



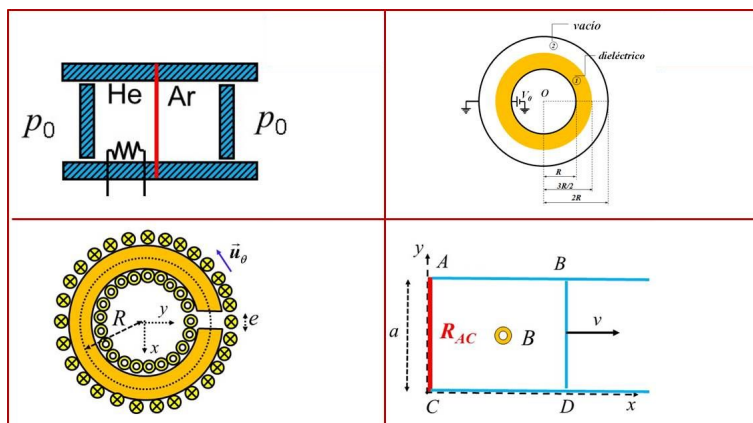
POLITÉCNICA

# ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO

## FÍSICA II

### TEORÍA

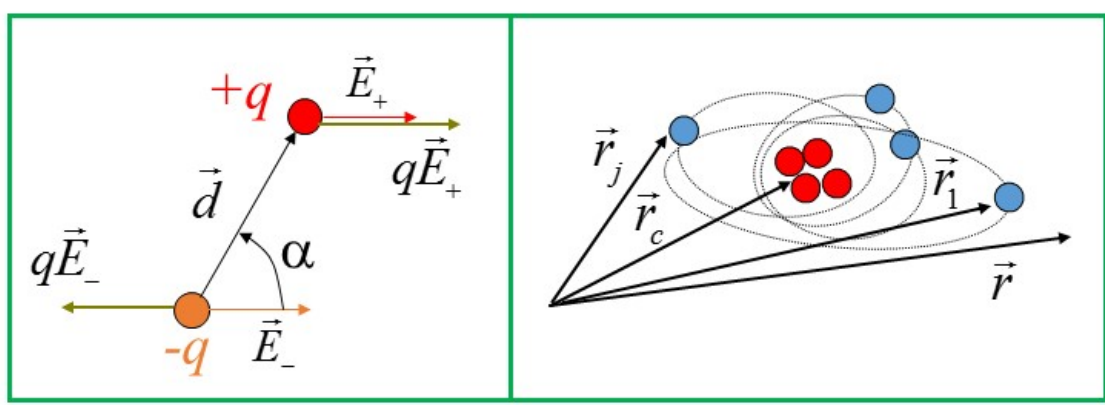
### Termodinámica y Electromagnetismo





POLITÉCNICA

# ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO



## TEMA 5.- ELECTROSTÁTICA DE DIELECTRICOS

José Carlos JIMÉNEZ SÁEZ



## ÍNDICE ELECTROSTÁTICA DE DIELECTRICOS

---

<b>5. Electrostática de Dielectricos</b>	<b>1</b>
5.1. Polarización de la materia . . . . .	1
5.2. Desarrollo dipolar del potencial . . . . .	2
5.3. Campo y potencial de un dipolo . . . . .	4
5.4. Vector polarización . . . . .	6
5.5. Densidades de carga de polarización . . . . .	7
5.6. Desplazamiento eléctrico . . . . .	9
5.7. Campo en la separación de medios . . . . .	11
5.8. Condensadores . . . . .	13
5.9. Energía electrostática . . . . .	14
5.10. Método de imágenes . . . . .	16

# 5

## Electrostática de Dieléctricos

---

Según el comportamiento eléctrico, los materiales se pueden clasificar en tres grandes grupos: conductores, dieléctricos y resto de materiales con propiedades intermedias. Los conductores, entre los que destacan los metales, son materiales con un gran número de portadores de carga libre (generalmente electrones) que se pueden mover por todo el material y responden casi instantáneamente a campos eléctricos muy pequeños. Estos portadores son los responsables de la corriente eléctrica. Los dieléctricos ([1],[2],[3],[4]) o aislantes son materiales en la que los portadores de carga están muy ligados a sus moléculas, y en presencia de un campo eléctrico varían sólo ligeramente sus posiciones sin alejarse de ellas. Los dieléctricos reales suelen tener una pequeña conductividad, aunque totalmente despreciable comparada con la de los conductores.

### 5.1. Polarización de la materia

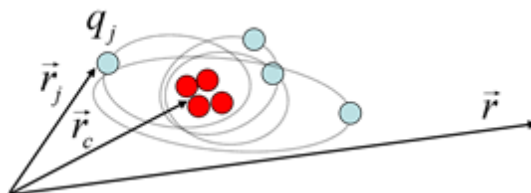
Como ya hemos dicho las moléculas de los dieléctricos se ven afectadas por el campo eléctrico: empuja las cargas positivas (núcleos atómicos) en el sentido del campo, y a las cargas negativas (electrones) en el sentido opuesto. Estos desplazamientos que son muy inferiores al diámetro molecular producen intensas fuerzas recuperadoras que compensan los efectos del campo eléctrico. Un dieléctrico en el que los desplazamientos de carga han tenido lugar se dice polarizado. Si definimos un centro de cargas positivo y uno negativo, de manera análoga a como se define el centro de masas de un sistema de partículas, en presencia de un campo eléctrico, ambos se separan en una molécula neutra o un átomo. Se dice entonces que en la molécula o átomo se ha inducido un momento dipolar. En algunas moléculas esa separación puede existir ya en ausencia de campo eléctrico, esas moléculas se llaman polares, y su momento dipolar se dice permanente.

Los momentos dipolares de las moléculas interactúan con el campo de forma que en presencia de un campo externo tienden a colocarse paralelamente al campo. De esta manera si sumásemos todos ellos encontraríamos lo que se conoce como una polarización neta en el material en una determinada dirección. En este efecto influye otro factor que no veremos en este capítulo y es la temperatura. Un material con momentos dipolares permanentes no presenta una polarización neta debido a la orientación al azar de sus moléculas. De hecho, la agitación térmica se opone a que exista una orientación privilegiada.

