ELECTROSTÁTICA DE DIELÉCTRICOS

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

Curso 2014/15

ÍNDICE

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

ÍNDICE

APLICACIONES

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

ÍNDICE

APLICACIONES

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

POLARIZACIÓN DE LA MATERIA

- Al aplicar un campo externo a un dieléctrico, se perturba el movimiento de los electrones de sus átomos y su centro de cargas se desplaza una cierta distancia con respecto al núcleo (centro de cargas positivo), aparece un momento dipolar.
- Los átomos no tienen momentos dipolares permanentes debido a su simetría esférica, pero cuando se colocan en un campo eléctrico se polarizan adquiriendo momentos dipolares inducidos.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

POLARIZACIÓN DE LA MATERIA

- Muchas moléculas tienen momentos dipolares permanentes, ya que en ellas el centro de cargas de las cargas positivas no coincide con el centro de cargas de las negativas.
- La materia en general no presenta un momento dipolar neto debido a la orientación al azar de todas sus moléculas.
- Los momentos dipolares en presencia de un campo externo tienden a colocarse paralelamente al campo debido al par que aparece, dando lugar a una polarización neta.

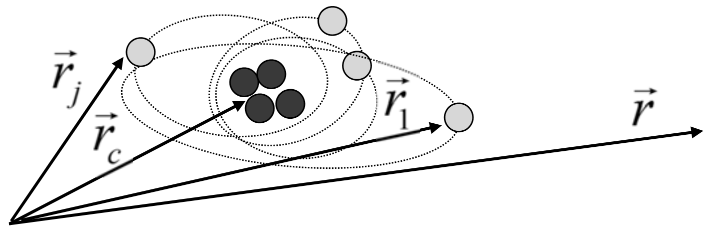
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

POTENCIAL: DESARROLLO MULTIPOLAR

Los materiales dieléctricos no contienen cargas libres por lo que en su interior puede existir un campo electrostático macroscópico.

Cargas positivas ●

Cargas negativas ○



J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

POTENCIAL: DESARROLLO MULTIPOLAR

Para calcular dicho campo consideraremos que las moléculas están formadas por un conjunto de cargas puntuales: electrones y protones, con carga neta nula aunque con centros de cargas no solapados.

$$\sum q_j = 0$$

En primer lugar obtendremos el potencial creado por una molécula que se encuentra en una región de tamaño R (determinada por el vector $\vec{r}_c$) en puntos $\vec{r}$ tales que:

$$\left|\vec{r} - \vec{r}_c\right| >> R$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

POTENCIAL: DESARROLLO MULTIPOLAR

$$V(\vec{r})=\sum_j \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0\left|\vec{r}-\vec{r}_j\right|}=\sum_j \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0\left|\vec{r}-\vec{r}_c-(\vec{r}_j-\vec{r}_c)\right|}=\sum_j \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0\left|\vec{\rho}-\vec{\rho}_j\right|}$$

$$\vec{\rho}=\vec{r}-\vec{r}_c;\quad \vec{\rho}_j=\vec{r}_j-\vec{r}_c\to\vec{0}$$

Y como*

$$V(\vec{r})\simeq\sum_j \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\left|\vec{\rho}\right|}+\frac{\vec{\rho}}{\left|\vec{\rho}\right|^3}\cdot\vec{\rho}_j+\dots\right]=\sum_j \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\left|\vec{\rho}\right|}-\nabla\frac{1}{\left|\vec{\rho}\right|}\cdot\vec{\rho}_j+\dots\right]$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

*Ver diapositiva siguiente

POTENCIAL: DESARROLLO MULTIPOLAR

$$\left|\vec{\rho}_j\right|<<\left|\vec{\rho}\right| \qquad \nabla\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}=-\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3},,(\nabla_j\leftrightarrow\nabla,\vec{\rho}_j\leftrightarrow\vec{r},\vec{\rho}\leftrightarrow\vec{r}')$$

$$\frac{1}{\left|\vec{\rho}_j-\vec{\rho}\right|}\approx\frac{1}{\left|\vec{\rho}\right|}+\nabla_j\frac{1}{\left|\vec{\rho}_j-\vec{\rho}\right|}\Bigg|_{\vec{\rho}_j=0}\cdot\vec{\rho}_j=\frac{1}{\left|\vec{\rho}\right|}-\frac{(\vec{\rho}_j-\vec{\rho})}{\left|\vec{\rho}_j-\vec{\rho}\right|^3}\Bigg|_{\vec{\rho}_j=0}\cdot\vec{\rho}_j=$$

$$=\frac{1}{\left|\vec{\rho}\right|}+\frac{\vec{\rho}}{\left|\vec{\rho}\right|^3}\cdot\vec{\rho}_j=\frac{1}{\left|\vec{\rho}\right|}-\nabla(\frac{1}{\left|\vec{\rho}\right|})\cdot\vec{\rho}_j$$

$$\nabla\frac{1}{\left|\vec{r}\right|}=-\frac{\vec{r}}{\left|\vec{r}\right|^3},,(\vec{\rho}\leftrightarrow\vec{r})$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

