



# MAGNETOSTÁTICA DE MEDIOS MATERIALES

J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física II  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

Curso 2014/15



## ÍNDICE

MAGNETIZACIÓN DE LA MATERIA  
POTENCIAL MAGNÉTICO VECTOR: DESARROLLO  
MULTIPOLAR  
MOMENTO DIPOLAR MAGNÉTICO  
VECTOR MAGNETIZACIÓN  
DENSIDADES DE CORRIENTE DE MAGNETIZACIÓN  
INTENSIDAD DE CORRIENTE TOTAL DE MAGNETIZACIÓN  
CAMPO MAGNETIZANTE (CAMPO  $\vec{H}$ )

J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física II  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval





# ÍNDICE

DIAMAGNETISMO

PARAMAGNETISMO

FERROMAGNETISMO

CAMPO EN LA SEPARACIÓN DE MEDIOS

J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física II  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



# ÍNDICE

## APLICACIONES

DESARROLLO MULTIPOLAR PARA DENSIDADES

DIPOLO MAGNÉTICO

POTENCIAL DE UN DIPOLO

CAMPO DE UN DIPOLO

MOMENTO SOBRE UN DIPOLO

INTENSIDADES LIBRES EN MATERIALES NO CONDUCTORES

HILO INFINITO DE DENSIDAD  $\lambda$  POR UNIDAD DE LONGITUD CON VELOCIDAD  $v$

ARO DE CARGA  $Q$  UNIFORME CON VELOCIDAD ANGULAR  $\omega$  EN TORNO A SU EJE

J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física II  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval





# ÍNDICE

## APLICACIONES

### DENSIDADES DE CORRIENTE DE MAGNETIZACIÓN

Hilo de corriente de radio  $R$ , densidad libre uniforme y permitividad  $\mu_r$

### FERROMAGNETISMO

Cilindro finito uniformemente imanado

Electroimán toroidal de  $N$  espiras con entrehierro de longitud  $L$

J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física II  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



## MAGNETIZACIÓN DE LA MATERIA

- Una pequeña corriente, como por ejemplo la debida a un electrón en torno a un núcleo, constituye un dipolo magnético.
- Los átomos pueden o no presentar un momento dipolar magnético neto, dependiendo de la simetría o de la orientación relativa de sus órbitas electrónicas.
- Las órbitas en las moléculas, en general, no presentan simetría esférica, por tanto, pueden tener también un momento dipolar magnético permanente.

J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física II  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval





# MAGNETIZACIÓN DE LA MATERIA

- En general, los materiales no presentan momento magnético total (neto) debido a la orientación al azar de sus átomos o moléculas.
- La presencia de un campo magnético externo distorsiona el movimiento electrónico produciendo sobre los electrones un movimiento de rotación en torno a la dirección del campo, efecto que da lugar a una magnetización neta.

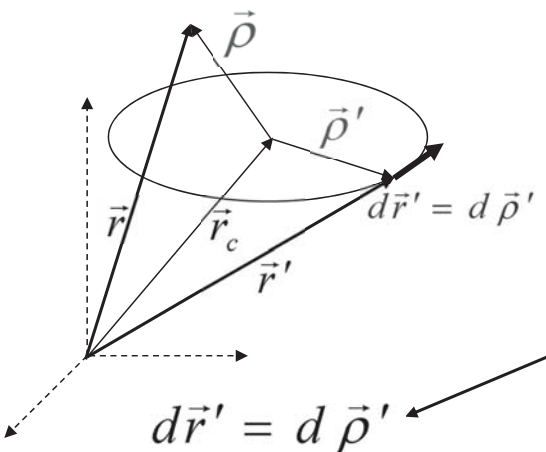
J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física II  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



## POTENCIAL MAGNÉTICO VECTOR: Desarrollo Multipolar

Para una ESPIRA (no necesariamente plana ni circular) pequeña (de radio pequeño comparado con la distancia al punto donde se calcula el campo  $|\vec{\rho}| \gg |\vec{\rho}'|$ ), el desarrollo multipolar es:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{I d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$



$$\left. \begin{aligned} \vec{\rho} &= \vec{r} - \vec{r}_c \\ \vec{\rho}' &= \vec{r}' - \vec{r}_c \end{aligned} \right\} \vec{r} - \vec{r}' = \vec{\rho} - \vec{\rho}'$$

$$\vec{A}(\vec{\rho}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{I d\vec{\rho}'}{|\vec{\rho} - \vec{\rho}'|}$$

J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física II  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval





## POTENCIAL MAGNÉTICO VECTOR: Desarrollo Multipolar

$$|\vec{\rho}| \gg |\vec{\rho}'| \longrightarrow \frac{1}{|\vec{\rho} - \vec{\rho}'|} \approx \frac{1}{|\vec{\rho}|} + \frac{\vec{\rho} \cdot \vec{\rho}'}{|\vec{\rho}|^3} + \dots = \frac{1}{|\vec{\rho}|} - \vec{\rho}' \cdot \nabla \left( \frac{1}{|\vec{\rho}|} \right) + \dots$$

Sustituyendo:

$$\vec{A}(\vec{\rho}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{I d\vec{\rho}'}{|\vec{\rho}|} - \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma} I \vec{\rho}' \cdot \nabla \left( \frac{1}{|\vec{\rho}|} \right) d\vec{\rho}'$$

Término MONOPOLAR

Término DIPOLAR

Circulación a lo largo de una curva cerrada de una diferencial vectorial exacto  $\longrightarrow \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{I d\vec{\rho}'}{|\vec{\rho}|} = \vec{0}$

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx - \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma} I \vec{\rho}' \cdot \nabla \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_c|} \right) d\vec{\rho}'$$

J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física II  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



## POTENCIAL MAGNÉTICO VECTOR: Desarrollo Multipolar

También se puede escribir como expresión del potencial magnético vector creado por una espira conductora en aproximación dipolar:

$$\vec{A}(\vec{\rho}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma} I \frac{\vec{\rho} \cdot \vec{\rho}'}{|\vec{\rho}|^3} d\vec{\rho}'$$

Llamando a:  $\vec{\alpha} = \vec{\rho} / |\vec{\rho}|^3$

Esta relación queda:

$$\vec{A}(\vec{\rho}) \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\Gamma} (\vec{\alpha} \cdot \vec{\rho}') d\vec{\rho}'$$

J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física II  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval





## POTENCIAL MAGNÉTICO VECTOR: Desarrollo Multipolar

Recordamos el desarrollo del doble producto vectorial:

$$(\vec{\rho}' \times d\vec{\rho}') \times \vec{\alpha} = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\rho}') d\vec{\rho}' - (\vec{\alpha} \cdot d\vec{\rho}') \vec{\rho}'$$

Y tenemos en cuenta que sobre la curva  $\Gamma$  se cumple que:

$$d((\vec{\alpha} \cdot \vec{\rho}') \vec{\rho}') = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\rho}') d\vec{\rho}' + (\vec{\alpha} \cdot d\vec{\rho}') \vec{\rho}'$$

donde se ha tenido en cuenta que  $\vec{\alpha}$  es un vector constante y, por tanto,  $d\vec{\alpha} = \vec{0}$

Sumando las dos ecuaciones anteriores:

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{\rho}') d\vec{\rho}' = \frac{1}{2}(\vec{\rho}' \times d\vec{\rho}') \times \vec{\alpha} + \frac{1}{2}d((\vec{\alpha} \cdot \vec{\rho}') \vec{\rho}')$$

J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física II  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



## POTENCIAL MAGNÉTICO VECTOR: Desarrollo Multipolar

Sustituyendo en:  $\vec{A}(\vec{\rho}) \simeq \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\Gamma} (\vec{\alpha} \cdot \vec{\rho}') d\vec{\rho}'$

Queda:

$$\vec{A}(\vec{\rho}) \simeq \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{2} \left[ \oint_{\Gamma} (\vec{\rho}' \times d\vec{\rho}') \times \vec{\alpha} + \oint_{\Gamma} d((\vec{\alpha} \cdot \vec{\rho}') \vec{\rho}') \right]$$

Y teniendo en cuenta que la circulación a lo largo de una curva cerrada de una diferencial exacto es cero:

$$\oint_{\Gamma} d((\vec{\alpha} \cdot \vec{\rho}') \vec{\rho}') = 0$$

J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física II  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval





## POTENCIAL MAGNÉTICO VECTOR: Desarrollo Multipolar

Queda: 
$$\vec{A}(\vec{\rho}) \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{1}{2} (\vec{\rho}' \times d\vec{\rho}') \times \vec{\alpha}$$

Si tenemos en cuenta que:

$$\vec{\alpha} = \frac{\vec{\rho}}{|\vec{\rho}|^3} = -\nabla \frac{1}{|\vec{\rho}|} = -\nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_c|}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx -\oint_{\Gamma} \left( \frac{I \vec{\rho}' \times d\vec{\rho}'}{2} \right) \times \nabla \left[ \frac{\mu_0}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}_c|} \right]$$



## POTENCIAL MAGNÉTICO VECTOR: Desarrollo Multipolar

Se define el Momento Dipolar Magnético como:

$$\vec{m} = I \oint_{\Gamma} \left( \frac{\vec{\rho}' \times d\vec{\rho}'}{2} \right)$$

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx -\vec{m} \times \nabla \left[ \frac{\mu_0}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}_c|} \right]$$

Potencial Magnético Vector para un circuito por el que circula una intensidad constante en aproximación dipolar





## MOMENTO DIPOLAR MAGNÉTICO

Momento Dipolar Magnético:  $\vec{m} = I \oint_{\Gamma} \left( \frac{\vec{\rho}' \times d\vec{\rho}'}{2} \right)$

$$d\vec{S}_{\text{triángulo}} = \frac{1}{2} \vec{\rho}' \times d\vec{\rho}'$$

$$dS_{\text{triángulo}} = \left| \frac{\vec{\rho}' \times d\vec{\rho}'}{2} \right|$$

Área del triángulo de la figura

Sumando vectorialmente obtenemos el vector área subtendida por la espira.

$$\vec{S} = \oint_{\Gamma} \left( \frac{\vec{\rho}' \times d\vec{\rho}'}{2} \right) \longrightarrow \vec{m} = I \vec{S}$$

J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física II  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



## MOMENTO DIPOLAR MAGNÉTICO

Para una espira plana:

Unitario normal

$$d\vec{S}_{\text{triángulo}} = \left[ \frac{\vec{\rho}' \times d\vec{\rho}'}{2} \right] \vec{n}$$

$$\vec{m} = I \left( \int dS_{\text{triángulo}} \right) \vec{n} = I (\text{Área Espira}) \vec{n}$$

El módulo del momento dipolar es el producto de la intensidad por el área de la espira, la dirección la de la normal a la espira, y sentido, el determinado por el sentido de recorrido de la corriente

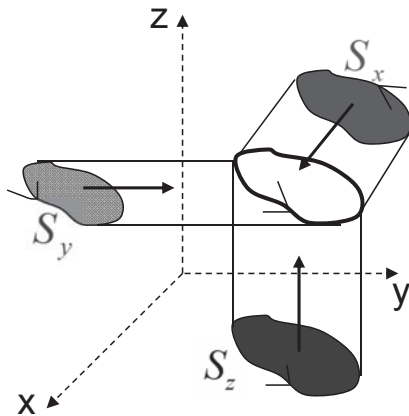
J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física II  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval







## MOMENTO DIPOLAR MAGNÉTICO



En general, en tres dimensiones:

$$\vec{S} \equiv \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} \vec{r} \times d\vec{r}$$

Vector superficie subtendida por la curva

$$\vec{m} = I \vec{S} = I(S_x \vec{i} + S_y \vec{j} + S_z \vec{k})$$

Cada una de las componentes del vector superficie ( $S_x$ ,  $S_y$ ,  $S_z$ ) son las proyecciones de la curva en los diferentes planos coordenados. Se elige como sentido de cada superficie el que determina el sentido de la corriente proyectada sobre dichos planos al aplicar la regla del sacacorchos.