Un dieléctrico polarizado, aunque es eléctricamente neutro en promedio, produce un campo eléctrico en puntos interiores y exteriores del dieléctrico. Este campo eléctrico es el que vamos a obtener a continuación.

## 5.2. Desarrollo dipolar del potencial

Partiendo de un modelo clásico para la molécula polarizada calcularemos su potencial. A partir de ahí extenderemos ese valor a un conjunto de moléculas en un diferencial de volumen, para finalmente integrando, obtener el potencial creado por todo el dieléctrico.



**Figura 5.1:** Modelo clásico del átomo con cargas positivas en color oscuro (núcleo) y negativas en color claro (electrones).

Vamos a considerar que la molécula está formada por cargas puntuales positivas (núcleos) y cargas puntuales negativas (electrones) de manera que la carga total es nula, pero sus centros de cargas no se solapan. Tendremos en cuenta que la molécula se halla en un punto de coordenadas  $\vec{r}_c$  y que calculamos el campo en puntos  $\vec{r}$  alejados de la molécula especialmente para que el modelo clásico sea consistente (véase Fig. 5.1). El potencial creado por un conjunto de cargas puntuales de valor  $q_j$  situadas en puntos  $\vec{r}_j$  viene dado por:

$$V(\vec{r}) = \sum_j \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_j|} \quad (5.1)$$

Para poder realizar un desarrollo en serie realizamos un cambio de sistema de coordenadas llevando el origen al punto  $\vec{r}_c$ :  $\vec{\rho} = \vec{r} - \vec{r}_c = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$  y  $\vec{\rho}_j = \vec{r}_j - \vec{r}_c = X_j\vec{i} + Y_j\vec{j} + Z_j\vec{k}$ , donde este último vector es muy pequeño en módulo comparado con el primero. Teniendo en cuenta la igualdad:

$$\nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (5.2)$$

realizamos un desarrollo de Taylor hasta primer orden de la expresión:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{\rho}_j - \vec{\rho}|} &\approx \frac{1}{|\vec{\rho}|} + \nabla_{\rho_j} \frac{1}{|\vec{\rho}_j - \vec{\rho}|} \Big|_{\vec{\rho}_j=0} \cdot \vec{\rho}_j = \frac{1}{|\vec{\rho}|} - \frac{(\vec{\rho}_j - \vec{\rho})}{|\vec{\rho}_j - \vec{\rho}|^3} \Big|_{\vec{\rho}_j=0} \cdot \vec{\rho}_j = \\ &= \frac{1}{|\vec{\rho}|} + \frac{\vec{\rho}}{|\vec{\rho}|^3} \cdot \vec{\rho}_j = \frac{1}{|\vec{\rho}|} - \nabla_{\rho} \left( \frac{1}{|\vec{\rho}|} \right) \cdot \vec{\rho}_j \end{aligned} \quad (5.3)$$

donde se utilizan los operadores  $\nabla_{\rho_j} \equiv \frac{\partial}{\partial X_j} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial Y_j} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial Z_j} \vec{k}$  y  $\nabla_{\rho} \equiv \frac{\partial}{\partial X} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial Y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial Z} \vec{k}$ .

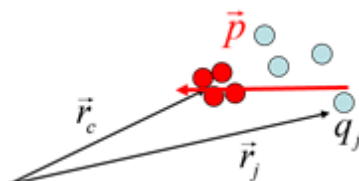
Utilizando la expresión anterior nos queda:

$$V(\vec{r}) = \sum_j \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_j|} = \sum_j \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_c - (\vec{r}_j - \vec{r}_c)|} = \sum_j \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 |\vec{\rho} - \vec{\rho}_j|} \quad (5.4)$$

$$V(\vec{r}) \approx \sum_j \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{|\vec{\rho}|} + \frac{\vec{\rho}}{|\vec{\rho}|^3} \cdot \vec{\rho}_j \right] = \sum_j \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{|\vec{\rho}|} - \nabla_\rho \frac{1}{|\vec{\rho}|} \cdot \vec{\rho}_j \right] \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &\approx \frac{\sum_j q_j}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_c|} - \sum_j q_j (\vec{r}_j - \vec{r}_c) \cdot \nabla \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_c|} \right] = \\ &= - \sum_j q_j (\vec{r}_j - \vec{r}_c) \cdot \nabla \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_c|} \right] \end{aligned} \quad (5.6)$$

En la última ecuación hemos tenido en cuenta la neutralidad de la molécula:  $\sum_j q_j = 0$  y la identidad en operadores:  $\nabla_\rho = \nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$ . Por tanto, la ecuación [ 5.6] es el potencial creado por un sistema de cargas puntuales próximas (molécula) en aproximación dipolar en puntos alejados del sistema.



**Figura 5.2:** Momento dipolar como medida de la separación de cargas positivas y negativas.

Definimos el momento dipolar eléctrico de una molécula situada en  $\vec{r}_c$  como:

$$\vec{p} \equiv \sum_j q_j (\vec{r}_j - \vec{r}_c) = \sum_j q_j \vec{r}_j = \sum_{j+} q_{j+} \vec{r}_{j+} - \sum_{j-} |q_{j-}| \vec{r}_{j-} \quad (5.7)$$

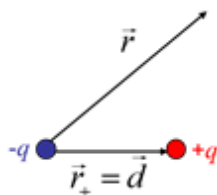
En el sumatorio en  $j$  hemos separado las cargas positivas de las cargas negativas. Por su definición el momento dipolar mide la separación de cargas respecto de su centro ponderado por el valor de la carga incluido el signo (véase Fig. 5.2). Distinguiendo el signo de la carga se concluye que es una medida de la separación de los centros de carga positivo y negativo. Con esta definición la expresión final del potencial de una molécula neutra en aproximación dipolar quedaría:

$$V(\vec{r}) \approx -\vec{p} \cdot \nabla \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_c|} \right] \quad (5.8)$$