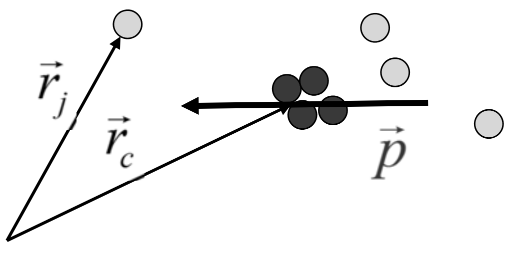
POTENCIAL: DESARROLLO MULTIPOLAR

$$V(\vec{r}) \simeq \frac{\sum_j q_j}{4\pi\varepsilon_0 \left|\vec{r}-\vec{r}_c\right|} - \sum_j q_j(\vec{r}_j - \vec{r}_c)\cdot\nabla\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\left|\vec{r}-\vec{r}_c\right|}\right]$$

Potencial para un sistema de cargas puntuales en puntos alejados en aproximación dipolar

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

POTENCIAL: DESARROLLO MULTIPOLAR



$$\vec{p} \equiv \sum_j q_j(\vec{r}_j - \vec{r}_c)$$

Momento dipolar eléctrico respecto del punto $\vec{r}_c$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

POTENCIAL: DESARROLLO MULTIPOLAR

$$Si \quad \sum_j q_j = 0 \Rightarrow \vec{p} = \sum_j q_j \vec{r}_j$$

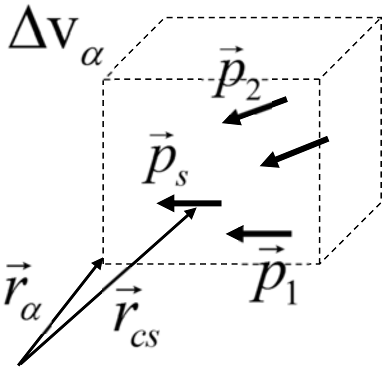
$$V(\vec{r}) \simeq \frac{\sum_j q_j}{4\pi\varepsilon_0 \left|\vec{r}-\vec{r}_c\right|} - \vec{p}\cdot\nabla\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\left|\vec{r}-\vec{r}_c\right|}\right] = -\vec{p}\cdot\nabla\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\left|\vec{r}-\vec{r}_c\right|}\right]$$

Potencial en aproximación dipolar para una molécula neutra (sistema de cargas puntuales) en una posición alejada.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

VECTOR POLARIZACIÓN

El dieléctrico está formado por α diferenciales de volumen Δv_α y cada uno de ellos contiene moléculas neutras (dipolos) colocadas en $\vec{r}_{cs}$



J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

VECTOR POLARIZACIÓN

$$\vec{P}(\vec{r}_\alpha) = \frac{\sum_s \vec{p}_s}{\Delta \mathrm{v}_\alpha}$$

El vector polarización es la suma de los momentos dipolares moleculares por unidad de volumen.

Sumamos para los volúmenes α y los dipolos *s* que tiene cada uno

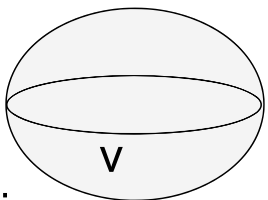
$$V(\vec{r}) = -\sum_\alpha \sum_s \vec{p}_s \cdot \nabla \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 \left| \vec{r} - \vec{r}_{cs} \right|} \right]$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

VECTOR POLARIZACIÓN

Si calculamos un campo promedio o macroscópico: $\vec{r}_{cs} \simeq \vec{r}_\alpha$

$$V(\vec{r}) \simeq -\sum_\alpha \Delta \mathrm{v}_\alpha \vec{P}(\vec{r}_\alpha) \cdot \nabla \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 \left| \vec{r} - \vec{r}_\alpha \right|} \right]$$



Dieléctrico

$$V(\vec{r}) \simeq -\int_{\mathrm{V}} \vec{P}(\vec{r}\,') \cdot \nabla \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 \left| \vec{r} - \vec{r}\,' \right|} \, d\mathrm{v}'$$

Potencial creado por un dieléctrico en función del vector polarización

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

DENSIDADES DE CARGA DE POLARIZACIÓN

$$V(\vec{r}) \simeq -\int_{\mathrm{v}} \vec{P}(\vec{r}\,') \cdot \nabla \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 \left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}\, d\mathrm{v}'$$

Y como:

$$\nabla' \cdot \frac{\vec{P}(\vec{r}\,')}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|} = \frac{\nabla' \cdot \vec{P}(\vec{r}\,')}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|} + \vec{P}(\vec{r}\,') \cdot \nabla' \frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|} = \frac{\nabla' \cdot \vec{P}(\vec{r}\,')}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|} - \vec{P}(\vec{r}\,') \cdot \nabla \frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}$$

$$\nabla' \frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|} = -\nabla \frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

