ELECTROSTÁTICA DE CONDUCTORES

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

Curso 2014/15

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN
DISTRIBUCIÓN DE CARGA
- CONDUCTORES CON CAVIDAD Y SIN CAMPO EXTERNO
- CONDUCTORES CON CAVIDAD Y CON CAMPO EXTERNO
- CONDUCTOR DESCARGADO CON CARGA $Q'>0$ EN LA CAVIDAD
- CONDUCTOR CARGADO (Q) CON CARGA $Q'>0$ EN LA CAVIDAD

CAMPO Y POTENCIAL EN LA SUPERFICIE
CAPACIDAD
CONDENSADORES
ASOCIACIÓN DE CONDENSADORES
- SERIE
- PARALELO

ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

ÍNDICE

APLICACIONES

CONDENSADOR PLANO
CONDENSADOR ESFÉRICO
CONDENSADOR CILÍNDRICO
ASOCIACIÓN DE CONDENSADORES
CASO GENERAL

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

INTRODUCCIÓN

CONDUCTOR
Los electrones más superficiales de sus átomos se mueven fácilmente en el seno de la sustancia.

CONDUCTOR NEUTRO
La carga total del conductor, positiva más negativa, es cero.

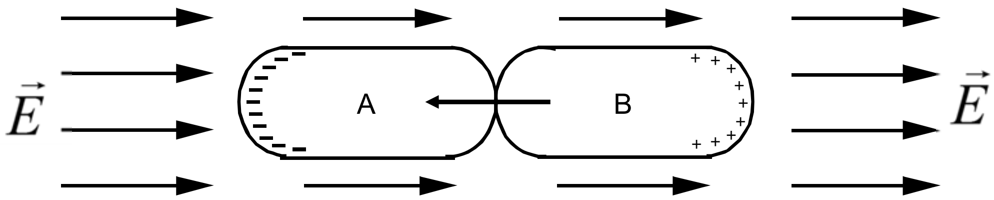
CONDUCTOR CARGADO
Si tiene exceso de electrones decimos que está cargado negativamente y si tiene defecto de electrones decimos que tiene carga positiva o que está cargado positivamente.

CONDUCTOR EN EQUILIBRIO
En todos los casos, en un conductor aislado, la carga que adquiere, positiva o negativa, produce un rápido movimiento de los electrones libres y se llega inmediatamente a una situación de equilibrio.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

INTRODUCCIÓN

CARGA POR CONTACTO
Ponemos en contacto dos conductores sin carga (neutros) y los situamos en una región donde exista un campo eléctrico.

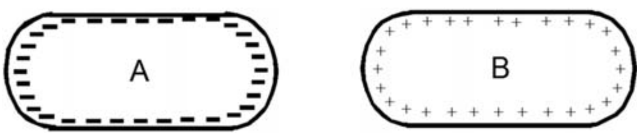


El campo eléctrico actúa sobre los electrones libres que se mueven en sentido contrario al campo (de B hacia A). Se produce un exceso de electrones en A y un defecto de electrones en B.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

INTRODUCCIÓN

Separamos los conductores y suprimimos el campo.

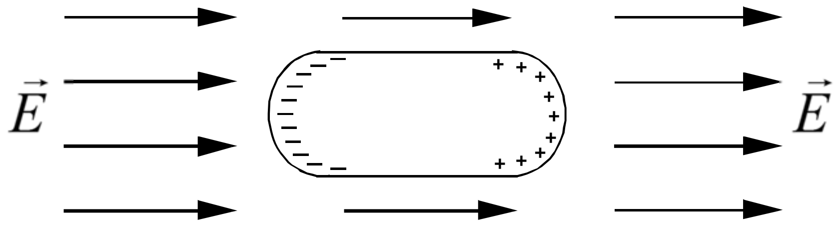


Los conductores quedarán cargados, uno negativamente (A) y otro positivamente (B).

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

INTRODUCCIÓN

Otra forma de conseguir cargar un conductor neutro es colocarlo en presencia de un campo eléctrico.

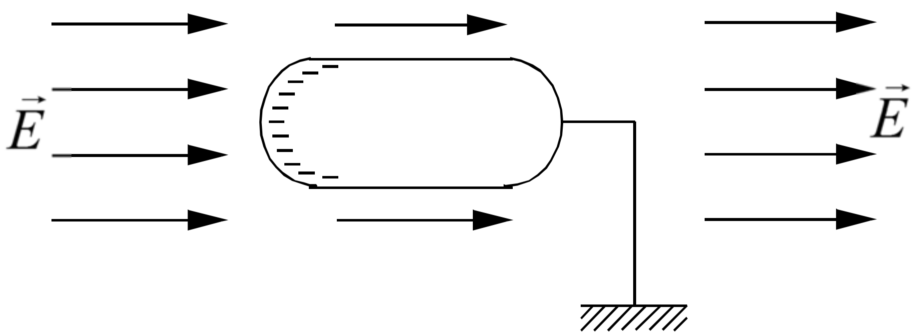


Los electrones se redistribuyen, aunque la carga neta sigue siendo la misma (cero) y si quitamos el campo la redistribución desaparece.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

INTRODUCCIÓN

Conectamos la parte derecha del conductor a tierra mediante un hilo conductor.



Los electrones que suben desde tierra neutralizan inmediatamente la carga positiva acumulada. Cortamos el hilo y el conductor queda cargado negativamente (carga por inducción).