### 5.3. Campo y potencial de un dipolo

Se define un dipolo eléctrico como dos cargas del mismo valor  $q$  pero de signo opuesto muy próximas entre sí. Vamos a aplicar lo estudiado en el apartado anterior a este caso concreto. Consideraremos que la posición  $\vec{r}_c = 0$  y que la carga negativa se encuentra en el origen  $\vec{r}_- = 0$  y llamaremos al vector de posición de la carga positiva  $\vec{r}_+ = \vec{d}$  (véase Fig. 5.3). El momento dipolar de este sistema es:

$$\vec{p} \equiv \sum_j q_j \vec{r}_j = q(\vec{r}_+ - \vec{r}_-) = q\vec{d} \quad (5.9)$$



**Figura 5.3:** Dipolo eléctrico: cargas iguales de distinto signo separadas una distancia muy pequeña.

El momento dipolar es un vector que apunta de la carga negativa a la carga positiva. Sus dimensiones son de carga por longitud. El valor del potencial en un punto  $\vec{r}$  aplicando el principio de superposición es:

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_+|} + \frac{(-q)}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_-|} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_+|} + \frac{(-q)}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}|} \quad (5.10)$$

Haciendo un desarrollo de Taylor hasta primer orden aplicando las propiedades vistas en el apartado anterior (ecuación [5.3]) quedaría:

$$V(\vec{r}) \approx \frac{+q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{|\vec{r}|} + \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \cdot \vec{r}_+ \right] + \frac{(-q)}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}|} = \frac{q\vec{r}_+ \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}|^3} = \frac{q\vec{d} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}|^3} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}|^3} \quad (5.11)$$

Obtenemos el campo eléctrico a partir del gradiente de la expresión anterior:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{(p_x x + p_y y + p_z z)}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}|^3} \vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k} \quad (5.12)$$

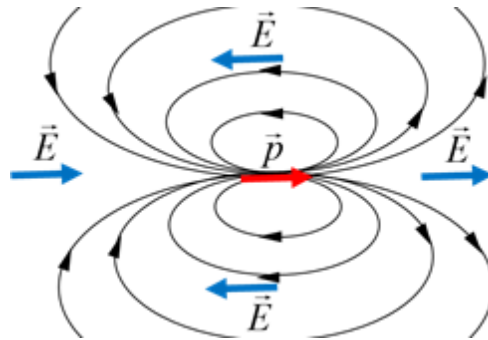
Hacemos los cálculos para la componente  $x$  del campo, el cálculo para el resto de componentes es análogo. Teniendo en cuenta la propiedad  $\partial r / \partial x = x/r$  nos queda:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{(p_x x + p_y y + p_z z)}{|\vec{r}|^3} &= \frac{p_x}{|\vec{r}|^3} + (p_x x + p_y y + p_z z) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{|\vec{r}|^3} \right) = \\ &= \frac{p_x}{|\vec{r}|^3} + (\vec{p} \cdot \vec{r}) (-3) \frac{1}{r^4} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{p_x}{|\vec{r}|^3} + (\vec{p} \cdot \vec{r}) (-3) \frac{1}{r^4} \frac{x}{r} = \frac{p_x}{|\vec{r}|^3} - \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})x}{r^5} \end{aligned} \quad (5.13)$$

El valor final del campo responde a la expresión:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{\vec{p}}{r^3} + \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} \right) \quad (5.14)$$

Este campo se caracteriza por tener la misma dirección y sentido que el momento dipolar en puntos de la recta que contiene al dipolo (1ª posición de Gauss,  $\vec{p} \parallel \vec{r}$ ); y por tener sentido opuesto al momento dipolar en el plano perpendicular al dipolo y que lo contiene (2ª posición de Gauss,  $\vec{p} \perp \vec{r}$ ) (véase Fig. 5.4).

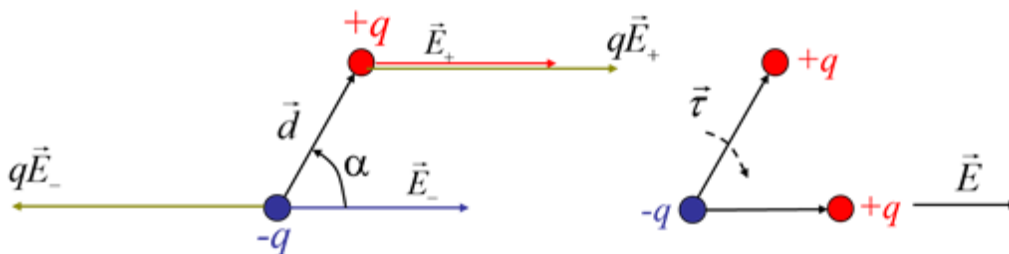


**Figura 5.4:** Líneas de campo eléctrico de un dipolo y vectores campo en distintas posiciones.

Si colocamos un dipolo en un campo eléctrico exterior, éste se ve sometido a una fuerza neta nula dado que el campo que actúa en la carga positiva y en la carga negativa es aproximadamente el mismo. No así el momento de dichas fuerzas o momento dinámico, que es independiente del punto al ser un sistema de fuerzas de resultante nula, y cuyo valor es:

$$\vec{\tau} = \vec{d} \times q\vec{E} = d q E \sin \alpha \vec{u} \quad (5.15)$$

siendo  $\vec{u}$  el vector unitario perpendicular al plano del dipolo y  $\alpha$  el ángulo que forma el eje del dipolo con el campo (véase Fig. 5.5). Este momento que actúa sobre el dipolo es el responsable de la alineación de su momento dipolar en la dirección y sentido del campo.

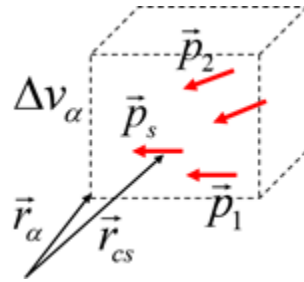


**Figura 5.5:** El campo en las cargas del dipolo es aproximadamente el mismo ( $\vec{E}_+ = \vec{E}_-$ ); por tanto, la fuerza total es nula y existe un momento dinámico que alinea al dipolo con el campo.