DENSIDADES DE CARGA DE POLARIZACIÓN

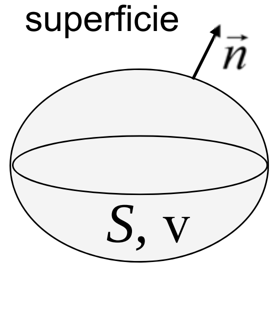
Entonces: $$V(\vec{r}) \simeq \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathrm{v}} \nabla' \cdot \frac{\vec{P}(\vec{r}\,')}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}\, d\mathrm{v}' - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathrm{v}} \frac{\nabla' \cdot \vec{P}(\vec{r}\,')}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}\, d\mathrm{v}' =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \oint_S \frac{\vec{P}(\vec{r}\,')}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|} \cdot d\vec{S}' - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathrm{v}} \frac{\nabla' \cdot \vec{P}(\vec{r}\,')}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}\, d\mathrm{v}'$$

$$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P} \qquad y \qquad \sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n}$$

Vector unitario de la normal exterior a la superficie

Dieléctrico



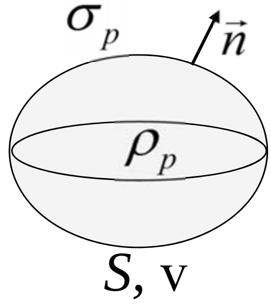
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

DENSIDADES DE CARGA DE POLARIZACIÓN

$$V(\vec{r}) \simeq \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \frac{\sigma_p dS'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_v \frac{\rho_p dv'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Esta ecuación es solución de: $\nabla^2 V = -\frac{\rho_p}{\varepsilon_0} \leftrightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_p}{\varepsilon_0}$

Dieléctrico



$d\vec{S}' = \vec{n}\, dS'$

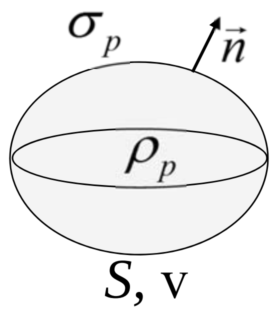
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

DENSIDADES DE CARGA DE POLARIZACIÓN

Por tanto, a todos los efectos existe una densidad de carga de polarización real en el dieléctrico:

$d\vec{S}' = \vec{n}\, dS'$

$$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P}$$



Y en la superficie:

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n}$$

Siendo $\vec{n}$ el vector unitario de la normal exterior

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CARGA TOTAL DE POLARIZACIÓN

$$Q_p = \oint_S \sigma_p dS + \int_V \rho_p dV = \oint_S \vec{P}\cdot\vec{n}\, dS + \int_V -\nabla\cdot\vec{P} dV =$$
$$= \oint_S \vec{P}\cdot d\vec{S} - \oint_S \vec{P}\cdot d\vec{S} = 0$$

La carga total de polarización es nula dado que las cargas en el dieléctrico lo único que hacen es separarse.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

DESPLAZAMIENTO ELÉCTRICO

En presencia de cargas libres de densidad total ρ y de polarización de densidad ρ_p la Electrostática se rige por:

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho+\rho_p}{\varepsilon_0}$$

Y además: $\nabla\times\vec{E} = 0$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

DESPLAZAMIENTO ELÉCTRICO

Se define el vector Desplazamiento Eléctrico $\vec{D}$ como:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

Y como:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{-\nabla \cdot \vec{P} + \rho}{\varepsilon_0}$$

Entonces: $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$

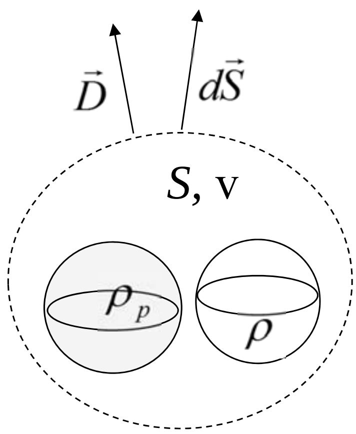
El vector desplazamiento depende únicamente de las cargas libres de los conductores y de los materiales con densidades de carga creadas “artificialmente” (véase el tema de electrostática, por ejemplo electrones inyectados en dieléctricos con haces de electrones de alta energía).

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

DESPLAZAMIENTO ELÉCTRICO

Ley de Gauss en presencia de dieléctricos:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \rightarrow \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{libre} = \int_v \rho dv$$



El flujo del vector desplazamiento es igual a la carga libre encerrada

Permite el cálculo del vector desplazamiento en problemas de alta simetría sin tener en cuenta la carga de polarización

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

DESPLAZAMIENTO ELÉCTRICO

Para resolver los problemas de dieléctricos se necesita la relación $\vec{P}(\vec{E})$. Usualmente la polarización tiene una dependencia lineal con el campo macroscópico, por tanto, bastaría conocer ε_r

$$\vec{P}(\vec{E}) = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} = \underbrace{(\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0}_{>0} \vec{E} + \ldots$$