J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física II  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



## MOMENTO DIPOLAR MAGNÉTICO

$$m = I \vec{S} = I \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} \vec{r} \times d\vec{r}$$

$$\begin{aligned} \vec{m} &= I \frac{\vec{i}}{2} \oint (ydz - zdy) + I \frac{\vec{j}}{2} \oint (zdx - xdz) + I \frac{\vec{k}}{2} \oint (xdy - ydx) = \\ &= I(\vec{i} \oint ydz + \vec{j} \oint zdx + \vec{k} \oint xdy) \end{aligned}$$

Cada una de las componentes del vector superficie ( $S_x$ ,  $S_y$ ,  $S_z$ ) son las proyecciones del circuito en los diferentes planos coordenados. Se elige como sentido de la superficie el que determina el sentido de la corriente al aplicar la regla del tornillo

$$\vec{m} = I \vec{S} = I(S_x \vec{i} + S_y \vec{j} + S_z \vec{k})$$

J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física II  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval





## MOMENTO DIPOLAR MAGNÉTICO

¿Qué pasa para densidades de corriente?

$$I d\vec{r}' \rightarrow \vec{J}(\vec{r}') dV' \quad ??$$

$$\vec{m} = \oint_{\Gamma} \left( \frac{\vec{\rho}' \times I d\vec{\rho}'}{2} \right) \longrightarrow \vec{m} = \int_V \frac{\vec{\rho}' \times \vec{J}(\vec{\rho}') dV'}{2}$$

Momento dipolar para densidades

Haciendo el desarrollo multipolar del potencial vector para densidades se demuestra que el valor de  $\vec{m}$  anterior es correcto (véanse las aplicaciones).

J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física II  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

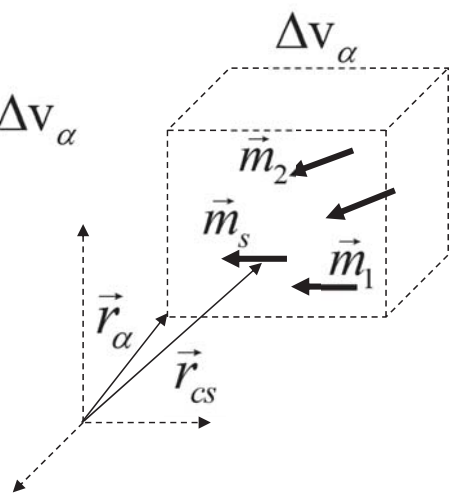


## VECTOR MAGNETIZACIÓN

$\vec{m}_s$  = momento dipolar del átomo o molécula  $s$  dentro de un volumen  $\Delta V_\alpha$

Vector Magnetización (Imanación):

$$\vec{M}(\vec{r}_\alpha) = \frac{\sum_s \vec{m}_s}{\Delta V_\alpha}$$



Suma de los momentos dipolares moleculares por unidad de volumen

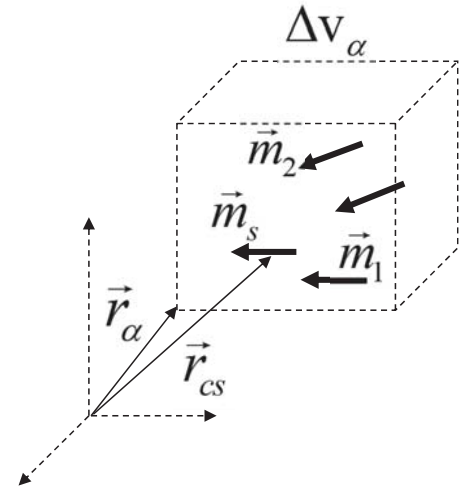
J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física II  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval





## VECTOR MAGNETIZACIÓN

$$\vec{A}(\vec{r}) \simeq -\vec{m} \times \nabla \left[ \frac{\mu_0}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}_c|} \right]$$



$$\vec{A}(\vec{r}) \simeq -\sum_{\alpha} \sum_s \vec{m}_s \times \nabla \left[ \frac{\mu_0}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}_{cs}|} \right]$$

Si calculamos un campo promedio o macroscópico:

$$\vec{r}_{cs} \simeq \vec{r}_{\alpha}$$

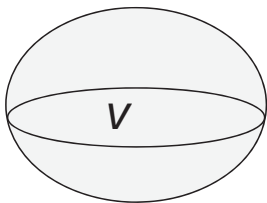
J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física II  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



## VECTOR MAGNETIZACIÓN

Es decir:

$$\vec{A}(\vec{r}) \simeq -\sum_{\alpha} \Delta v_{\alpha} \vec{M}(\vec{r}_{\alpha}) \times \nabla \left[ \frac{\mu_0}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}_{\alpha}|} \right]$$



Medio Magnético

$$\vec{A}(\vec{r}) \simeq -\int_V \vec{M}(\vec{r}') \times \nabla \left[ \frac{\mu_0}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} \right] dv'$$

Potencial creado por un medio magnético en función del vector imanación

J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física II  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval





# DENSIDADES DE CORRIENTE DE MAGNETIZACIÓN

$$\vec{A}(\vec{r}) \simeq - \int_{\mathcal{V}} \vec{M}(\vec{r}') \times \nabla \left[ \frac{\mu_0}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} \right] d\mathcal{V}'$$

$$\nabla' \times \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\nabla' \times \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \vec{M}(\vec{r}') \times \nabla' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\nabla' \times \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \vec{M}(\vec{r}') \times \nabla' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\nabla' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\nabla' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) \simeq - \int_{\mathcal{V}} \nabla' \times \left[ \frac{\mu_0 \vec{M}(\vec{r}')}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} \right] d\mathcal{V}' + \int_{\mathcal{V}} \frac{\mu_0 \nabla' \times \vec{M}(\vec{r}')}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} d\mathcal{V}'$$

J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física II  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



# DENSIDADES DE CORRIENTE DE MAGNETIZACIÓN

Si aplicamos el segundo teorema de Gauss:

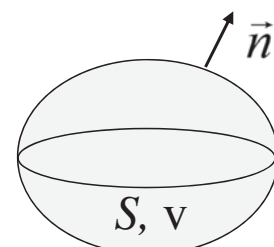
$$\vec{A}(\vec{r}) \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times d\vec{S}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \int_{\mathcal{V}} \frac{\mu_0 \nabla' \times \vec{M}(\vec{r}')}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} d\mathcal{V}'$$

$$\vec{J}_m = \nabla \times \vec{M}$$

y

$$\vec{J}_{S\ m} = \vec{M} \times \vec{n}$$

Unitario de la normal exterior a la superficie



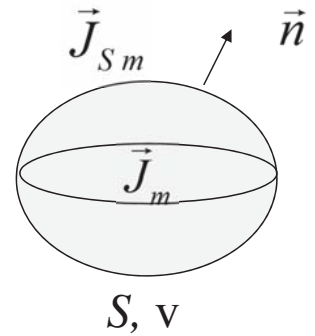
J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física II  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval





# DENSIDADES DE CORRIENTE DE MAGNETIZACIÓN

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\vec{J}_{Sm} dS'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \frac{\vec{J}_m dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$



A todos los efectos existe una Densidad de Corriente de Magnetización:

$$\vec{J}_m = \nabla \times \vec{M} \quad (\text{A/m}^2)$$

Y una Densidad de Corriente Superficial de Magnetización en la superficie de normal  $\vec{n}$  :

$$\vec{J}_{Sm} = \vec{M} \times \vec{n} \quad (\text{A/m}) \quad d\vec{S}' = \vec{n} dS'$$

Nota: la unidades de la magnetización son idénticas a las de  $\vec{J}_{Sm}$

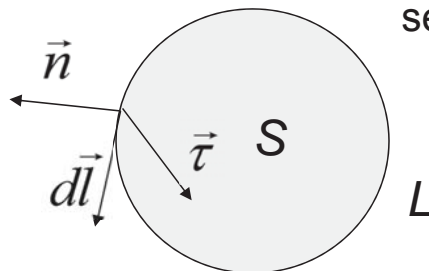
J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física II  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



# INTENSIDAD DE CORRIENTE TOTAL DE MAGNETIZACIÓN

$$\begin{aligned} I_m &= \oint_L (\vec{M} \times \vec{n}) \cdot \vec{\tau} dl + \int_S (\nabla \times \vec{M}) \cdot \vec{\tau} dS = \oint_L (\vec{M} \times \vec{n}) \cdot \vec{\tau} dl + \int_L \vec{M} \cdot d\vec{l} = \\ &= \oint_L (\vec{M} \times \vec{n}) \cdot \vec{\tau} dl + \int_L \vec{M} \cdot (\vec{\tau} \times \vec{n}) dl = 0 \end{aligned}$$

Intensidad que atraviesa la sección transversal S del conductor



$\vec{\tau}$  sale hacia fuera de la hoja

La intensidad de corriente total de magnetización es cero

J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física II  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval





## CAMPO MAGNETIZANTE (CAMPO $\vec{H}$ )

En presencia de corrientes de cargas libres de densidad total  $\vec{J}$  y de magnetización  $\vec{J}_m$ , la Magnetostática se rige por:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left( \underbrace{\nabla \times \vec{M}}_{\vec{J}_m} + \vec{J} \right)$$

Y por:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física II  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



## CAMPO MAGNETIZANTE (CAMPO $\vec{H}$ )

Se define el campo magnetizante  $\vec{H}$  como:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad \longleftrightarrow \quad \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

Este campo verifica:  $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$        $\nabla \cdot \vec{H} = -\nabla \cdot \vec{M}$

El campo  $\vec{H}$  depende únicamente de las corrientes en conductores y en materiales en movimiento con densidades “artificiales” (véase la electrostática).

Tradicionalmente al campo magnetizante se le conocía como CAMPO MAGNÉTICO o INTENSIDAD DE CAMPO MAGNÉTICO

J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física II  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



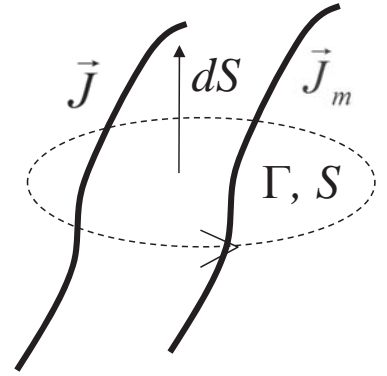


## CAMPO MAGNETIZANTE (CAMPO $\vec{H}$ )

LEY de AMPÉRE en presencia de Medios Magnéticos

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \rightarrow \oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{libre}} = \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

La circulación del vector  $\vec{H}$  es igual a la intensidad de corriente de cargas libres



Permite el cálculo del vector  $\vec{H}$  en problemas de alta simetría sin tener en cuenta las corrientes de magnetización

J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física II  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



## CAMPO MAGNETIZANTE (CAMPO $\vec{H}$ )

Para resolver los problemas de medios magnéticos se necesita la relación  $\vec{M}$  ( $\vec{H}$ ).

Usualmente la magnetización tiene una dependencia lineal con el campo macroscópico.

Por tanto, basta conocer  $\mu_r$ .

$$\vec{M} = \chi \vec{H} = (\mu_r - 1) \vec{H}$$

$\chi$  = susceptibilidad

$\mu_r$  = permeabilidad magnética relativa

J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física II  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval





## CAMPO MAGNETIZANTE (CAMPO $\vec{H}$ )

Es decir:

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}$$

$$\mu_r \approx 1 \quad \begin{cases} \mu_r > 1 \text{ paramagnetismo} \\ \mu_r < 1 \text{ diamagnetismo} \end{cases}$$

Si  $|\vec{M}| \ll |\vec{H}|$  es posible despreciar los efectos paramagnéticos o diamagnéticos.

La relación lineal NO siempre es cierta. En materiales ferromagnéticos:  $\mu \neq cte$ ;  $\mu = \mu(\vec{H})$

J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física II  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

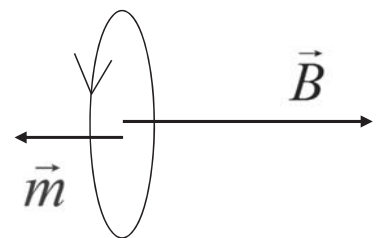


## DIAMAGNETISMO

Efecto de distorsión (materiales con átomos sin momento dipolar permanente):

El efecto de un campo sobre el movimiento electrónico es equivalente a una corriente adicional inducida en el átomo.

La corriente asociada tiene un momento dipolar de sentido opuesto al campo debido a la ley de Lenz.



La sustancia adquiere una magnetización  $\vec{M}$  opuesta al campo. Se tiene que  $\mu_r < 1$ .

J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física II  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



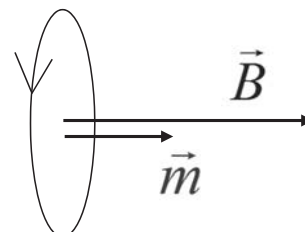




## PARAMAGNETISMO

Efecto de orientación (materiales con átomos o moléculas con momento dipolar permanente):

El campo externo produce un par que tiende a alinear todos los dipolos en la dirección y sentido del campo.



Este efecto es mucho más intenso que el diamagnetismo.

La sustancia adquiere una magnetización  $\vec{M}$  en el mismo sentido que el campo. Se tiene que  $\mu_r > 1$ .

J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física II  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



## FERROMAGNETISMO

La interacción cuántica de espines electrónicos produce un alineamiento de momentos dipolares, y por tanto, una magnetización de pequeñas regiones microscópicas llamadas dominios ( $\sim 1 \mu\text{m}$ ).

En presencia de un campo externo, los dominios orientados más favorablemente a la dirección del campo crecen a expensas del resto; además la magnetización en los dominios tiende a alinearse con el campo.

Tenemos un IMÁN.

Existe una temperatura, Temperatura de Curie, por encima de la cual la sustancia se hace paramagnética (el movimiento térmico vence a las fuerzas de alineación).

J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física II  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval





# FERROMAGNETISMO

Hay fenómenos irreversibles en el proceso de alineación (histéresis). La relación entre  $\vec{M}$  y  $\vec{H}$  es compleja, y se puede tener  $\vec{M} \neq \vec{0}$  sin fuente externa  $\vec{H} = \vec{0}$  (imán permanente).

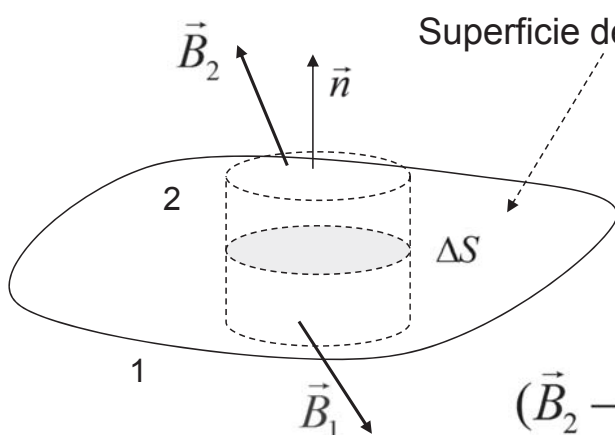
**Sustancia Antiferromagnética:** La interacción cuántica de espines hace que los momentos dipolares sean antiparalelos resultando una magnetización neta nula.

**Sustancia Ferrimagnética:** La interacción cuántica de espines hace que los momentos dipolares sean antiparalelos, pero los momentos magnéticos orientados en un sentido son diferentes de los orientados en el opuesto, resultando una magnetización neta.

J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física II  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



# CAMPO EN LA SEPARACIÓN DE MEDIOS



$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\vec{B}_1 \cdot (-\vec{n})\Delta S + \vec{B}_2 \cdot \vec{n}\Delta S = 0$$

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n} = 0$$

$$B_{2n} - B_{1n} = 0$$

El unitario normal apunta hacia el medio 2.

**Condición de Contorno:**

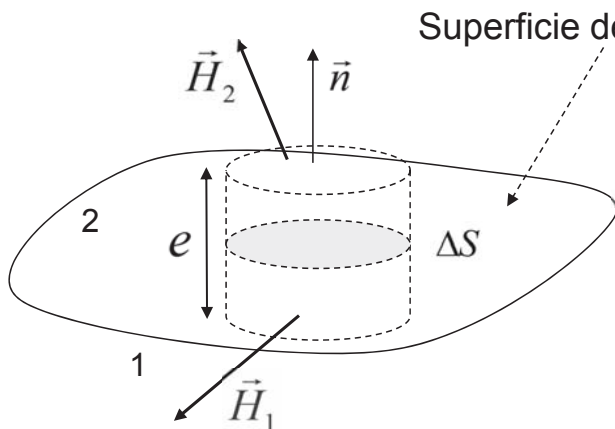
En la dirección normal el vector inducción magnética se conserva

J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física II  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval





# CAMPO EN LA SEPARACIÓN DE MEDIOS



Superficie de separación de dos medios

$$\oint_S d\vec{S} \times \vec{H} = \int_V dv \nabla \times \vec{H} = \int_V dv \vec{J}$$

$$\vec{n}\Delta S \times \vec{H}_2 + (-\vec{n})\Delta S \times \vec{H}_1 = e\Delta S \vec{J}$$

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \lim_{e \rightarrow 0} e\vec{J} = \vec{J}_S \longrightarrow H_{2t} - H_{1t} = J_S$$

Condición de contorno:

En la dirección tangencial, la diferencia de componentes del campo  $\vec{H}$  es la densidad de corriente superficial libre

J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física II  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



# DESARROLLO MULTIPOLAR PARA DENSIDADES

Haciendo el desarrollo multipolar del potencial vector para densidades se demuestra que:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \approx -\vec{m} \times \nabla \left[ \frac{\mu_0}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}_c|} \right]$$

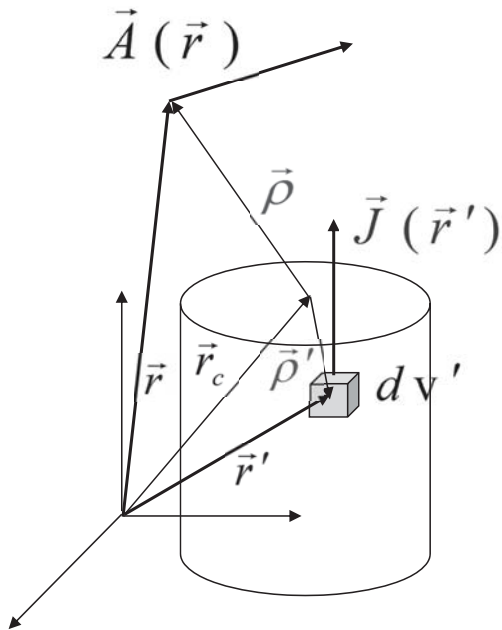
Aproximación dipolar para densidades

J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física II  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval





# DESARROLLO MULTIPOLAR PARA DENSIDADES



$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \frac{\vec{J}(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{\rho} &= \vec{r} - \vec{r}_c \\ \vec{\rho}' &= \vec{r}' - \vec{r}_c \end{aligned} \right\} \vec{r} - \vec{r}' = \vec{\rho} - \vec{\rho}'$$

$$\vec{A}(\vec{\rho}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \frac{\vec{J}(\vec{r}') dV'}{|\vec{\rho} - \vec{\rho}'|}$$

J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física II  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



# DESARROLLO MULTIPOLAR PARA DENSIDADES

Desarrollando para  $\vec{\rho}' \rightarrow \vec{0}$

$$\vec{A}(\vec{\rho}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \vec{J}(\vec{r}') dV' \left[ \frac{1}{|\vec{\rho}|} + \frac{\vec{\rho}}{|\vec{\rho}|^3} \cdot \vec{\rho}' + \dots \right]$$

$$\int_v \vec{J}(\vec{r}') dV' = - \int_v \vec{r}' (\nabla' \cdot \vec{J}) dV' = 0 \quad \nabla' \cdot \vec{J} = 0$$

Propiedad:

$$\psi = x', y', z'$$

$$\int_v \vec{J} \nabla' \psi dV' + \int_v \psi (\nabla' \cdot \vec{J}) dV' = \int_v \nabla' \cdot (\vec{J} \psi) dV' = \oint_s \psi \vec{J} \cdot d\vec{S}' = 0$$

$\vec{J} = \vec{0}$  en la superficie

J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física II  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval





## DESARROLLO MULTIPOLAR PARA DENSIDADES

$$\vec{A}(\vec{\rho}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \vec{J}(\vec{r}') d\mathcal{V}' \left( \frac{\vec{\rho}}{|\vec{\rho}|^3} \cdot \vec{\rho}' \right)$$

$$(\vec{\rho}' \times \vec{J}) \times \frac{\vec{\rho}}{\rho^3} = \left( \frac{\vec{\rho}}{\rho^3} \cdot \vec{\rho}' \right) \vec{J} - \left( \frac{\vec{\rho}}{\rho^3} \cdot \vec{J} \right) \vec{\rho}'$$

$$\left( \frac{\vec{\rho}}{\rho^3} \cdot \vec{\rho}' \right) \vec{J} = \frac{1}{2} \left( \frac{\vec{\rho}}{\rho^3} \cdot \vec{\rho}' \right) \vec{J} + \frac{1}{2} \left( \frac{\vec{\rho}}{\rho^3} \cdot \vec{J} \right) \vec{\rho}' + \frac{1}{2} (\vec{\rho}' \times \vec{J}) \times \frac{\vec{\rho}}{\rho^3}$$

$$\frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \left( \left( \frac{\vec{\rho}}{\rho^3} \cdot \vec{\rho}' \right) \vec{J} + \left( \frac{\vec{\rho}}{\rho^3} \cdot \vec{J} \right) \vec{\rho}' \right) d\mathcal{V}' = 0$$

J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física II  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



## DESARROLLO MULTIPOLAR PARA DENSIDADES

Demostración de la igualdad anterior (componente  $\vec{i}$ ):

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} \vec{J} \cdot \left( \left( \frac{\vec{\rho}}{\rho^3} \cdot \vec{\rho}' \right) \vec{i} + \frac{\vec{\rho}}{\rho^3} x' \right) d\mathcal{V}' &= \int_{\mathcal{V}} \vec{J} \cdot \left( \left( \frac{\vec{\rho}}{\rho^3} \cdot \vec{\rho}' \right) \vec{i} + x' \nabla' \left( \frac{\vec{\rho}}{\rho^3} \cdot \vec{\rho}' \right) \right) d\mathcal{V}' = \\ &= \int_{\mathcal{V}} \vec{J} \cdot \nabla' \left( x' \left( \frac{\vec{\rho}}{\rho^3} \cdot \vec{\rho}' \right) \right) d\mathcal{V}' \end{aligned}$$

Aplicando la propiedad vista anteriormente

$$\int_{\mathcal{V}} \vec{J} \cdot \nabla' \left( x' \left( \frac{\vec{\rho}}{\rho^3} \cdot \vec{\rho}' \right) \right) d\mathcal{V}' = - \int_{\mathcal{V}} x' \left( \frac{\vec{\rho}}{\rho^3} \cdot \vec{\rho}' \right) \nabla' \cdot \vec{J} d\mathcal{V}' = 0$$

$$\nabla' \cdot \vec{J} = 0$$

J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física II  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval





## DESARROLLO MULTIPOLAR PARA DENSIDADES

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{\rho}) &\approx \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \frac{1}{2} (\vec{\rho}' \times \vec{J}) \times \frac{\vec{\rho}}{|\vec{\rho}|^3} dV' = \\ &= \int_v \frac{1}{2} (\vec{\rho}' \times \vec{J}) dV' \times \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\rho}}{|\vec{\rho}|^3} = \vec{m} \times \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\rho}}{|\vec{\rho}|^3}\end{aligned}$$

$$\vec{A}(\vec{\rho}) \approx -\vec{m} \times \nabla \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{|\vec{\rho}|} \right]$$

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx -\vec{m} \times \nabla \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_c|} \right]$$

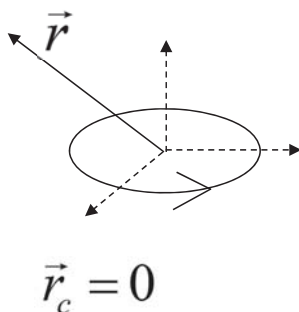
J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física II  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



## DIPOLO MAGNÉTICO



### POTENCIAL DE UN DIPOLO



DIPOLO: Circuito muy pequeño

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\vec{m} \times \nabla \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_c|} \right]$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{m} \times \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{i} \left( \frac{m_y z}{r^3} - \frac{m_z y}{r^3} \right) - \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{j} \left( \frac{m_x z}{r^3} - \frac{m_z x}{r^3} \right) + \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{k} \left( \frac{m_x y}{r^3} - \frac{m_y x}{r^3} \right)$$

J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física II  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



## DIPOLO MAGNÉTICO



## CAMPO DE UN DIPOLO

Calculamos la componente  $\vec{i}$  de  $\vec{B}$ :

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{m} \times \frac{\vec{r}}{r^3} \right)$$

$$\begin{aligned} B_x &= \nabla \times \left( \vec{m} \times \frac{\vec{r}}{r^3} \right) \Big|_x = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{m_x y}{r^3} - \frac{m_y x}{r^3} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( -\frac{m_x z}{r^3} + \frac{m_z x}{r^3} \right) = \\ &= \frac{m_x}{r^3} + (-3) \frac{m_x y^2}{r^5} - (-3) \frac{m_y xy}{r^5} + \frac{m_x}{r^3} + (-3) \frac{m_x z^2}{r^5} - (-3) \frac{m_z xz}{r^5} \end{aligned}$$

J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física II  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



## DIPOLO MAGNÉTICO



## CAMPO DE UN DIPOLO

Sumamos y restamos:  $(-3) \frac{m_x x^2}{r^5}$

$$\frac{4\pi}{\mu_0} B_x = -\frac{m_x}{r^3} - (-3) \frac{(m_x x + m_y y + m_z z)x}{r^5} = -\frac{m_x}{r^3} + \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})x}{r^5}$$

Y queda:

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{\vec{m}}{r^3} - \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})}{r^5} \vec{r} \right)$$

J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física II  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



## DIPOLO MAGNÉTICO



## CAMPO DE UN DIPOLO

Otro método:

Teniendo en cuenta el desarrollo del doble producto:

$$\nabla \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \nabla \cdot \vec{b} - \vec{b} \nabla \cdot \vec{a} + [\vec{b} \cdot \nabla] \vec{a} - [\vec{a} \cdot \nabla] \vec{b}$$

$$\nabla \times \left( \frac{\mu_0 \vec{m}}{4\pi} \times \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = \frac{\mu_0 \vec{m}}{4\pi} \nabla \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} - \frac{\vec{r}}{r^3} \nabla \cdot \frac{\mu_0 \vec{m}}{4\pi} + \underbrace{\left[ \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \nabla \right]}_0 \frac{\mu_0 \vec{m}}{4\pi} - \left[ \frac{\mu_0 \vec{m}}{4\pi} \cdot \nabla \right] \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\nabla \cdot \left( \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{z}{r^3} \right) = \frac{1}{r^3} - \frac{3x}{r^4} \frac{x}{r} + \frac{1}{r^3} - \frac{3y}{r^4} \frac{y}{r} + \frac{1}{r^3} - \frac{3z}{r^4} \frac{z}{r} = 0$$

$$\text{Es decir: } \vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} [\vec{m} \cdot \nabla] \frac{\vec{r}}{r^3}$$

J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física II  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



## DIPOLO MAGNÉTICO



## CAMPO DE UN DIPOLO

Recordando la definición del operador  $(\vec{a} \cdot \nabla)$

$$(\vec{a} \cdot \nabla) \vec{b} \equiv (\vec{a} \cdot \nabla b_x) \vec{i} + (\vec{a} \cdot \nabla b_y) \vec{j} + (\vec{a} \cdot \nabla b_z) \vec{k}$$

La componente sobre el eje  $x$  será:

$$B_x = -\frac{\mu_0}{4\pi} \vec{m} \cdot \nabla \left( \frac{\vec{r}}{r^3} \Big|_x \right) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \vec{m} \cdot \nabla \left( \frac{x}{r^3} \right)$$

$$B_x = -\frac{\mu_0}{4\pi} \vec{m} \cdot \left( \left( \frac{1}{r^3} - \frac{3x}{r^4} \frac{x}{r} \right) \vec{i} - \frac{3x}{r^4} \frac{y}{r} \vec{j} - \frac{3x}{r^4} \frac{z}{r} \vec{k} \right) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{m_x}{r^3} - \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})}{r^5} x \right)$$

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{\vec{m}}{r^3} - \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})}{r^5} \vec{r} \right)$$

J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física II  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

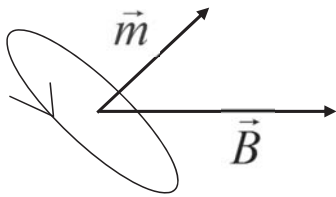




## DIPOLO MAGNÉTICO



## MOMENTO SOBRE UN DIPOLO



Este resultado también valdría para una espira en un  $B$  uniforme

$$\vec{F} = \oint d\vec{F} = I \oint d\vec{r} \times \vec{B} = I(\oint d\vec{r}) \times \vec{B} = \vec{0}$$

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_o = \oint \vec{r} \times (I d\vec{r} \times \vec{B}) = \vec{m} \times \vec{B}$$

El momento no depende del punto respecto del que se calcula

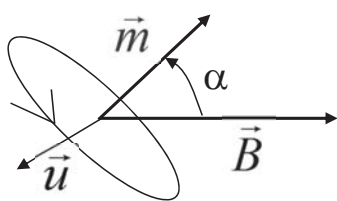
J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física II  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



## DIPOLO MAGNÉTICO



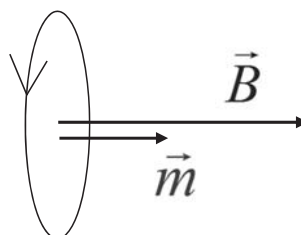
## MOMENTO SOBRE UN DIPOLO



$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$$

$$\vec{\tau} = m B \sin \alpha (-\vec{u})$$

El momento tiende a poner el circuito de forma perpendicular al campo



J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física II  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



## DIPOLO MAGNÉTICO



## MOMENTO SOBRE UN DIPOLO

$$\text{Demostración: } \frac{\vec{\tau}}{I} = \oint \vec{r} \times (d\vec{r} \times \vec{B}) = \oint (\vec{B} \cdot \vec{r}) d\vec{r} - \oint (\vec{r} \cdot d\vec{r}) \vec{B}$$

$$\oint (\vec{r} \cdot d\vec{r}) \vec{B} = \vec{B} \oint (\nabla \left( \frac{r^2}{2} \right) \cdot d\vec{r}) = 0 \quad \text{Diferencial exacta}$$

$$d((\vec{B} \cdot \vec{r}) \vec{r}) = (\vec{B} \cdot \vec{r}) d\vec{r} + (\vec{B} \cdot d\vec{r}) \vec{r},, \quad \oint d(\vec{r}(\vec{B} \cdot \vec{r})) = 0$$

$$\frac{\vec{\tau}}{I} = \oint (\vec{r} \cdot \vec{B}) d\vec{r} = - \oint (\vec{B} \cdot d\vec{r}) \vec{r}$$

$$\frac{\vec{\tau}}{I} = \frac{1}{2} \oint (-(\vec{B} \cdot d\vec{r}) \vec{r} + (\vec{B} \cdot \vec{r}) d\vec{r}) = -\vec{B} \times \oint \frac{\vec{r} \times d\vec{r}}{2} = -\vec{B} \times \frac{\vec{m}}{I}$$

$$(\vec{B} \cdot \vec{r}) d\vec{r} - (\vec{B} \cdot d\vec{r}) \vec{r} = (\vec{r} \times d\vec{r}) \times \vec{B}$$

J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física II  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



## INTENSIDADES LIBRES EN MATERIALES NO CONDUCTORES



Hilo infinito de densidad  $\lambda$  por unidad de longitud con  
velocidad  $v$



Intensidad por movimiento de cargas creadas artificialmente

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{dq}{dz} \frac{dz}{dt} = \frac{dq}{dz} v = \lambda v$$

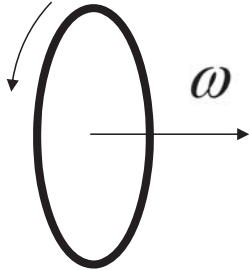
J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física II  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



# INTENSIDADES LIBRES EN MATERIALES NO CONDUCTORES



Aro de carga  $Q$  uniforme con velocidad angular  $\omega$  en torno a su eje



$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{dq}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dq}{d\theta} \omega = \frac{Q\omega}{2\pi}$$

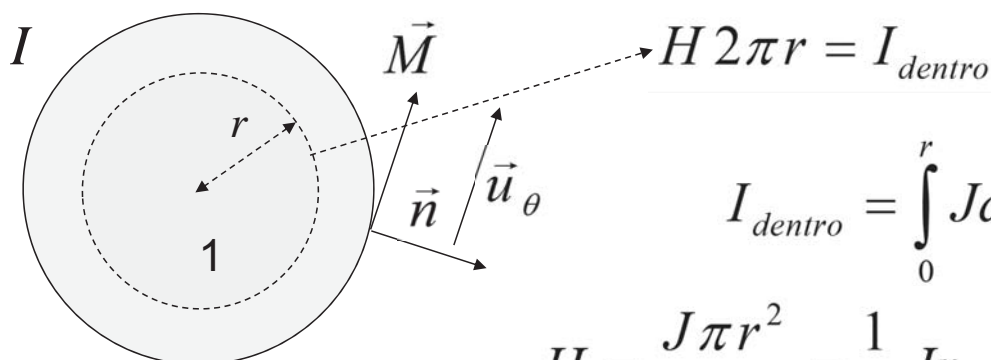
J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física II  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



# DENSIDADES DE CORRIENTE DE MAGNETIZACIÓN



Hilo de corriente de radio  $R$ , densidad libre uniforme y permitividad  $\mu_r$



$$I_{dentro} = \int_0^r J dS = J \pi r^2$$

$$H = \frac{J \pi r^2}{2 \pi r} = \frac{1}{2} J r \quad \vec{H} = H \vec{u}_\theta$$

Hacia afuera de la hoja

$$I = \int_0^R J dS = J \pi R^2 \quad \longrightarrow \quad H = \frac{I r}{2 \pi R^2}$$

J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física II  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



# DENSIDADES DE CORRIENTE DE MAGNETIZACIÓN



Hilo de corriente de radio  $R$ , densidad libre uniforme y permitividad  $\mu_r$

$$B = \mu_r \mu_0 H = \frac{\mu_r \mu_0 I r}{2\pi R^2}$$

$$M = (\mu_r - 1)H = \frac{(\mu_r - 1)I r}{2\pi R^2}$$

$$J_{S m} = \frac{(\mu_r - 1)IR}{2\pi R^2} = \frac{(\mu_r - 1)I}{2\pi R}$$

Sentido hacia dentro de la hoja  $\vec{J}_{S m} = \vec{M} \times \vec{n}$

J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física II  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

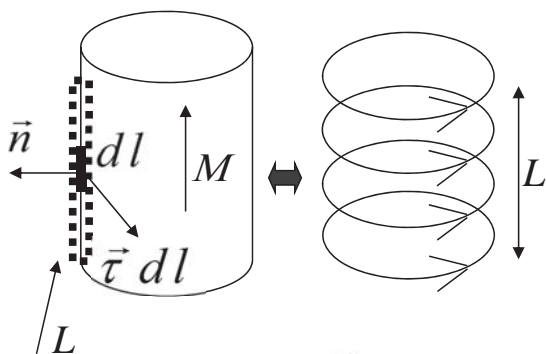


# FERROMAGNETISMO



## Cilindro finito uniformemente imanado

Suponemos un material ferromagnético: 
$$\begin{cases} \vec{M} = (\mu_r - 1)\vec{H} & \mu_r \neq cte \\ \vec{B} = \mu\vec{H} & \mu = \mu(\vec{H}) \end{cases}$$



El campo  $\vec{B}$  de un cilindro uniformemente imanado en la dirección de su eje de simetría es idéntico al de un solenoide de  $n$  espiras por unidad de longitud de las mismas dimensiones por el que circula una intensidad  $I$  tal que:

$$\vec{J}_m = \nabla \times \vec{M} = \vec{0}$$

$$\vec{J}_{S m} = \vec{M} \times \vec{n} \longrightarrow J_{S m} = M$$

$$I_L = \int_L \vec{J}_{S m} \cdot \vec{\tau} dl \longrightarrow nLI = J_{S m} L \longrightarrow J_{S m} = nI = M$$

J.C. Jiménez Sáez  
S. Ramírez de la Piscina Millán  
U.D. Física II  
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

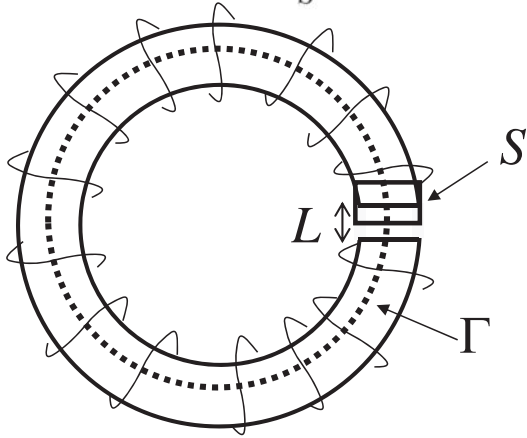


## FERROMAGNETISMO



Electroimán toroidal de  $N$  espiras con entrehierro de longitud  $L$  (material ferromagnético)

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \rightarrow \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \rightarrow B_h S_h = \phi_h = \phi_e = B_e S_e \text{ Entrehierro}$$



$$B_h \simeq B_e$$

$$B_e = \mu_0 H_e \quad (\text{vacío})$$

$$B_h = \mu_0 (H_h + M_h)$$

$$H_e \gg H_h$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \rightarrow \oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \rightarrow (2\pi R - L)H_h + LH_e = NI$$

J.C. Jiménez Sáez

S. Ramírez de la Piscina Millán

U.D. Física II

Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

Al ser ferromagnético:  $B_h = \mu H_h$      $\mu = \mu(\vec{H})$