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

INTRODUCCIÓN

En equilibrio termodinámico, la energía electrostática debe ser mínima.

$$U_e = \frac{1}{2}\int_{\mathrm{v}} \rho(\vec{r})V(\vec{r})d\mathrm{v}$$

Tampoco puede haber corriente $\vec{J} = \vec{0}$, por tanto, en electrostática en el interior del conductor $\vec{E} = \vec{0}$, de este modo no hay fuerzas sobre cargas libres, y la densidad de carga es nula.

$$\rho = \varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = 0$$

Se verá en conducción $\vec{J} = \sigma_c \vec{E}$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

INTRODUCCIÓN

Lo anterior implica que el potencial en el interior del conductor es constante.

$$\vec{E} = -\nabla V \rightarrow V = cte$$

En la superficie puede haber una densidad de carga σ, ya que los electrones no son libres para dejar el conductor y aparecen fuerzas normales a la superficie que no producen movimiento de cargas.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

DISTRIBUCIÓN DE CARGA

En electrostática los electrones deben estar en equilibrio.

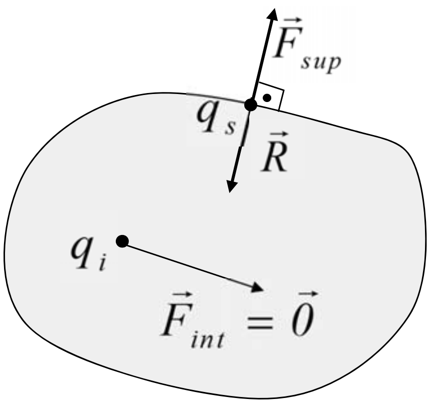
Si en el interior del conductor existiera campo eléctrico los electrones se moverían.

Si en la superficie del conductor existiera una componente del campo en la dirección tangencial los electrones se moverían, luego el campo debe ser normal a la superficie.

Es decir, el campo en el interior debe ser nulo y en la superficie debe ser perpendicular a ella.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

DISTRIBUCIÓN DE CARGA



$$\vec{F}_{sup} = q_s \vec{E}_{sup}$$

$$\vec{F}_{int} = q_i \vec{E}_{int} = \vec{0}$$

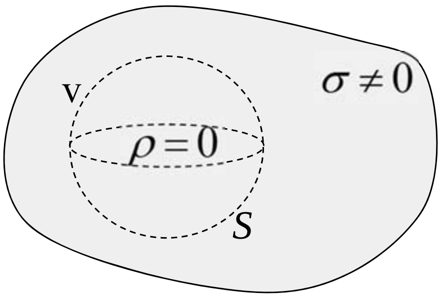
$$\vec{0} = \vec{E}_{\text{int}} = -\nabla V \Rightarrow V = cte$$

El potencial en el interior del conductor es constante.

El conductor es un volumen equipotencial.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

DISTRIBUCIÓN DE CARGA



Si aplicamos el Teorema de Gauss con una esfera en el interior del conductor:

$$0 = \oint_S \vec{E}_{\text{int}} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\text{v}} \rho(\vec{r}) d\text{v} \Rightarrow \rho = 0$$

La carga neta en el interior debe ser nula.

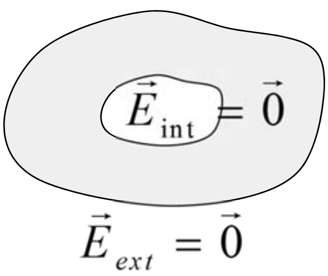
Si el conductor está cargado, la carga debe estar distribuida en la superficie como densidad superficial σ

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

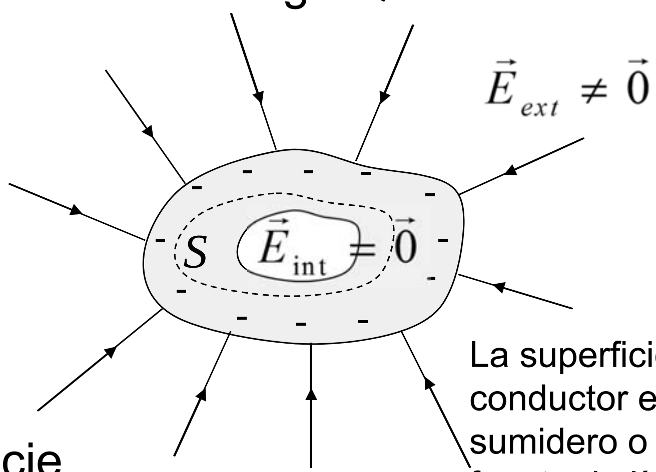
DISTRIBUCIÓN DE CARGA

CONDUCTORES CON CAVIDAD Y SIN CAMPO EXTERNO

Sin carga



Con carga Q<0



La superficie del conductor es sumidero o fuente de líneas de campo.

Las líneas de campo son perpendiculares a la superficie

Si tiene carga, está en la superficie exterior.

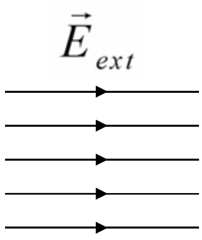
$$0 = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{interior}}}{\varepsilon_0} \Rightarrow Q_{\text{interior}} = 0$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

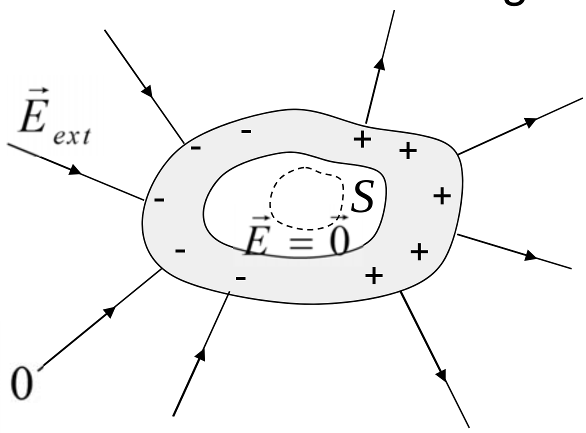
DISTRIBUCIÓN DE CARGA

CONDUCTORES CON CAVIDAD Y CON CAMPO EXTERNO

Sin conductor



Con conductor sin carga



$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{dentro}=0}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}=0$$

El conductor sigue descargado pero redistribuye sus cargas y modifica la forma de las líneas de campo exterior.

