



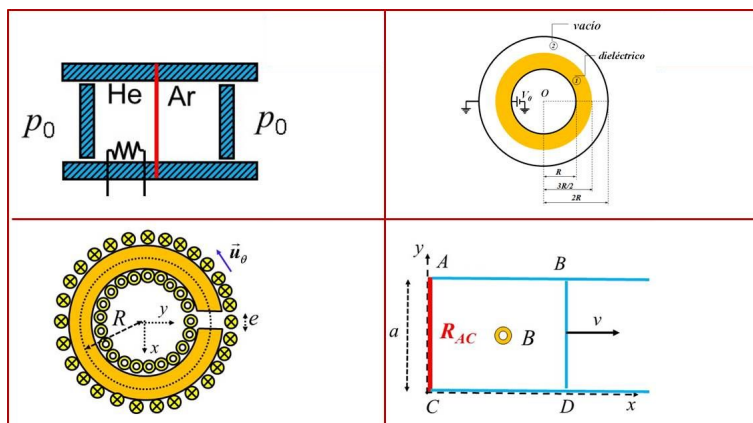
POLITÉCNICA

# ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO

## FÍSICA II

### TEORÍA

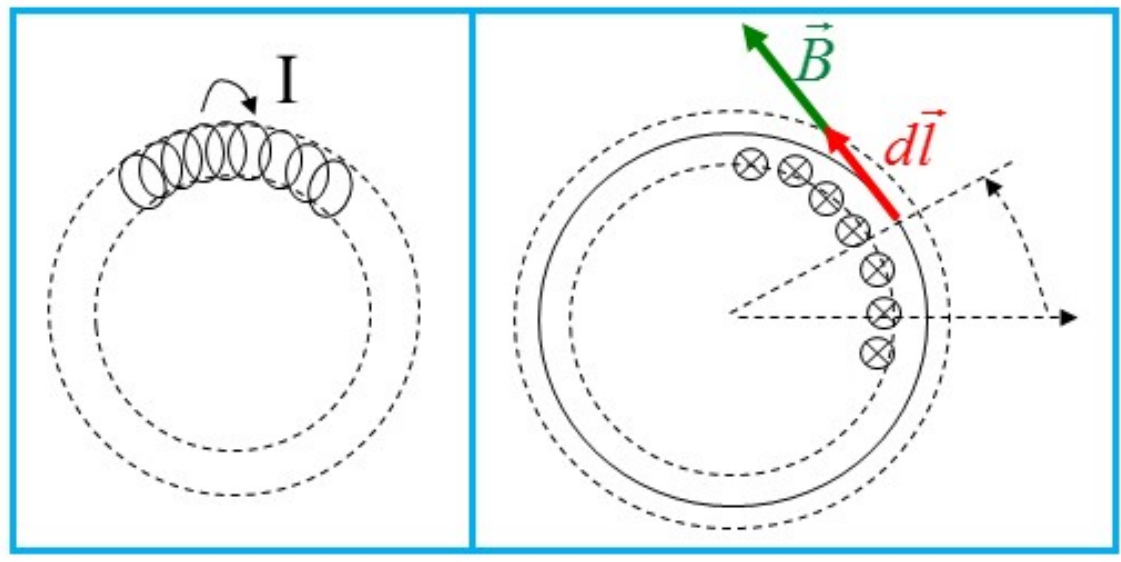
### Termodinámica y Electromagnetismo





POLITÉCNICA

# ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO



## TEMA 6.- MAGNETOSTÁTICA DEL VACÍO

*Pablo PALACIOS CLEMENTE*

## ÍNDICE MAGNETOSTÁTICA DEL VACÍO

---

<b>6. Magnetostática del Vacío</b>	<b>1</b>
6.1. Campo de inducción magnética creado por una carga en movimiento rectilíneo y uniforme	1
6.2. Ley de Biot-Savart: Inducción magnética de una distribución de corriente estacionaria	3
6.3. Ley de Ampère	6
6.3.1. Aplicación de la ley de Ampère al cálculo de campos	7
6.4. Fuerza de Lorentz	11
6.5. Fuerza de un campo magnético sobre un circuito	11
6.6. Momento de un campo magnético sobre un circuito	12
6.7. Fuerza entre cargas en movimiento rectilíneo y uniforme	13
6.8. Fuerza magnética entre dos circuitos	15
6.9. Fuerza entre conductores paralelos. Definición de Amperio	16
6.10. Líneas de campo magnético y flujo magnético	17
6.11. Potencial vector de una distribución de corriente	18

# 6

## Magnetostática del Vacío

---

Desde la Grecia Clásica se conocen las propiedades de minerales como la magnetita ( $\text{Fe}_3\text{O}_4$ ) y su capacidad de atraer limaduras de hierro y como esas limaduras atraían a otras. A un cuerpo magnetizado se le denominó imán y a las regiones de un cuerpo en las cuales se concentra el magnetismo, polos magnéticos. La tierra es un imán y el uso de una aguja magnética para orientarse en la navegación está documentado desde el siglo XI. En el año 1600 Sir William Gilbert analizó la existencia de dos polos magnéticos en los imanes, uno designado como + y otro como -, concluyendo que polos iguales se repelen y polos distintos se atraen. En el siglo XVI se siguieron investigando los imanes y, utilizando balanzas de torsión, se encontró que las fuerzas de atracción o repulsión entre polos varían con el inverso del cuadrado de la distancia al igual que lo hacen las cargas eléctricas. Se llegó a la conclusión que los polos magnéticos no tienen existencia de manera independiente, todo cuerpo magnético tiene dos polos (+ y -) o (Norte y Sur), opuestos uno al otro y de igual intensidad. En 1819 Hans Christian Ørsted descubrió que una aguja magnética se desviaba de su posición al circular una corriente eléctrica por un hilo conductor próximo (una corriente eléctrica generaba un campo magnético) con lo que por primera vez se relacionó electricidad y magnetismo. Este fenómeno se comenzó a estudiar en profundidad: Biot, Savart y Ampère encontraron interacciones entre circuitos recorridos por corrientes eléctricas. Faraday y Henry independientemente describieron la inducción en la cual la variación del flujo del campo magnético a través de una espira conductora producía una corriente eléctrica. Finalmente Maxwell desarrolló una teoría unificada para el electromagnetismo. En este tema estudiaremos la situación magnetostática en el vacío, es decir, campos magnéticos constantes en el tiempo, que se corresponden con corrientes estacionarias. Estudiaremos además el campo magnético creado por una carga en movimiento rectilíneo y uniforme, y la fuerza que induce sobre otras, puesto que una corriente estacionaria es un flujo de cargas de este tipo (a pesar de que una carga en movimiento no genera propiamente un campo estacionario). Por una parte veremos el caso en el que tenemos una carga eléctrica en movimiento y encontramos el campo magnético que crea, y por otra parte, partiremos del campo magnético en una región del espacio y hallaremos la fuerza que este campo ejerce sobre una carga móvil. Se recomienda al lector leer el apartado 8.1 referido a la intensidad y densidad de corriente antes de seguir la lectura del capítulo.

### 6.1. Campo de inducción magnética creado por una carga en movimiento rectilíneo y uniforme

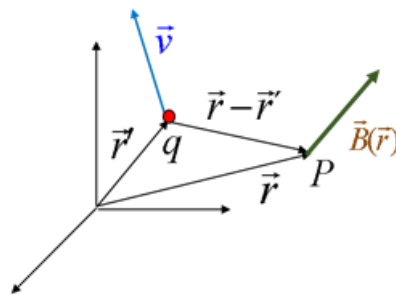
El primer estudio básico que haremos es encontrar el campo de inducción magnética  $\vec{B}$  en un punto  $P$ , creado por una carga puntual  $q$  que se mueve con velocidad constante  $\vec{v}$  respecto a un sistema inercial  $S$ . Ese campo  $\vec{B}$  resulta ser:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 q \vec{v} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (6.1)$$

donde  $\vec{r}$  es el vector que une el origen de coordenadas con el punto donde se calcula el campo,  $\vec{r}'$  es el vector que une el origen de coordenadas con la carga y  $(\vec{r} - \vec{r}')$  es el vector que va de la carga  $q$  al punto  $P$  donde calculamos el campo (véase Fig. 6.1).  $\mu_0$  es una constante llamada permeabilidad magnética del vacío de valor

$$\mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{mKg}}{\text{C}^2} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Tm}}{\text{A}} \quad (6.2)$$

siendo  $c$  la velocidad de la luz en el vacío y  $\varepsilon_0$  la permitividad eléctrica del vacío.



**Figura 6.1:** Una carga positiva  $q$  que se mueve con velocidad  $\vec{v}$  produce un campo  $\vec{B}$  en un punto  $P$ .

Debemos indicar que la expresión [6.1] es una expresión no relativista, es decir, supone sólo una aproximación aceptable cuando la velocidad de la partícula es pequeña comparada con la velocidad de la luz  $c$ .

La ecuación de dimensiones del campo de inducción  $\vec{B}$  es, según la ecuación [6.26],  $[B]=[F][q]^{-1}[v]^{-1}=\text{MT}^{-2}\text{I}^{-1}$  y su unidad en el S.I. es el Tesla (T),  $1\text{T}=1\text{kg s}^{-2}\text{A}^{-1}=1\text{NC}^{-1}\text{m}^{-1}\text{s}$ .

El campo de inducción  $\vec{B}$  apunta en el sentido del producto vectorial  $\vec{v} \times (\vec{r} - \vec{r}')$  y su módulo varía inversamente con el cuadrado de la distancia entre la carga y el punto donde se calcula el campo.

Observemos que como el campo eléctrico de una carga puntual  $q$  es ec. [3.20]:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \text{ y } \mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \text{ podemos expresar el campo de inducción } \vec{B} \text{ como:}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \varepsilon_0 (\vec{v} \times \vec{E}(\vec{r})) = \frac{(\vec{v} \times \vec{E}(\vec{r}))}{c^2} \quad (6.3)$$

Lo que demuestra que para  $v \ll c$  el campo magnético de una carga es mucho menos intenso que el campo eléctrico. Finalmente diremos que de acuerdo con la literatura existente para referirnos al campo de inducción utilizaremos también los nombres de campo  $\vec{B}$  y de campo magnético.

## 6.2. Ley de Biot-Savart: Inducción magnética de una distribución de corriente estacionaria

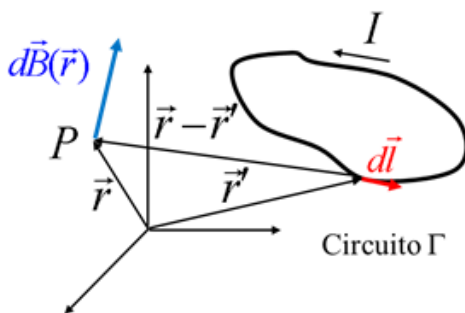
La generalización del cálculo del campo magnético  $\vec{B}$  producido por una carga al producido por una distribución de corriente estacionaria de intensidad  $I$  en un elemento de longitud  $d\vec{l}$  se puede obtener rápidamente utilizando las definiciones ya vistas en el apartado 8.1. Como la intensidad de corriente se puede definir como  $I = \frac{dq}{dt}$  y la velocidad media de los portadores es  $\vec{v} = \frac{d\vec{l}}{dt}$ , se deduce inmediatamente que para un hilo por el que pasa una intensidad de corriente  $I$  se verifica  $dq\vec{v} = I d\vec{l}$ .

De este modo  $dq\vec{v}$  se puede sustituir por el elemento de corriente  $I d\vec{l}$ . Si tenemos un circuito  $C$ , el elemento de corriente  $I d\vec{l}$  produce un campo magnético  $d\vec{B}$  en un punto  $\vec{r}$  que va en la dirección de  $I d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')$ , y por tanto es perpendicular a  $(\vec{r} - \vec{r}')$  y al  $d\vec{l}$  (véase Fig. 6.2).

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \tag{6.4}$$

Esta ecuación se conoce como la ley de Biot-Savart para la intensidad de corriente. El campo producido por toda la espira  $C$  se obtendría integrando a toda ella:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \tag{6.5}$$



**Figura 6.2:** Un diferencial de circuito  $d\vec{l}$  recorrido por una intensidad de corriente  $I$  produce un campo  $d\vec{B}$  en un punto P.

Esta ecuación también se puede generalizar y escribir en función de la densidad de corriente  $\vec{J}$  definida en el apartado 8.1. Si consideramos un diferencial de volumen  $dv$  por el que circula una densidad de corriente  $\vec{J}$ , y teniendo en cuenta que para un hilo de corriente el flujo de la densidad de corriente se relaciona con la intensidad por:  $I = \int_S J dS = JS = J \frac{dv}{dl}$  donde  $S$  es la sección transversal del hilo perpendicular al movimiento de portadores, se tiene entonces  $\vec{J} dv = I d\vec{l}$  y la ley de Biot-Savart queda:

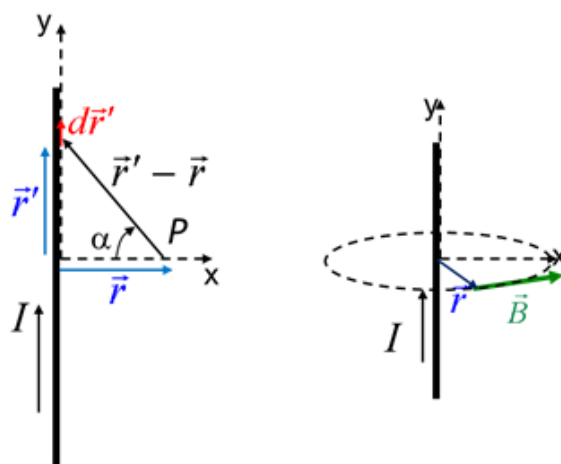
$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J}(\vec{r}') dv' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \tag{6.6}$$

que se puede integrar a todo el volumen  $v$  del conductor para dar:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv' \tag{6.7}$$

En resumen, la causa del campo magnético son las cargas en movimiento o los elementos de corriente del mismo modo que las cargas en reposo producían el campo electrostático. Tanto la inducción magnética  $\vec{B}$  como el campo electrostático decrecen con el cuadrado de la distancia al origen del campo. Pero mientras el campo  $\vec{E}$  señala en la dirección  $(\vec{r} - \vec{r}')$ , el campo  $\vec{B}$  es perpendicular a  $(\vec{r} - \vec{r}')$  y al sentido de la corriente ( $d\vec{l}$ ).

a) Campo  $\vec{B}$  producido por un conductor largo recto que transporta corriente



**Figura 6.3:** Campo  $\vec{B}$  producido por un conductor largo que transporta corriente en un punto  $P$ ; vectores y diferenciales utilizados (izquierda), el campo  $\vec{B}$  es de igual magnitud a cualquier distancia  $r$  del conductor y tangente a cualquier circunferencia concéntrica con el mismo (derecha).

El campo  $\vec{B}$  producido por un conductor recto que transporta corriente en un punto  $P$  se puede obtener utilizando la ley de Biot-Savart. Escogemos el conductor de manera que coincida con el eje  $y$ , y de tal modo que el eje  $x$  sea perpendicular al mismo pasando por el punto  $P$ . En la Fig. 6.3(izda.) se indica un elemento de corriente típico  $Id\vec{r}'$  situado a una distancia  $y'$  del origen a lo largo del eje  $Oy$ . El vector  $(\vec{r} - \vec{r}')$  señala desde ese elemento hasta el punto  $P$  donde queremos calcular el campo. La dirección del campo magnético en el punto  $P$  debido a este elemento está determinada por la dirección del producto vectorial  $Id\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')$  y es perpendicular al plano  $Oxy$  de la Fig. 6.3(izda.), de tal manera que el diferencial de campo magnético  $d\vec{B}$  es:

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \tag{6.8}$$

Se observa que todos los elementos de corriente del conductor dan contribuciones en esta misma dirección y sentido de manera que podríamos limitarnos a calcular su módulo. De todos modos, utilizando:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}; \quad \vec{r}' = y'\vec{j}; \quad d\vec{r}' = dy'\vec{j}$$

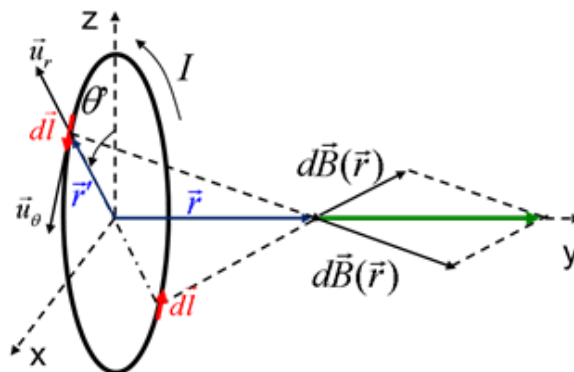
y el cambio de variable  $\text{tg}\alpha = \frac{y' - y}{x}$  y teniendo en cuenta que si el conductor es muy largo el ángulo  $\alpha$  en los límites de integración tiende a  $90^\circ$  y  $-90^\circ$ , se obtiene para el campo:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}(-\vec{k}) \tag{6.9}$$

En general, la solución tiene simetría axial con respecto al eje  $y$  con  $\vec{B}$  teniendo la misma magnitud en todos los puntos a igual distancia del conductor. De esta manera, el campo  $\vec{B}$  debido a un conductor rectilíneo muy largo es tangente a cualquier circunferencia concéntrica con el mismo (Fig. 6.3(dcha.)) y su sentido se relaciona con el de la intensidad de corriente por la regla de la mano derecha, siendo por tanto su módulo igual a:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{6.10}$$

b) Campo  $\vec{B}$  producido por una espira circular en un punto de su eje



**Figura 6.4:** Campo  $\vec{B}$  producido por una espira circular en un punto de su eje perpendicular al plano de la espira y que pasa por su centro.

Utilizamos la ley de Biot-Savart, ec. [6.4], para calcular el campo  $\vec{B}$  producido por la espira mostrada en la Fig. 6.4 en un punto de un eje perpendicular al plano de la espira y que pasa por su centro. Utilizando coordenadas cilíndricas se verifica:

$$d\vec{l} = R d\theta' \vec{u}_\theta, \quad \vec{r}' = R \vec{u}_r, \quad \vec{r} = y \vec{j} \quad \text{y} \quad |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{R^2 + y^2}$$

Integrando para el ángulo  $\theta'$  entre 0 y  $2\pi$  y teniendo en cuenta que por simetría sólo va a quedar componente del campo  $\vec{B}$  en el eje  $y$  encontramos que:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(y^2 + R^2)^{3/2}} \vec{j} \tag{6.11}$$



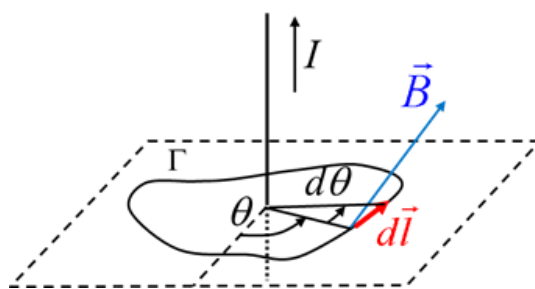
### 6.3. Ley de Ampère

Acabamos de comprobar que las líneas de  $\vec{B}$  en el caso de un conductor rectilíneo largo por el que circula una corriente son circunferencias concéntricas con el conductor. Estas líneas son muy diferentes de las líneas de campo eléctrico que ya hemos estudiado. La integral de línea del campo electrostático sobre cualquier trayectoria cerrada es cero debido a que el campo electrostático es conservativo:  $\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ , siendo  $\Gamma$  cualquier curva cerrada. Evidentemente, la integral de línea  $\int \vec{B} \cdot d\vec{l}$  a lo largo de una trayectoria cerrada no es necesariamente cero. Si tomamos esta integral a lo largo de una trayectoria circular que rodea a un conductor rectilíneo largo por el que circula una corriente, el vector de inducción magnética  $\vec{B}$  es siempre tangente a la trayectoria. Entonces  $\vec{B} \cdot d\vec{l}$  es positivo en todos los puntos si recorremos la circunferencia en el sentido de las líneas de campo. Puesto que  $\vec{B}$  es paralelo a  $d\vec{l}$  y tiene valor constante, dicha integral se puede calcular fácilmente.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \oint dl = \mu_0 I \tag{6.12}$$

En este caso hemos utilizado el hecho de que  $\vec{B}$  es el mismo en todos los puntos de la circunferencia de radio  $r$  y la integral de  $dl$  es  $2\pi r$ . Sin embargo, este resultado es válido para cualquier contorno de integración que encierre a la corriente  $I$ , de modo que si tenemos un caso más general como el de una curva plana cualquiera como el de la Fig. 6.5 encontramos usando coordenadas polares:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_{\theta} \cdot (dr\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_{\theta}) = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r d\theta = \mu_0 I \tag{6.13}$$



**Figura 6.5:** Curva cerrada  $\Gamma$  que rodea al conductor por el que pasa un corriente constante  $I$ .

Por tanto, la circulación en una línea cerrada que rodea el conductor es igual a  $\mu_0 I$ . La ley de Ampère es válida para cualquier curva cerrada (plana o no) en tanto las corrientes sean constantes en el tiempo. Esta ley es útil para calcular el campo magnético sólo en casos de alto grado de simetría. En los casos en los que no existe simetría la ley sigue siendo válida pero no permite calcular el campo  $\vec{B}$ .

Si en lugar de un solo conductor tuviéramos  $n$  conductores largos y rectos que son rodeados por la trayectoria de integración en la integral de línea, el campo  $\vec{B}$  en cualquier punto de dicha

trayectoria sería la suma vectorial de los campos generados individualmente por cada uno de los conductores. De este modo la integral de línea sería igual a  $\mu_0(I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n)$  teniendo las intensidades el signo que le corresponde, siendo positivo si se corresponde con el del avance de un tornillo girando en el sentido de recorrido de la curva de contorno. Si alguna intensidad no es rodeada por la línea, no contribuye a la circulación. De manera general la ley de Ampère queda enunciada como:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc} \quad (6.14)$$

donde  $I_{enc}$  es la suma algebraica de las corrientes rodeadas o encerradas por la trayectoria de integración.

La expresión [6.14] que hemos visto de la ley de Ampère es una de las ecuaciones de Maxwell para la magnetostática. Para una densidad de corriente  $\vec{J}$  podemos expresar dicha ecuación como

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I = \mu_0 \int_{S_c} \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (6.15)$$

donde  $S_c$  es el área encerrada por la curva  $\Gamma$  que es atravesada por una densidad de corriente, por tanto, área que será menor o igual que la sección del conductor en función de si la curva lo rodea en parte o en su totalidad, respectivamente.

Si utilizamos el teorema de Stokes:  $\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_S \nabla \times \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$ , dado que la superficie  $S$  puede ser cualquiera, obtenemos la ley de Ampère en forma diferencial:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (6.16)$$

A partir de esta expresión se puede deducir la ley de conservación de la carga. Como la divergencia de un rotacional es 0 se tiene:

$$0 = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = 0 = \nabla \cdot (\mu_0 \vec{J}) \quad (6.17)$$

con lo que  $\nabla \cdot \vec{J} = 0$ , de lo que se deduce que en corrientes estacionarias no hay fuentes de corriente. Esta conservación es local y ocurre en cualquier región del espacio por pequeña que sea.

### 6.3.1. Aplicación de la ley de Ampère al cálculo de campos

#### a) Campo $\vec{B}$ producido por un hilo indefinido recorrido por una intensidad $I$

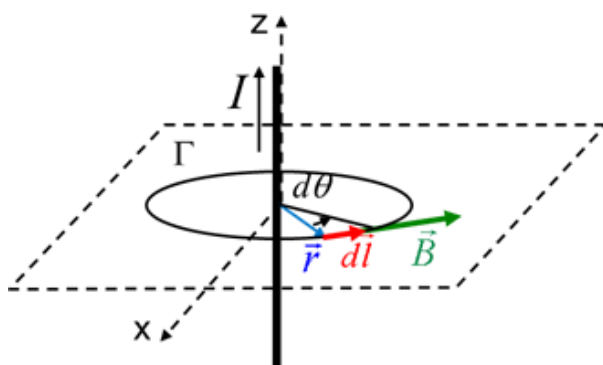
Este caso lo resolvimos previamente en la sección 6.2 utilizando la ley de Biot-Savart. Como la simetría es cilíndrica, se tomará como trayectoria de integración un círculo con radio  $r$  centrado en el hilo y ubicado en un plano perpendicular a él, según se observa en la Fig. 6.6.

El campo  $\vec{B}$  tiene siempre la misma magnitud a esa distancia y es tangente a la circunferencia, por tanto,

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B2\pi r = \mu_0 I \tag{6.18}$$

de este modo encontramos el valor esperado:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{6.19}$$



**Figura 6.6:** Campo  $\vec{B}$  producido por un conductor largo que transporta corriente calculado utilizando el teorema de Ampère. Como curva cerrada  $\Gamma$  que rodea al conductor se utiliza una círculo de radio  $r$  centrado en el hilo conductor.

**b) Campo  $\vec{B}$  producido por un conductor largo cilíndrico de radio  $R$  recorrido por una densidad de corriente uniforme**

Este es un caso similar al anterior donde sigue existiendo una simetría cilíndrica con un campo  $\vec{B}$  de igual magnitud para un valor radial dado medido desde el eje central del conductor. Las líneas de campo serán circunferencias concéntricas con el eje del conductor, por tanto,  $\vec{B}$  y  $d\vec{l}$  serán siempre paralelos. Debemos diferenciar el interior y el exterior al conductor, para ello tenemos que aplicar la ley de Ampère tanto a una circunferencia de radio  $r$  que encierre todo el conductor  $r > R$  como a una circunferencia de radio  $r < R$  y calcular la corriente que atraviesa cada uno de los círculos (densidad de corriente por área al ser uniforme la densidad).

El resultado para  $r > R$ , o sea fuera del conductor es:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{6.20}$$

Esta expresión es igual que en el caso del hilo indefinido, es por tanto como si toda la corriente estuviera concentrada a lo largo del eje.

Y para  $r < R$ , o sea dentro del conductor, el campo  $\vec{B}$  es:

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \tag{6.21}$$

c) Campo  $\vec{B}$  producido en el interior de un solenoide largo

Consideremos que tenemos un conductor enrollado en forma de hélice sobre un cilindro. A este dispositivo se le denomina solenoide. El campo  $\vec{B}$  dentro de un solenoide son líneas casi paralelas al eje con un espaciado uniforme de manera que se puede utilizar para producir un campo magnético intenso y uniforme en una región acotada del espacio. Se entiende que el solenoide tiene una gran cantidad de vueltas apretadas de manera que puede considerarse cada una como una espira circular (paso de hélice muy pequeño), véase Fig. 6.7. Fuera del solenoide las líneas divergen en un extremo y convergen en el otro y el campo es menos intenso. El campo magnético sobre el eje de una espira circular se había encontrado en el apartado 6.3 utilizando la ley de Biot-Savart. Si tenemos  $N$  espiras recorridas por una intensidad  $I$  de radio  $R$  y de longitud  $L$  paralelas al plano  $Oxz$  y situadas entre las posiciones 0 y  $L$  del eje  $Oy$  (véase Fig. 6.7), el diferencial de campo producido en un punto del eje  $Oy$  de coordenada  $\vec{r} = y\vec{j}$  por el conjunto de espiras  $((N/L)dy')$  contenido en un  $d\vec{r}' = dy'\vec{j}$  y situadas en una posición  $\vec{r}' = y'\vec{j}$  es:

$$d\vec{B}(\vec{r} = y\vec{j}) = \frac{\mu_0 dI}{2} \frac{R^2}{((y - y')^2 + R^2)^{3/2}} \vec{j} = \frac{\mu_0 I (N/L) dy'}{2} \frac{R^2}{((y - y')^2 + R^2)^{3/2}} \vec{j} \quad (6.22)$$

donde se ha tenido en cuenta que la intensidad que circula en el  $dy'$  es:  $dI = I(N/L)dy'$  y la distancia entre el conjunto de espiras y el punto donde se calcula el campo es  $y - y'$ . Para calcular el campo total faltaría por integrar entre las posiciones  $y'$  mínima, en este caso 0, y la  $y'$  máxima, en este caso  $L$ , de las espiras.

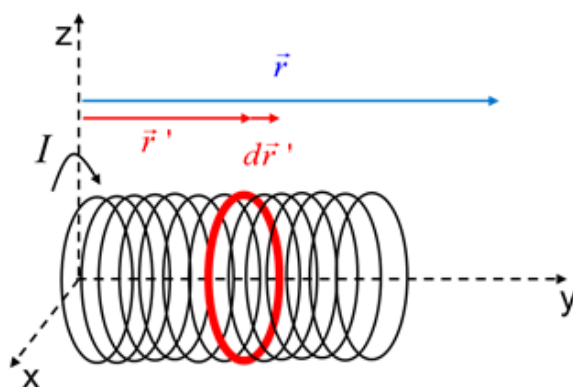


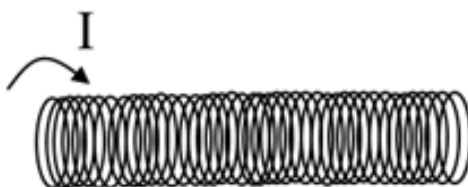
Figura 6.7: Solenoide de longitud  $L$  y radio de espira  $R$  recorrido por una intensidad de corriente constante  $I$ .

$$\vec{B}(y) = \frac{\mu_0 I (N/L) R^2}{2} \int_0^L \frac{dy'}{((y - y')^2 + R^2)^{3/2}} \vec{j} \quad (6.23)$$

Si suponemos el solenoide, de longitud  $L$  y radio  $R$ , largo y estrecho ( $L \gg R$ ) (véase Fig. 6.8), entonces podemos suponer que el campo  $\vec{B}$  es uniforme en el interior del solenoide y cero en el exterior. En este caso podemos aplicar la ley de Ampère utilizando la trayectoria de

integración de forma rectangular mostrada en la Fig. 6.9. La única contribución no nula en el camino de integración es la producida en el interior del solenoide donde  $\vec{B}$  y  $d\vec{l}$  son paralelos.

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_0^a B \vec{i} \cdot dx \vec{i} = Ba \tag{6.24}$$

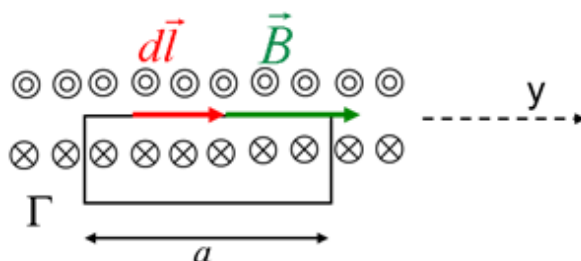


**Figura 6.8:** Solenoide largo y estrecho recorrido por una intensidad de corriente constante  $I$ .

En la curva rectangular cuyo lado paralelo al solenoide tiene longitud  $a$  tenemos que la corriente encerrada es  $I_{curva} = \mu_0 \frac{N}{L} a I$ , por tanto,

$$B = \mu_0 \frac{N}{L} I \tag{6.25}$$

Merece la pena destacar que el lado del rectángulo dentro del solenoide no es necesario que se encuentre en el mismo eje del solenoide ya que el campo es uniforme en toda la sección transversal del mismo.



**Figura 6.9:** Representación esquemática de la parte central de un solenoide. Los círculos concéntricos representan intensidad de corriente en la dirección del lector y los círculos con aspas intensidad hacia dentro de la página. El rectángulo representa el camino de integración  $\Gamma$  en la aplicación de la ley de Ampère.

## 6.4. Fuerza de Lorentz

Consideremos una carga  $q$  que se mueve con velocidad  $\vec{v}$  en una región del espacio donde existe un campo magnético  $\vec{B}$ . La fuerza sobre esa partícula depende de la dirección en la que se mueva la partícula y resulta ser proporcional a la carga  $q$  y al módulo de la velocidad. Si el movimiento es en la dirección del campo  $\vec{B}$  no aparece ninguna fuerza pero si el movimiento es perpendicular al campo la fuerza es máxima. Los experimentos muestran que la fuerza es perpendicular a  $\vec{B}$  y a  $\vec{v}$ . La expresión matemática que describe esta fuerza magnética sobre una partícula cargada en movimiento es:

$$\vec{F}_m = q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (6.26)$$

Esta expresión permite definir el campo magnético o campo de inducción magnética  $\vec{B}$  a partir de la magnitud y la dirección de una fuerza sobre una carga en movimiento. Esta fuerza magnética no actúa por tanto sobre cargas en reposo y no realiza trabajo al ser perpendicular a la trayectoria. Si además del campo magnético existe en el espacio un campo eléctrico, la fuerza total sobre la carga es la denominada fuerza de Lorentz.

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (6.27)$$

## 6.5. Fuerza de un campo magnético sobre un circuito

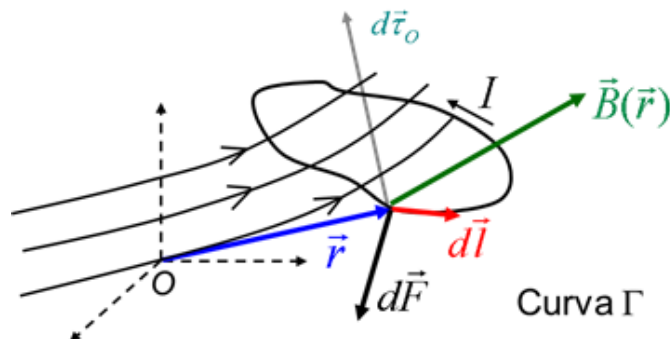
Podemos calcular la fuerza magnética que se ejerce sobre un circuito recorrido por una corriente en una región del espacio en la que existe un campo  $\vec{B}$ . Si tomamos una parte del conductor de longitud  $d\vec{l}$  y sección transversal  $S$ , sobre esta parte aparecerá una fuerza  $d\vec{F}$ . Podemos calcular la fuerza total sobre el circuito integrando los  $d\vec{F}$ . Si tenemos portadores de carga de velocidad media  $\vec{v}$  y carga  $q$ , la densidad de corriente  $\vec{J}$  es igual a  $\vec{J} = nq\vec{v}$  siendo  $n$  el número de portadores de carga por unidad de volumen. Si el hilo es fino, la intensidad de corriente  $I$  será  $I = JS$  y el número total de portadores en el  $d\vec{l}$  será  $nSdl$ . La fuerza sobre un elemento diferencial será entonces:

$$d\vec{F} = nSdl(q\vec{v} \times \vec{B}) = nSqv(d\vec{l} \times \vec{B}) = JSd\vec{l} \times \vec{B} = Id\vec{l} \times \vec{B} \quad (6.28)$$

La integración de esta expresión permite obtener la fuerza total sobre un tramo o sobre todo el circuito  $\Gamma$ . En este último caso sería:

$$\vec{F} = \int_{\Gamma} Id\vec{l} \times \vec{B} \quad (6.29)$$

### 6.6. Momento de un campo magnético sobre un circuito



**Figura 6.10:** . Espira por la que circula una intensidad de corriente en una región del espacio en la que existe un campo  $\vec{B}$ . Sobre cada elemento  $d\vec{l}$  se ejerce un diferencial de fuerza  $d\vec{F}$ . Es posible también calcular el momento que ese campo magnético ejerce sobre el circuito respecto de un punto.

Si queremos calcular el momento dinámico o de la fuerza magnética sobre una espira como la de la Fig. 6.10 respecto del punto  $O$ , este será:

$$d\vec{\tau}_O = \vec{r} \times d\vec{F} \Rightarrow \vec{\tau}_O = I \oint_{\Gamma} \vec{r} \times (d\vec{l} \times \vec{B}(\vec{r})) \tag{6.30}$$

Este valor dependerá del punto donde se calcula el momento.

Sin embargo, si  $\vec{B}$  es uniforme, se puede sacar de la integral del cálculo de la fuerza, de manera que:  $\vec{F} = I \oint_{\Gamma} d\vec{l} \times \vec{B}$  y como tenemos una espira o circuito cerrado entonces  $\oint_{\Gamma} d\vec{l} = 0$ . Por tanto la fuerza neta sobre una espira de corriente en un campo magnético uniforme es igual a cero. Lo que no es igual a cero es el momento de valor:

$$\vec{\tau}_O = I \oint_{\Gamma} \vec{r} \times (d\vec{l} \times \vec{B}) = \vec{\tau} \tag{6.31}$$

que resulta independiente del punto donde se calcula por el teorema de cambio de polo. Se puede demostrar que en este caso el momento es:

$$\vec{\tau} = I \vec{S} \times \vec{B} \tag{6.32}$$

donde  $\vec{S}$  es el vector superficie de la espira definido por:

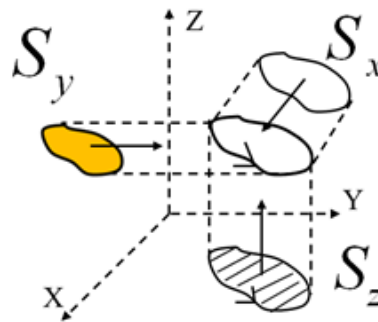
$$\vec{S} \equiv \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} \vec{r} \times d\vec{r} \tag{6.33}$$

Por tanto, en este caso aparece un par que tiende a orientar la espira (su vector superficie asociado) en la dirección del campo. El término  $I\vec{S}$  se definirá en el siguiente tema como el momento dipolar magnético  $\vec{m}$  de un circuito.

Operando en la anterior expresión se obtiene:

$$\vec{S} = (S_x\vec{i} + S_y\vec{j} + S_z\vec{k}) = (\vec{i} \oint ydz + \vec{j} \oint zdx + \vec{k} \oint xdy) \quad (6.34)$$

Es decir, las componentes del vector superficie son el área de las proyecciones del circuito sobre los planos coordenados (Fig. 6.11).



**Figura 6.11:** Componentes del vector superficie de una espira.

En el caso de una espira plana, la expresión [6.33] no deja de ser el área barrida por el radio vector, y por tanto, el área subtendida por la espira orientada en la dirección perpendicular a ésta de unitario  $\vec{n}$ :

$$\vec{S} = (\text{Área Espira}) \vec{n} \quad (6.35)$$

## 6.7. Fuerza entre cargas en movimiento rectilíneo y uniforme

Supongamos que tenemos dos cargas puntuales  $q_1$  y  $q_2$  que se mueven cada una con velocidades constantes  $\vec{v}_1$  y  $\vec{v}_2$  respectivamente. Tendremos tanto un campo  $\vec{B}_1(\vec{r}_2)$  que crea la carga  $q_1$  en la posición que ocupa  $q_2$  como un campo  $\vec{B}_2(\vec{r}_1)$  que crea la carga  $q_2$  en la posición que ocupa  $q_1$ . Además como las cargas están en movimiento tendremos una fuerza magnética ejercida por el campo  $\vec{B}_1(\vec{r}_2)$  (que crea  $q_1$ ) sobre  $q_2$  y una fuerza magnética ejercida por el campo  $\vec{B}_2(\vec{r}_1)$  sobre  $q_1$  (véase Fig. 6.12).

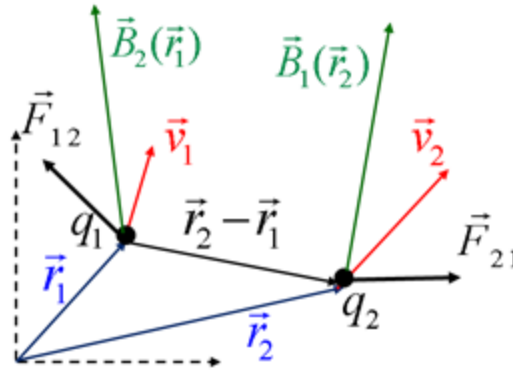
El campo  $\vec{B}_1(\vec{r}_2)$  calculado en la posición de  $q_2$  tendrá la expresión:

$$\vec{B}_1(\vec{r}_2) = \frac{\mu_0 q_1 \vec{v}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{4\pi |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \quad (6.36)$$

y la fuerza de  $q_1$  sobre  $q_2$  será:



$$\vec{F}_{21} = q_2(\vec{v}_2 \times \vec{B}_1(\vec{r}_2)) = \frac{\mu_0 q_1 q_2 \vec{v}_2 \times (\vec{v}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1))}{4\pi |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \quad (6.37)$$



**Figura 6.12:** Dos cargas puntuales  $q_1$  y  $q_2$  que se mueven cada una con velocidades constantes  $v_1$  y  $v_2$ , respectivamente, crearán cada una campos magnéticos  $\vec{B}_1$  y  $\vec{B}_2$ , respectivamente, en el espacio. Como las cargas están en movimiento cada campo magnético ejercerá una fuerza magnética sobre la otra carga puntual.

Análogamente la expresión para el campo  $\vec{B}_2(\vec{r}_1)$  que crea la carga  $q_2$  calculado en la posición de  $q_1$  tendrá la expresión:

$$\vec{B}_2(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0 q_2 \vec{v}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{4\pi |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \quad (6.38)$$

y la fuerza de  $q_2$  sobre  $q_1$ :

$$\vec{F}_{12} = q_1(\vec{v}_1 \times \vec{B}_2(\vec{r}_1)) = \frac{\mu_0 q_1 q_2 \vec{v}_1 \times (\vec{v}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2))}{4\pi |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \quad (6.39)$$

Estas dos fuerzas (en aproximación no relativista) no verifican el principio de acción salvo en algunos casos.

$$\vec{F}_{21} \neq -\vec{F}_{12} \quad (6.40)$$

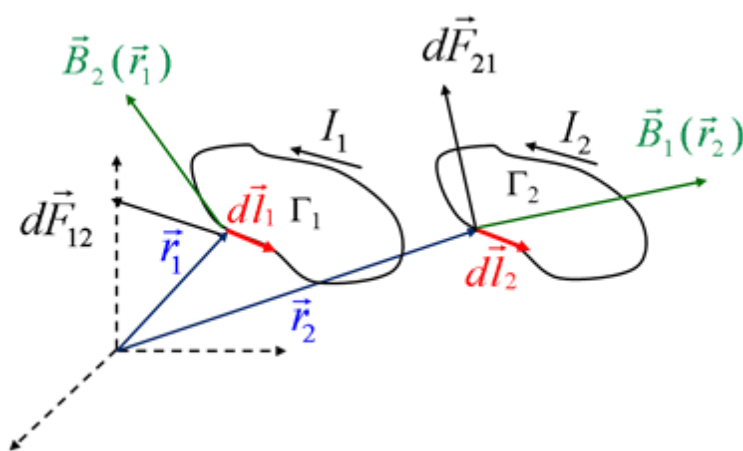
En el caso de que las cargas tengan velocidades paralelas se encuentra que las fuerzas magnéticas son opuestas pero no son colineales, de manera que solo cumplen el principio débil de acción y reacción.

Analizando el problema desde el punto de vista relativista, nos encontramos que las fuerzas eléctricas tampoco son iguales en módulo, y las magnéticas tienen, en general, módulo y dirección diferente. El hecho de que no se cumpla la 3ª ley de Newton puede hacer parecer que no se conserva la cantidad de movimiento o la energía del sistema (recordemos que la cantidad de movimiento es la integral de la fuerza en el tiempo, y el trabajo es la integral de línea de la fuerza). Esto ocurre así, si sólo se toman los momentos de las dos partículas. Hay que

tener en cuenta, sin embargo, que los efectos electrodinámicos se propagan con una velocidad finita (la velocidad de la luz en el vacío). Por tanto existe un retardo que hace que la variación del momento de una partícula no coincida con la variación del momento de la otra partícula en el mismo instante. Dicho de otro modo la suma de los momentos medidos en un mismo instante (para las dos partículas) no es constante. Este problema es fácil de resolver, si se introduce un momento total al que se añade una contribución del campo electromagnético a modo de densidad de momento de valor  $\vec{S}/c^2$ , siendo  $c$  la velocidad de la luz y  $\vec{S}$  el vector de Poynting que se introducirá en el tema 10. Nuestro sistema, por tanto, no está formado únicamente por las dos partículas, sino también por el campo electromagnético que podemos considerar real y que recibe y/o transfiere momento. En el caso del campo electrostático este momento no fue necesario considerarlo porque al estar las cargas en reposo el problema se podía estudiar desde el punto de vista estacionario. Sin embargo, el campo magnético en cargas aisladas (no en un circuito) depende del movimiento de éstas, y por tanto, del retardo con que se propaga la interacción.

### 6.8. Fuerza magnética entre dos circuitos

Hemos visto que un circuito recorrido por una intensidad de corriente estacionaria crea un campo magnético según la ley de Biot-Savart. Si ahora tenemos dos espiras  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  recorridas por las intensidades  $I_1$  e  $I_2$  respectivamente, cada una de las espiras creará un campo magnético que actúa sobre la otra espira tal y como se muestra en la Fig. 6.13.



**Figura 6.13:** Dos espiras  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  recorridas por intensidades de corriente  $I_1$  e  $I_2$  respectivamente. Cada una de las espiras crea un campo magnético que actúa en el espacio y ejerce una fuerza magnética sobre la otra espira.

El campo magnético que la espira 1 crea en un punto de la espira 2 tendrá la siguiente expresión:

$$\vec{B}_1(\vec{r}_2) = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \frac{d\vec{r}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \tag{6.41}$$

y el campo magnético que la espira 2 crea en un punto de la espira 1 será:

$$\vec{B}_2(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \oint_{\Gamma_2} \frac{d\vec{r}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \quad (6.42)$$

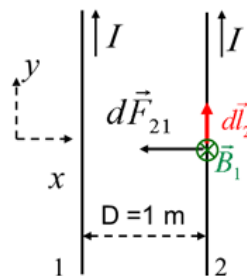
Como hemos visto, si un circuito por el que pasa una corriente está en una región del espacio en la que existe un campo magnético podemos encontrar la fuerza magnética sobre ese circuito. Por tanto tendremos una fuerza magnética ejercida sobre el circuito 2 debida al campo magnético que crea el circuito 1 ( $\vec{F}_{21}$ ) y una fuerza magnética sobre el circuito 1 debida al campo magnético que crea el circuito 2 ( $\vec{F}_{12}$ ) dadas por las siguientes expresiones:

$$\vec{F}_{21} = \oint_{\Gamma_2} d\vec{F}_{21} = \oint_{\Gamma_2} I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1(\vec{r}_2) = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{\Gamma_2} \oint_{\Gamma_1} \frac{d\vec{l}_2 \times (d\vec{l}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1))}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \quad (6.43)$$

$$\vec{F}_{12} = \oint_{\Gamma_1} d\vec{F}_{12} = \oint_{\Gamma_1} I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{B}_2(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{\Gamma_2} \oint_{\Gamma_1} \frac{d\vec{l}_1 \times (d\vec{l}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2))}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \quad (6.44)$$

Se puede demostrar que en este caso de interacción magnética entre dos circuitos si se cumple el principio de acción y reacción, por tanto:  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ .

## 6.9. Fuerza entre conductores paralelos. Definición de Amperio



**Figura 6.14:** Dos conductores paralelos recorridos por intensidades de corriente en la misma dirección lo que genera fuerzas de atracción entre ellos. El diagrama muestra como el campo magnético  $\vec{B}_1$  creado por el conductor 1 ejerce una fuerza de atracción sobre el conductor 2.

Supongamos que tenemos dos conductores paralelos muy largos separados una distancia  $D$  y recorridos por intensidades  $I_1$  e  $I_2$  constantes y en el mismo sentido según se indica en la Fig. 6.14. El campo  $\vec{B}_1$  que produce el conductor 1 en puntos del conductor 2 es

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi D} (-\vec{k}) \quad (6.45)$$

Este campo ejerce sobre un  $d\vec{l}_2$  del conductor 2 un diferencial de fuerza:

$$d\vec{F}_{21} = I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1 = I_2 dy \vec{j} \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi D} (-\vec{k}) = \frac{dy I_2 I_1 \mu_0}{2\pi D} (-\vec{i}) \quad (6.46)$$

La fuerza por unidad de longitud sobre este conductor será ( $\vec{F}_{21} = F_{21}\vec{i}$ ):

$$\frac{dF_{21}}{dy} = -\frac{I_2 I_1 \mu_0}{2\pi D} \quad (6.47)$$

La corriente en el conductor 2 también ejercerá una fuerza magnética en el conductor 1 de igual módulo y sentido contrario lo que implica que los dos conductores se atraen mutuamente.

$$\frac{dF_{21}}{dy} = -\frac{dF_{12}}{dy} \quad (6.48)$$

Si los sentidos de las corrientes fueran contrarias entonces los conductores se repelerían.

Esta atracción o repulsión se puede utilizar para definir el amperio en el Sistema Internacional. Un amperio es la intensidad de corriente que circula por dos hilos paralelos rectilíneos infinitos colocados en el vacío separados una distancia de un metro cuando entre ellos la fuerza por unidad de longitud es  $2 \cdot 10^{-7} \text{N/m}$ .

$$\frac{dF}{dy} = 2 \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{m}} = \frac{I^2 4\pi 10^{-7}}{2\pi} \rightarrow I = 1 \text{ A} \quad (6.49)$$

Por tanto, si suponemos que los dos conductores están recorridos por la misma corriente (1A) y están separados 1m, la fuerza entre ellos es de  $2 \cdot 10^{-7} \text{ N}$  por cada metro. Esta definición lleva asociada un valor de  $\mu_0$  igual a  $4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$ .

## 6.10. Líneas de campo magnético y flujo magnético

El campo magnético se puede representar usando líneas de campo magnético de manera que la dirección del campo  $\vec{B}$  en un punto ha de ser tangente a la línea de campo que pasa por ese punto al igual que se vio en el campo eléctrico. Sin embargo en este caso las líneas de campo magnético no representan líneas de fuerza ya que como hemos visto  $\vec{B}$  no tiene la misma dirección que la fuerza magnética sobre las cargas en movimiento.

Del mismo modo que se definió en el caso del flujo eléctrico, podemos definir un flujo magnético a través de una superficie como:

$$\phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (6.50)$$

En el sistema internacional la unidad para el flujo magnético es el Weber (Wb);  $1 \text{ Wb} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2 = 1 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}$ .

Hemos visto en capítulos anteriores que el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada fuese proporcional a la carga eléctrica neta dentro de la misma. Experimentalmente

nunca se ha encontrado un monopolo magnético así que en este caso no sería posible que el flujo magnético total a través de una superficie cerrada sea proporcional a la carga magnética total encerrada. Esto implica que el mismo número de líneas que entran por la superficie han de salir por ella, y que el flujo magnético a través de cualquier superficie cerrada es 0.

$$\phi = \oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (6.51)$$

Esta es la ecuación de Gauss para el magnetismo y una de las ecuaciones de Maxwell. El hecho de que las líneas de campo magnético sean cerradas y no existan puntos en los que nazcan o mueran líneas de campo implica que el campo  $\vec{B}$  es solenoidal. De hecho aplicando el teorema de Gauss a la ecuación anterior siendo  $v$  el volumen de la superficie  $S$ :

$$\phi = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_v \nabla \cdot \vec{B} dv = 0 \quad (6.52)$$

Y dado que la superficie  $S$  puede ser cualquiera se encuentra que:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (6.53)$$

Por tanto, el campo magnético carece de fuentes.

## 6.11. Potencial vector de una distribución de corriente

El cálculo de los campos eléctricos se simplificó mucho con la introducción del potencial electrostático ( $V$ ) que es un escalar. En el caso del campo magnético que es solenoidal se puede introducir un potencial vectorial de manera que el campo  $\vec{B}$  sea el rotacional de otro campo vectorial, denominado potencial vector magnético.

$$\nabla \times \vec{A} = \vec{B} \quad (6.54)$$

Usando la ley de Ampère en su forma diferencial ( $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ ) y usando la definición de potencial vector, encontramos una relación entre la densidad de corriente y el potencial vector.

$$\mu_0 \vec{J} = \nabla \times \vec{B} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad (6.55)$$

Si elegimos un potencial vector tal que su  $\nabla \cdot \vec{A} = 0$  (gauge de Coulomb), entonces nos quedaría que

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \quad (6.56)$$

similar a la ecuación de Poisson que se obtuvo en electrostática (ec. [3.195],  $\nabla^2 V = -\rho/\epsilon_0$ ). De esta manera se establece la equivalencia entre  $\mu_0 \vec{J}$  y  $\rho/\epsilon_0$  o entre  $\mu_0 I$  y  $\lambda/\epsilon_0$ .

En este caso las componentes del potencial magnético vector verifican que

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x; \quad \nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y; \quad \nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z \quad (6.57)$$

y por analogía con el potencial electrostático su solución sería

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{J}(\vec{r}') dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (6.58)$$

De este modo el campo  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$  lo podemos escribir como

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{J}(\vec{r}') dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (6.59)$$

que conduce a la ley de Biot-Savart.

Para un hilo de corriente, como  $\vec{J} dv' = I d\vec{r}'$ , la integral de volumen que tenemos para el potencial vector se reduce a una integral en una curva  $\Gamma$ .

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (6.60)$$