## 5.4. Vector polarización

Hasta ahora hemos considerado una molécula aislada; sin embargo, un dieléctrico contiene un número elevadísimo de moléculas que contribuyen al campo eléctrico. Por ello, en primer lugar, vamos a calcular el potencial de un número muy grande de moléculas polarizadas situadas dentro de un volumen muy pequeño para después integrando calcular el potencial producido por todo el dieléctrico. Consideremos un volumen infinitesimal  $\Delta v_\alpha$  situado en una posición  $\vec{r}_\alpha$  conteniendo un conjunto grande de moléculas de momento dipolar  $\vec{p}_s$  situadas en una posición  $\vec{r}_{cs}$  cada una de ellas (véase Fig. 5.6).



**Figura 5.6:** Diferencial de volumen del dieléctrico conteniendo un número muy grande de moléculas polarizadas.

Sumando los momentos dipolares contenidos en ese volumen y dividiendo por el mismo para hacer independiente esta cantidad del tamaño elegido podemos definir una nueva magnitud asociada a cada punto del dieléctrico. Esta magnitud es el vector polarización:

$$\vec{P}(\vec{r}_\alpha) = \frac{\sum_s \vec{p}_s}{\Delta v_\alpha} \quad (5.16)$$

La polarización es, por tanto, el momento dipolar por unidad de volumen en cada punto del dieléctrico. Sus dimensiones son de carga por unidad de área. El potencial producido por todas las moléculas contenidas en el volumen pequeño en cuestión es, en aproximación dipolar, aplicando el principio de superposición:

$$V(\vec{r}) = - \sum_s \vec{p}_s \cdot \nabla \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_{cs}|} \right] \quad (5.17)$$

Para calcular el potencial producido por todo el dieléctrico, debemos sumar las contribuciones de todos los volúmenes infinitesimales:

$$V(\vec{r}) = - \sum_\alpha \sum_s \vec{p}_s \cdot \nabla \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_{cs}|} \right] \quad (5.18)$$

Para poder obtener una expresión más simple debemos considerar un efecto promedio de los dipolos en cada volumen pequeño, de manera que se puede aproximar su posición por la del volumen:  $\vec{r}_{cs} \approx \vec{r}_\alpha$ . Sustituyendo entonces los momentos dipolares por el vector polarización queda:

$$V(\vec{r}) = - \sum_{\alpha} \Delta v_{\alpha} \vec{P}(\vec{r}_{\alpha}) \cdot \nabla \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_{\alpha}|} \right] \quad (5.19)$$

Finalmente, suponiendo un número muy grande de pequeños volúmenes podemos cambiar el sumatorio por la integración en el volumen del dieléctrico v:

$$V(\vec{r}) = - \int_v \vec{P}(\vec{r}') \cdot \nabla \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} dv' = \int_v \vec{P}(\vec{r}') \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv' \quad (5.20)$$

La expresión anterior permite obtener el potencial producido por todo el dieléctrico a partir del vector polarización.

## 5.5. Densidades de carga de polarización

Nos interesa expresar la ecuación [5.20] de una forma diferente haciendo uso de distintas propiedades matemáticas. Utilizando la igualdad:

$$\nabla' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (5.21)$$

donde se utiliza el operador:  $\nabla' \equiv \frac{\partial}{\partial x'} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y'} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z'} \vec{k}$ , en la propiedad:

$$\nabla' \cdot \left( \frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = \frac{\nabla' \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \vec{P}(\vec{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\nabla' \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \vec{P}(\vec{r}') \cdot \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (5.22)$$

podemos escribir el potencial (ecuación [5.20]) como:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_v \nabla' \cdot \left( \frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dv' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_v \frac{\nabla' \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \quad (5.23)$$

Utilizando el teorema de la divergencia siendo  $S$  la superficie del dieléctrico nos queda finalmente:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot d\vec{S}' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_v \frac{\nabla' \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \quad (5.24)$$

Para un material con una densidad de carga  $\sigma_p$  y una densidad volumétrica  $\rho_p$  el potencial producido sería:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\sigma_p dS'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_v \frac{\rho_p dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (5.25)$$

Por tanto, a todos los efectos, debido a los desplazamientos de carga, el dieléctrico se ha convertido en un material con una densidad volumétrica real de carga de polarización:

$$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P} \tag{5.26}$$

y una densidad real superficial de carga de polarización:

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n} \tag{5.27}$$

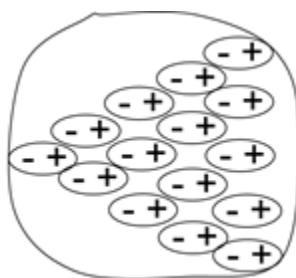
donde  $\vec{n}$  es la normal exterior al dieléctrico:  $d\vec{S}' = \vec{n} dS'$ .

Enlazando con las ecuaciones de Maxwell vistas hasta este momento, la ecuación [5.25] es solución de la ecuación de Poisson (ec. [3.195]) y, por tanto, de la ecuación de Maxwell de la que deriva esta, ec. [3.80]:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_p}{\epsilon_0} \leftrightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_p}{\epsilon_0} \tag{5.28}$$

Por tanto, el campo eléctrico producido por el dieléctrico será:

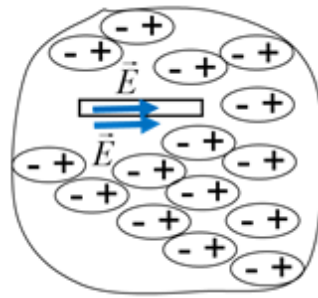
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\sigma_p(\vec{r} - \vec{r}') dS'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_p(\vec{r} - \vec{r}') dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \tag{5.29}$$



**Figura 5.7:** Dieléctrico con densidades superficiales de carga de polarización a los lados, positiva a la derecha, negativa a la izquierda, y con densidad de volumen negativa en el interior.