χ_e = susceptibilidad
ε_r =permitividad eléctrica relativa

No hay ningún termino que dependa de $\vec{E}$ (excepto en cristales piroeléctricos) porque las moléculas no tienen momento dipolar en ausencia de campo o porque teniendo un momento dipolar permanente la agitación térmica anula la suma de momentos dipolares.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

DESPLAZAMIENTO ELÉCTRICO

$$\vec{P}(\vec{E}) = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} = \underbrace{(\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0}_{>0} \vec{E} + \ldots$$

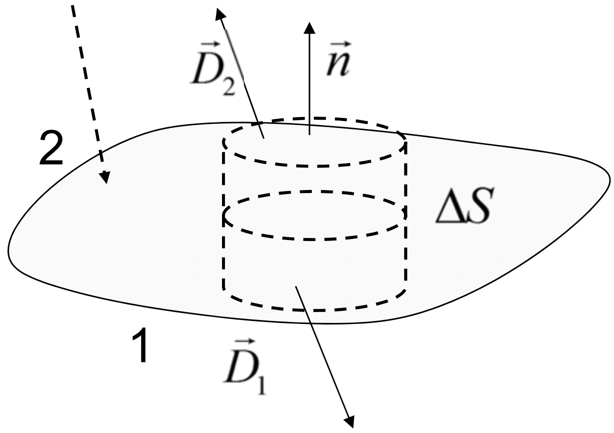
$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \rightarrow \nabla \cdot (\varepsilon_r \vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CAMPO EN LA SEPARACIÓN DE MEDIOS

Superficie de separación de dos medios



$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q$$

$$\vec{D}_1\cdot(-\vec{n})\Delta S + \vec{D}_2\cdot\vec{n}\Delta S = \sigma\Delta S$$

$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1)\cdot\vec{n} = \sigma$$

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma$$

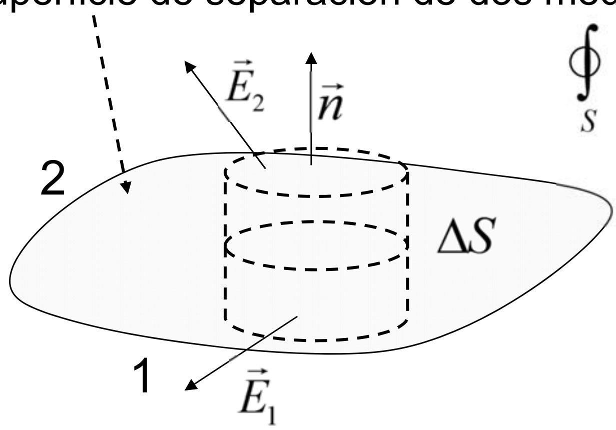
El vector unitario normal va dirigido en la dirección que apunta al medio (2)

En la dirección normal el vector desplazamiento se conserva si no existe carga libre

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CAMPO EN LA SEPARACIÓN DE MEDIOS

Superficie de separación de dos medios



$$\oint_S d\vec{S} \times \vec{E} = \int_{\mathrm{v}} d\mathrm{v}\ \nabla \times \vec{E} = 0$$

$$0 = \vec{n}\Delta S\times\vec{E}_2 + (-\vec{n})\Delta S\times\vec{E}_1$$

$$\vec{n}\times(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$$

$$E_{2t} = E_{1t}$$

Condición de contorno: En la dirección tangencial el vector campo eléctrico se conserva siempre

Dado que $E_t = -\dfrac{\partial V}{\partial t}$ el potencial a ambos lados se puede tomar idéntico.

$$V_2 = V_1$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CONDENSADORES

Condensador con carga fija ($Q = cte$)

Sin dieléctrico: $\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$ $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$

$\varepsilon_r > 1$

Con dieléctrico: $\nabla \times \vec{E}' = \vec{0}$ $\oint \varepsilon_r \vec{E}' \cdot d\vec{S} = \dfrac{Q}{\varepsilon_0} \longrightarrow \varepsilon_r \vec{E}' = \vec{E}$

El dieléctrico disminuye el campo eléctrico y, como consecuencia, disminuye la diferencia de potencial entre placas aumentando la capacidad del condensador en un factor ε_r

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CONDENSADORES

Condensador a potencial fijo ($V = cte, \vec{E} = \vec{cte}$):

Sin dieléctrico: $\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$ $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$

$\varepsilon_r > 1$

Con dieléctrico: $\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$ $\oint \varepsilon_r \vec{E} \cdot d\vec{S} = \dfrac{Q'}{\varepsilon_0} \longrightarrow \dfrac{Q'}{\varepsilon_r} = Q$

El dieléctrico aumenta la carga del condensador y, como consecuencia, aumenta la capacidad del condensador en un factor ε_r

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

En presencia de dieléctricos y conductores la energía electrostática se calcula como:

$$U_e = \frac{1}{2}\int_{\mathrm{v}} \rho(\vec{r})V(\vec{r})d\mathrm{v}$$

Sólo carga LIBRE
(de conductores o “artificial”)

$$U_e = \frac{1}{2}\int_{\mathrm{v}} \vec{D}\cdot\vec{E}\, d\mathrm{v}$$

Ej: Para un condensador:

