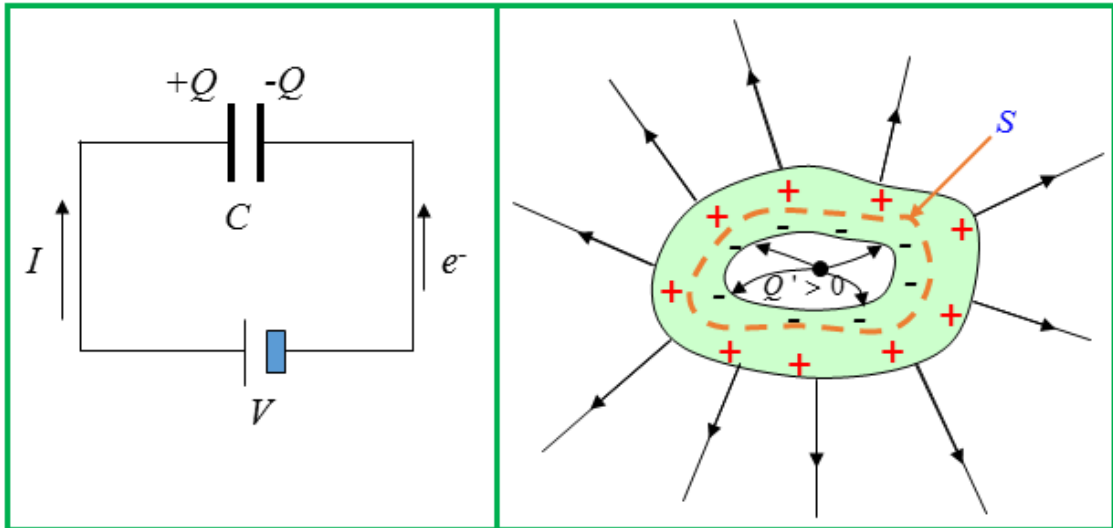
Termodinámica y Electromagnetismo





POLITÉCNICA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO



TEMA 4.- ELECTROSTÁTICA DE CONDUCTORES

José GAITE CUESTA

ÍNDICE ELECTROSTÁTICA DE CONDUCTORES

4. Electrostática de Conductores	1
4.1. Medios Conductores	1
4.2. Cuerpos conductores	2
4.2.1. Campo sobre la superficie	2
4.3. Conductores con cavidades	3
4.4. Capacidad	4
4.4.1. Conjunto de conductores con carga total nula	5
4.5. Condensadores	6
4.5.1. Condensadores: formas	7
4.5.2. Condensadores: conexión	9
4.6. Energía almacenada	11
4.7. Caso de varios conductores	12
4.8. Efecto punta	12
4.9. Cuestiones	14

4

Electrostática de Conductores

4.1. Medios Conductores

Un medio conductor es un medio material que contiene cargas eléctricas libres, es decir, que pueden moverse grandes distancias dentro del medio en respuesta a un campo eléctrico externo. Se entiende que las cargas se mueven dentro del medio pero no pueden salir de él. Los tipos fundamentales de medios conductores son:

- Material metálico: contiene electrones libres y cargas positivas fijas (iones positivos, llamados *cationes*). Por supuesto, los iones positivos sólo están fijos si el metal está en estado sólido. De todas formas, en el estado líquido, los cationes tienen menor movilidad que los electrones.
- Plasma: un gas ionizado, que contiene cargas negativas (electrones) y cargas positivas (cationes), siendo ambos tipos de carga móviles. El plasma es importante en física del espacio y física estelar (p.e., física solar), y en ciertas aplicaciones técnicas, p.e., los tubos fluorescentes.
- Líquido, fundamentalmente agua, con un *electrolito* en disolución, que produce iones móviles, positivos y negativos (llamados *aniones*). Tiene importancia en las *pilas voltaicas*, que convierten energía química en energía eléctrica.

La naturaleza conductora de un medio varía con la densidad de cargas libres y con su movilidad. Se mide mediante la *conductividad*, que se estudiará en el tema 8 que versa sobre conducción eléctrica. Los metales son muy buenos conductores, mientras que hay elementos semi-metálicos, como el silicio y el germanio, que pueden ser relativamente conductores, dependiendo de las circunstancias, y se llaman *semiconductores*. Los materiales semiconductores tienen importantes aplicaciones prácticas.

Un campo eléctrico externo provoca en un medio conductor el movimiento de sus cargas libres, es decir una *corriente eléctrica*, como se estudiará en el tema 8. El movimiento continuado de cargas es un proceso irreversible que transforma energía eléctrica en calor, por lo que debe cesar cuando no hay fuentes de energía eléctrica que lo mantengan. Se acaba llegando, pues, a un *estado estático* en el que las cargas libres se distribuyen de forma que no hay campo eléctrico dentro del conductor y, por tanto, no hay corriente eléctrica. Así ocurre en los *cuerpos conductores*, cuyo ejemplo típico es un pedazo de metal (de forma arbitraria). Este tema trata precisamente de la electrostática de los cuerpos conductores.

4.2. Cuerpos conductores

El movimiento de cargas libres producido por un campo eléctrico externo en un cuerpo conductor no puede detenerse hasta que las cargas se sitúen sobre la superficie del cuerpo y la distribución superficial sea tal que se anule el campo en su interior. Además, el campo eléctrico sobre la superficie debe ser perpendicular a ella, pues si no lo fuera, habría una corriente eléctrica superficial, que sólo se anularía tras una redistribución de la carga superficial que anulara la componente del campo tangente a la superficie. Naturalmente, estamos suponiendo que la superficie es *suave*, es decir, que tiene un plano tangente y una normal bien definidos en cada punto. En la sección 4.8 estudiaremos el “efecto punta”, donde no hay normal en un punto dado. De la perpendicularidad del campo eléctrico, se deduce que la superficie del cuerpo es una superficie equipotencial; o, para ser precisos, que cada componente *conexa* de la superficie es equipotencial. Como el potencial interior debe ser constante, para que no haya campo eléctrico interno, todo el cuerpo es equipotencial (véase sección 4.3). Resulta así que el campo eléctrico debido a un conjunto de cuerpos conductores está especificado por el valor del potencial en cada uno de ellos.

La densidad superficial de carga y el campo eléctrico sobre la superficie están relacionados como sigue:

4.2.1. Campo sobre la superficie

Ya se ha calculado, mediante el teorema de Gauss, el campo \vec{E} producido por una distribución plana uniforme e indefinida y el campo de dos distribuciones de este tipo paralelas y de signo opuesto (tema 3). El cálculo del campo sobre la superficie de un cuerpo conductor se basa en esos cálculos. Fijémonos en que, dado que la superficie es suave, cerca de ella, se puede sustituir un elemento de superficie por su plano tangente y, además, la densidad superficial de carga es prácticamente constante en ese elemento. En otras palabras, en cada punto de la superficie, el campo eléctrico es igual al producido por una distribución uniforme e indefinida en el plano tangente y con densidad superficial igual a la del punto. Pero en un conductor, sólo existe campo en un lado, el exterior, mientras que debe anularse en el otro lado, el interior. Esto es análogo a lo que ocurre en cada una de las distribuciones planas en el caso de dos distribuciones paralelas de signo opuesto. Apliquemos, pues, el teorema de Gauss a una cajita de altura despreciable y tapas paralelas a la superficie (Fig. 4.1).

Despreciando el borde de la caja, el flujo total es $\phi = E_2A + E_1A$ donde A es el área de cada tapa, $E_1 = E$ es el campo externo y $E_2 = 0$ es el campo interno. Por tanto,

$$\phi = 0 + EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \quad (4.1)$$

siendo σ la densidad superficial de carga.

De aquí, el campo vale

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (4.2)$$

y es normal a la superficie, estando orientado hacia afuera si $\sigma > 0$.

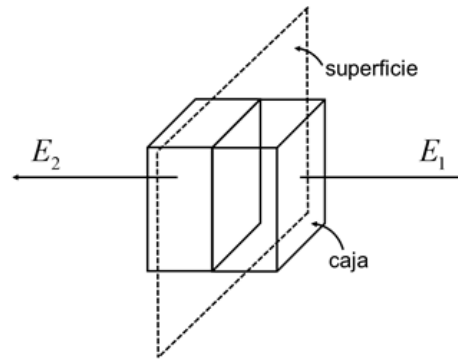


Figura 4.1: Aplicación del teorema de Gauss a una caja de tapas paralelas a la superficie.

Naturalmente, el campo \vec{E} no es continuo en la superficie, pero el potencial sí lo es. Se produce una discontinuidad de \vec{E} , en general, cuando hay una superficie cargada, que suele separar dos medios diferentes (como se estudia en el tema 5). En un cuerpo conductor dado, tendremos, en general, que $\sigma \neq 0$ en su superficie, pero la carga superficial total ha de anularse si el conductor no está cargado, como un todo. Entonces, $\oint \sigma dS = 0$, y σ debe cambiar de signo en la superficie (si hay campo y σ no es uniformemente nula). Si la carga total en el conductor es Q :

$$\oint \sigma dS = Q = \varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (4.3)$$

donde $\vec{E} \parallel d\vec{S}$.

4.3. Conductores con cavidades

Tras demostrar que cada componente de la superficie de un cuerpo conductor es equipotencial, hemos concluido que todo el conductor es equipotencial. Analicemos en detalle qué ocurre si la superficie es disconexa. Naturalmente, si la superficie de un conductor es disconexa es porque hay una componente que constituye la superficie exterior y una o varias interiores, que limitan cavidades dentro del conductor. Es fácil ver que estas cavidades están al mismo potencial que el conductor, siempre que no haya dentro de ellas cargas prefijadas: la solución de las ecuaciones electrostáticas para el conductor sólido, es decir, rellenando sus cavidades, y tal que todo el interior es equipotencial, sigue siendo válida si imaginamos que hay cavidades en él. La misma densidad de carga en la superficie exterior del cuerpo anula el campo en su interior tanto si tiene cavidades como si no.

Sin embargo, si hay una o varias cargas en posiciones prefijadas dentro de una cavidad, crean un campo en ella que altera el potencial en la cavidad y en su superficie. Aunque el potencial en la superficie interior debe ser constante, ya no tiene por qué ser el mismo que cuando la cavidad está vacía, en cuyo caso está determinado por condiciones exteriores al cuerpo. Cuando hay campo dentro de una cavidad, debe haber densidad de carga en la superficie que la rodea (Fig. 4.2). Además, como el conductor sólido debe ser equipotencial, si se altera el potencial en una superficie interior, el potencial en la superficie exterior y la densidad de carga en ella también

se alteran. El cambio producido en esta densidad y en el campo exterior es el que corresponde a la carga total contenida dentro de la superficie exterior, incluyendo la de la cavidad.

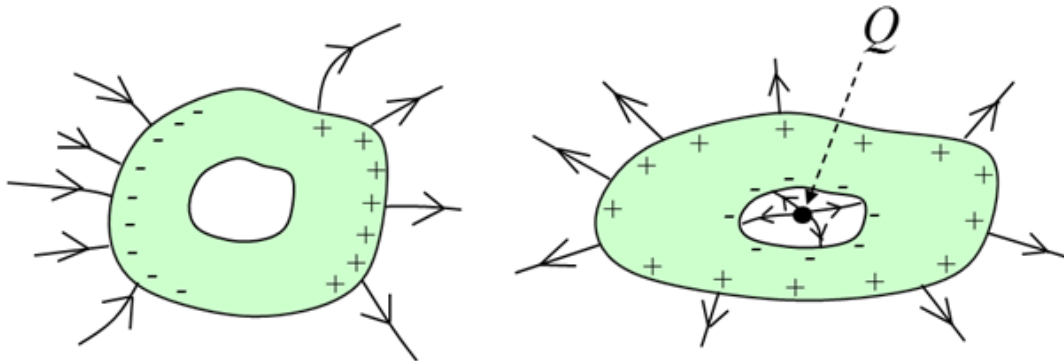


Figura 4.2: Distribución de la carga en conductores con cavidades sin o con carga interior. En el primer caso no hay densidad en la superficie interior y en el segundo sí. Se demuestra por Gauss que la carga en la superficie interior es igual y opuesta a la carga neta en el interior de la cavidad.

La carga total encerrada dentro de una cavidad puede ser positiva, negativa o nula. Si es positiva, el potencial del conductor crece, mientras que disminuye si es negativa. Si la carga encerrada es nula, puede aún crear un campo si consiste de varias cargas separadas cuya suma se anula, pero el potencial del conductor no cambia.

4.4. Capacidad

De la proporcionalidad entre el campo producido por un cuerpo conductor y la carga que contiene, en conjunción con el principio de superposición, se deduce que, en un conjunto de cuerpos conductores, el potencial de uno cualquiera es proporcional a la carga de cada uno de ellos, independientemente. Dicho de otra forma, se deduce que debe existir una relación lineal entre sus potenciales y sus cargas. Si sólo hay un cuerpo, y suponiendo que el potencial se anula en el infinito, el potencial del cuerpo es evidentemente proporcional a su carga. El potencial del cuerpo se anula cuando no hay carga, con lo que el campo eléctrico desaparece. La relación de proporcionalidad se escribe:

$$Q = CV \quad (4.4)$$

donde Q es la carga en el conductor, V su potencial, y la constante $C > 0$ se llama **capacidad**. La capacidad depende sólo de la geometría del cuerpo y su nombre se debe a que representa la cantidad de carga que contiene el cuerpo a un potencial dado; es decir, un cuerpo con mucha capacidad puede tener mucha carga sin que aumente mucho su potencial.

La unidad de medida de capacidad es el culombio/voltio = faradio (F), en honor a Faraday. Es fácil ver que el faradio es una unidad muy grande en situaciones normales. Tomemos, por ejemplo, una esfera conductora de radio R , con σ constante, por simetría. Su potencial es:

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (4.5)$$

Deducimos que la capacidad es (no confundir la magnitud capacidad C con el culombio como unidad C):

$$\begin{aligned} C &= 4\pi\epsilon_0 R = 1.001 \cdot 10^{-10} [\text{C}^2\text{N}^{-1}\text{m}^{-2}]R = 1.001 \cdot 10^{-10} [\text{CV}^{-1}\text{m}^{-1}]R = \\ &= 1.001 \cdot 10^{-10} [\text{F}] R[\text{m}] \end{aligned}$$

es decir, que la capacidad de la esfera en faradios es 10^{-10} veces su radio en metros. Este factor tan pequeño se debe a que ϵ_0 es muy pequeño. Para medir capacidades en el laboratorio, las unidades habituales son el microfaradio, $\mu\text{F} = 10^{-6}\text{F}$, el nanofaradio, $\text{nF} = 10^{-9}\text{F}$, y el picofaradio, $\text{pF} = 10^{-12}\text{F}$.

Cuando hay varios conductores, es necesario, en general, definir varios coeficientes de capacidad, que determinan la relación lineal entre sus cargas y sus potenciales. Describimos el caso general en la sección 4.7. Sin embargo, hay un caso particular de varios conductores que conviene estudiar antes.

4.4.1. Conjunto de conductores con carga total nula

El caso de $N+1$ cuerpos conductores con carga total nula se puede asimilar al caso de N cuerpos con carga total no nula. Esto se debe a las propiedades matemáticas de las ecuaciones generales de la electrostática. Si tenemos un sistema de cargas de cualquier tipo en una región acotada, el campo que producen a gran distancia es diferente si la carga total es nula o no: si es nula, sólo un número limitado de líneas de campo tienden al infinito, mientras que, si no lo es, el conjunto parece, desde gran distancia, una carga puntual, cuyas líneas de campo tienden todas al infinito. En este caso, es posible imaginar que hay, en el infinito, a donde se dirige el flujo del campo eléctrico, una carga de signo opuesto a la carga total y que la compensa. De esta forma, N cargas con suma no nula se transforman en $N+1$ con suma nula, aunque una esté en el infinito. Esta imagen tiene fundamento matemático y es útil para tener una idea precisa del significado que se atribuye al infinito en electrostática (y otras teorías de campos), como se explica a continuación.

Se estudia en topología que el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 no es *compacto*, puesto que las sucesiones de puntos que se alejan monótonamente del origen no tienden a un punto límite. Por eso, se añade el *punto del infinito* (un recurso general en topología). Por otra parte, las ecuaciones generales de la electrostática se pueden transformar geoméricamente de forma que sus soluciones se transforman entre sí; por ejemplo, mediante rotaciones y traslaciones (transformaciones euclídeas). Además, existen transformaciones más generales, las transformaciones *conformes*, que pueden transformar el punto del infinito en uno a distancia finita. Por ejemplo, una carga puntual y su campo, equivalentes a la misma carga y una de signo opuesto en el punto del infinito, se pueden transformar en un par de cargas puntuales de signo opuesto a distancia finita, con su campo correspondiente. Así se puede decir, en general, que un conjunto

de N cargas con suma no nula es equivalente a otros conjuntos de $N+1$ cargas, con las mismas N cargas y otra compensadora, que puede estar en el infinito o no.

4.5. Condensadores

Tomemos un sistema de *dos* conductores con carga total nula, o sea, uno con carga $Q > 0$ y potencial V_1 y el otro con carga $-Q$ y potencial $V_2 < V_1$. Este sistema se llama **condensador**, y según lo expuesto en la sección 4.4.1 es equivalente a un solo conductor con carga Q . El sistema se caracteriza, pues, por una sola capacidad:

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} \quad (4.6)$$

que da la relación entre Q y la diferencia de potencial $\Delta V = V_1 - V_2$. Naturalmente, el caso de un solo conductor equivale a $V_2 = V_\infty = 0$, es decir a poner la carga $-Q$ en el infinito; por ejemplo, en una superficie esférica de radio $R \rightarrow \infty$.

Como en el caso de un cuerpo, C sólo depende de la geometría, que involucra ahora a ambos cuerpos. El caso más sencillo es el del condensador plano: el sistema de dos placas planas iguales y paralelas, o sea, formado por una placa de área A y el resultado de desplazar esta placa una distancia d en una dirección perpendicular (Fig. 4.3). Su capacidad depende de A y d , y, en menor medida, de la forma de la placa. El cálculo de C es como sigue. Comencemos considerando dos placas infinitas. Entonces, σ es constante y el campo eléctrico entre las placas, $E = \sigma/\epsilon_0$, también es constante. Por ello:

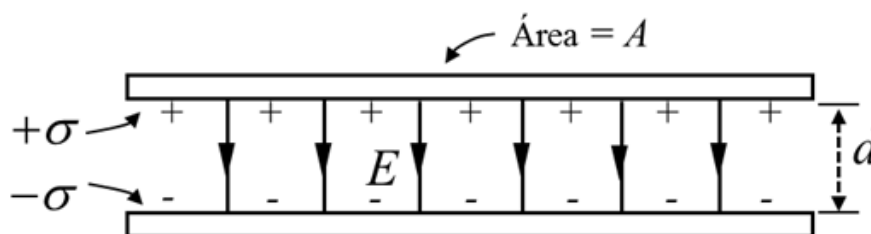


Figura 4.3: Condensador de placas, con constante.

$$\Delta V = Ed = \frac{\sigma d}{\epsilon_0} \Rightarrow C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\sigma A}{\sigma d/\epsilon_0} = \frac{\epsilon_0 A}{d}. \quad (4.7)$$

Si las placas son finitas, aún $E = \sigma/\epsilon_0$, pero la densidad de carga σ ya no es constante en toda la placa, pues ha de variar cerca del borde. El campo también se deforma en el borde (véase Fig. 4.4). La importancia del *efecto de borde* disminuye si el área A de las placas es grande en relación con su separación d . Para ser precisos, el efecto de borde disminuirá con la razón d^2/A , que es *adimensional* y, por tanto, independiente del *tamaño* en un modelo de condensador dado. De hecho, el análisis dimensional conduce a la expresión:

$$C = \epsilon_0 \sqrt{A} f\left(\frac{\sqrt{A}}{d}\right) \quad (4.8)$$

donde $\varepsilon_0 \sqrt{A}$ mide la capacidad dada por el tamaño de placa (compárese con $C = 4\pi\varepsilon_0 R$ para un conductor esférico de radio R) y f es una función adimensional del factor de forma adimensional, que elegimos como \sqrt{A}/d . Si alejamos una placa de otra, este factor de forma tiende a cero, a la vez que la capacidad del condensador se convierte en la capacidad de una sola placa, $C = c_{placa}\varepsilon_0\sqrt{A}$, donde c_{placa} es una constante numérica que sólo depende de la forma de la placa (p.e., $c_{disco} = 8/\sqrt{\pi}$). Por tanto, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = c_{placa}$. Naturalmente, según la ec. [4.7], $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.

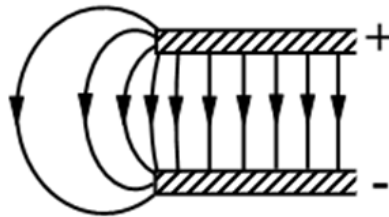


Figura 4.4: Líneas de campo en el borde de un condensador plano-paralelo.

Deducimos que f es una función creciente, y que conviene que su argumento sea grande para aumentar la capacidad del condensador. Es decir, dadas las placas (y su área), conviene acercarlas cuanto sea posible, valiendo entonces la fórmula [4.7].

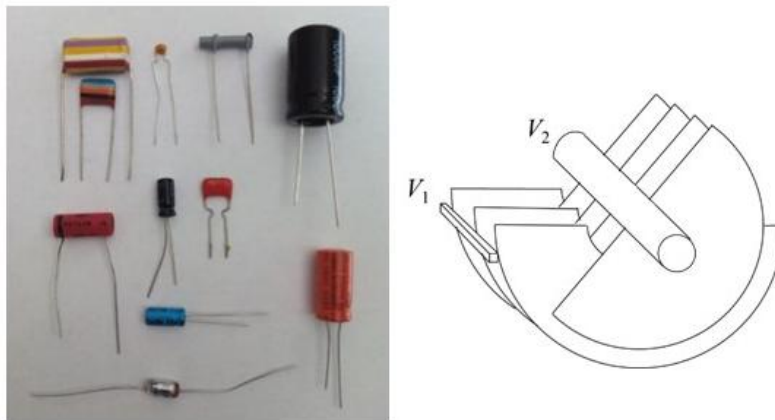


Figura 4.5: Varios tipos de condensadores, y esquema de un condensador de capacidad variable.

4.5.1. Condensadores: formas

Los condensadores planos se utilizan en tecnología eléctrica. Las placas son circulares o rectangulares, normalmente, pero también son típicos los condensadores con placas formadas por sectores de dos círculos, que se pueden superponer más o menos para variar el área efectiva y así la capacidad. Para aumentar la capacidad de un condensador plano, se puede aumentar A o

disminuir d . Hay una d mínima, si se quiere evitar que haya corriente entre las placas (mediante chispa o arco). El área se puede aumentar sin un consiguiente aumento de volumen, de dos formas: (i) apilando varias placas y conectando las placas alternas; (ii) haciendo placas flexibles que se puedan enrollar sobre sí mismas, formando un cilindro (véase Fig. 4.5). Los condensadores variables con pilas de placas son habituales en receptores de radio. Los condensadores con placas enrolladas en un cilindro son un tipo de condensadores de placas curvas. La fórmula [4.7], que da C cuando \sqrt{A}/d es grande, es aún aproximadamente correcta en casos en que las placas no son planas. Mostramos unos ejemplos con placas curvas paralelas a continuación.

Otras geometrías

Consideramos la geometría cilíndrica, sugerida por el método de enrollar un condensador plano, pero antes la geometría esférica, que es el caso más fácil.

■ Condensador esférico:

Consiste de dos cáscaras esféricas concéntricas de radios R_1 y $R_2 > R_1$, ambas conductoras (la cáscara interior se puede sustituir por una esfera maciza del mismo radio) (Fig. 4.6). Teniendo en cuenta la simetría esférica y el teorema de Gauss, el módulo del campo eléctrico entre ambas cáscaras sólo depende de la carga Q en la interior. La carga $-Q$ en la cáscara externa neutraliza la carga interna Q , de forma que el campo se anula *fuera* de la capa externa, es decir, cuando $r > R_2$. La diferencia de potencial se halla por integración del campo eléctrico entre las cáscaras, $E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$:

$$\Delta V = V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (4.9)$$

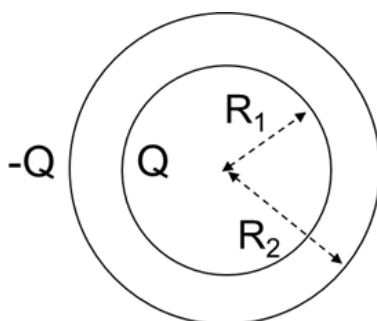


Figura 4.6: Condensador esférico.

Obtenemos, pues:

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} = 4\pi\epsilon_0 R_1 \left(1 + \frac{R_1}{d} \right) \quad (4.10)$$

donde $d = R_2 - R_1$ es la separación entre las cáscaras. Si expresamos C en términos del área interna, $A = 4\pi R_1^2$, podemos ver que se ajusta a la forma de la ec. [4.8], como es lógico, pues el análisis dimensional conduce a ella también en este caso. Además, $f(x) = \sqrt{4\pi} + x$, que cumple las mismas propiedades que en el condensador plano; es decir, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ es una constante, ahora $\sqrt{4\pi}$, que nos da la capacidad de una esfera aislada, y $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/x = 1$, que equivale a tener, como en el caso plano, $C = \epsilon_0 A/d$, cuando $d \ll R_1$.

■ **Condensador cilíndrico:**

Consiste de dos cáscaras conductoras cilíndricas coaxiales de radios R_1 y $R_2 > R_1$ (la cáscara interior se puede sustituir por un cilindro macizo del mismo radio) (Fig. 4.7). Si $R_2 \ll L$, podemos despreciar los efectos de borde y tomar los cilindros de longitud infinita. Según el teorema de Gauss, el módulo del campo entre las cáscaras es $E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$, siendo la densidad lineal de carga $\lambda = Q/L$, es decir, la carga por unidad de longitud en la capa interna. La diferencia de potencial:

$$\Delta V = V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{R_2}{R_1}. \quad (4.11)$$

De aquí, obtenemos:

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(R_2/R_1)}. \quad (4.12)$$

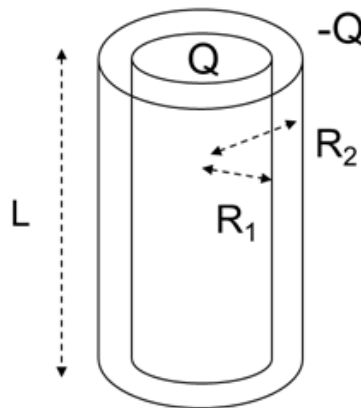


Figura 4.7: Condensador cilíndrico.

Si la distancia d entre las cáscaras es pequeña, $d \ll R_1$,

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(1 + d/R_1)} \rightarrow \frac{2\pi\epsilon_0 L R_1}{d} = \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad (4.13)$$

donde se ha usado la conocida igualdad $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln(1+x)/x) = 1$.

4.5.2. Condensadores: conexión

En los circuitos eléctricos, puede ser útil conectar los terminales de varios condensadores de diversas maneras, mediante conductores, normalmente lineales (cables) y de capacidad despreciable. Por ejemplo, dados dos condensadores de placas, podemos conectar las placas positivas (con carga positiva) entre sí y las negativas también. Esta conexión se llama *conexión en paralelo*. A continuación describimos las conexiones en paralelo y en serie (Fig. 4.8), y otras más complicadas. Debe señalarse que, cuando tenemos varios cuerpos conductores, la carga de cada uno crea un campo que afecta a todos los demás (sección 4.7). La separación

en condensadores individuales, con un par de placas o de terminales cada uno, es sólo una aproximación, en que se supone que el campo en cada condensador no afecta a los demás.

Conexión en paralelo: Sean n condensadores conectados en paralelo, como en la Fig. 4.8. Como las placas positivas están conectadas, están a un potencial común, al igual que las negativas. La carga total en cada conjunto es la suma de todas las cargas; es decir, $Q = Q_1 + \dots + Q_n = (C_1 + \dots + C_n)\Delta V$, donde ΔV es la diferencia de potencial entre placas positivas y negativas. Por tanto, el conjunto de condensadores constituye un solo condensador de capacidad

$$C = C_1 + \dots + C_n. \quad (4.14)$$

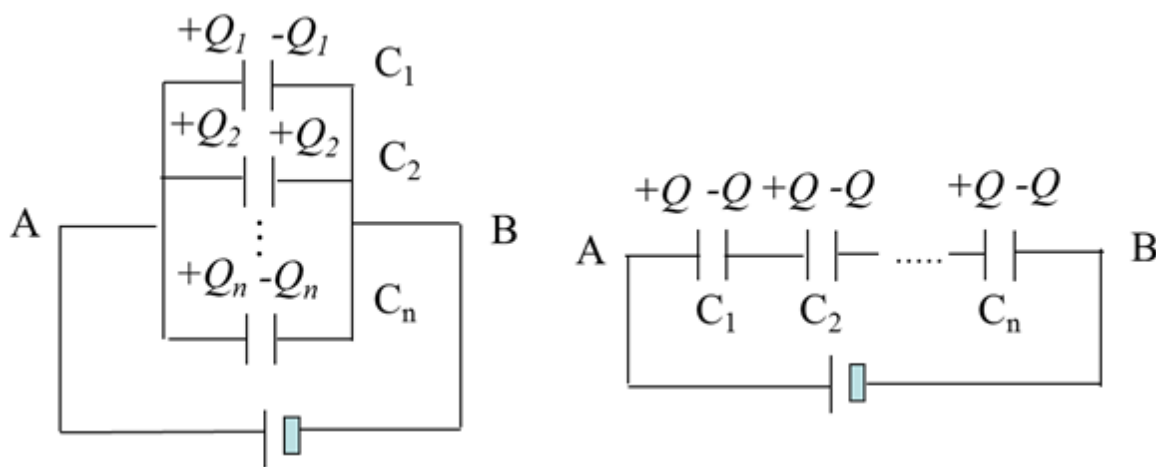


Figura 4.8: Conexión de condensadores en paralelo (izquierda) y en serie (derecha).

Conexión en serie: n condensadores se conectan en serie conectando una placa del 1° con otra del 2°, la placa libre del 2° con una del 3°, etc., hasta conectar la libre del $n-1$ con una del n , como en la Fig. 4.8. Si hay una diferencia de potencial ΔV entre las placas libres de los condensadores primero y último, habrá una carga Q en la primera y una carga $-Q$ en la última, que producirán cargas de igual magnitud pero signos alternos en las placas intermedias. Por otra parte, las diferencias de potencial en los condensadores individuales, es decir, en los pares de placas opuestas, deben sumar la diferencia de potencial total:

$$\Delta V = \Delta V_1 + \dots + \Delta V_n = \left(\frac{1}{C_1} + \dots + \frac{1}{C_n} \right) Q. \quad (4.15)$$

Concluimos que el conjunto de condensadores constituye un solo condensador de capacidad C , dada por

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \dots + \frac{1}{C_n}. \quad (4.16)$$

Se pueden realizar otros tipos de conexiones que no se reducen a una combinación de las anteriores. Por ejemplo, si en el sistema de condensadores de la Fig. 4.9 fijamos la diferencia de

potencial entre A y B, tenemos dos pares de condensadores en serie, y los tres condensadores resultantes están conectados en paralelo. Sin embargo, si fijamos la diferencia de potencial entre C y D, no podemos reducir el sistema mediante las reglas dadas, y hay que utilizar condiciones generales: la anulación de las cargas en los conjuntos de placas conectados a A y a B, respectivamente, que proporciona dos ecuaciones, mientras que las diferencias de potencial entre los diversos puntos proporcionan tres ecuaciones más, permitiendo hallar las cargas en los cinco condensadores.

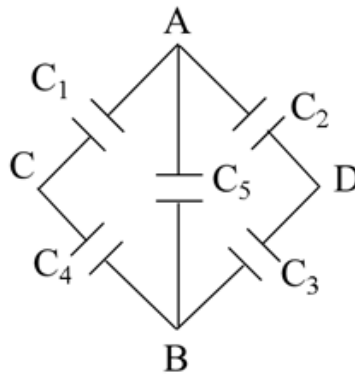


Figura 4.9: Otros tipos de conexiones de condensadores.

4.6. Energía almacenada

La energía almacenada en un conductor aislado con carga Q y potencial V se calcula fácilmente con el método general de electrostática (ec. [3.168]), puesto que el potencial es constante en el conductor:

$$U_e = \frac{1}{2} \int V dq = \frac{1}{2} V \int dq = \frac{1}{2} VQ = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}. \quad (4.17)$$

Naturalmente, el cálculo de la energía de un condensador con carga Q y diferencia de potencial $\Delta V = V_1 - V_2$ es similar y da el mismo resultado:

$$U_e = \frac{1}{2} V_1 Q - \frac{1}{2} V_2 Q = \frac{1}{2} Q \Delta V = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}. \quad (4.18)$$

Si tenemos N conductores,

$$U_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N V_i Q_i \quad (4.19)$$

que se puede expresar en términos de sólo los potenciales o sólo las cargas, introduciendo la relación entre unos y otras, que estudiamos en la próxima sección.

Un sistema de cuerpos conductores tiende a la mínima energía compatible con las ligaduras del sistema. Por ejemplo, sean dos conductores con capacidades C_1 y C_2 y cargas Q_1 y Q_2 , que

tendrán potenciales $V_1 \neq V_2$, en general. Suponemos que están lo suficientemente alejados para que sus campos no interfieran, lo que implica que $V_1 = Q_1/C_1$ y $V_2 = Q_2/C_2$. Conectemos los dos cuerpos mediante un cable de capacidad despreciable, de forma que puedan intercambiar carga, manteniendo constante $Q_1 + Q_2$. Es fácil demostrar que el estado de mínima energía se alcanza cuando las cargas se reparten de forma que $Q_1/C_1 = Q_2/C_2$, es decir, cuando los cuerpos alcanzan un potencial común.

4.7. Caso de varios conductores

Cuando tenemos N cuerpos conductores, hay una relación lineal entre el potencial de cada uno y todas las cargas, o, viceversa, una relación lineal entre la carga de cada uno y todos los potenciales. Podemos escribir esta relación así:

$$Q_i = C_{i1}V_1 + \dots + C_{iN}V_N, \quad i = 1, \dots, N \quad (4.20)$$

donde las constantes C_{ij} caracterizan la geometría del conjunto de cuerpos, o sea, las formas y tamaños de los cuerpos y las orientaciones y distancias relativas entre ellos. El caso más sencillo es el de dos conductores con carga total *no* nula (si es nula, es el caso ya visto). Podemos imaginar, por ejemplo, un condensador de placas con carga neta.

Sean, pues, dos conductores, con Q_1 a V_1 y Q_2 a V_2 , y tal que $Q_1 + Q_2 \neq 0$. La relación lineal entre cargas y voltajes es:

$$\begin{aligned} Q_1 &= C_{11}V_1 + C_{12}V_2 \\ Q_2 &= C_{21}V_1 + C_{22}V_2 \end{aligned} \quad (4.21)$$

También se puede escribir en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Mediante un argumento energético, que compara la carga de ambos cuerpos en diferente orden hasta un estado final con Q_1 y Q_2 dadas, se puede demostrar que $C_{12} = C_{21}$, es decir, que la matriz es simétrica. Esto se puede generalizar a un número de conductores arbitrario.

4.8. Efecto punta

El plano, la esfera y el cilindro son superficies homogéneas, con las mismas propiedades geométricas en cada punto, en concreto, la misma curvatura. Esto implica que la densidad de carga superficial σ y el campo eléctrico E son iguales en cada punto. Si la superficie de un cuerpo conductor no tiene curvatura constante, σ y E varían. De hecho, si la superficie no es suave, o sea, tiene aristas y/o picos (puntas), donde la curvatura diverge, el campo cerca de ellos se hace muy grande. Esto se llama “efecto punta” y fue descubierto por B. Franklin.

El fundamento del “efecto punta” se puede demostrar mediante un ejemplo muy sencillo. Sean dos esferas conductoras de tamaños muy diferentes, $R_2 \ll R_1$, conectadas por un cable, como en la Fig. 4.10. Despreciemos la capacidad del cable, o sea, la fracción de carga en él, y también el efecto del campo de cada esfera sobre la otra.

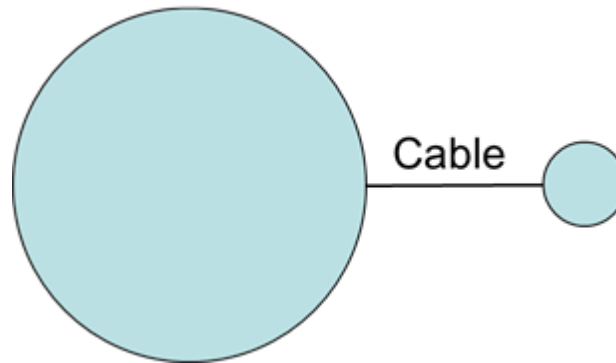


Figura 4.10: Esferas de tamaño muy diferente para demostrar el efecto punta.

Con esta aproximación, los potenciales de ambas esferas son:

$$V_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1}, \quad V_2 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}. \quad (4.23)$$

Por estar conectadas, $V_1 = V_2$, que implica $\frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2}$, o sea, las cargas son proporcionales a los radios. De aquí, la razón entre los campos sobre ambas esferas es:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{Q_1/R_1^2}{Q_2/R_2^2} = \frac{R_2}{R_1} \quad (4.24)$$

es decir, los campos son inversamente proporcionales a los radios.

Si en un punto de la superficie de un conductor, el campo es inversamente proporcional al radio de curvatura, es decir, proporcional a la curvatura, hemos de esperar que el campo diverja en las aristas y las puntas. Para establecer esto, hay que calcular el campo de un conductor con una superficie con aristas y/o puntas. Sea, por ejemplo, el campo de un cubo conductor cargado. Pero es muy difícil realizar este cálculo analíticamente. Sin embargo, se puede modelar una arista aislada como el ángulo diedro formado por dos semiplanos conductores infinitos. En este caso, se puede establecer analíticamente que el campo cerca de la arista va como $r^{-\left(\frac{\pi-\alpha}{2\pi-\alpha}\right)}$, donde α es el valor del ángulo diedro y r es la distancia a la arista. Si $\alpha \rightarrow 0$, como en el borde de una placa conductora, entonces el campo va como $r^{-1/2}$. El campo en una punta se modela mediante un cono conductor infinito. La expresión del campo, cuando el ángulo es pequeño, es $r^{-1+\varphi}$, donde φ es una cantidad positiva, con una dependencia complicada del ángulo pero tal que $\varphi \rightarrow 0$ cuando el ángulo tiende a cero.

Estos cálculos confirman la divergencia del campo en las aristas y puntas, ocurriendo la mayor divergencia, r^{-1} , en el caso de una punta muy aguda (compárese con la divergencia r^{-2} correspondiente a una partícula puntual). La aplicación más conocida del efecto punta se debe al propio B. Franklin: el pararrayos. Por otra parte, de la divergencia del campo en el borde de

una placa ($r^{-1/2}$) podemos concluir que σ también diverge y hay una acumulación de carga en el borde que debe contribuir al efecto de borde en las placas de un condensador. Sin embargo, el cálculo demuestra que la carga neta total cerca del borde no es significativa.

4.9. Cuestiones

- Sea un conductor con una cavidad interna. Demostrar que el campo eléctrico en la cavidad es nulo (efecto *jaula de Faraday*). ¿Por qué una carga de prueba en un punto de la cavidad es inmune al movimiento de posibles cargas externas, cuyo campo en ese punto varía?
- Una jaula de Faraday protege de las influencias eléctricas externas a los objetos en el interior. ¿Protege también de las influencias provenientes del interior a los objetos (cargados) externos? Por ejemplo, si se encierra en la cavidad una carga eléctrica, ¿podrá un observador externo detectar su campo si:
 - la jaula está aislada?
 - está conectada a tierra?
- Dos condensadores planos de capacidades C_1 y C_2 se han cargado hasta tener diferencias de potencial V_1 y V_2 , respectivamente ($V_1 \neq V_2$). Demostrar que al conectar estos condensadores en paralelo, la energía electrostática común de los mismos disminuirá. ¿Por qué y cómo ocurre esto?