El desplazamiento de cargas positivas en el dieléctrico en la dirección y sentido del campo eléctrico, y de las cargas negativas en el sentido opuesto, induce en la superficie una densidad de carga, positiva en la superficie por donde sale el campo y negativa en la superficie por donde entra. Además, en el interior, si la polarización no es uniforme produce descompensaciones en los diferenciales de volúmenes entre la carga que entra debido al desplazamiento y la que sale, estas descompensaciones crean densidades de carga netas en el interior de cada diferencial de volumen. Sin embargo, la carga neta total del dieléctrico  $Q_p$  sigue siendo nula a pesar de los desplazamientos de carga puesto que ésta lo único que hace es separarse (véase Fig. 5.7).

$$Q_p = \oint_S \sigma_p dS + \int_V \rho_p dv = \oint_S \vec{P} \cdot \vec{n} dS + \int_V -\nabla \cdot \vec{P} dv = \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} - \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = 0 \tag{5.30}$$



**Figura 5.8:** El campo macroscópico en el interior del dieléctrico es el que existiría en el interior de una cavidad en forma de aguja orientada en la dirección del campo.

Finalmente, diremos que las expresiones del campo y potencial que se han obtenido son aplicables en puntos fuera del dieléctrico. Para puntos dentro del dieléctrico debemos plantearnos la propia definición de campo o potencial eléctrico. El campo que nos interesa es el campo macroscópico o campo promedio en una región del interior del dieléctrico que contiene un gran número de moléculas. Se demuestra aplicando las propiedades tangenciales de contorno del campo eléctrico (ecuación [5.46]), que veremos más adelante, que este campo macroscópico es el que existiría en una pequeña cavidad en forma de aguja en el interior del dieléctrico orientada en la dirección del campo (véase Fig. 5.8). El campo en dicha cavidad es un campo externo, por tanto, se podría calcular por las fórmulas vistas anteriormente. Veamos que coincide con el campo de la ecuación [5.29]. Dicho campo se calcularía con las cargas de polarización de la superficie  $S$ , y además con la contribución de las cargas de polarización de la superficie de la cavidad. Sin embargo, este último sería despreciable, ya que, sólo habría cargas de polarización en las puntas de la aguja. El campo en la cavidad se calcularía también con el campo de todas las densidades de volumen interiores, excepto las densidades de la cavidad. Sin embargo, este última contribución sería despreciable al ser la cavidad muy pequeña. En definitiva, el campo eléctrico macroscópico en el interior también se puede calcular por la fórmula de la ecuación [5.29] sin ningún tipo de error. Lo mismo ocurriría con el potencial.

## 5.6. Desplazamiento eléctrico

En el capítulo de electrostática del vacío obtuvimos una de las ecuaciones de Maxwell, ec. [3.80]:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (5.31)$$

donde  $\rho$  era la densidad de carga libre. En el capítulo anterior hemos visto que esta ecuación se modifica en presencia de carga polarizada como la de un dieléctrico (ecuación [5.28]). Por tanto, el campo total resultante de un campo externo y del campo creado por el dieléctrico verificaría la ecuación:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho + \rho_p}{\epsilon_0} \quad (5.32)$$

Por tanto, en presencia de cargas libres (ya sea de conductores o de otros materiales creados artificialmente, por ejemplo, electrones inyectados en dieléctricos mediante haces de electrones de alta energía) y de cargas de polarización la electrostática se rige por la ecuación anterior y por la ecuación de irrotacionalidad del campo, ec. [3.97]:

$$\nabla \times \vec{E} = \vec{0} \quad (5.33)$$

Se define el vector desplazamiento eléctrico como:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (5.34)$$

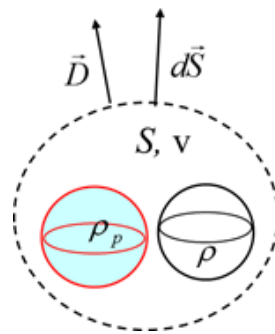
Este vector tiene las mismas dimensiones que la polarización, carga por unidad de área. Operando en la ecuación anterior nos encontramos con que la ecuación de Maxwell que satisface este vector es:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{-\nabla \cdot \vec{P} + \rho}{\varepsilon_0} \rightarrow \nabla \cdot (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho \quad (5.35)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (5.36)$$

Por tanto, el vector desplazamiento depende únicamente de la densidad de carga libre. Esta ecuación permite deducir aplicando el teorema de la divergencia la ley de Gauss para el vector desplazamiento:

$$\int_v \nabla \cdot \vec{D} dv = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \rightarrow \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{libre} = \int_v \rho dv \quad (5.37)$$



**Figura 5.9:** En el teorema de Gauss para el desplazamiento sólo influye la densidad de carga libre  $\rho$ .

El flujo del vector desplazamiento en una superficie  $S$  de volumen  $v$  es igual a la carga libre encerrada (véase Fig. 5.9). Esta carga libre encerrada puede ser carga de un conductor o carga añadida a la constitución atómica de un material neutro. La ventaja de utilizar en dieléctricos la ley de Gauss para el vector  $\vec{D}$ , consiste en que sólo aparece la carga libre y no aparece la carga de polarización. De esta manera, en sistemas con dieléctricos con distribuciones de carga libre de alta simetría se podrá calcular el vector desplazamiento sin tener en cuenta las cargas de polarización.

Para resolver los problemas con dieléctricos se necesita conocer otra ecuación que se determina de forma experimental, y es la llamada ecuación constitutiva del medio:  $\vec{P} = \vec{P}(\vec{E})$ . En general, estudiaremos materiales sin polarización permanente ( $\vec{P}$  se anula cuando lo hace el campo), e isótropos, es decir, materiales donde el campo macroscópico y la polarización tienen la misma dirección y sentido. De esta manera, la ecuación constitutiva queda:

$$\vec{P}(\vec{E}) = \varepsilon_0 \chi_e(E) \vec{E} = \varepsilon_0(\varepsilon_r(E) - 1) \vec{E} = (\varepsilon(E) - \varepsilon_0) \vec{E} \quad (5.38)$$

donde  $\chi_e$  es lo que se conoce como susceptibilidad eléctrica del medio,  $\varepsilon_r$  la permitividad eléctrica relativa (de valor mayor que la unidad),  $\varepsilon$  la permitividad eléctrica y  $\varepsilon_0$  la permitividad eléctrica del vacío. En general, la susceptibilidad es independiente del campo, por eso este parámetro suele ser una constante característica del material. Estos materiales se conocen con el nombre de materiales lineales, y en ellos se verifica:

$$\vec{P}(\vec{E}) = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1) \vec{E} = (\varepsilon - \varepsilon_0) \vec{E} \quad (5.39)$$

Haciendo uso de esta expresión en la ecuación [5.34] nos queda la siguiente relación para el desplazamiento eléctrico y el campo eléctrico:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E} \quad (5.40)$$

Para finalizar este apartado diremos que un dieléctrico se vuelve conductor cuando se sobrepasa un determinado valor del campo llamado campo de ruptura del dieléctrico. A este campo máximo también se le denomina rigidez dieléctrica.

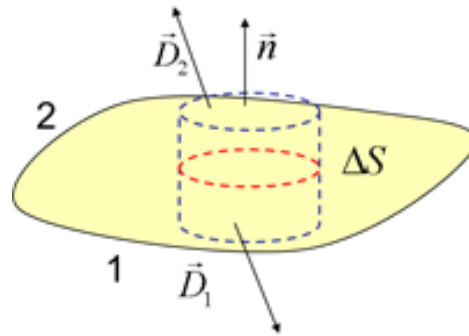
## 5.7. Campo en la separación de medios

El objetivo de este capítulo es conocer como varían los vectores campo  $\vec{E}$  y  $\vec{D}$  al pasar una interfase entre dos medios diferentes: dieléctrico-conductor o dieléctrico-dieléctrico. Consideraremos al vacío como un dieléctrico de permitividad  $\varepsilon_0$ . En el tema de conductores habíamos visto (ec. [4.2]) que en la interfase conductor-vacío se verifica que en el interior del conductor el campo es nulo y en puntos exteriores infinitamente próximos a la superficie del conductor el campo es:

$$\vec{E}_v = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n} \quad (5.41)$$

siendo  $\vec{n}$  el vector unitario normal exterior al conductor de densidad superficial  $\sigma$ . Además se dijo que el potencial es una función continua en la interfase.

Vamos ahora a considerar dos medios en contacto que etiquetaremos con los subíndices 1 y 2. Dado que uno de ellos puede ser un conductor supondremos que en la interfase existe una densidad superficial de carga libre  $\sigma$ . Colocaremos una superficie gaussiana de superficie  $S$  en forma de caja de pastillas con bases paralelas a la interfase de área  $\Delta S$  (en el interior de la caja queda un área  $\Delta S$ ) y superficie lateral cortando a dicha interfase (véase Fig. 5.10).



**Figura 5.10:** Superficie gaussiana en forma de caja de pastillas sobre la interfase de dos medios.

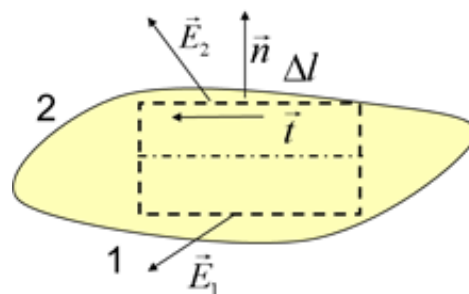
Aplicando el teorema de Gauss a dicha superficie, y teniendo en cuenta que el flujo por la pared lateral puede despreciarse al hacer ésta infinitamente pequeña y que en las bases el vector desplazamiento puede considerarse uniforme, se tiene:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sigma \Delta S \tag{5.42}$$

$$\vec{D}_1 \cdot (-\vec{n})\Delta S + \vec{D}_2 \cdot \vec{n}\Delta S = \sigma \Delta S \tag{5.43}$$

donde  $\vec{n}$  es el vector unitario normal exterior del medio 1. Operando:

$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n} = \sigma \leftrightarrow D_{2n} - D_{1n} = \sigma \tag{5.44}$$



**Figura 5.11:** Curva rectangular sobre la que se aplica la circulación del campo eléctrico.

De lo que se concluye que la discontinuidad en la componente normal del vector desplazamiento se debe a la existencia de una densidad superficial de carga libre. Si ésta no existe (si ninguno de los dos medios es un conductor cargado), el vector desplazamiento es continuo en su componente normal. En el caso de una interfase conductor (medio 1) - vacío (medio 2), la ecuación de contorno se escribe  $D_{2n} = \sigma$  que es, en esencia, la ecuación [5.41].

Consideremos ahora una curva rectangular con dos de sus lados paralelos a la interfase en la dirección del vector unitario tangencial  $\vec{t}$  y otros dos atravesando ésta (véase Fig. 5.11). Estos dos últimos los haremos infinitamente pequeños de manera que la integral de línea en ellos se pueda despreciar. La circulación en una curva cerrada debe ser cero, por tanto:

$$0 = \vec{E}_2 \cdot \Delta \vec{l}_2 + \vec{E}_1 \cdot \Delta \vec{l}_1 = \vec{E}_2 \cdot \vec{t} \Delta l + \vec{E}_1 \cdot (-\vec{t}) \Delta l \leftrightarrow \vec{0} = \vec{n} \times \vec{E}_2 + (-\vec{n}) \times \vec{E}_1 \quad (5.45)$$

$$E_{2t} = E_{1t} \quad (5.46)$$

Por tanto, en la dirección tangencial el campo electrostático se conserva siempre. Además, dado que el campo deriva del potencial por el gradiente ( $E_t = -\frac{\partial V}{\partial t}$ ), éste debe tener el mismo valor a ambos lados en puntos infinitamente próximos a la interfase. Por tanto, el potencial es también continuo.

$$V_2 = V_1 \quad (5.47)$$

Finalmente, recordar que se puede llegar también a la ecuación [5.45] utilizando el segundo teorema integral de Gauss en la superficie de la Fig. 5.10. Así se tendría un resultado análogo al anterior:

$$\oint_S d\vec{S} \times \vec{E} = \int_V dv \nabla \times \vec{E} = 0 \quad (5.48)$$

$$0 = \vec{n} \Delta S \times \vec{E}_2 + (-\vec{n}) \Delta S \times \vec{E}_1 \quad (5.49)$$

$$\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \leftrightarrow E_{2t} = E_{1t} \quad (5.50)$$

## 5.8. Condensadores

En este apartado vamos a analizar una de las principales aplicaciones de los dieléctricos, y es su uso en la fabricación de condensadores. En concreto, vamos a ver las diferencias de tipo eléctrico que se producen en un condensador con y sin dieléctrico (lineal) a partir de las ecuaciones más generales de la electroestática. Consideremos en primer lugar un condensador con una determinada carga  $Q$  fija.

Utilizando la ley de Gauss en una superficie que encierre una de las placas del condensador sin dieléctrico se tendría:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (5.51)$$

Si ese mismo condensador tuviese un dieléctrico se modificaría el campo eléctrico en su interior:

$$\oint \epsilon_r \vec{E}' \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (5.52)$$



De ambas expresiones se deduce que el dieléctrico disminuye el campo en el interior del condensador ( $\epsilon_r > 1$ ):

$$\epsilon_r \vec{E}' = \vec{E} \quad (5.53)$$

Dado que la diferencia de potencial entre placas es:  $\Delta V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l}$ , se tiene que el dieléctrico también disminuye dicha diferencia de potencial en términos absolutos. La capacidad del condensador se define como, ec. [4.6]:  $C = Q/\Delta V$ , por tanto, dicha capacidad aumenta con el dieléctrico en un factor  $\epsilon_r$  respecto del condensador sin dieléctrico.

Si en lugar de un condensador con carga fija, hubiésemos considerado un condensador a potencial fijo el razonamiento sería el siguiente:

Si el potencial es fijo ( $\Delta V = cte$ ), también lo es el campo, de manera que en un condensador sin dieléctrico la ley de Gauss en una superficie que encerrase una de las placas se escribiría:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (5.54)$$

Y en uno con dieléctrico:

$$\oint \epsilon_r \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q'}{\epsilon_0} \quad (5.55)$$

De ambas expresiones se deduce que el dieléctrico aumenta la carga del condensador:

$$\frac{Q'}{\epsilon_r} = Q \quad (5.56)$$

En este aumento tienen mucho que ver las densidades de carga de polarización, ya que atraen más cargas. La consecuencia final nuevamente es que se aumenta la capacidad del condensador con dieléctrico:  $C = Q/\Delta V$  en un factor  $\epsilon_r$  respecto del condensador sin dieléctrico como no podía ser de otra forma.

## 5.9. Energía electrostática

Vamos a calcular la energía de una densidad libre de volumen  $\rho$  y una densidad libre de superficie  $\sigma$  en un medio dieléctrico lineal de permitividad  $\epsilon$ . Los dieléctricos deben ser lineales para que el trabajo para traer el sistema sea independiente de la forma en que se realiza el proceso. Para crear la distribución traemos incrementos de carga desde un punto de infinito a potencial cero.

Para un estadio intermedio de formación de la distribución de carga en el que el potencial en un punto es  $V_{dq}(\vec{r})$  se trae un  $dq$  en ese punto. El trabajo necesario para realizar el proceso es:

$$\delta W = V_{dq}(\vec{r})dq = V_{dq}(\vec{r})d\rho dv + V_{dq}(\vec{r})d\sigma dS \quad (5.57)$$

En la expresión anterior se ha diferenciado si la carga pertenece a un volumen o a una superficie. La energía electrostática se podría obtener como, ec. [3.178]:

$$U_e = \int V_{dq} dq \quad (5.58)$$

El método elegido para traer las cargas es el siguiente: en cada paso se trae una fracción del estado final dada por una constante  $k$ . El potencial en cada momento dependerá también de dicha constante.

$$\delta W = V_{dq}(k, \vec{r}) \rho(\vec{r}) dk dv + V_{dq}(k, \vec{r}) \sigma(\vec{r}) dk dS \quad (5.59)$$

Sumando todos los trabajos tendríamos:

$$U_e = \int_0^1 dk \left[ \int_v V_{dq}(k, \vec{r}) \rho(\vec{r}) dv + \int_{S_c} V_{dq}(k, \vec{r}) \sigma(\vec{r}) dS \right] \quad (5.60)$$

donde hemos considerado que las densidades volumétricas ocupan un volumen  $v$  y las superficiales una superficie  $S_c$ . El potencial en un punto en un estado intermedio caracterizado por una fracción  $k$  será el potencial final multiplicado por esa constante:

$$V_{dq}(k, \vec{r}) = kV(\vec{r}) \quad (5.61)$$

De esta forma, nos quedaría el siguiente resultado final, ya por otra parte conocido, ec. [3.168]:

$$U_e = \frac{1}{2} \int_v V(\vec{r}) \rho(\vec{r}) dv + \frac{1}{2} \int_{S_c} V(\vec{r}) \sigma(\vec{r}) dS \quad (5.62)$$

donde  $\rho$  y  $\sigma$  son densidades de carga libres, si bien el potencial se ve modificado ahora por la presencia del dieléctrico ya que cambia la permitividad:

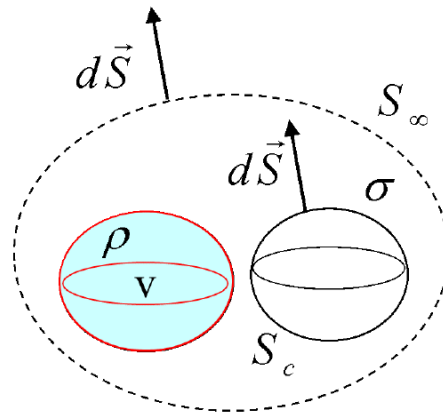
$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_v \frac{\rho(\vec{r}') dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{S_c} \frac{\sigma(\vec{r}') dS'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (5.63)$$

Obsérvese que la expresión anterior es solución de la ecuación de Poisson en un dieléctrico (ecuación [5.67]) y no tiene en cuenta las cargas de polarización. La expresión de la energía en función de los campos se obtiene utilizando el hecho de que en zonas con densidades libres de volumen se verifica:  $\rho = \nabla \cdot \vec{D}$  y en la superficie de los conductores:  $\sigma = \vec{D} \cdot \vec{n}$  siendo  $\vec{n}$  la normal exterior al conductor. De manera que:

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{1}{2} \int_v V \nabla \cdot \vec{D} dv + \frac{1}{2} \int_{S_c} V \vec{D} \cdot d\vec{S} = \\ &= \frac{1}{2} \int_v \nabla \cdot (V \vec{D}) dv + \frac{1}{2} \int_v \vec{D} \cdot \vec{E} dv + \frac{1}{2} \int_{S_c} V \vec{D} \cdot d\vec{S} = \\ &= \frac{1}{2} \int_{S_\infty} V \vec{D} \cdot d\vec{S} + \frac{1}{2} \int_{S_c} V \vec{D} \cdot (-d\vec{S}) + \frac{1}{2} \int_v \vec{D} \cdot \vec{E} dv + \frac{1}{2} \int_{S_c} V \vec{D} \cdot d\vec{S} \end{aligned} \quad (5.64)$$

La superficie que limita el volumen  $v$  de la densidad de carga libre se puede extender hasta el infinito y hasta la superficie de los conductores ya que el volumen que incluimos no tiene densidad de volumen de carga libre (Fig. 5.12). Sin embargo, el sentido de los diferenciales de superficie es distinto en las dos integrales sobre la superficie de los conductores  $S_c$ , por tanto, estas dos integrales se anulan entre sí. En cuanto a la otra integral de superficie converge a cero puesto que, si existe una carga neta, tenemos que en el infinito las variables se comportan como:  $V \sim r^{-1}$ ,  $|\vec{D}| \sim r^{-2}$  y el  $dS \sim r^2$ , y si no existe una carga neta, el potencial es al menos el de un dipolo y, por tanto, tenemos que en el infinito las variables se comportan como:  $V \sim r^{-2}$ ,  $|\vec{D}| \sim r^{-3}$ . En definitiva, en ambos casos la integral sobre la superficie infinita  $S_\infty$  converge a 0 y, por tanto, la energía electrostática viene dada por:

$$U_e = \frac{1}{2} \int_v \vec{D} \cdot \vec{E} dv \quad (5.65)$$



**Figura 5.12:** Distribución espacial de cargas libres volumétricas y superficiales.

Esta expresión diverge si se aplica a un sistema de cargas puntuales etiquetadas por el subíndice  $j$  (salvo que no se tengan en cuenta sus autoenergías, es decir, se resten las integrales de los términos  $E_j^2$ ). De la ecuación [5.65] se puede concluir que la energía se almacena en el campo eléctrico con una densidad  $u_e = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}$ . En el caso de un condensador de carga  $q$  con dieléctrico la expresión de la energía toma una forma sencilla haciendo uso de la ecuación [5.62]:

$$U_e = \frac{1}{2} qV_1 - \frac{1}{2} qV_2 = \frac{1}{2} C(V_1 - V_2)^2 \quad (5.66)$$

## 5.10. Método de imágenes

En el caso de dieléctricos lineales la ecuación de Poisson toma la forma:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon \rightarrow \nabla^2 V = -\rho/\epsilon \quad (5.67)$$

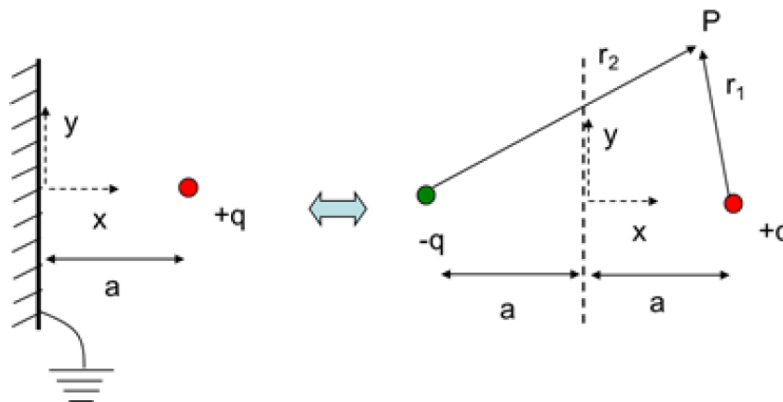
Y en el caso de problemas con conductores, ésta se reduce a la ecuación de Laplace (ec. [3.196]):

$$\nabla^2 V = 0 \quad (5.68)$$

Si se ha logrado encontrar una solución de la ecuación de Laplace que satisface las condiciones de contorno o frontera (es decir, se conoce la función que verifica los valores de potencial en la frontera de la región en la que se resuelve la ecuación), dicha solución es única. Uno de los métodos para encontrar una solución de la ecuación [5.68] es el método de imágenes. Ya se sabe que la suma de los potenciales de un conjunto de cargas puntuales es una solución de la ecuación de Laplace. El objetivo del método de imágenes es encontrar un conjunto de cargas ficticias o imagen que junto con las cargas reales del sistema creen un potencial que satisfaga las condiciones de frontera. El potencial en un punto vendrá dado por:

$$V(\vec{r}) = \sum_{i, \text{reales}} \frac{q_i}{4\pi\epsilon |\vec{r} - \vec{r}_i|} + \sum_{i, \text{imagen}} \frac{q_i}{4\pi\epsilon |\vec{r} - \vec{r}_i|} \quad (5.69)$$

El ejemplo más simple es el de una carga puntual  $q$  en un medio dieléctrico en la presencia de un plano conductor infinito conectado a tierra y, por tanto, a potencial cero (véase Fig. 5.13).



**Figura 5.13:** Método de imágenes.

El valor del potencial en un punto se puede obtener sumando el potencial de la carga puntual real y de una imagen de valor  $-q$  situada especularmente respecto del plano conductor, ya que, la función resultante satisface la condición de potencial cero en el plano conductor.

$$V(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon r_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon r_2} \quad (5.70)$$

## Bibliografía

---

- [1] M. Alonso y E.J. Finn, Física. Vol. II: Campos y Ondas, Ed. Addison Wesley, Wilmington, Delaware, (1987).
- [2] J.R. Reitz, F.J. Milford, R.W. Christy, Fundamentos de la Teoría Electromagnética, Ed. Addison Wesley, Naucalpán de Juárez, México, (1996).
- [3] P. Lorrain y D.E. Corson, “Campos y Ondas Electromagnéticos”. Ed. Selecciones Científicas, Madrid, (1972).
- [4] E.M. Purcell, Electricidad y Magnetismo, Berkeley Physics Course, Vol. 2, Ed. Reverté, Barcelona, (1988).