Aplicando Gauss, el campo en el interior de la cavidad es nulo.

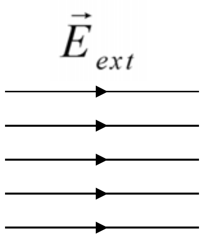
Es el efecto de pantalla electrostática (Jaula de Faraday)

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

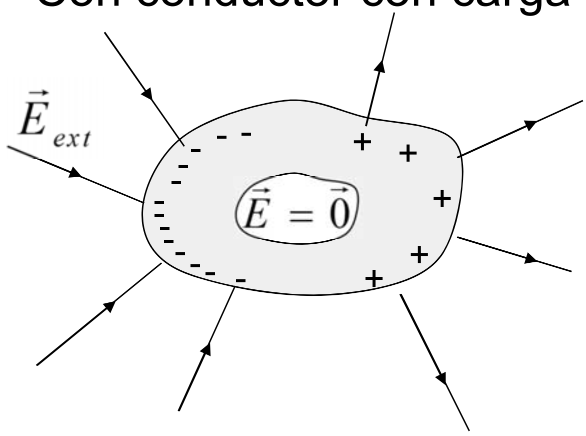
DISTRIBUCIÓN DE CARGA

CONDUCTORES CON CAVIDAD Y CON CAMPO EXTERNO

Sin conductor



Con conductor con carga Q<0



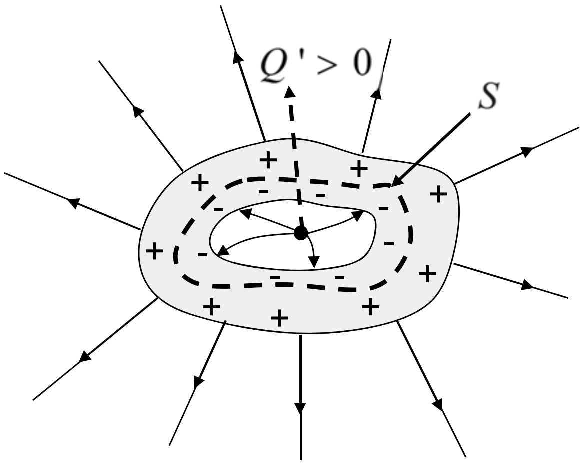
Igual que en el caso anterior, el conductor sigue cargado pero redistribuye sus cargas y modifica la forma de las líneas de campo exterior.

El campo en el interior de la cavidad sigue siendo nulo.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

DISTRIBUCIÓN DE CARGA

CONDUCTOR DESCARGADO CON CARGA Q'>0 EN LA CAVIDAD



Aplicando Gauss a la superficie S

$$0 = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q' + Q_i}{\varepsilon_0} \Rightarrow Q_i = -Q'$$

$$Q_e + Q_i = 0 \Rightarrow Q_e = -Q_i$$

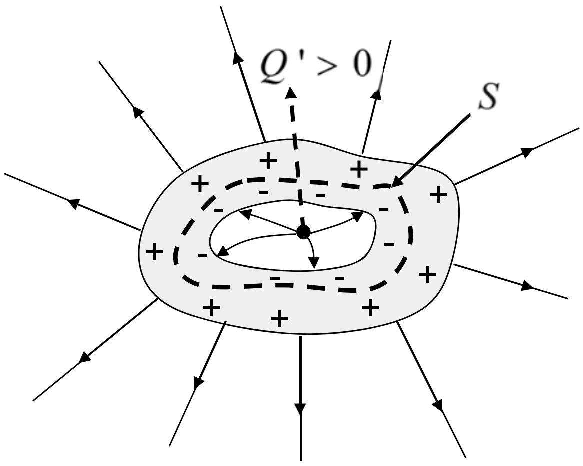
La superficie interior tiene una carga distribuida: $Q_i = -Q'$

La superficie exterior tiene una carga distribuida: $Q_e = Q'$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

DISTRIBUCIÓN DE CARGA

CONDUCTOR CARGADO (Q) Y CON CARGA Q'>0 EN LA CAVIDAD



Aplicando Gauss a la superficie S

$$0 = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q' + Q_i}{\varepsilon_0} \Rightarrow Q_i = -Q'$$

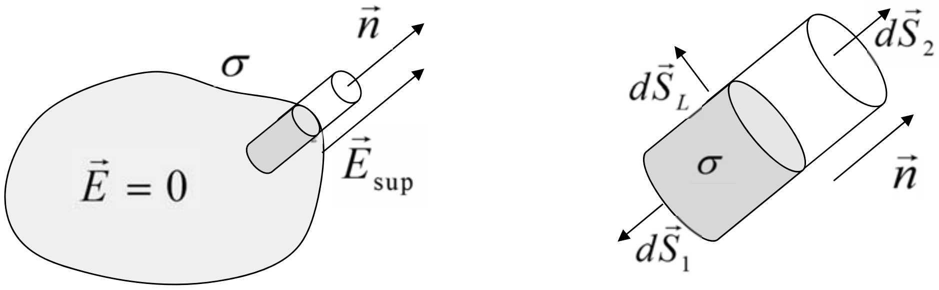
$$Q_e + Q_i = Q \Rightarrow Q_e = Q - Q_i$$

La superficie interior tiene una carga distribuida: $Q_i = -Q'$

La superficie exterior tiene una carga distribuida: $Q_e = Q + Q'$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

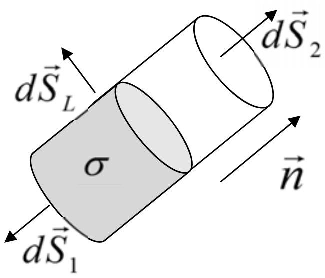
CAMPO EN LA SUPERFICIE



Para un volumen suficientemente pequeño solo hay flujo en la superficie exterior circular del cilindro (en las laterales, campo y superficie son perpendiculares, y en la circular interior el campo es cero)

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CAMPO EN LA SUPERFICIE



Aplicando el teorema de Gauss al volumen cilíndrico de la figura:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{S_L} \vec{E}_L \cdot d\vec{S}_L + \oint_{S_1} \vec{E}_{\text{int}} \cdot d\vec{S}_1 + \oint_{S_2} \vec{E}_{\text{sup}} \cdot d\vec{S}_2$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CAMPO EN LA SUPERFICIE

Teniendo en cuenta que:

$$En\ S_1 \rightarrow \vec{E}_{\text{int}} = \vec{0}\ ; \qquad En\ S_L \rightarrow \vec{E}_L = \vec{0} \quad o \quad \perp d\vec{S}_L$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{S_2} \vec{E}_{\text{sup}} \cdot d\vec{S}_2 = E_{\text{sup}} S_2$$

Y como la carga neta encerrada en el cilindro es: $q = \sigma S_2$

$$\vec{E}_{\text{sup}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n} \quad \Rightarrow \quad \sigma = \varepsilon_0 \vec{E}_{\text{sup}} \cdot \vec{n}$$

Condición de contorno

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

POTENCIAL EN LA SUPERFICIE

En puntos exteriores próximos a la superficie del conductor

$$grad\,V = -\vec{E}_{\text{sup}} \;\Rightarrow\; \left.\frac{dV}{dn}\right|_{\text{sup}} \vec{n} = -\vec{E}_{\text{sup}} \;\Rightarrow\; \left.\frac{dV}{dn}\right|_{\text{sup}} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

V es una función continua porque tiene derivada definida.

Conocido el potencial, la densidad de carga es:

$$\sigma = -\varepsilon_0 \left.\frac{dV}{dn}\right|_{\text{sup}} = -\varepsilon_0 \nabla V \cdot \vec{n}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CAPACIDAD

Un conductor cargado y aislado es un dominio equipotencial.

Si tomamos la referencia de potencial en el infinito, un conductor con una cierta carga Q estará a un potencial V.

Esta distribución de carga crea en el espacio que le rodea un campo $\vec{E}$ y cada punto estará también a un cierto potencial.

Si aplicamos el principio de superposición, una carga doble $2Q$ en el conductor hará que el potencial de éste sea $2V$ y también que se duplique el campo y el potencial en los puntos del espacio que le rodea.

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_Q \frac{dq}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|} \qquad Si\ dq' = kdq \Rightarrow V' = kV$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CAPACIDAD

En definitiva, para un conductor aislado, carga y potencial son proporcionales.

La constante de proporcionalidad se denomina

CAPACIDAD ELÉCTRICA (C)

$$C = \frac{Q}{V}$$

La unidad SI de la capacidad eléctrica se denomina FARADIO, se representa por F y se puede definir como la capacidad de un conductor aislado que al ser cargado con 1 culombio adquiere el potencial de 1 voltio.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CONDENSADORES

El proceso de carga de un conductor requiere un aporte de energía.

Esta energía puede ser recuperada por un proceso controlado de descarga.

Se conoce como CONDENSADOR al conjunto formado por dos conductores aislados que durante el proceso de carga por inducción adquieren cargas netas iguales y de signo contrario.

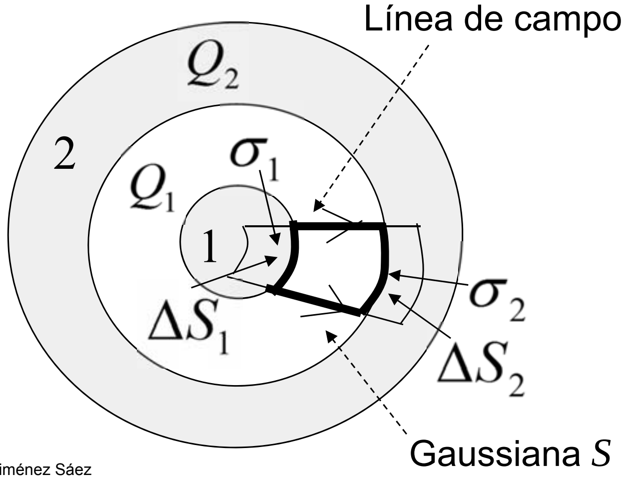
Esta configuración para dos conductores aislados se denomina de influencia total (todas las líneas de campo que nacen en uno mueren en el otro).