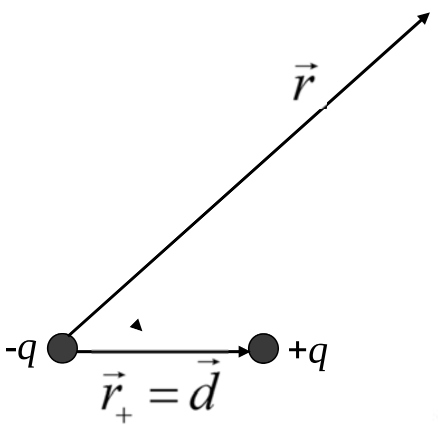
$$U_e = \frac{1}{2}qV_1 - \frac{1}{2}qV_2 = \frac{1}{2}C(V_1 - V_2)^2$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

DIPOLO ELÉCTRICO

POTENCIAL DE UN DIPOLO

DIPOLO: 2 cargas idénticas de signo opuesto muy próximas



$$\vec{r}_c = 0; \quad \vec{r}_- = 0$$

$$\vec{p} \equiv \sum_j q_j\vec{r}_j = q(\vec{r}_+ - \vec{r}_-) = q\vec{d}$$

$$V(\vec{r}) \simeq \frac{+q}{4\pi\varepsilon_0\left|\vec{r}-\vec{r}_+\right|} + \frac{(-q)}{4\pi\varepsilon_0\left|\vec{r}-\vec{r}_-\right|}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

DIPOLO ELÉCTRICO

POTENCIAL DE UN DIPOLO

$$V(\vec{r}) \simeq \frac{+q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{|\vec{r}|}+\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}\cdot\vec{r}_+ + \ldots\right]+\frac{(-q)}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}|}$$

$$V(\vec{r}) \simeq \frac{q\vec{r}_+\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}|^3}=\frac{q\vec{d}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}|^3}=\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}|^3}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

DIPOLO ELÉCTRICO

CAMPO ELÉCTRICO DE UN DIPOLO

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{(p_x x + p_y y + p_z z)}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}|^3}\vec{i}-\frac{\partial V}{\partial y}\vec{j}-\frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{(p_x x + p_y y + p_z z)}{|\vec{r}|^3}=\frac{p_x}{|\vec{r}|^3}+(p_x x + p_y y + p_z z)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{|\vec{r}|^3}\right)=$$

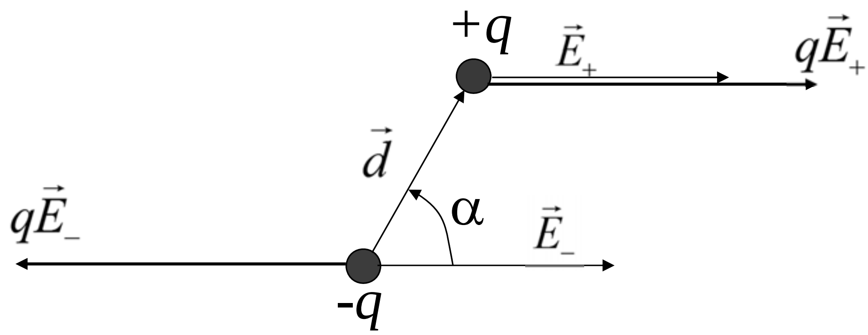
$$=\frac{p_x}{|\vec{r}|^3}+(\vec{p}\cdot\vec{r})(-3)\frac{1}{r^4}\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{p_x}{|\vec{r}|^3}+(\vec{p}\cdot\vec{r})(-3)\frac{1}{r^4}\frac{x}{r}=\frac{p_x}{|\vec{r}|^3}-\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})x}{r^5}$$

$$\vec{E}(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{\vec{p}}{r^3}+\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5}\right)$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

DIPOLO ELÉCTRICO

ACCIONES DEL CAMPO ELÉCTRICO SOBRE UN DIPOLO

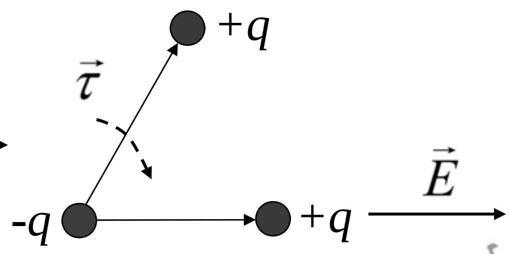


Unitario perpendicular al papel

$$\vec{F} = q(\vec{E}_+ - \vec{E}_-) \approx \vec{0}$$

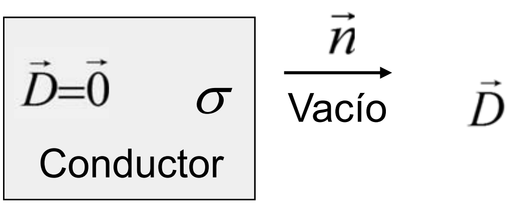
$$\vec{\tau} = \vec{d} \times q\vec{E}_+ = d\, qE \sin\alpha\, \vec{u}$$

El momento tiende a alinear el dipolo con el campo



J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CAMPO EN LA SEPARACIÓN DE UN CONDUCTOR EN CONTACTO CON EL VACÍO



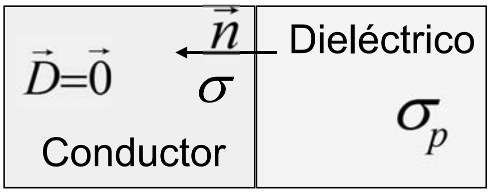
$$(\vec{D} - \vec{0}) \cdot \vec{n} = \sigma$$

Coincide con la expresión obtenida en el tema de conductores:

$$\sigma = \vec{n} \cdot \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{n}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CAMPO EN LA SEPARACIÓN DE UN CONDUCTOR EN CONTACTO CON UN DIELÉCTRICO



$$(\vec{0}-\vec{D})\cdot\vec{n}=\sigma$$

$$\sigma_p=\vec{P}\cdot\vec{n}=(\vec{D}-\varepsilon_0\vec{E})\cdot\vec{n}=\frac{(\varepsilon_r-1)}{\varepsilon_r}\vec{D}\cdot\vec{n}=\frac{(\varepsilon_r-1)}{\varepsilon_r}(-\sigma)$$

$$\vec{D}=\varepsilon_r\varepsilon_0\vec{E}$$

Densidad de polarización en el dieléctrico adyacente

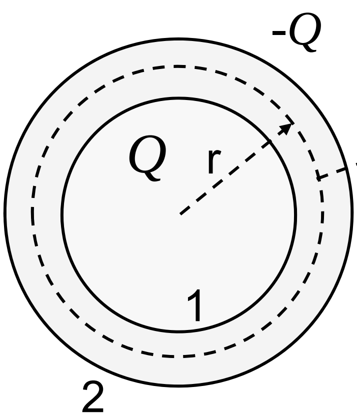
$$\sigma_p=-\sigma\frac{(\varepsilon_r-1)}{\varepsilon_r}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CAPACIDAD

CONDENSADOR ESFÉRICO

Radios: R_1 y R_2 Carga del condensador: Q Dieléctrico: ε_r



Gaussiana

$$D4\pi r^2=Q\rightarrow D=\frac{Q}{4\pi r^2}$$

$$E=\frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_r}=\frac{Q}{4\pi r^2\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

Y como $$P=(\varepsilon_r-1)\varepsilon_0 E=\frac{(\varepsilon_r-1)Q}{\varepsilon_r 4\pi r^2}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CAPACIDAD

CONDENSADOR ESFÉRICO

Radios: R_1 y R_2 Carga del condensador: Q Dieléctrico: ε_r

$$V_2 - V_1 = -\int_{R_1}^{R_2} E dr = -\int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0 \varepsilon_r} dr$$

$$V_2 - V_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$$

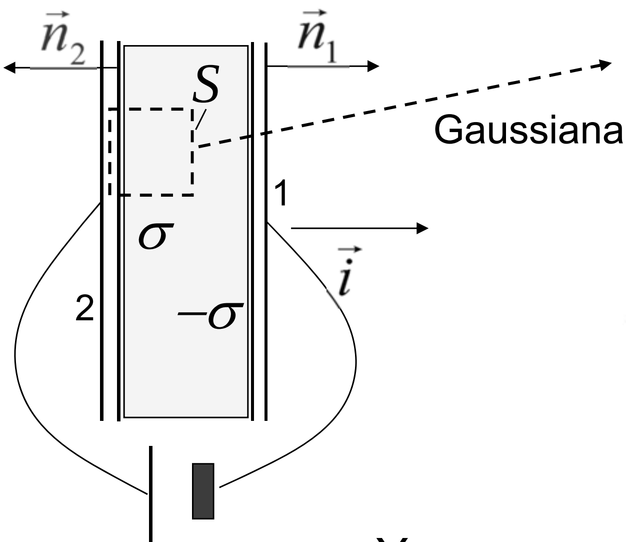
$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_2 R_1}{(R_2 - R_1)}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CAPACIDAD

CONDENSADOR PLANO

Separación de placas: d Potencial: ΔV Dieléctrico: ε_r



$$DS = \sigma S \quad \rightarrow D = \sigma$$

$$E = \frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

Y como $$P = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 E = \frac{(\varepsilon_r - 1)\sigma}{\varepsilon_r}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

CAPACIDAD

CONDENSADOR PLANO

Separación de placas: d Potencial: ΔV Dieléctrico: ε_r

$$V_2 - V_1 = \Delta V = -\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_1^2 \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} dl = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} d$$

$$\sigma = \Delta V (\varepsilon_r \varepsilon_0 / d)$$

$$\sigma_{p2} = \vec{P} \cdot \vec{n}_2 = \frac{(\varepsilon_r - 1)\sigma}{\varepsilon_r} \vec{i} \cdot (-\vec{i}) = -\frac{(\varepsilon_r - 1)\sigma}{\varepsilon_r}$$

$$\sigma_{p1} = \vec{P} \cdot \vec{n}_1 = \frac{(\varepsilon_r - 1)\sigma}{\varepsilon_r} \vec{i} \cdot \vec{i} = \frac{(\varepsilon_r - 1)\sigma}{\varepsilon_r}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

FUERZAS ELÉCTRICAS MACROSCÓPICAS

SISTEMAS CONSERVATIVOS DONDE LA ENERGÍA DEPENDE DE LA POSICIÓN RELATIVA DE CUERPOS MACROSCÓPICOS

Cálculo de la fuerza:

Para una fuerza conservativa,

$$\vec{F} \cdot \Delta\vec{r} \simeq -\Delta U \simeq -\nabla U \cdot \Delta\vec{r} \rightarrow \vec{F} = -\nabla U$$

Si se aplica una fuerza $\vec{F}_a$, para lograr el equilibrio:

$$\vec{F}_a = \nabla U$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

FUERZAS ELÉCTRICAS MACROSCÓPICAS

SISTEMAS CONSERVATIVOS DONDE LA ENERGÍA DEPENDE DE LA POSICIÓN RELATIVA DE CUERPOS MACROSCÓPICOS

Otra deducción.

Ecuación de la energía con una perturbación $\delta \vec{F}_a$ respecto del equilibrio:

$$\delta E_c = -\Delta U + (\vec{F}_a + \delta \vec{F}_a) \cdot \Delta \vec{r} \rightarrow 0 = -\Delta U + \vec{F}_a \cdot \Delta \vec{r}$$

$$\vec{F}_a = \nabla U$$

Esta ecuación se aplica para una partícula y, en problemas macroscópicos, para calcular la fuerza $\vec{F}_a$ necesaria para lograr el equilibrio.

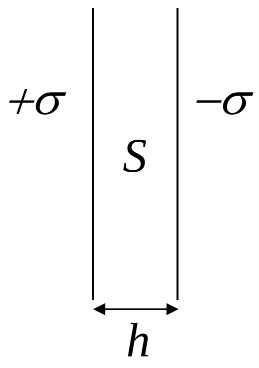
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

FUERZAS ELÉCTRICAS MACROSCÓPICAS

SISTEMAS CONSERVATIVOS DONDE LA ENERGÍA DEPENDE DE LA POSICIÓN RELATIVA DE CUERPOS MACROSCÓPICOS

Condensador plano con carga $Q = cte$

Fuerza necesaria para mantener las placas a una distancia h



$$0 = \delta E_c = -\Delta U_e + F_a \Delta h$$

$$F_a = \left.\frac{dU_e}{dh}\right|_{Q=cte}$$

Existe una atracción entre placas

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

FUERZAS ELÉCTRICAS MACROSCÓPICAS

SISTEMAS CONSERVATIVOS DONDE LA ENERGÍA DEPENDE DE LA POSICIÓN RELATIVA DE CUERPOS MACROSCÓPICOS

Condensador plano con carga $Q = cte$

Fuerza necesaria para mantener las placas a una distancia h

$$U_e = \frac{Q^2}{2C} \qquad Q = \sigma S \qquad C = \frac{\varepsilon_0 S}{h}$$

$$F_a = -\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C^2}\frac{dC}{dh} = -\frac{1}{2}V^2\frac{dC}{dh} = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2 S}{\varepsilon_0}$$

$$P = \frac{F_a}{A} = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\varepsilon_0}$$

En general, la superficie de la placa sufre una fuerza de atracción que es necesario compensar para lograr el equilibrio

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

FUERZAS ELÉCTRICAS MACROSCÓPICAS

SISTEMAS CONSERVATIVOS CON DISTINTOS TIPOS DE ENERGÍA

Cálculo de la fuerza:

Trabajo

$$0 = \delta E_c = -\Delta U_e - \Delta U_{ne} + w_a$$

Energía no electrostática

$$\vec{F}_a \cdot \Delta\vec{r} = w_a = \Delta U_e + \Delta U_{ne}$$

De esta expresión se deducen las fuerzas $\vec{F}_a$, que hay que aplicar para lograr el equilibrio

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

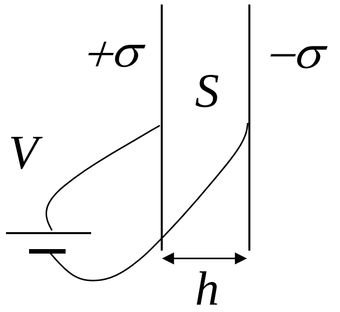
FUERZAS ELÉCTRICAS MACROSCÓPICAS

SISTEMAS CONSERVATIVOS CON DISTINTOS TIPOS DE ENERGÍA

Condensador plano sometido a potencial $V=cte$

Fuerza necesaria para mantener las placas a una distancia h

$$0=\delta E_c = -\Delta U_e + F_a\Delta h + V\Delta Q = -(\Delta U_e - V^2\Delta C) + F_a\Delta h$$



$$F_a = \left.\frac{dU_e}{dh}\right|_{V=cte} - V^2\left.\frac{dC}{dh}\right|_{V=cte} =$$

$$= \left.\frac{d}{dh}\left(\frac{1}{2}V^2 C\right)\right|_{V=cte} - V^2\left.\frac{dC}{dh}\right|_{V=cte} = -\left.\frac{dU_e}{dh}\right|_{V=cte}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

FUERZAS ELÉCTRICAS MACROSCÓPICAS

SISTEMAS CONSERVATIVOS CON DISTINTOS TIPOS DE ENERGÍA

Condensador plano sometido a potencial $V=cte$

Fuerza necesaria para mantener las placas a una distancia h

$$F_a = -\left.\frac{dU_e}{dh}\right|_{V=cte} = -\frac{1}{2}V^2\frac{dC}{dh} = \left.\frac{d}{dh}\left(\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}\right)\right|_{Q=cte} = \left.\frac{dU_e}{dh}\right|_{Q=cte}$$

$$U_e = \frac{1}{2}V^2 C$$

Idéntica a la obtenida para $Q = cte$

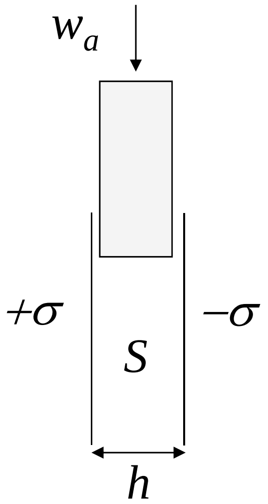
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

FUERZAS ELÉCTRICAS MACROSCÓPICAS

SISTEMAS CONSERVATIVOS CON DISTINTOS TIPOS DE ENERGÍA

Condensador plano con carga $Q = cte$

Trabajo necesario para rellenar con un material dieléctrico



$$0 = \delta E_c = -\Delta U_e + w_a$$

Trabajo para rellenar el condensador con un dieléctrico

$$0 = \delta E_c = -\Delta\left(\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}\right)\Bigg|_{Q=cte} + w_a$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

FUERZAS ELÉCTRICAS MACROSCÓPICAS

SISTEMAS CONSERVATIVOS CON DISTINTOS TIPOS DE ENERGÍA

Condensador plano con carga $Q = cte$

Trabajo necesario para rellenar con un material dieléctrico

$$w_a = \Delta\left(\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}\right)\Bigg|_{Q=cte} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C(\varepsilon_r)} - \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C(1)} < 0$$

Con dieléctrico

Sin dieléctrico

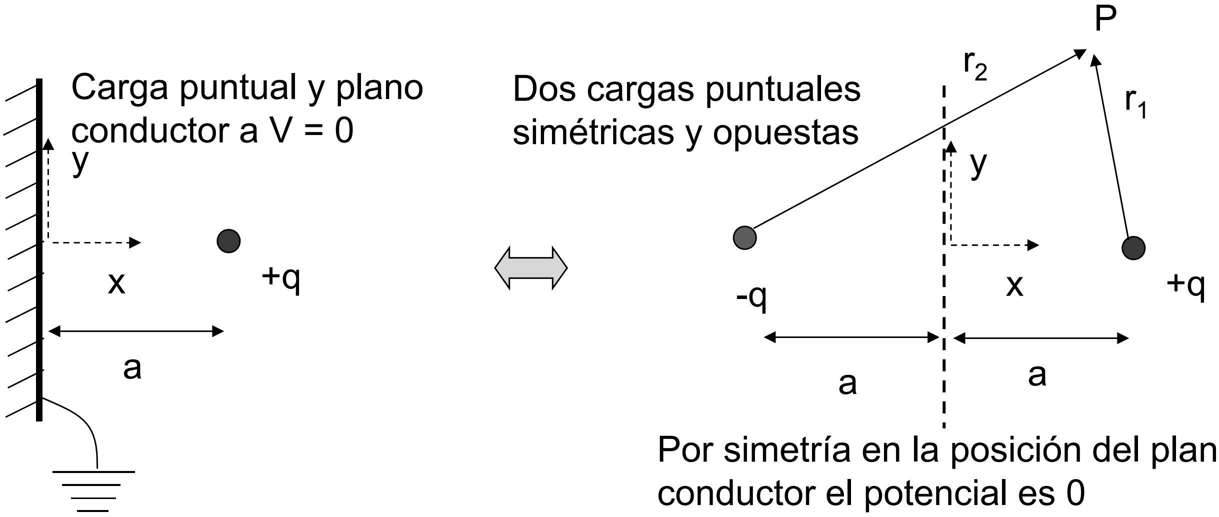
$$C(\varepsilon_r) = \varepsilon_r C(1)$$

$$\varepsilon_r > 1$$

La fuerza para mantener el equilibrio se opone al llenado, por tanto, el dieléctrico tiende a llenar el espacio entre placas.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

MÉTODO DE IMÁGENES



Por simetría en la posición del plano conductor el potencial es 0

Potencial en cualquier punto del espacio

$$V(P) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval