



MAGNETOSTÁTICA DEL VACÍO

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

Curso 2014/15



ÍNDICE

DENSIDAD DE CORRIENTE ELÉCTRICA

INTENSIDAD DE CORRIENTE ELÉCTRICA

MAGNETOSTÁTICA

INDUCCIÓN MAGNÉTICA (CAMPO \vec{B}) CREADA POR UNA
CARGA EN MRU

INDUCCIÓN MAGNÉTICA (CAMPO \vec{B}) CREADA POR
CORRIENTES ESTACIONARIAS: LEY DE BIOT-SAVART

LEY DE AMPÈRE

ECUACIONES DE MAXWELL EN MAGNETOSTÁTICA

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval





ÍNDICE

FUERZA DE LORENTZ

FUERZA DE UN CAMPO MAGNÉTICO SOBRE UN CIRCUITO

MOMENTO DE UN CAMPO MAGNÉTICO SOBRE UN CIRCUITO

FUERZA ENTRE CARGAS EN MRU

INTERACCIÓN MAGNÉTICA ENTRE DOS CIRCUITOS

POTENCIAL MAGNÉTICO VECTOR

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



ÍNDICE

APLICACIONES

CÁLCULO DEL VECTOR INDUCCIÓN MAGNÉTICA CREADO POR CORRIENTES ESTACIONARIAS

APLICACIÓN DE LA LEY DE BIOT-SAVART:

HILO DE LONGITUD FINITA RECORRIDO POR UNA INTENSIDAD I
ESPIRA DE RADIO R RECORRIDO POR UNA INTENSIDAD I EN UN PUNTO DE SU EJE

SOLENOIDE DE LONGITUD L Y RADIO R CON N ESPIRAS RECORRIDO POR UNA INTENSIDAD I

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval





ÍNDICE

APLICACIONES

CÁLCULO DEL VECTOR INDUCCIÓN MAGNÉTICA CREADO POR CORRIENTES ESTACIONARIAS

APLICACIÓN DE LA LEY DE AMPÈRE:

HILO INDEFINIDO RECORRIDO POR UNA INTENSIDAD I

HILO INDEFINIDO DE RADIO R Y DENSIDAD DE CORRIENTE $J=Cr$

SOLENOIDE DE LONGITUD L Y RADIO R LARGO Y ESTRECHO ($L \gg R$) CON N ESPIRAS RECORRIDO POR UNA INTENSIDAD I

SOLENOIDE TOROIDAL ESTRECHO ($R_t \gg R_c$) CON N ESPIRAS RECORRIDO POR UNA INTENSIDAD I

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



ÍNDICE

APLICACIONES

FUERZA ENTRE DOS CARGAS EN MRU

INTERACCIÓN MAGNÉTICA ENTRE DOS CIRCUITOS DEFINICIÓN DE AMPERIO

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

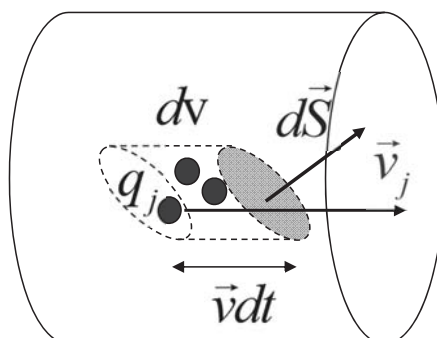




DENSIDAD DE CORRIENTE ELÉCTRICA

A la carga se le supone una velocidad promedio $\vec{v}_j = \vec{v}$

La carga contenida en el cilindro de altura $\vec{v}dt$ atraviesa el $\Delta\vec{S}$ en un dt



J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

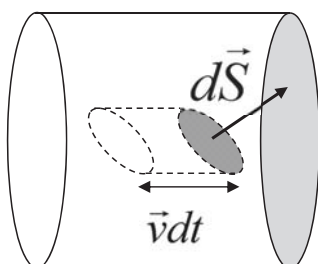


DENSIDAD DE CORRIENTE ELÉCTRICA

n_e = número de cargas por unidad de volumen

q_e = valor de la carga unitaria (en general, es la carga del electrón, por tanto, negativa)

Cantidad de carga contenida en el cilindro pequeño



$$dq = n_e q_e dv = n_e q_e \vec{v} dt \cdot d\vec{S}$$

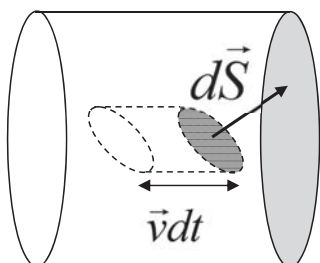
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval





DENSIDAD DE CORRIENTE ELÉCTRICA

Se define la densidad de corriente eléctrica como:



$$\vec{J}(\vec{r}) \equiv \sum_j \frac{q_j \vec{v}_j}{dV} = n_e q_e \vec{v}$$

Y como: $dq = n_e q_e \vec{v} dt \cdot d\vec{S}$

La carga por unidad de tiempo que atraviesa $d\vec{S}$ es

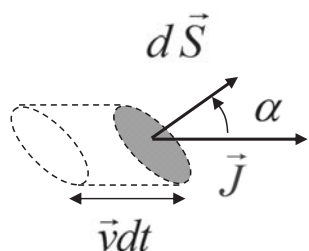
$$d\left(\frac{dq}{dt}\right) = n_e q_e \vec{v} \cdot d\vec{S} = \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



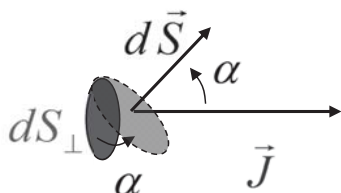
DENSIDAD DE CORRIENTE ELÉCTRICA

¿Qué es la densidad de corriente?



$$d\left(\frac{dq}{dt}\right) = n_e q_e \vec{v} \cdot d\vec{S} = \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

$$d\left(\frac{dq}{dt}\right) = |\vec{J}| |d\vec{S}| \cos \alpha = |\vec{J}| dS_{\perp}$$



$$dS_{\perp} = dS \cos \alpha$$

dS_{\perp} = Área perpendicular al movimiento de portadores

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval





DENSIDAD DE CORRIENTE ELÉCTRICA

Módulo

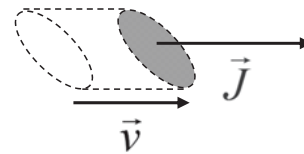
$$|\vec{J}| \equiv \frac{d(dq/dt)}{dS_{\perp}}$$

Cantidad de carga por unidad de tiempo que atraviesa la unidad de superficie colocada normalmente al movimiento de los portadores

Dirección

La del movimiento de las cargas

$$\vec{J}(\vec{r}) \equiv n_e q_e \vec{v}$$



Sentido

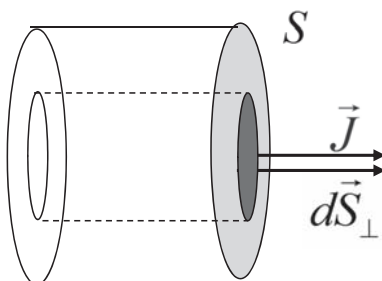
El de las cargas positivas y contrario al del movimiento de las cargas negativas

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



INTENSIDAD DE CORRIENTE ELÉCTRICA

Es la carga por unidad de tiempo que atraviesa una sección del conductor S_{\perp} transversal al movimiento de portadores.



$$I = \frac{dq}{dt}$$

Y como:
$$d\left(\frac{dq}{dt}\right) = \vec{J} \cdot d\vec{S}_{\perp} \rightarrow \frac{dq}{dt} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}_{\perp}$$

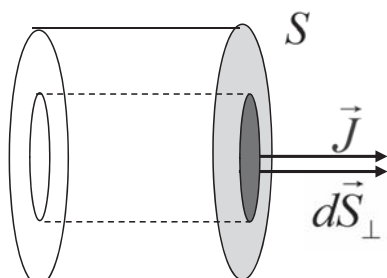
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval





INTENSIDAD DE CORRIENTE ELÉCTRICA

Se puede definir también como el flujo del vector \vec{J} a través de una superficie S_{\perp}



$$I = \int_{S_{\perp}} \vec{J} \cdot d\vec{S}_{\perp}$$

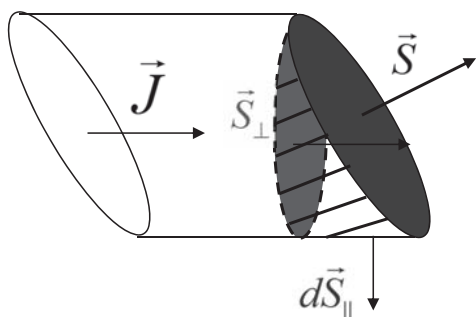
La unidad de la Intensidad de Corriente Eléctrica en el SI es el Amperio (A) y es una de las siete unidades fundamentales.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



INTENSIDAD DE CORRIENTE ELÉCTRICA

Suponemos que no varía la densidad de corriente en ningún sitio ($\text{div } \vec{J} = 0$): CORRIENTE ESTACIONARIA



El flujo neto a través de la superficie cerrada de la figura es cero (Teorema de la divergencia)

$$\vec{S} - \vec{S}_{\perp} + \vec{S}_{\parallel}$$

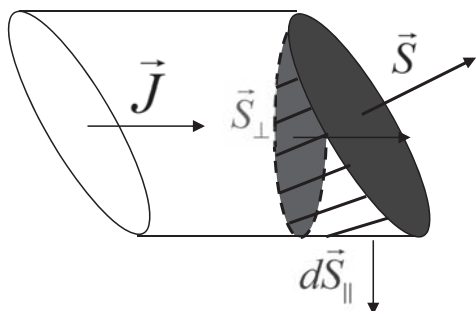
$$0 = \int_v \nabla \cdot \vec{J} \, dv = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} - \int_{S_{\perp}} \vec{J} \cdot d\vec{S}_{\perp} + \int_{S_{\parallel}} \vec{J} \cdot d\vec{S}_{\parallel}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval





INTENSIDAD DE CORRIENTE ELÉCTRICA



$$\vec{J} \perp d\vec{S}_{\parallel} \rightarrow \vec{J} \cdot d\vec{S}_{\parallel} = 0$$

$$\int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_{S_{\perp}} \vec{J} \cdot d\vec{S}_{\perp}$$

$$I = \int_{S_{\perp}} \vec{J} \cdot d\vec{S}_{\perp} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

La intensidad no depende de la sección del conductor que tomemos para calcular el flujo, ni de la posición de ésta.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



MAGNETOSTÁTICA

Se ocupa del estudio del campo magnético producido por corrientes estacionarias ($I = \text{cte}$).

Más adelante se verá que:

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Por tanto, la no dependencia con el tiempo de la densidad de portadores va asociada a una divergencia nula.

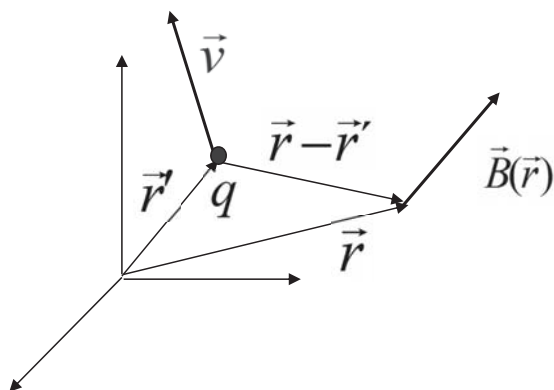
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



MAGNETOSTÁTICA



INDUCCIÓN MAGNÉTICA (CAMPO \vec{B}) CREADA POR UNA CARGA EN MRU



Aproximación no relativista

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Actualmente al vector inducción magnética se le da el nombre de

CAMPO MAGNÉTICO

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



MAGNETOSTÁTICA



INDUCCIÓN MAGNÉTICA (CAMPO \vec{B}) CREADA POR UNA CARGA EN MRU

Unidades SI: Tesla (T)

Dimensiones SI: $[\mu_0] = [B][q]^{-1}[v]^{-1}[r]^2 = L M T^{-2} I^{-2}$

Constante magnética del vacío:

$$\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ m kg C}^{-2}$$

c es la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas en el vacío: velocidad de la luz

$$c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

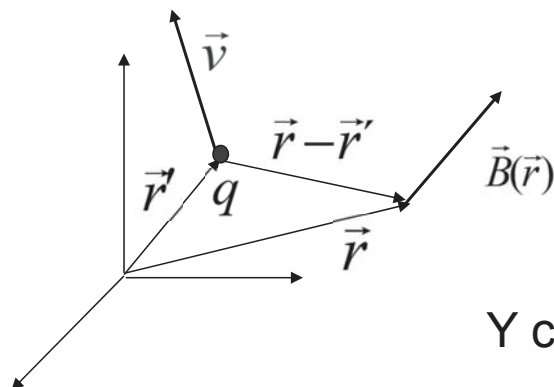
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



MAGNETOSTÁTICA



INDUCCIÓN MAGNÉTICA (CAMPO \vec{B}) CREADA POR UNA CARGA EN MRU



$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Y como:
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mu_0\epsilon_0(\vec{v} \times \vec{E}(\vec{r})) = \frac{(\vec{v} \times \vec{E}(\vec{r}))}{c^2}$$

Para $v \ll c$ el campo magnético de una carga es mucho menos intenso que el eléctrico

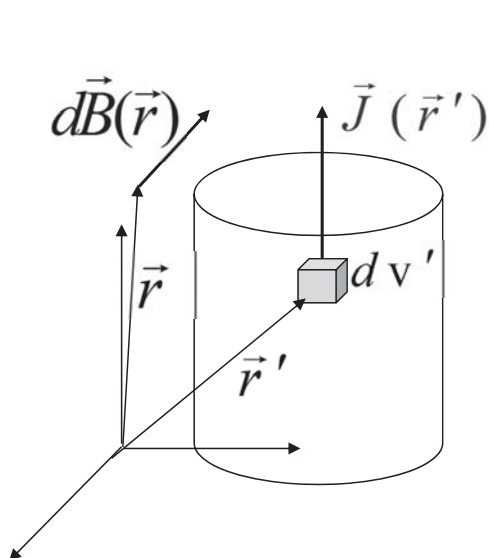
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



MAGNETOSTÁTICA



INDUCCIÓN MAGNÉTICA (CAMPO \vec{B}) CREADA POR CORRIENTES ESTACIONARIAS



Velocidad media de la carga

$$\vec{J}(\vec{r}) \equiv \sum_j \frac{q_j \vec{v}_j}{dv} = \frac{dq \vec{v}}{dv}$$

$$dq(\vec{r}') \vec{v} = \vec{J}(\vec{r}') dv'$$

Para una densidad de corriente $\vec{J}(\vec{r}')$

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J}(\vec{r}') dv' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



MAGNETOSTÁTICA



INDUCCIÓN MAGNÉTICA (CAMPO \vec{B}) CREADA POR CORRIENTES ESTACIONARIAS

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J}(\vec{r}') dV' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Integrando:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Ley de Biot-Savart para densidades

$\vec{B}(\vec{r})$ es el vector inducción magnética y tiene una dependencia con $1/r^2$ similar al campo eléctrico

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



MAGNETOSTÁTICA

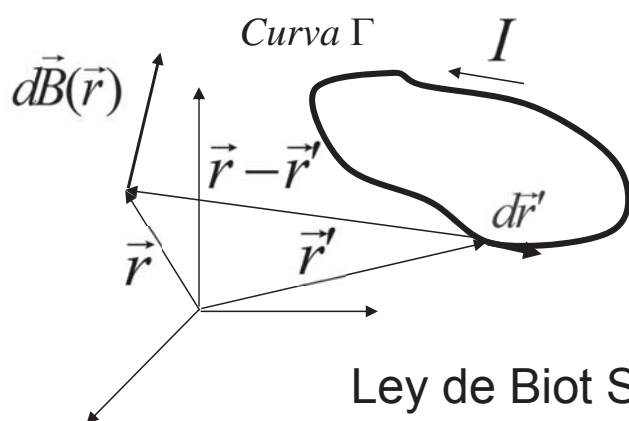


INDUCCIÓN MAGNÉTICA (CAMPO \vec{B}) CREADA POR CORRIENTES ESTACIONARIAS

Para un hilo de corriente:

$$I = \int_{S_{\perp}} J dS_{\perp} = JS_{\perp} = J \frac{dV'}{dr'}$$

$$\vec{J} dV' = I d\vec{r}'$$



Y de la ley para densidades obtenemos:

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Ley de Biot Savart para intensidades

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{I d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

Naval



MAGNETOSTÁTICA



INDUCCIÓN MAGNÉTICA (CAMPO \vec{B}) CREADA POR CORRIENTES ESTACIONARIAS

Otra equivalencia: $I = \frac{dq}{dt}$; $\vec{v} = \frac{d\vec{r}'}{dt}$ ← Velocidad media de la carga en el circuito

$$dq\vec{v} = \frac{dq}{dt} dt \frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{dq}{dt} d\vec{r}' = Id\vec{r}'$$

Para un hilo de corriente: $q\vec{v} \leftrightarrow dq\vec{v} = Id\vec{r}'$

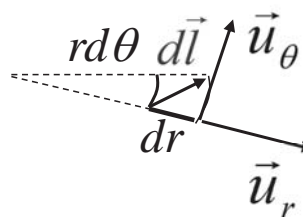
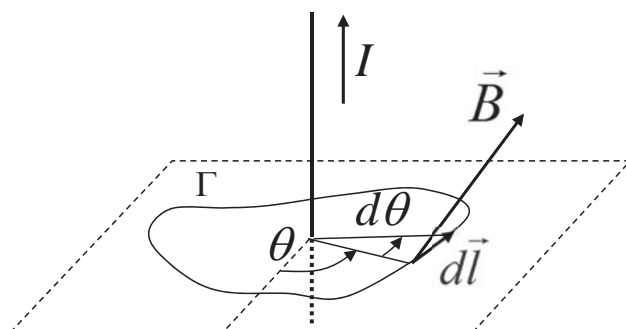
A partir de la inducción de una carga se llega también a la ley de Biot Savart para intensidades:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \leftrightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{Id\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



LEY DE AMPÈRE



$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta \cdot (dr\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_\theta) = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r d\theta = \mu_0 I$$

La circulación en una línea cerrada que rodea el conductor es igual a $\mu_0 I$.

(La deducción se ha hecho para una curva plana, la deducción para una curva alabeada genérica es inmediata)

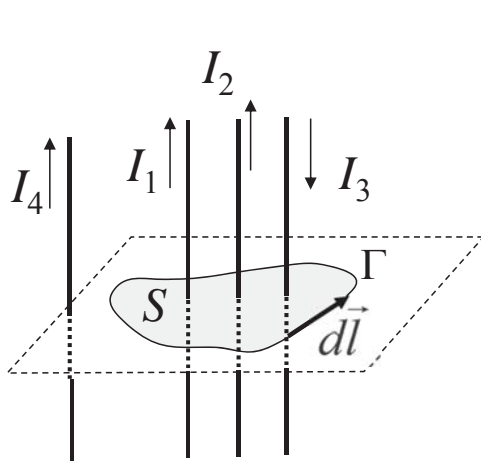
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



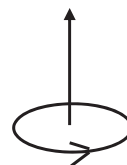


LEY DE AMPÈRE

En una superficie S se elige como sentido del vector normal a cada diferencial de superficie el del avance de un tornillo girando en el sentido de recorrido de la curva de contorno



Convenio



El sentido tomado para el $d\vec{l}$ fija el sentido positivo para la intensidad

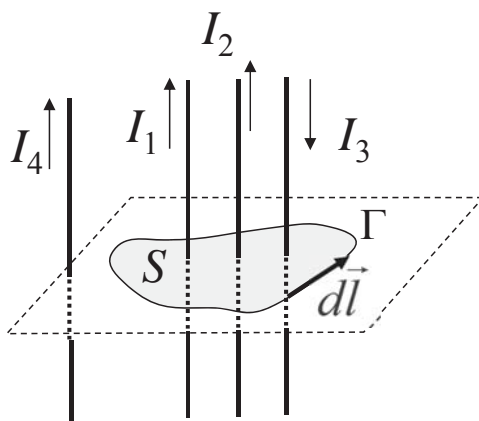
Si la intensidad no es rodeada por la línea, no contribuye a la circulación

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



LEY DE AMPÈRE

Teniendo en cuenta los convenios anteriores y aplicando el principio de superposición:



$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I_1 + I_2 - I_3)$$

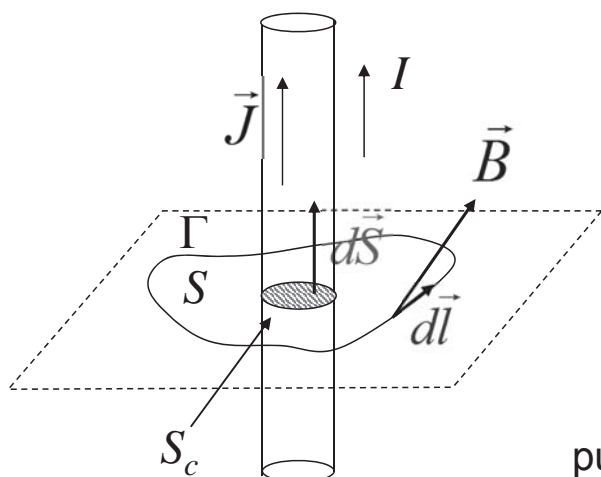
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval





LEY DE AMPÈRE

Para una densidad de corriente \vec{J}



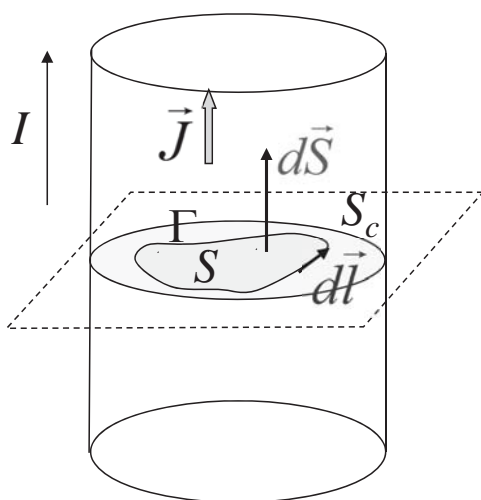
$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I = \mu_0 \int_{S_c} \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Área de la curva
(se reduce a la del conductor
pues solo en ella existe densidad
de corriente)

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



LEY DE AMPÈRE



Si la curva Γ está dentro del
conductor solo debemos
contabilizar la corriente que
la atraviesa, no la total.

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \neq \mu_0 I = \int_{S_c} \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Área de Γ

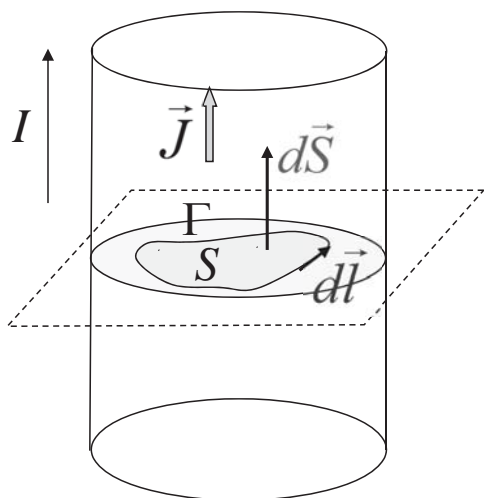
Área del conductor

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval





ECUACIONES DE MAXWELL EN MAGNETOSTÁTICA



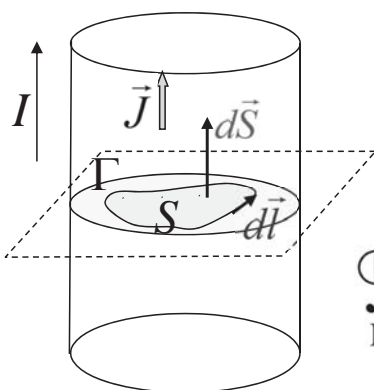
$$\int_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \mu_0 I_{\Gamma}$$

Intensidad de corriente
encerrada por Γ

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



ECUACIONES DE MAXWELL EN MAGNETOSTÁTICA



Utilizando el teorema de Stokes:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_S \nabla \times \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

$$\boxed{\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}}$$

La inducción magnética rodea las corrientes

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval





ECUACIONES DE MAXWELL EN MAGNETOSTÁTICA

Recordando que la divergencia de un rotacional es cero:

$$0 = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = 0 = \nabla \cdot (\mu_0 \vec{J})$$

Es decir: $\mu_0 \nabla \cdot \vec{J} = 0$

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0$$

En corrientes estacionarias, no hay fuentes de corriente

Ley de Conservación Local de la Carga



ECUACIONES DE MAXWELL EN MAGNETOSTÁTICA

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv'$$

Y como $\nabla \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot \nabla \times \vec{a} - \vec{a} \cdot \nabla \times \vec{b}$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v dv' \left(\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \cdot \nabla \times \vec{J}(\vec{r}') - \vec{J}(\vec{r}') \cdot \nabla \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) = 0$$

Se deriva respecto de \vec{r} Campo conservativo

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{Las líneas de campo son cerradas}$$





FUERZA DE LORENTZ

Fuerza que aparece sobre una carga q con velocidad \vec{v} en el seno de un campo electromagnético

$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Ecuación de dimensiones de la inducción magnética:

$$[\vec{B}] = [\vec{F}] [q]^{-1} [\vec{v}]^{-1} = MT^{-2}I^{-1}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



FUERZA DE LORENTZ

Propiedades:

- No actúa sobre cargas en reposo.
- Es perpendicular a \vec{v} y \vec{B} .
- No realiza trabajo al ser perpendicular a la trayectoria.
- En general, no cumple la ley de acción y reacción.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval





FUERZA DE UN CAMPO MAGNÉTICO SOBRE UN CIRCUITO

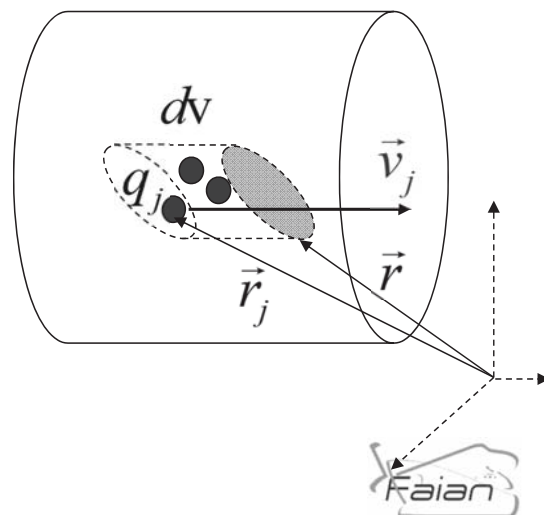
Efecto de la fuerza de Lorentz sobre un elemento $d\mathbf{v}$ por el que circula una densidad de corriente \vec{J} , en ausencia de campo eléctrico \vec{E} :

$$d\vec{F} = \sum (q_j \vec{v}_j \times \vec{B}(\vec{r}_j)) \simeq (\sum q_j \vec{v}_j) \times \vec{B}(\vec{r}) = \vec{J}(\vec{r}) d\mathbf{v} \times \vec{B}(\vec{r})$$

Para un hilo conductor:

$$\vec{J} d\mathbf{v} = I d\vec{r}$$

Por tanto: $d\vec{F} = I d\vec{r} \times \vec{B}$



J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



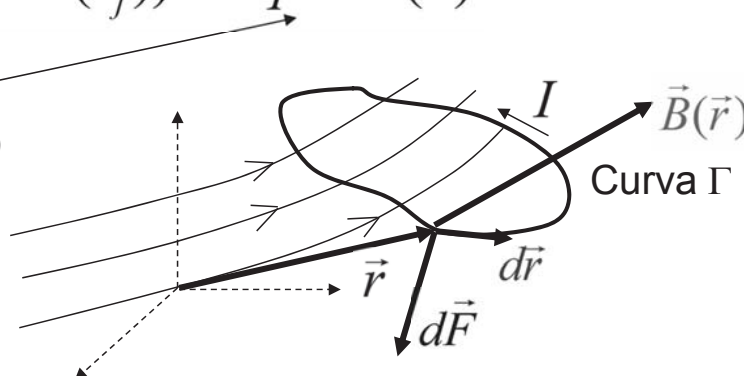
FUERZA DE UN CAMPO MAGNÉTICO SOBRE UN CIRCUITO

$$d\vec{F} = \sum (q_j \vec{v}_j \times \vec{B}(\vec{r}_j)) \simeq dq \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r})$$

Velocidad media de la carga en el circuito

Por la otra equivalencia:

$$\vec{v} dq = I d\vec{r}$$



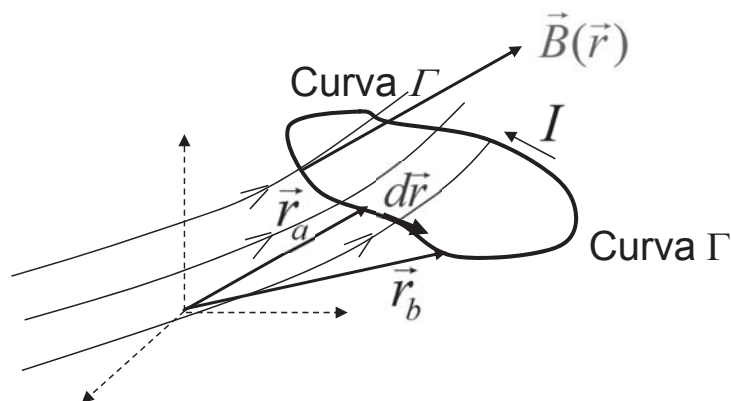
Es decir: $d\vec{F} = I d\vec{r} \times \vec{B}$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval





FUERZA DE UN CAMPO MAGNÉTICO SOBRE UN CIRCUITO



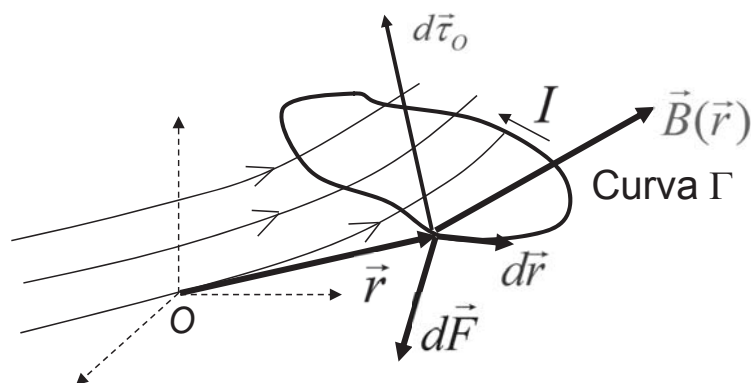
Para un circuito cerrado:
$$\vec{F} = I \oint_{\Gamma} d\vec{r} \times \vec{B}(\vec{r})$$

Para un tramo de hilo desde \vec{r}_a hasta \vec{r}_b :
$$\vec{F} = I \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} d\vec{r} \times \vec{B}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



MOMENTO DE UN CAMPO MAGNÉTICO SOBRE UN CIRCUITO



Momento respecto al punto O

$$d\vec{\tau}_o = \vec{r} \times d\vec{F} \Rightarrow \vec{\tau}_o = I \oint_{\Gamma} \vec{r} \times (d\vec{r} \times \vec{B}(\vec{r}))$$

El momento depende del punto

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval





MOMENTO DE UN CAMPO MAGNÉTICO SOBRE UN CIRCUITO

Si el vector Inducción Magnética es uniforme $\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B} = c t \vec{e}$

El sumatorio de los vectores $d\vec{r}$ en una curva cerrada es el vector nulo



$$\vec{F} = I \underbrace{\left(\oint_{\Gamma} d\vec{r} \right)}_0 \times \vec{B} = 0$$

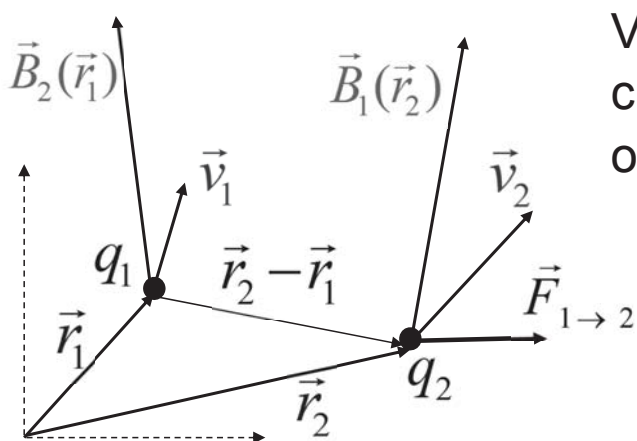
Por el teorema de cambio de polo se comprueba que, en este caso, el momento es independiente del punto:

$$\vec{\tau}_O = I \oint_{\Gamma} \vec{r} \times (d\vec{r} \times \vec{B}) = \vec{\tau}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



FUERZA ENTRE CARGAS EN MRU



Vector inducción magnética que crea la carga q_1 en la posición que ocupa q_2 :

$$\vec{B}_1(\vec{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 \vec{v}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

Fuerza de q_1 sobre q_2 : $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = q_2 (\vec{v}_2 \times \vec{B}_1(\vec{r}_2))$

Como puede comprobarse, no se verifica la 3ª Ley de Newton (Principio de acción y reacción):

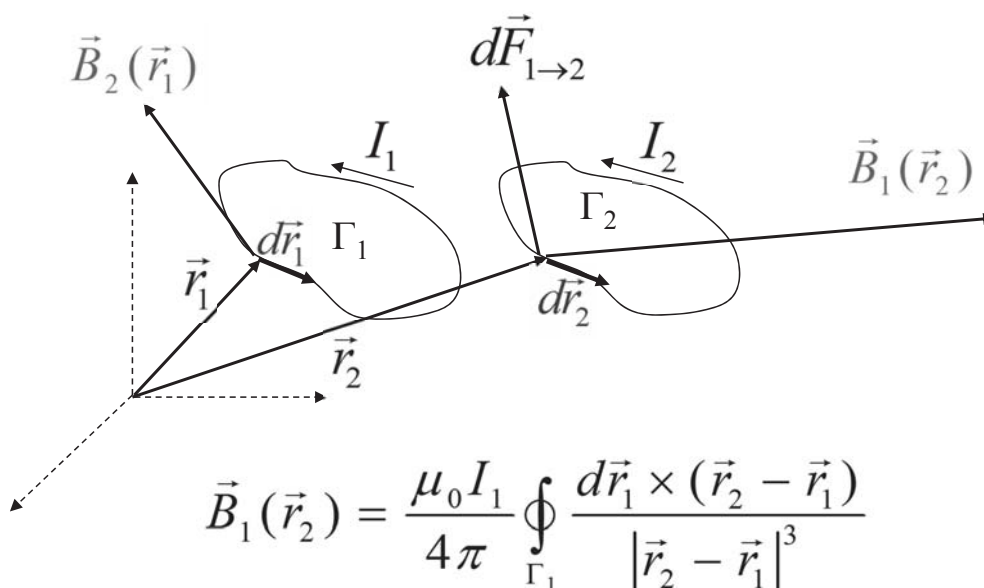
$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} \neq -\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval





INTERACCIÓN MAGNÉTICA ENTRE DOS CIRCUITOS



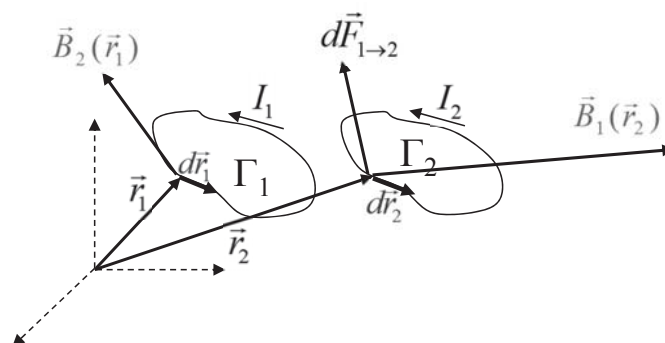
$$\vec{B}_1(\vec{r}_2) = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \frac{d\vec{r}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

$$\vec{B}_2(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \oint_{\Gamma_2} \frac{d\vec{r}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



INTERACCIÓN MAGNÉTICA ENTRE DOS CIRCUITOS



Fuerza sobre el circuito Γ_2 : $\vec{F}_{1\to 2} = \oint_{\Gamma_2} d\vec{F}_{1\to 2} = \oint_{\Gamma_2} I_2 d\vec{r}_2 \times \vec{B}_1(\vec{r}_2)$

Fuerza sobre el circuito Γ_1 : $\vec{F}_{2\to 1} = \oint_{\Gamma_1} d\vec{F}_{2\to 1} = \oint_{\Gamma_1} I_1 d\vec{r}_1 \times \vec{B}_2(\vec{r}_1)$

A diferencia de la interacción entre cargas puntuales, ahora sí que se verifica la 3ª Ley de Newton (véase la siguiente página):

$$\vec{F}_{1\to 2} = -\vec{F}_{2\to 1}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval





INTERACCIÓN MAGNÉTICA ENTRE DOS CIRCUITOS

Demostración:

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$$

$$\vec{B}_1(\vec{r}_2) = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \frac{d\vec{r}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \oint_{\Gamma_2} I_2 d\vec{r}_2 \times \vec{B}_1(\vec{r}_2)$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



INTERACCIÓN MAGNÉTICA ENTRE DOS CIRCUITOS

Operando:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{12} &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{\Gamma_2} \oint_{\Gamma_1} \frac{d\vec{r}_2 \times (d\vec{r}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1))}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{\Gamma_2} \oint_{\Gamma_1} \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)(d\vec{r}_2 \cdot d\vec{r}_1) - d\vec{r}_1(d\vec{r}_2 \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1))}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} = \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{\Gamma_2} \oint_{\Gamma_1} \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)(d\vec{r}_2 \cdot d\vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \end{aligned}$$

$$-\oint_{\Gamma_1} d\vec{r}_1 \oint_{\Gamma_2} \frac{(d\vec{r}_2 \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1))}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} = \oint_{\Gamma_1} d\vec{r}_1 \oint_{\Gamma_2} d\vec{r}_2 \cdot \nabla_2 \left(\frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \right) = \oint_{\Gamma_1} d\vec{r}_1 \oint_{\Gamma_2} d_2 \left(\frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \right) = 0$$

Por analogía se obtiene lo mismo para $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$ pero cambiado de signo

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval





POTENCIAL MAGNÉTICO VECTOR

Se busca un campo vectorial \vec{A} que satisfaga la ecuación:

$$\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \rightarrow \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$$

$$\begin{aligned} \mu_0 \vec{J} = \nabla \times \vec{B} &= \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \\ &\quad \downarrow \\ \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} &= \mu_0 \vec{J} \end{aligned}$$

Si encontramos un potencial \vec{A} , también $\vec{A} + \nabla \psi$ es un potencial magnético vector pues $\nabla \times \nabla \psi = 0$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



POTENCIAL MAGNÉTICO VECTOR

Si se toma un potencial tal que $\nabla \cdot \vec{A} = 0$, el potencial debe ser

$$\text{solución de } -\nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}$$

Si el potencial que se obtiene es tal que $\nabla \cdot \vec{A} = F$, se toma como potencial $\vec{A} + \nabla \psi$ verificando $\nabla^2 \psi = -F$ ya que

$$\nabla \cdot (\vec{A} + \nabla \psi) = 0$$

Por tanto, se puede tomar un potencial con divergencia nula para simplificar la ecuación del potencial (Gauge o contraste de Coulomb).

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval





POTENCIAL MAGNÉTICO VECTOR

Las componentes del potencial magnético vector satisfacen:

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x; \quad \nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y; \quad \nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z$$

Por analogía con el potencial electrostático se tiene:

$$\left(\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \right) \quad \mu_0 J_x \leftrightarrow \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\left(V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_v \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \longleftrightarrow A_x(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \frac{J_x(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



POTENCIAL MAGNÉTICO VECTOR

En definitiva:

$$A_x(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \frac{J_x(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}; \quad A_y(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \frac{J_y(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}; \quad A_z(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \frac{J_z(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Escrito en forma vectorial:
$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \frac{\vec{J}(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Para un hilo de corriente:
$$\vec{J} dV = I d\vec{r}'$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

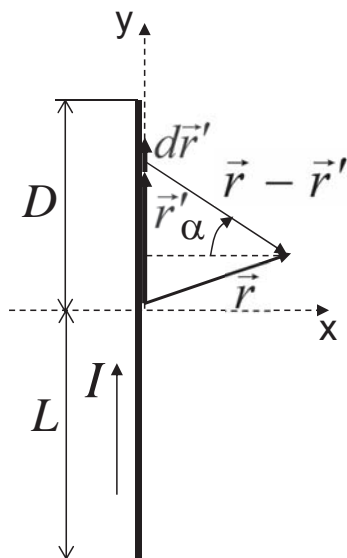
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



VECTOR INDUCCIÓN MAGNÉTICA LEY DE BIOT-SAVART



Hilo de longitud finita recorrido por una intensidad I
(en cualquier punto)



$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} \quad \vec{r}' = y'\vec{j} \quad d\vec{r}' = dy'\vec{j}$$

Sustituyendo:

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idy'\vec{j} \times (x\vec{i} + (y - y')\vec{j})}{(x^2 + (y - y')^2)^{3/2}}$$

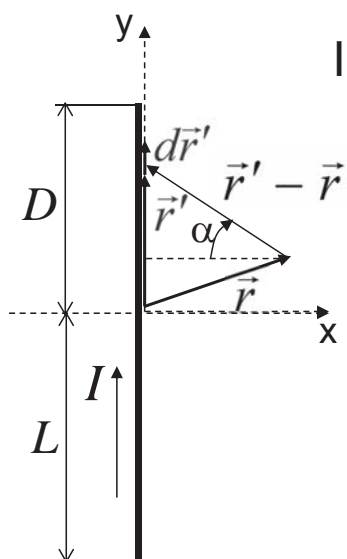
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



VECTOR INDUCCIÓN MAGNÉTICA LEY DE BIOT-SAVART



Hilo de longitud finita recorrido por una intensidad I
(en cualquier punto)



Integrando:
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-L}^D \frac{Idy'x(-\vec{k})}{(x^2 + (y - y')^2)^{3/2}}$$

Cambiando de variable:
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y' - y}{x}; \quad dy' = \frac{x}{\cos^2 \alpha} d\alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{(x^2 + (y - y')^2)^{1/2}}; \quad \sin \alpha = \frac{y' - y}{(x^2 + (y - y')^2)^{1/2}}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi x} \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \cos \alpha d\alpha (-\vec{k}) = \frac{\mu_0 I (-\vec{k})}{4\pi x} (\sin \alpha_{\max} - \sin \alpha_{\min})$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



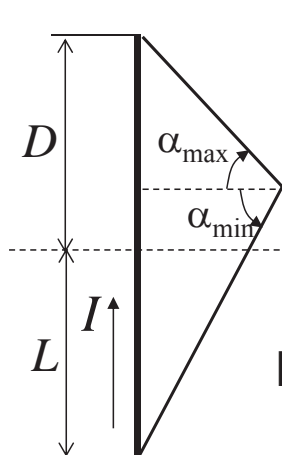
VECTOR INDUCCIÓN MAGNÉTICA

LEY DE BIOT-SAVART



Hilo de longitud finita recorrido por una intensidad I
(en cualquier punto)

Deshaciendo el cambio de variable:



$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I (-\vec{k})}{4\pi x} \left(\frac{D-y}{(x^2 + (y-D))^2}^{1/2} - \frac{(-L)-y}{(x^2 + (y-(-L)))^2}^{1/2} \right)$$

Si la longitud $\rightarrow \infty$ (Hilo indefinido) $\Rightarrow \alpha_{\min} = -\alpha_{\max} = \frac{\pi}{2}$

Entonces:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi x} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \alpha d\alpha (-\vec{k}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} (-\vec{k})$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

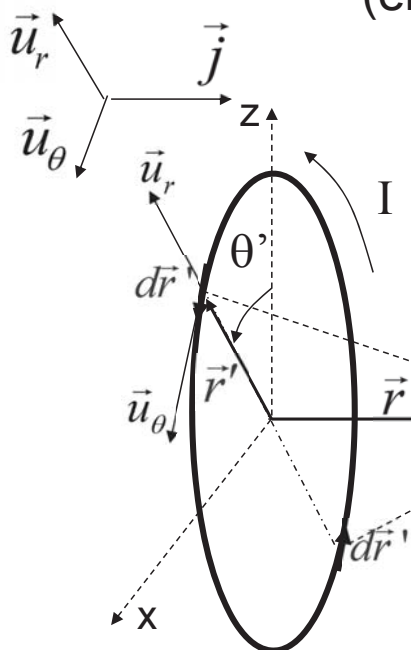


VECTOR INDUCCIÓN MAGNÉTICA

LEY DE BIOT-SAVART



Espira de radio R recorrida por una intensidad I
(en cualquier punto de su eje)



$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\vec{r}' = R\vec{u}_r \quad \vec{r} = y\vec{j}$$

$$d\vec{r}' = R d\theta' \vec{u}_\theta$$

Sustituyendo:

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R d\theta' \vec{u}_\theta \times (y\vec{j} - R\vec{u}_r)}{(y^2 + R^2)^{3/2}}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



VECTOR INDUCCIÓN MAGNÉTICA LEY DE BIOT-SAVART



Espira de radio R recorrida por una intensidad I
(en cualquier punto de su eje)

Haciendo el producto vectorial:

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R d\theta' (y\vec{u}_r + R\vec{j})}{(y^2 + R^2)^{3/2}}$$

Integrando y teniendo en cuenta que por simetría solo va a quedar componente en el eje Y

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 d\theta' \vec{j}}{(y^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(y^2 + R^2)^{3/2}} \vec{j}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



VECTOR INDUCCIÓN MAGNÉTICA LEY DE BIOT-SAVART



Solenoides de longitud L y radio R con N espiras recorridas por una intensidad I (en cualquier punto de su eje)

Para una espira

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I_e}{2} \frac{R^2}{(y^2 + R^2)^{3/2}} \vec{j}$$

$$dI' = \frac{N}{L} dy' I$$

Para un diferencial del solenoide de espesor dy' por el que circula un diferencial de intensidad dI' :

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 dI'}{2} \frac{R^2}{((y - y')^2 + R^2)^{3/2}} \vec{j}$$

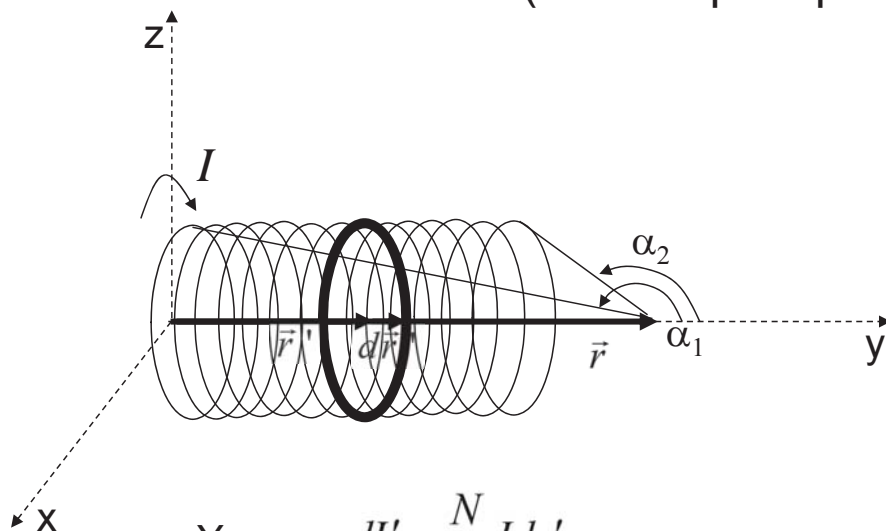
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



VECTOR INDUCCIÓN MAGNÉTICA LEY DE BIOT-SAVART



Solenoides de longitud L y radio R con N espiras recorrido por una intensidad I (en cualquier punto de su eje)



Y como $dl' = \frac{N}{L} I dy'$

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 N R^2 I}{2L} \frac{dy'}{((y - y')^2 + R^2)^{3/2}} \vec{j}$$

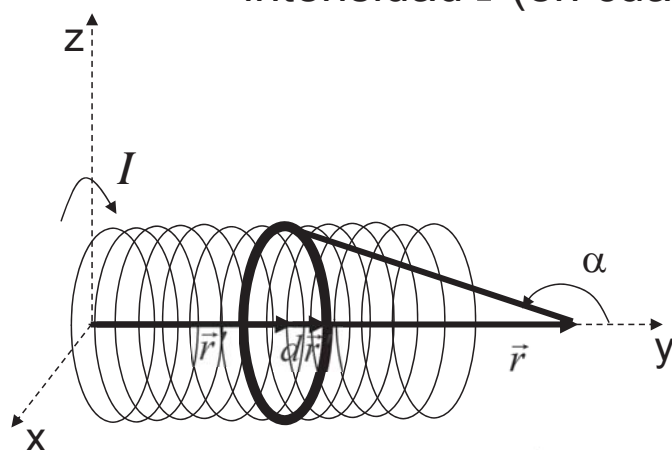
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



VECTOR INDUCCIÓN MAGNÉTICA LEY DE BIOT-SAVART



Solenoides de longitud L y radio R con N espiras recorrido por una intensidad I (en cualquier punto de su eje)



Haciendo el cambio de variable:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{R}{y - y'}; \quad -dy' = \frac{R}{\sin^2 \alpha} d\alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{R}{(R^2 + (y - y')^2)^{1/2}}; \quad \cos \alpha = -\frac{y - y'}{(R^2 + (y - y')^2)^{1/2}}$$

$$d\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 N I}{2L} \sin \alpha d\alpha \vec{j}$$

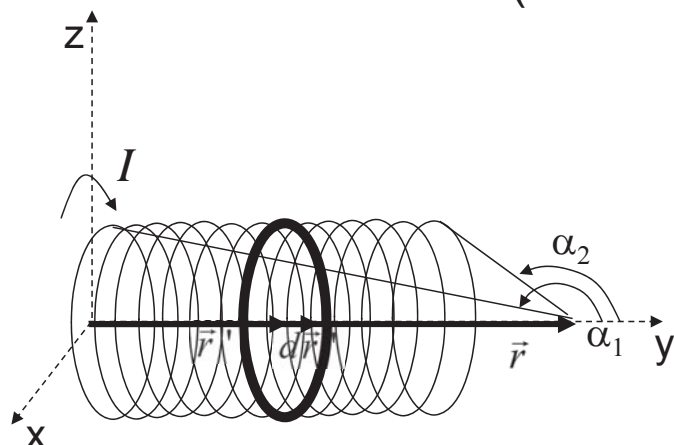
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



VECTOR INDUCCIÓN MAGNÉTICA LEY DE BIOT-SAVART



Solenoides de longitud L y radio R con N espiras recorrido por una intensidad I (en cualquier punto de su eje)



Integrando:

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 N I}{2L} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha \vec{j}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 N I}{2L} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) \vec{j}$$

Los ángulos de la figura son mayores que $\pi/2$, por eso el $\cos \alpha$ y la $\operatorname{tg} \alpha$ son negativos

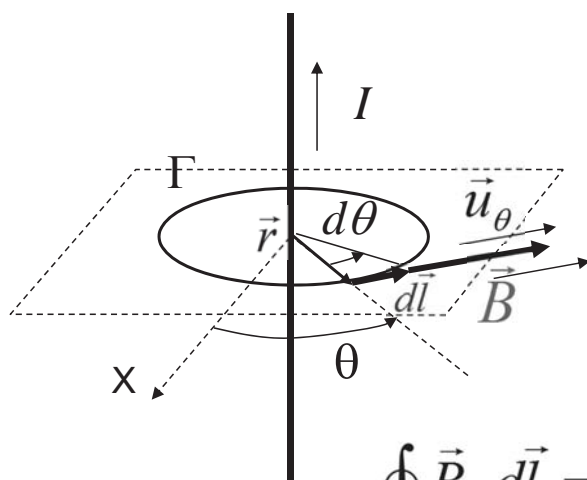
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



VECTOR INDUCCIÓN MAGNÉTICA LEY DE AMPÈRE



Hilo indefinido recorrido por una intensidad I
(en cualquier punto)



$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$\vec{B} = B \vec{u}_{\theta} \quad d\vec{l} = r d\theta \vec{u}_{\theta}$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} B \vec{u}_{\theta} \cdot r d\theta \vec{u}_{\theta} = Br \int_0^{2\pi} d\theta = Br 2\pi$$

$$Br 2\pi = \mu_0 I \longrightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

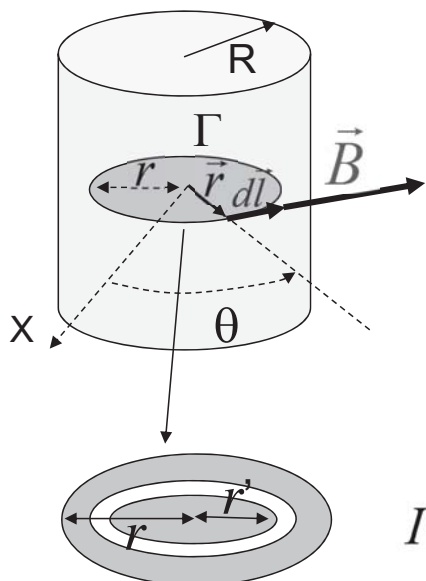
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



VECTOR INDUCCIÓN MAGNÉTICA LEY DE AMPÈRE



Hilo indefinido de radio R y densidad de corriente $J=Cr$
(en cualquier punto)



En el interior del hilo ($r < R$):

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I(r); \quad \vec{B} = B\vec{u}_\theta; \quad d\vec{l} = r d\theta \vec{u}_\theta$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} B \vec{u}_\theta \cdot r d\theta \vec{u}_\theta = Br 2\pi$$

$$I(r) = \int \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_0^r Cr' \vec{k} \cdot 2\pi r' dr' \vec{k} = 2\pi C \frac{r^3}{3}$$

$$Br 2\pi = \mu_0 2\pi C \frac{r^3}{3} \rightarrow B = \mu_0 C \frac{r^2}{3}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



VECTOR INDUCCIÓN MAGNÉTICA LEY DE AMPÈRE



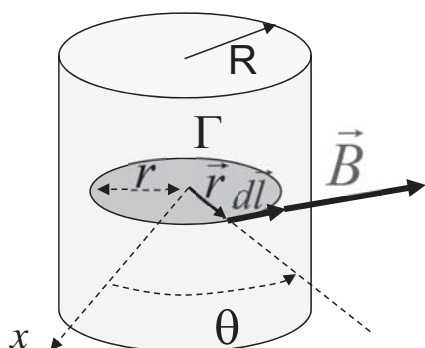
Hilo indefinido de radio R y densidad de corriente $J=Cr$
(en cualquier punto)

En el interior del hilo ($r < R$):

Cálculo de C :

$$I = \int_0^R Cr' \vec{k} \cdot 2\pi r' dr' \vec{k} = 2\pi C \frac{R^3}{3}$$

$$C = \frac{3I}{2\pi R^3}$$



En función de I :
$$B(r) = \frac{\mu_0 Cr^2}{3} = \frac{\mu_0 I r^2}{2\pi R^3}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

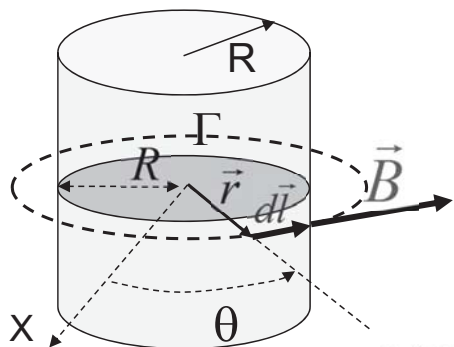


VECTOR INDUCCIÓN MAGNÉTICA LEY DE AMPÈRE



Hilo indefinido de radio R y densidad de corriente $J=Cr$
(en cualquier punto)

En el exterior del hilo ($r>R$):



$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I(R); \quad \vec{B} = B\vec{u}_\theta; \quad d\vec{l} = rd\theta\vec{u}_\theta$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} B \vec{u}_\theta \cdot r d\theta \vec{u}_\theta = Br2\pi$$

$$I(R) = \int \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_0^R Cr' \vec{k} \cdot 2\pi r' dr' \vec{k} = 2\pi C \frac{R^3}{3}$$

$$\text{Es decir: } Br2\pi = \mu_0 2\pi C \frac{R^3}{3} \rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 CR^3}{3r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

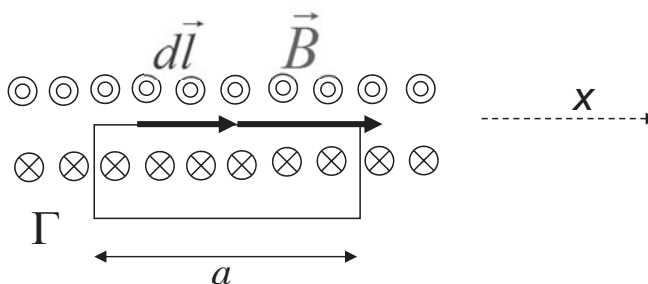
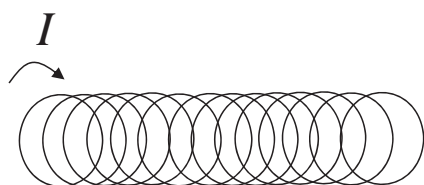
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



VECTOR INDUCCIÓN MAGNÉTICA LEY DE AMPÈRE



Solenoides de longitud L y radio R largo y estrecho ($L \gg R$) con N
espiras recorrido por una intensidad I



$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$\vec{B} = B\vec{i}; \quad d\vec{l} = dx\vec{i}$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_0^a B \vec{i} \cdot dx \vec{i} = Ba$$

$$\mu_0 I_{\text{curva}} = \mu_0 \frac{N}{L} a I \Rightarrow B = \mu_0 \frac{N}{L} I$$

$$Ba = \mu_0 \frac{N}{L} a I \Rightarrow B = \mu_0 \frac{N}{L} I$$

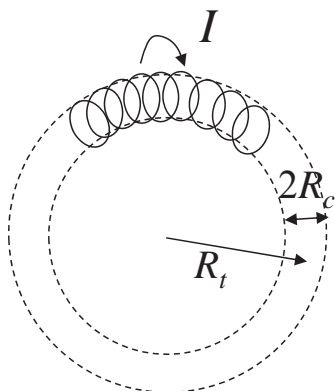
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



VECTOR INDUCCIÓN MAGNÉTICA LEY DE AMPÈRE

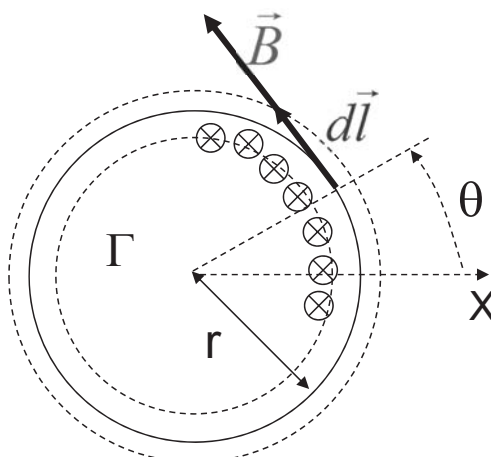


Solenoides toroidales estrechos ($R_t \gg R_c$) con N espiras recorridas por una intensidad I



$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$\vec{B} = B\vec{u}_\theta; \quad d\vec{l} = r d\theta \vec{u}_\theta$$



$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} B \vec{u}_\theta \cdot r d\theta \vec{u}_\theta = Br 2\pi \approx BR_t 2\pi$$

$$\mu_0 I_{curva} = -\mu_0 N I$$

$$B \approx -\mu_0 \frac{N}{2\pi R_t} I$$

El sentido positivo va hacia afuera de la hoja

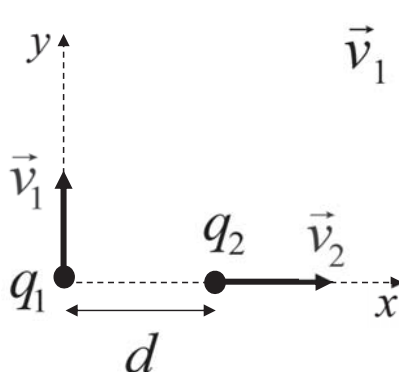
La inducción magnética va en sentido contrario al dibujado

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



FUERZA ENTRE DOS CARGAS EN MRU

Fuerza de q_1 sobre q_2 : $\vec{F}_{12} = q_2 (\vec{v}_2 \times \vec{B}_1(\vec{r}_2))$



$$\vec{v}_1 = v_1 \vec{j} \quad \vec{v}_2 = v_2 \vec{i} \quad \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = d \vec{i}$$

$$\vec{B}_2(\vec{r}_1) = 0$$

$$\vec{B}_1(\vec{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 v_1}{d^2} (-\vec{k})$$

$$\vec{F}_{21} = 0$$

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 q_2 v_1 v_2}{d^2} \vec{j}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



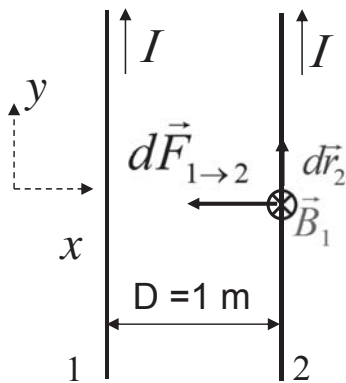


INTERACCIÓN MAGNÉTICA ENTRE DOS CIRCUITOS

Definición de Amperio

$$d\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = I_2 d\vec{r}_2 \times \vec{B}_1(\vec{r}_2) = Idy\vec{j} \times \frac{\mu_0 I}{2\pi D} (-\vec{k}) = \frac{dy I^2 \mu_0}{2\pi D} (-\vec{i})$$

Fuerza de atracción por unidad de longitud: $\frac{dF}{dy} = \frac{I^2 \mu_0}{2\pi D}$



Amperio: Intensidad que circula por dos hilos paralelos rectilíneos infinitos en el vacío separados $D = 1$ m cuando entre ellos la fuerza por unidad de longitud es $2 \cdot 10^{-7}$ N/m.

$$\frac{dF}{dy} = 2 \cdot 10^{-7} \frac{N}{m} = \frac{I^2 4\pi 10^{-7}}{2\pi} \rightarrow I = 1 A$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