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CONDENSADORES

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = 0 = \frac{\sigma_1 \Delta S_1 + \sigma_2 \Delta S_2}{\varepsilon_0} \Rightarrow \sigma_1 \Delta S_1 = -\sigma_2 \Delta S_2$$

$\vec{E} = 0 \quad o \quad \vec{E} \perp d\vec{S}$



Integrando

$$\int_{S_1} \sigma_1\, dS_1 = -\int_{S_2} \sigma_2\, dS_2$$

$$\Downarrow$$

$$Q_1 = -Q_2$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

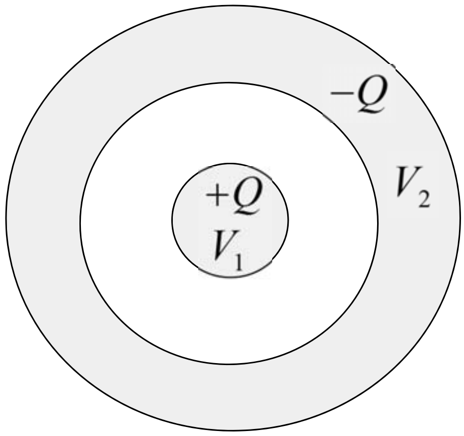
CONDENSADORES

Diferencia de potencial entre los conductores:

$$V = V_1 - V_2$$

Carga del condensador:

$$Q\ (>0)$$



Capacidad del condensador:

$$C = \frac{Q}{V}$$

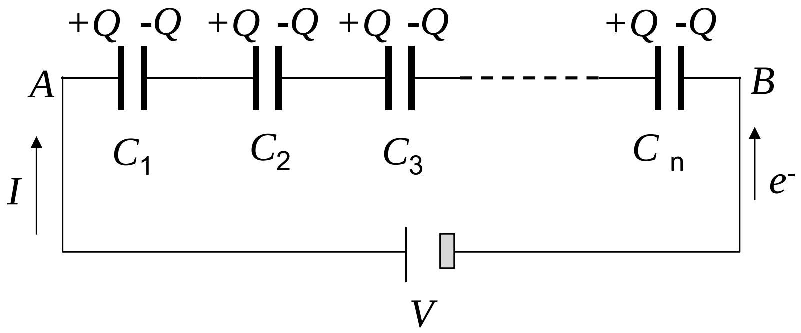
La capacidad solo depende de la geometría de la cavidad.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

ASOCIACIÓN DE CONDENSADORES

SERIE

Inicialmente no hay carga ⇨ En una armadura aparece $+Q$ y en otra $-Q$



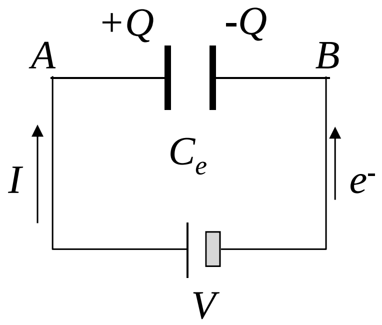
$$V = V_A - V_B = \sum_{i=1}^{n} V_i = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \dots + \frac{Q}{C_n} = Q\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{C_i}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

ASOCIACIÓN DE CONDENSADORES

SERIE

$$V = V_A - V_B = \sum_{i=1}^{n} V_i = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \ldots + \frac{Q}{C_n} = Q \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}$$



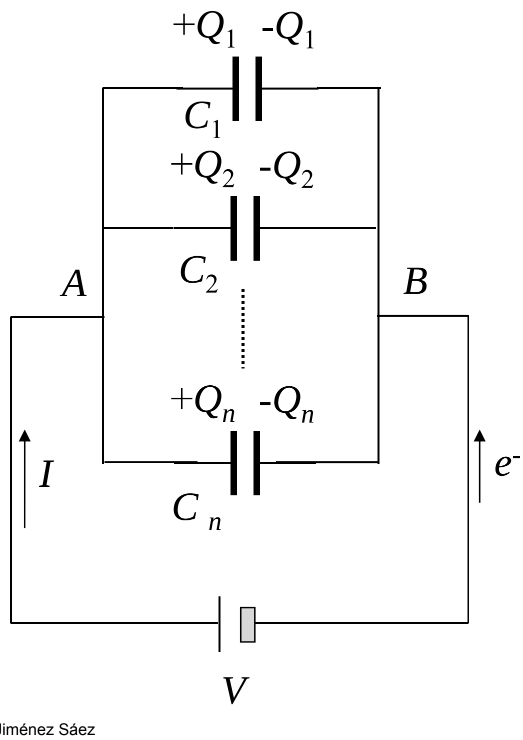
$$V = V_A - V_B = \frac{Q}{C_e}$$

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i} \Leftrightarrow C_e = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

ASOCIACIÓN DE CONDENSADORES

PARALELO



$$Q_i = C_i V$$

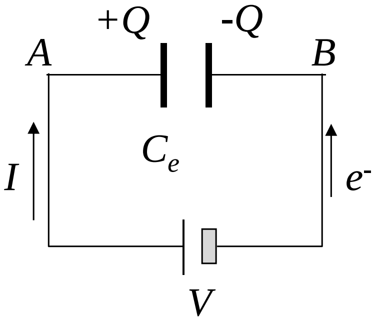
$$Q = \sum_{i=1}^{n} Q_i = V \sum_{i=1}^{n} C_i$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

ASOCIACIÓN DE CONDENSADORES

PARALELO

$$Q = \sum_{i=1}^{n} Q_i = V \sum_{i=1}^{n} C_i$$



$$Q = C_e V$$

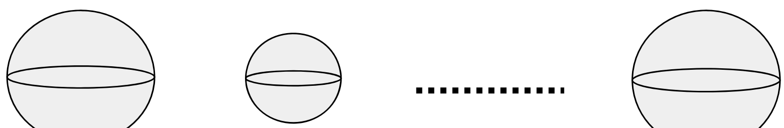
$$C_e = C_1 + C_2 + \ldots + C_n = \sum_{i=1}^{n} C_i$$

Si se combinan series y paralelos es necesario usar las ecuaciones de nudos y mallas (véase Aplicaciones).

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

Sistema de *n* conductores



i=1 *i=2* *i=n*

$$U_e = \frac{1}{2}\int_{\mathrm{v}} \rho(\vec{r})V(\vec{r})d\mathrm{v} = \frac{1}{2}\sum_{i=1} V_i \int_{S_i} \sigma(\vec{r})dS_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1} V_i Q_i$$

U_e tiende a ser mínima:

Un conductor descargado alejado de un sistema de conductores cargados es siempre atraído por estos.

(Al acercarlo disminuye el potencial de los conductores, por ejemplo, al acercar dos laminas plano paralelas infinitas, una de carga $Q>0$ y otra cero y potencial cero, disminuye el potencial de la lámina cargada)

$$V = Ed = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} d$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

Conductor aislado con carga Q:

$$U_e = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

Condensador con conductores (placas) a V_1 y V_2:

$$U_e = \frac{1}{2}QV_1 - \frac{1}{2}QV_2 = \frac{1}{2}Q(V_1 - V_2) = \frac{1}{2}C(V_1 - V_2)^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

También se puede calcular:

$$U_e = \int_{\mathrm{v}\,(cavidad)} \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 d\mathrm{v} > 0 \Rightarrow C > 0$$

No hay campo fuera de la cavidad

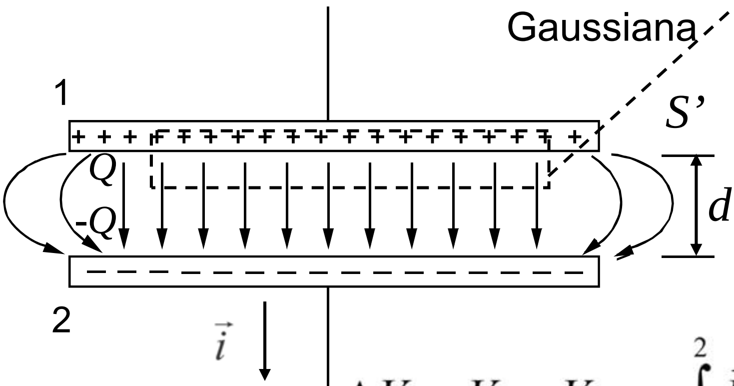
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CONDENSADOR PLANO

Separación entre placas: d

Superficie de las placas: S ($S >> d^2$)

Carga del condensador: Q



$$ES' = \frac{QS'}{S\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{S\varepsilon_0} \qquad \vec{E} = E\vec{i}$$

$$\Delta V = V_2 - V_1 = -\int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_1^2 \frac{Q}{S\varepsilon_0}dx = -\frac{Q}{S\varepsilon_0}d$$

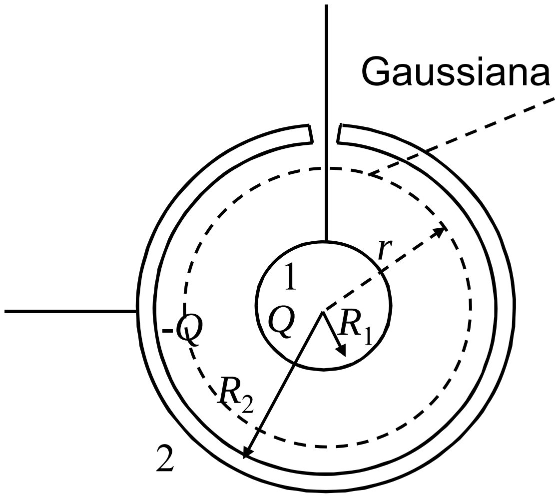
$$C = \frac{Q}{|\Delta V|} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CONDENSADOR ESFÉRICO

Radios: R_1 y R_2 ($R_1<R_2$)

Carga del condensador: Q



$$E 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \longrightarrow E = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$$

$$V_2 - V_1 = -\int_{R_1}^{R_2} E dr = -\int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0} dr$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$$

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_2 R_1}{(R_2 - R_1)}$$

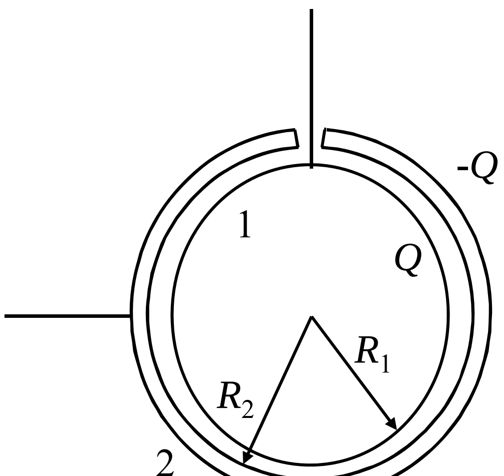
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CONDENSADOR ESFÉRICO

Radios: R_1 y R_2 ($R_1<R_2$)

Carga del condensador: Q

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_2 R_1}{(R_2 - R_1)}$$



$$Si \;\; R_1 \approx R_2 = R \rightarrow 4\pi R_2 R_1 = 4\pi R^2$$
$$y \;\; R_2 - R_1 = d$$

$$C = \frac{S\varepsilon_0}{d}$$

Siendo d la separación entre placas y S la superficie

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CONDENSADOR CILÍNDRICO

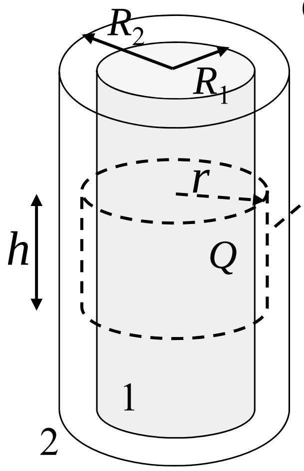
Radios: R_1 y R_2 $(R_1 < R_2)$

Altura: H $(H >> R_1 \text{ y } R_2)$

Carga del condensador: Q

$$E\, 2\pi r h = \frac{Q_d}{\varepsilon_0} = \frac{Qh}{H\varepsilon_0} \longrightarrow E = \frac{Q}{2\pi r H \varepsilon_0}$$

Gaussiana



$$V_2 - V_1 = -\int_{R_1}^{R_2} E\, dr = -\int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{2\pi r H \varepsilon_0} dr =$$

$$= -\frac{Q}{2\pi H \varepsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$C = \frac{2\pi H \varepsilon_0}{\ln(R_2 / R_1)}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CONDENSADOR CILÍNDRICO

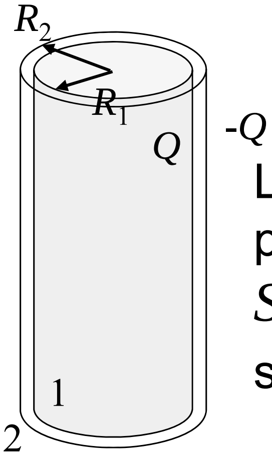
Radios: R_1 y R_2 $(R_1 < R_2)$

Altura: H $(H >> R_1 \text{ y } R_2)$

Carga del condensador: Q

$$R_2 \approx R_1 + \Delta R$$

$$\ln(1+x) \approx \ln 1 + \left.\frac{d\ln(1+x)}{dx}\right|_{x=0} x + \ldots \approx \left.\frac{1}{1+x}\right|_{x=0} x + \ldots \approx x$$



$$\Delta V = -\frac{Q}{2\pi H \varepsilon_0} \ln\left(1 + \frac{\Delta R}{R_1}\right) \approx -\frac{Q}{2\pi H \varepsilon_0} \frac{\Delta R}{R_1}$$

La capacidad es directamente proporcional a la superficie de placa S e inversamente proporcional a la separación de placas d

$$C = \frac{2\pi H R_1 \varepsilon_0}{\Delta R} = \frac{S \varepsilon_0}{d}$$

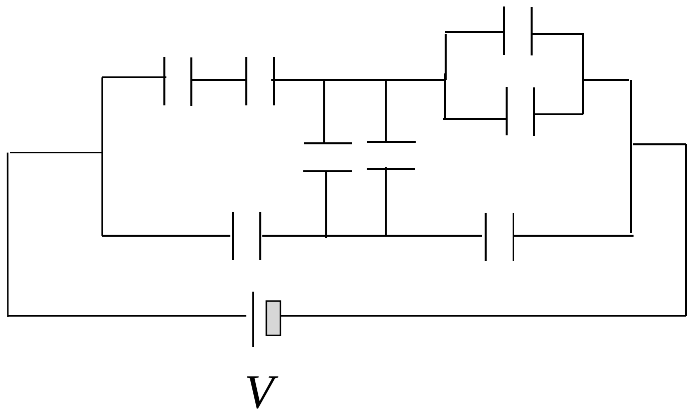
Fórmula que es idéntica a la obtenida para el condensador esférico de placas muy juntas.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

ASOCIACIÓN DE CONDENSADORES

CASO GENERAL

Todos los condensadores tienen capacidad C

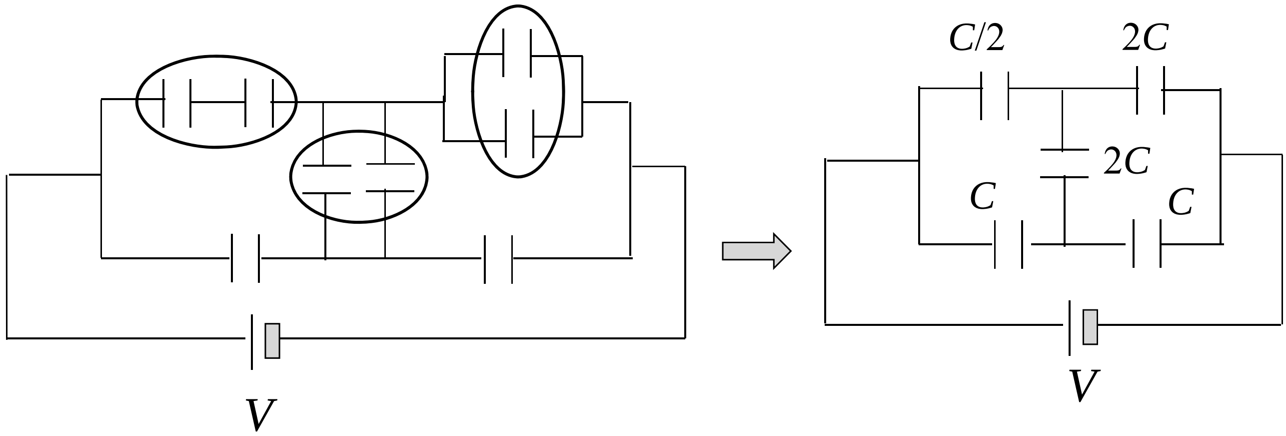


J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

ASOCIACIÓN DE CONDENSADORES

CASO GENERAL

Agrupamos asociaciones en serie y en paralelo

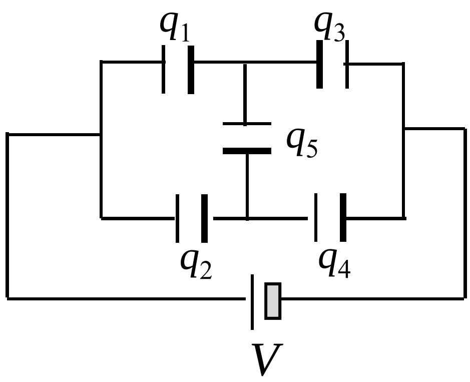


J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

ASOCIACIÓN DE CONDENSADORES

CASO GENERAL

Asignamos arbitrariamente una carga a las placas de cada condensador indicando claramente dónde ponemos la placa cargada positivamente (en rojo en la figura) y la cargada negativamente.

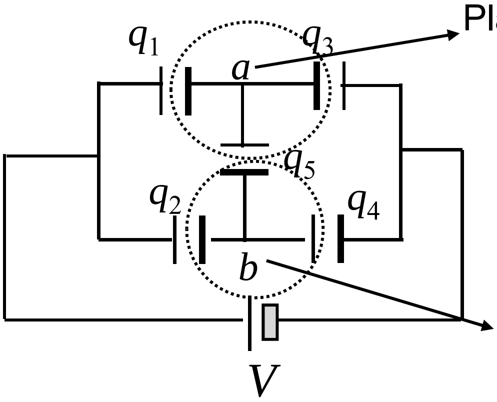


J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

ASOCIACIÓN DE CONDENSADORES

CASO GENERAL

Para cada nodo se plantea la conservación de la carga:
(si hay n nodos se necesitan n-1 ecuaciones)



Placas que confluyen en a:

$$+q_1 - q_5 + q_3 = 0$$

Placas que confluyen en b:

$$+q_2 + q_5 - q_4 = 0$$

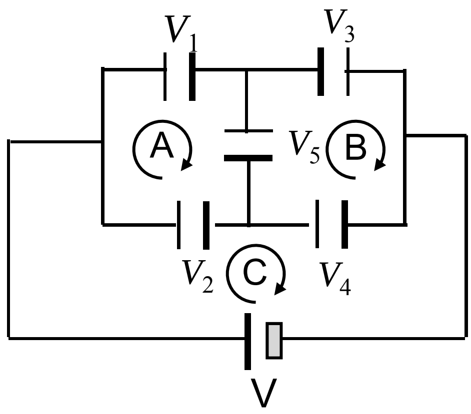
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

ASOCIACIÓN DE CONDENSADORES

CASO GENERAL

Ecuaciones de mallas simples:

(se necesitan tantas como mallas simples hay en el circuito)



Malla A:

$$+V_1 + V_5 - V_2 = 0$$

Malla B:

$$-V_5 - V_4 - V_3 = 0$$

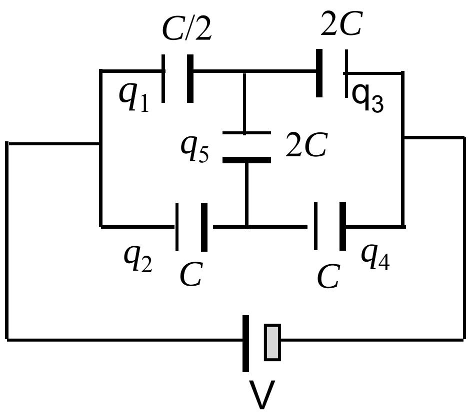
Malla C:

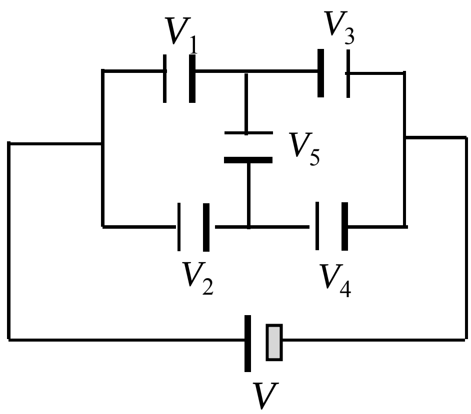
$$+V_2 + V_4 + V = 0$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

ASOCIACIÓN DE CONDENSADORES

CASO GENERAL





$$+V_1 + V_5 - V_2 = 0 \Leftrightarrow +\frac{q_1}{C/2} + \frac{q_5}{2C} - \frac{q_2}{C} = 0$$

$$+V_5 + V_4 + V_3 = 0 \Leftrightarrow +\frac{q_5}{2C} + \frac{q_4}{C} + \frac{q_3}{2C} = 0$$

$$+V_2 + V_4 + V = 0 \Leftrightarrow +\frac{q_2}{C} + \frac{q_4}{C} + V = 0$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

ASOCIACIÓN DE CONDENSADORES

CASO GENERAL

Resolviendo las cinco ecuaciones se obtiene la carga de cada condensador:

$$q_1 = -\frac{5}{14}CV; \quad q_2 = -\frac{17}{28}CV; \quad q_3 = \frac{8}{14}CV; \quad q_4 = -\frac{11}{28}CV; \quad q_5 = \frac{3}{14}CV$$

Y la capacidad equivalente, teniendo en cuenta que las cargas que envía la fuente se reparten entre los condensadores 1 y 2:

$$C_e = \frac{|q_1| + |q_2|}{V} = \frac{27}{28}C$$

Que, como puede comprobarse coincide con la de los condensadores 3 y 4:

$$|q_1| + |q_2| = |q_3| + |q_4|$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval