



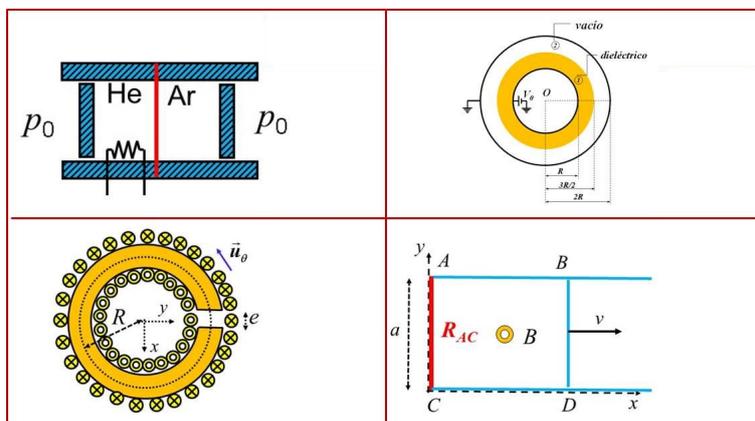
POLITÉCNICA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA  
AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO

# FÍSICA II

## TEORÍA

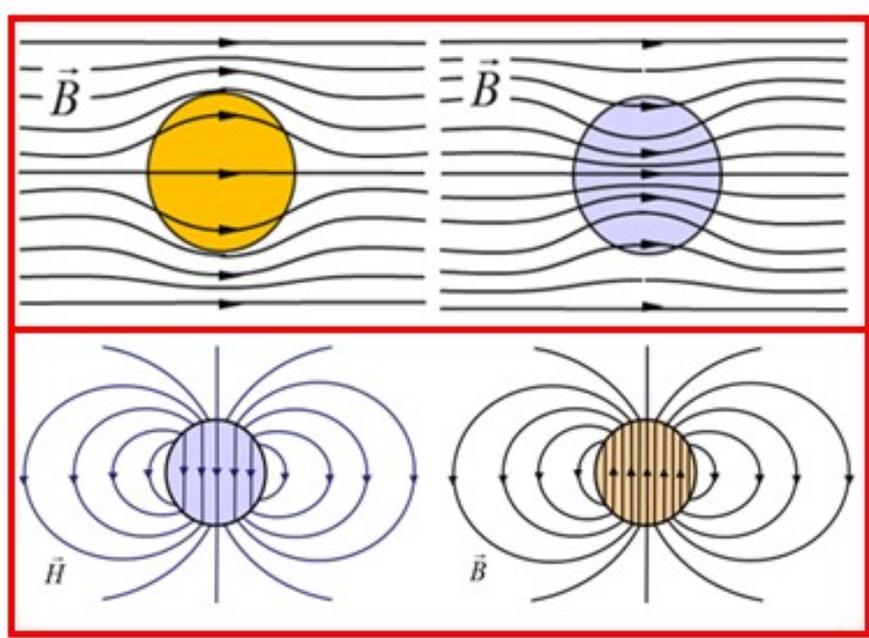
### Termodinámica y Electromagnetismo





POLITÉCNICA

# ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO



## TEMA 7.- MAGNETOSTÁTICA DE MEDIOS MATERIALES

José Javier HONRUBIA CHECA

## ÍNDICE MAGNETOSTÁTICA DE MEDIOS MATERIALES

---

<b>7. Magnetostática de Medios Materiales</b>	<b>1</b>
7.1. Campo producido por un dipolo magnético. Momento dipolar . . . . .	1
7.2. Magnetización de la materia . . . . .	4
7.3. Vector magnetización o imanación . . . . .	4
7.4. Cálculo de la densidad de corriente de magnetización . . . . .	5
7.5. Ecuaciones de la magnetostática de materiales . . . . .	7
7.6. Propiedades magnéticas: Diamagnetismo, paramagnetismo y ferromagnetismo .	12
7.6.1. Materiales diamagnéticos . . . . .	14
7.6.2. Materiales paramagnéticos . . . . .	14
7.6.3. Materiales ferromagnéticos . . . . .	16
7.7. Circuitos magnéticos . . . . .	19
<b>A. Apéndice A: Campo magnético producido por una espira alabeada</b>	<b>20</b>
<b>B. Apéndice B: Cálculo de la densidad de corriente de magnetización por superposición de momentos dipolares</b>	<b>22</b>
<b>C. Apéndice C: Campo producido por una esfera uniformemente magnetizada</b>	<b>25</b>

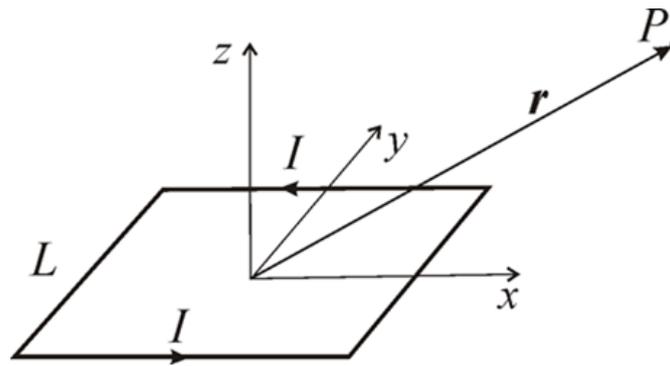
# 7

## Magnetostática de Medios Materiales

En este capítulo se estudia el comportamiento de la materia frente a un campo magnético externo y también el efecto inverso, es decir, como afectan las corrientes inducidas en la materia a dicho campo magnético. Nuestro primer objetivo será comprender la respuesta de los materiales a campos externos para, a continuación, obtener las ecuaciones generales de la magnetostática de materiales. Se estudian las propiedades magnéticas de los materiales y se clasifican según su comportamiento en diamagnéticos, paramagnéticos y ferromagnéticos. Estos últimos son importantes porque se utilizan en un amplio rango de aplicaciones. Finalmente, se pone un ejemplo de circuitos magnéticos. De la misma forma que en el capítulo anterior, se recomienda leer el apartado 8.1 referido a la intensidad y densidad de corriente antes de proseguir con este capítulo.

### 7.1. Campo producido por un dipolo magnético. Momento dipolar

Como ya se ha visto en el capítulo anterior, en magnetostática, el potencial vector (y por tanto la inducción magnética) puede obtenerse mediante ecuaciones del tipo *Poisson* en la que las fuentes son las componentes de la densidad de corriente, ec. [6.56]. Vamos a aplicar este resultado al cálculo del campo  $\vec{B}$  producido por un dipolo magnético a distancias suficientemente grandes comparadas con su dimensión.



**Figura 7.1:** Espira cuadrada de lado  $L$  por la que circula una corriente eléctrica  $I$ .  $P$  es el punto en el que se calcula el campo magnético.

Supóngase que tenemos una espira cuadrada por la que circula una intensidad de corriente  $I$ , tal como se representa en la Fig. 7.1.

A la espira la denominamos dipolo magnético si sus dimensiones son pequeñas en relación con la distancia al punto donde calculamos el campo. La componente  $x$  del potencial vector vendrá determinada por las corrientes en esta dirección, que tienen signos opuestos. Así pues, la solución de la ecuación  $\nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x$  debe ser idéntica a la del problema electrostático equivalente del potencial producido por dos cargas iguales y de signo opuesto, es decir, un dipolo eléctrico. Como ya se ha visto al estudiar el dipolo eléctrico, el potencial electrostático de un dipolo situado en el origen es  $V(\vec{r}) = (1/4\pi\epsilon_0) \vec{p} \cdot \vec{r}/r^3$ , ec. [5.11], donde  $\vec{r}$  es el vector que va desde del centro del dipolo al punto en el que se calcula el potencial. Para calcular  $A_x$ , consideramos el dipolo eléctrico equivalente a los dos lados de la espira por los que circula la densidad de corriente  $J_x$ , Fig. 7.1. El módulo del momento dipolar eléctrico será  $p = (\lambda L) L$ , siendo  $\lambda = \epsilon_0 \mu_0 I$  la densidad lineal de carga equivalente y  $L$  la longitud de los lados de la espira. Sustituyendo  $\lambda$  y teniendo en cuenta que el coseno entre  $\vec{p}$  y  $\vec{r}$  es  $-y/r$  (pues  $\vec{p}$  se dirige hacia el lado negativo del eje  $y$ ), obtenemos la componente  $A_x$  del potencial vector debida a las corrientes dirigidas según el eje  $x$ :

$$A_x = -\frac{\mu_0}{4\pi} I L^2 \frac{y}{r^3} \quad (7.1)$$

Análogamente:

$$A_y = \frac{\mu_0}{4\pi} I L^2 \frac{x}{r^3} \quad (7.2)$$

Nótese que el potencial vector, y por tanto el campo  $\vec{B}$ , es proporcional a  $IL^2$ , es decir, al producto de la intensidad de corriente por el área de la espira. Se demuestra que esta relación de proporcionalidad es válida en general para cualquier espira, por lo que, por similitud con el dipolo eléctrico, se define el **momento dipolar magnético**  $\vec{m}$  por:

$$\vec{m} = I S \vec{n} \quad (7.3)$$

donde  $S$  es el área de la espira y  $\vec{n}$  un vector unitario normal a su superficie cuyo sentido está dado por el sentido de circulación de la corriente de acuerdo a la regla de la mano derecha. Para una espira cualquiera no necesariamente plana el momento dipolar se define como  $\vec{m} = I \vec{S}$  siendo  $\vec{S}$  el vector superficie de la espira definido en [6.33].

En el Sistema Internacional, el momento dipolar se mide en  $A \cdot m^2$  (o, equivalentemente,  $J \cdot T^{-1}$ ). Esta unidad es muy grande para el mundo microscópico, por lo que en este último se utiliza el magnetón de Bohr  $\mu_B = e \hbar / (2 m_e)$  ( $= 9.27400968 \cdot 10^{-24} J \cdot T^{-1}$ ), siendo  $e$  la carga del electrón,  $m_e$  su masa y  $\hbar$  la constante de Planck reducida ( $= 1.054571628 \cdot 10^{-34} J \cdot s$ ).

Utilizando la definición de momento dipolar, las ecs. [7.1] y [7.2] pueden combinarse para obtener la siguiente expresión del potencial vector  $\vec{A}$ :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \quad (7.4)$$

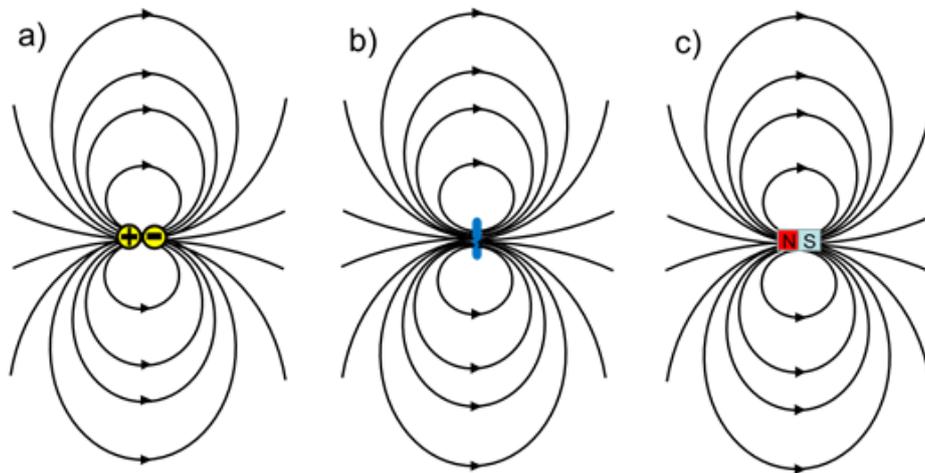
La inducción magnética  $\vec{B}$  se obtiene mediante  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ , siendo el resultado final similar al del dipolo eléctrico:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ -\frac{\vec{m}}{r^3} + \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} \right] \quad (7.5)$$

Este resultado puede generalizarse para cualquier curva alabeada y cerrada mediante el desarrollo en serie (desarrollo multipolar) recogido en el *Apéndice A*. El resultado es que las ecs. [7.4] y [7.5] son válidas para cualquier espira, plana o no.

Es de destacar que la similitud entre los campos  $\vec{B}$  y  $\vec{E}$  producidos por dipolos magnéticos y eléctricos, respectivamente, es debida a que, a distancias mucho mayores que las distancias características de los dipolos, ambos campos verifican las mismas ecuaciones, es decir, divergencia nula y rotacional nulo. Por ello las soluciones son similares a pesar de que las fuentes del campo son muy distintas: corrientes circulando en un circuito y un par de cargas de signo opuesto situadas en un plano perpendicular al del circuito, como se representa en las Fig. 7.2 (a) y (b).

En las Fig. 7.2 (b) y (c) se representan dos configuraciones equivalentes de dipolos magnéticos macroscópicos. En la Fig. 7.2(b), se considera que el dipolo magnético es una espira de corriente, mientras que en la Fig. 7.2(c), el dipolo está compuesto de un imán o conjunto de imanes con sus respectivos polos magnéticos. Tradicionalmente los materiales magnéticos se han considerado compuestos de dos zonas o polos: el polo norte por el que salen las líneas de campo y el polo sur por el que entran. Desde el punto de vista del campo que producen a grandes distancias del dipolo, las configuraciones de las Fig. 7.2 (b) y (c) son idénticas (sólo se diferencian en su valor en el dipolo). Por el contrario, en el mundo microscópico, los dipolos magnéticos están formados por corrientes electrónicas y por los momentos magnéticos intrínsecos de spin, como se describe brevemente en la sección 7.2.



**Figura 7.2:** (a) Campo eléctrico producido por un dipolo formado por dos cargas, (b) campo magnético  $\vec{B}$  generado por una corriente circulando por una espira, y (c) campo magnético  $\vec{B}$  producido por un imán. En esta última figura las líneas de campo van desde el polo norte hasta el polo sur del imán.

## 7.2. Magnetización de la materia

La respuesta de la materia a la presencia de un campo magnético exterior depende de las propiedades de los átomos o moléculas que lo componen así como de sus interacciones. Dicha respuesta puede comprenderse teniendo en cuenta que los átomos/moléculas se comportan como un dipolo magnético. En el caso más simple de átomos aislados, el momento cinético total viene dado por el momento cinético de los electrones de las capas no completas. Recordemos que el momento cinético total de un electrón está dado por la suma de sus momentos cinéticos orbital y de spin, y que los momentos cinéticos de cada electrón se suman según leyes de composición de naturaleza cuántica que ya se han visto en Química. El momento cinético total  $\vec{L}$  de cada electrón lleva asociado un momento dipolar magnético  $\vec{m}$ , que se obtiene según la relación:

$$\vec{m} = -g \mu_B h^{-1} \vec{L} \quad (7.6)$$

donde  $g$  es una constante denominada factor de Landé comprendida entre 1 (momento cinético orbital) y 2 (momento cinético de spin), y  $\mu_B = e \hbar / (2 m_e)$  es el magnetón de Bohr. La demostración es inmediata para el caso de, por ejemplo, un electrón girando alrededor del núcleo con velocidad  $v$  en una órbita de radio  $r$ . En este caso, el módulo del momento cinético orbital será  $L = m_e v r$ . El módulo del momento magnético dipolar será el producto de la intensidad de corriente por la superficie de la órbita, es decir,  $m = (-e v / 2 \pi r) \pi r^2 = -e v r / 2$ . Esta última expresión puede ponerse también en la forma  $m = -e / 2 m_e L$ , que es la versión escalar de la ec. [7.6] con  $g = 1$ . Así pues, podemos suponer en primera aproximación que cada átomo/molécula se comporta como un dipolo magnético de momento  $\vec{m}$ , cuyo valor depende, en general, de la simetría y orientación de los orbitales. En el mundo macroscópico, no se observan momentos magnéticos netos en la materia ordinaria porque el momento magnético de cada átomo/molécula está orientado al azar, de manera que su resultante es nula.

En presencia de un campo magnético externo  $\vec{B}$ , los dipolos magnéticos elementales de cada átomo/molécula sufren una fuerza  $\vec{F}$  y se someten a un momento mecánico  $\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$  (ec. [6.32]) que tiende a alinear en dirección y sentido el momento magnético elemental  $\vec{m}$  con el campo externo  $\vec{B}$ . Sin embargo, como el átomo/molécula tiene un momento cinético propio, el momento mecánico  $\vec{\tau}$  imprime un movimiento de precesión del momento magnético del átomo/molécula alrededor de la dirección del campo magnético  $\vec{B}$ . Este movimiento de precesión está caracterizado por la frecuencia de Larmor  $\omega_L = e B / 2 m_e$ . Macroscópicamente, la suma de los momentos magnéticos de cada átomo/molécula precesando en torno al campo externo da lugar a una polarización magnética neta o **magnetización del material**.

## 7.3. Vector magnetización o imanación

Recordemos que el momento dipolar magnético de una espira se define por  $\vec{m} = I S \vec{n}$ , donde  $I$  es la intensidad que circula por la espira,  $S$  su superficie y  $\vec{n}$  un vector unitario normal a la misma. Si  $\langle \vec{m} \rangle$  es el momento dipolar magnético medio de los átomos/moléculas del material expuesto al campo magnético exterior, se define el **vector de magnetización** (o imanación)  $\vec{M}$  por:

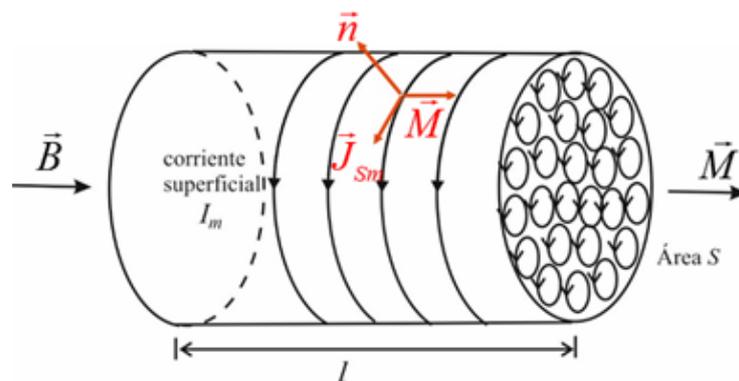
$$\vec{M} = n_m \langle \vec{m} \rangle \quad (7.7)$$

donde  $n_m$  es la densidad de átomos/moléculas del material (partículas/m<sup>3</sup>) y  $\langle \vec{m} \rangle$  su momento dipolar magnético medio (Am<sup>2</sup>). Como se deduce de su definición, las unidades de  $\vec{M}$  son intensidad de corriente por unidad de longitud (A/m).

## 7.4. Cálculo de la densidad de corriente de magnetización

Una vez introducido el vector de magnetización, volvemos a la pregunta inicial sobre los efectos de un campo magnético externo sobre un cilindro de material genérico. Para simplificar, supongamos que tanto el campo magnético exterior como las propiedades del material son uniformes. Supongamos, además, que los momentos magnéticos elementales de cada átomo/molécula se alinean con el campo  $\vec{B}$  externo, tal como se ilustra en la Fig. 7.3. Nótese que, como el campo y el material son uniformes, no hay corriente neta en su interior, por lo que el efecto de la magnetización será la aparición de una corriente neta superficial  $I_m$ . Si  $\vec{J}_{S m}$  es la densidad de corriente de magnetización superficial (véase apartado 8.1), de la Fig. 7.3 obtenemos la relación:

$$\vec{J}_{S m} = \vec{M} \times \vec{n} \quad (7.8)$$



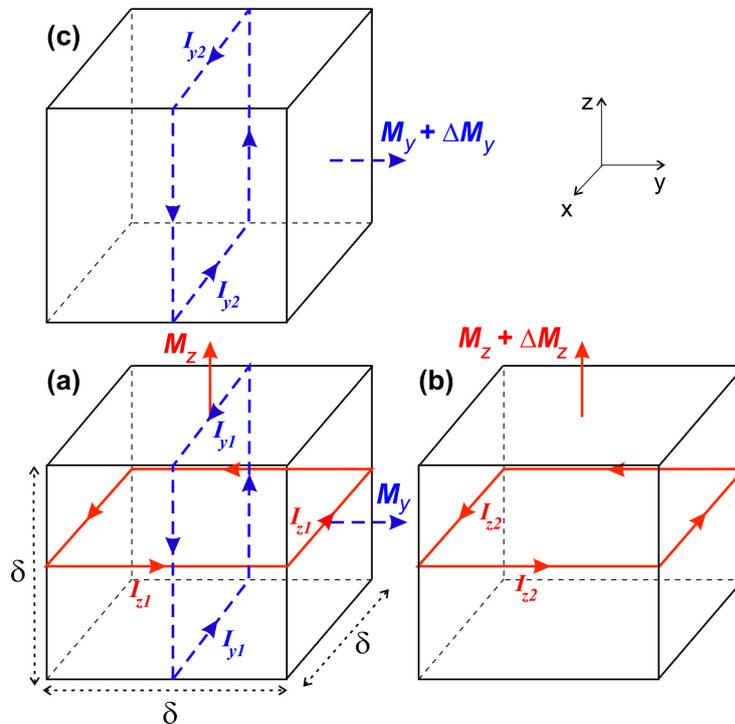
**Figura 7.3:** Magnetización de un cilindro uniforme.  $I_m$  es la corriente superficial de magnetización y  $\vec{J}_{S m}$  es la densidad de corriente de magnetización superficial.

donde  $\vec{n}$  es un vector unitario normal a la superficie del cilindro. La ecuación anterior indica que la densidad de corriente de magnetización superficial es perpendicular al vector de magnetización  $\vec{M}$  y a  $\vec{n}$ , por lo que  $\vec{J}_{S m}$  es igual a la componente de  $\vec{M}$  paralela al plano tangente a la superficie del material y su dirección perpendicular a  $\vec{M}$ . Por ejemplo, para el caso de la Fig. 7.3, el momento magnético total  $M$  del cilindro será:

$$M(lS) = (Ml)S = I_m S \quad \Rightarrow \quad I_m = Ml \quad (7.9)$$

donde  $l$  y  $S$  son la longitud y la superficie transversal del cilindro, respectivamente. La relación anterior confirma la interpretación del módulo de  $\vec{M}$  como corriente por unidad de longitud.

Finalmente, hay que señalar que aunque la ec. [7.8] se ha obtenido para un caso particular, en el *Apéndice B* se demuestra que es válida en general y nos permite calcular la densidad de corriente de magnetización superficial en cualquier caso.



**Figura 7.4:** Magnetización de tres celdillas elementales vecinas. El vector de magnetización varía entre las celdillas vecinas.

Así como a partir de consideraciones elementales hemos podido obtener una expresión general de la densidad de corriente de magnetización superficial, el caso de la densidad de corriente de magnetización volumétrica es algo más laborioso. Utilizaremos coordenadas cartesianas a lo largo del desarrollo. Partimos de la celdilla cúbica elemental de lado  $\delta$  mostrada en la Fig. 7.4 por cuya superficie circula la corriente  $I_{z1}$  indicada. Sea  $m$  el momento dipolar magnético de la espira, que tendrá la dirección del eje  $z$ . Por la definición de magnetización, el momento dipolar  $m$  puede expresarse en función de  $M_z$  como  $m = M_z \delta^3$ , y la intensidad de corriente  $I_{z1}$  en función de  $M_z$  por  $I_{z1} = M_z \delta$ , pues  $M_z$  es la corriente por unidad de longitud.

Utilizando esta última relación, la intensidad neta que circula por la cara común de las celdillas de las Figs. 7.4 (a) y (b) será:

$$I_x^{(z)} = I_{z2} - I_{z1} = (M_z + \Delta M_z) \delta - M_z \delta \approx \frac{\partial M_z}{\partial y} \delta^2 \tag{7.10}$$

por lo que la densidad de corriente neta por dicha cara podrá expresarse como:

$$J_x^{(z)} = \frac{I_x^{(z)}}{\delta^2} = \frac{\partial M_z}{\partial y} \tag{7.11}$$

Razonando de la misma forma para las corrientes que circulan por las celdillas de las Fig. 7.4 (a) y (c), se tiene:

$$I_x^{(y)} = I_{y1} - I_{y2} = M_y \delta - (M_y + \Delta M_y) \delta \approx -\frac{\partial M_y}{\partial z} \delta^2, \quad J_x^{(y)} = \frac{I_x^{(y)}}{\delta^2} = -\frac{\partial M_y}{\partial z} \quad (7.12)$$

Sumando las componentes  $J_x^{(z)}$  y  $J_x^{(y)}$  se obtiene la componente  $y$  de la densidad de corriente en la celdilla de la Fig. 7.4(a), resultando

$$J_x = J_x^{(z)} + J_x^{(y)} = \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} \quad (7.13)$$

que es la componente  $x$  de  $\nabla \times \vec{M}$ . Haciendo el mismo razonamiento para las componentes  $x$  y  $z$  de la densidad de corriente, se obtiene finalmente la relación entre la densidad de corriente de magnetización volumétrica  $\vec{J}_m$  y el vector de magnetización  $\vec{M}$ :

$$\vec{J}_m = \nabla \times \vec{M} \quad (7.14)$$

Nótese que si la imanación  $\vec{M}$  es uniforme, la densidad de corriente de magnetización es nula en el interior del material.

Una derivación alternativa de la relación entre la densidad de corriente de magnetización y la imanación del material se da en el *Apéndice B*.

## 7.5. Ecuaciones de la magnetostática de materiales

Como se ha visto en las secciones anteriores, la presencia de un campo magnético externo induce corrientes en el material. Estas corrientes han de tenerse en cuenta en las ecuaciones generales de la magnetostática de los medios materiales. Partimos de las ecuaciones de la magnetostática en el vacío:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (7.15)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (7.16)$$

donde  $\vec{J}$  es la densidad de corriente libre originada por fuentes externas. Estas ecuaciones han de modificarse para incluir las corrientes inducidas en el material por el campo externo. Añadiendo a la densidad de corriente libre  $\vec{J}$  la densidad de corriente de magnetización  $\vec{J}_m$ , se obtienen las ecuaciones de la magnetostática para medios materiales. Introduciendo la ec. [7.14] en la ley de *Ampère*, ec. [7.16], se obtiene:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 [\vec{J} + \vec{J}_m] = \mu_0 [\vec{J} + \nabla \times \vec{M}] \quad (7.17)$$

A efectos prácticos, es conveniente agrupar los dos operadores diferenciales que aparecen en esta última expresión. Para ello, se define el campo vectorial **intensidad del campo magnético**  $\vec{H}$  por:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad (7.18)$$

El vector así definido también se designa en la bibliografía como campo  $\vec{H}$  o campo magnetizante para distinguirlo del campo  $\vec{B}$  o inducción magnética. Sustituyendo la definición [7.18] en la ec. [7.17] se obtiene:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \quad (7.19)$$

con lo que las ecuaciones de la magnetostática de medios materiales pueden escribirse como:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (7.20)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \quad (7.21)$$

El campo  $\vec{B}$  macroscópico es adivergente debido a que tanto el campo generado por las corrientes libres  $\vec{J}$  como el generado por las corrientes microscópicas inducidas por ese campo tienen divergencia nula. Sin embargo, la divergencia del campo  $\vec{H}$  no es nula, pues tomando la divergencia de [7.18] se obtiene:

$$\nabla \cdot \vec{H} = -\nabla \cdot \vec{M} \quad (7.22)$$

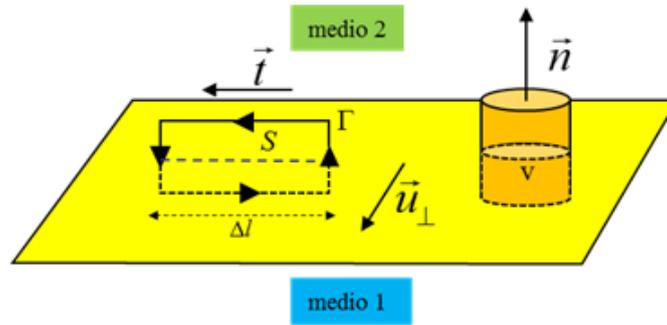
Nótese que  $\vec{H}$  tiene las mismas unidades que  $\vec{M}$ , es decir, intensidad de corriente por unidad de longitud (A/m).

Es importante destacar que la intensidad del campo magnético  $\vec{H}$  depende exclusivamente de la densidad de corriente externa, es decir de todas las corrientes distintas de la corriente de magnetización, por lo que puede calcularse directamente a partir de los datos del problema (densidad de corriente libre). Por el contrario, la inducción magnética  $\vec{B}$  depende de todas las corrientes, incluida la de magnetización, por lo que su cálculo implica conocer no solo las corrientes externas, sino también la respuesta del material al campo exterior, lo que puede complicar en gran medida su cálculo.

Para fijar las condiciones de contorno de los campos  $\vec{B}$  y  $\vec{H}$  en la interfase entre dos medios, partimos de un volumen elemental  $v$  en dicha interfase cuyos lados sean o bien perpendiculares o bien paralelos a la superficie de contacto entre ambos medios, Fig. 7.5. Integrando  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  sobre este volumen, y aplicando el teorema de *Gauss* resulta que el flujo en la superficie de contorno del volumen  $v$  es igual a cero. Al ser las caras perpendiculares muy pequeñas, el flujo total se reduce al flujo sobre las caras paralelas a la superficie de contacto, cuya normal exterior es paralela a  $\vec{n}$ . El resultado es:

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n} = 0 \quad (7.23)$$

es decir, la componente normal del campo  $\vec{B}$  ha de ser continua.



**Figura 7.5:** Esquema de la superficie de interfase entre los medios 1 y 2. Se supone una densidad de corriente superficial a lo largo de dicha superficie. El volumen  $v$  es cilíndrico y el contorno  $\Gamma$  tiene dos lados tangentes a la superficie entre ambos medios.

De forma análoga, definimos una superficie  $S$  de contorno  $\Gamma$  en la interfase entre los dos medios, véase Fig. 7.5. Los lados perpendiculares a la superficie de separación tienen una longitud muy pequeña. Integrando la ley de Ampère sobre  $S$ :

$$\int_S \nabla \times \vec{H} \cdot d\vec{S} = \oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \cdot \vec{t} \Delta l = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \vec{J}_S \cdot \vec{u}_{\perp} \Delta l \quad (7.24)$$

$$(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \cdot \vec{t} = \vec{J}_S \cdot \vec{u}_{\perp} \quad (7.25)$$

Como  $\vec{t} = \vec{u}_{\perp} \times \vec{n}$ , podemos escribir la ecuación anterior como:

$$(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \cdot (\vec{u}_{\perp} \times \vec{n}) = \vec{J}_S \cdot \vec{u}_{\perp} \quad (7.26)$$

Aplicando la identidad  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$ , esta última ecuación se reduce a:

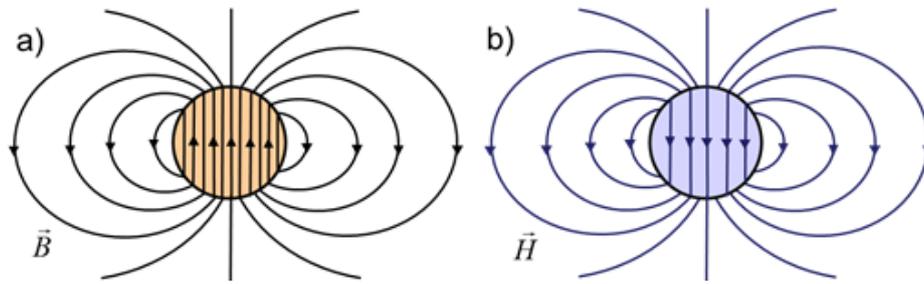
$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_S \quad (7.27)$$

Así pues, podemos concluir que en la interfase entre dos medios, la componente tangencial de  $\vec{H}$  es discontinua en una cantidad igual a la densidad de corriente superficial  $\vec{J}_S$ . Obsérvese que en la expresión anterior el vector unitario  $\vec{n}$  es la normal exterior al medio 1.

Como ejemplo de las diferencias entre  $\vec{B}$  y  $\vec{H}$ , supóngase una esfera con una imanación uniforme  $\vec{M}$ . En este caso particular, el cálculo del campo  $\vec{H}$  y de la inducción magnética dentro de la esfera da (véase Apéndice C):

$$\vec{H}_i = -\frac{1}{3}\vec{M} \quad ; \quad \vec{B}_i = \frac{2}{3}\mu_0\vec{M} \quad (7.28)$$

Fuera de la esfera y a cualquier distancia de la misma, los campos coinciden con los de un dipolo. Los campos  $\vec{B}$  y  $\vec{H}$  se representan en la Fig. 7.6. Nótese como las líneas de  $\vec{B}$  se cierran sobre sí mismas, ec. [7.20], mientras las de  $\vec{H}$  nacen y mueren en la superficie de la esfera debido a la corriente superficial de magnetización, ecs. [7.8] y [7.22].



**Figura 7.6:** Líneas de los campos (a)  $\vec{B}$  y (b)  $\vec{H}$  en una esfera uniformemente magnetizada.

Hasta ahora solo hemos definido un nuevo campo vectorial, la intensidad del campo magnético, y hemos obtenido las ecuaciones de la magnetostática de los medios materiales. Sin embargo, la relación entre los campos  $\vec{B}$  y  $\vec{H}$ , necesaria para cerrar las ecs. [7.20] y [7.21], no se ha especificado todavía.

Suponiendo que la respuesta del material es lineal,  $\vec{H}$  y  $\vec{B}$  serán proporcionales, por lo que la ec. [7.18] puede reescribirse en la forma:

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad (7.29)$$

$$\mu_0 \vec{M} = \mu_0 (\mu_r - 1) \vec{H} = \frac{\mu_r - 1}{\mu_r} \vec{B} \quad (7.30)$$

donde  $\mu_r$  es la permeabilidad magnética relativa del material. Obviamente,  $\mu_r=1$  en el vacío. Si  $\mu_r > 1$ , los vectores  $\vec{M}$  y  $\vec{H}$  tienen la misma dirección y sentido favoreciendo la penetración del campo magnético en el material. En este caso, se dice que el material es **paramagnético**. Por el contrario, en los materiales **diamagnéticos**,  $\mu_r < 1$  y, por tanto,  $\vec{M}$  y  $\vec{H}$  tienen sentidos opuestos, dificultando la penetración del campo magnético en el material. En ambos casos, los valores de la permeabilidad relativa son del orden de la unidad y los efectos paramagnéticos o diamagnéticos son relativamente débiles. Además, en la mayoría de los materiales de este tipo, la imanación inducida es proporcional al campo magnético externo, por lo que se denominan **materiales lineales**.

Los materiales **ferromagnéticos** se caracterizan por tener una  $\mu_r \gg 1$  y amplifican muy considerablemente, en varios órdenes de magnitud, el campo magnético en su interior, como se discutirá en la sección 7.6. Para estos materiales la imanación no es proporcional al campo  $\vec{H}$ , sino que, además, depende de otros factores tales como la exposición previa a campos magnéticos, por lo que la permeabilidad magnética no es una característica propia de dichos materiales.

Es muy frecuente en la bibliografía describir las propiedades magnéticas de la materia en términos de la susceptibilidad magnética  $\chi_m$  que se define por:

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \chi_m \quad (7.31)$$

de donde:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad ; \quad \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \chi_m \vec{H}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu \vec{H} \quad (7.32)$$

La ec. [7.31] relaciona la permeabilidad magnética del medio con su susceptibilidad, de la que se deducen inmediatamente las ecs. [7.32].  $\vec{B}$  y  $\vec{H}$  tendrán la misma dirección si el medio es lineal. En este caso, la susceptibilidad magnética  $\chi_m$  se reduce a un escalar. Si  $\vec{B}$  y  $\vec{H}$  tienen direcciones diferentes,  $\chi_m$  es un tensor. En los materiales paramagnéticos la susceptibilidad magnética es ligeramente positiva, por lo que  $\vec{M}$  y  $\vec{H}$  tienen la misma dirección, y el campo magnético en su interior es ligeramente mayor que el campo externo. Por el contrario, los materiales diamagnéticos tienen una susceptibilidad ligeramente negativa,  $\vec{M}$  y  $\vec{H}$  tienen sentidos opuestos y el campo magnético en su interior es ligeramente menor que el campo exterior.

De la misma forma que en la magnetostática del vacío, la forma integral de la ley de *Ampère* se formula en términos del campo  $\vec{H}$  o intensidad del campo magnético como:

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = I_{\Gamma} \quad (7.33)$$

donde  $\Gamma$  es la línea cerrada que delimita la superficie  $S$ , e  $I_{\Gamma}$  es la intensidad de corriente que la atraviesa. La ec. [7.33] podemos enunciarla como sigue: la circulación del campo  $\vec{H}$  a lo largo de un contorno cerrado solo depende de las corrientes libres, siendo independiente del medio. Por ello, aplicar esta ecuación es la forma más directa de calcular el campo magnético. Una vez conocido  $\vec{H}$ , las corrientes de magnetización, la inducción magnética, la energía magnética y todas las demás magnitudes se calculan utilizando la permeabilidad del medio  $\mu$ , supuesta conocida. Como ejemplo ilustrativo, vamos a aplicar la ec. [7.33] al cálculo de la inducción magnética producida por una corriente filiforme infinita en un medio lineal de permeabilidad relativa constante  $\mu_r$ . Si  $I$  es la intensidad de la corriente, aplicando la ley de *Ampère* a una circunferencia de radio  $r$  se obtiene (véase Fig. 6.6):

$$2\pi r H = I \quad ; \quad \vec{H} = \frac{I}{2\pi r} \vec{u}_{\theta} \quad (7.34)$$

donde  $\vec{u}_{\theta}$  es un vector unitario tangente a la circunferencia. La inducción magnética será:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \frac{\mu I}{2\pi r} \vec{u}_{\theta} \quad (7.35)$$

que depende tanto de la corriente libre  $I$  como de las propiedades del medio  $\mu$ . En general, en medios en los que  $\vec{B}$  y  $\vec{H}$  sean proporcionales e independiente de los valores del campo (medios lineales), los resultados de la magnetostática del vacío pueden aplicarse directamente, simplemente sustituyendo  $\mu_0$  por  $\mu$ .

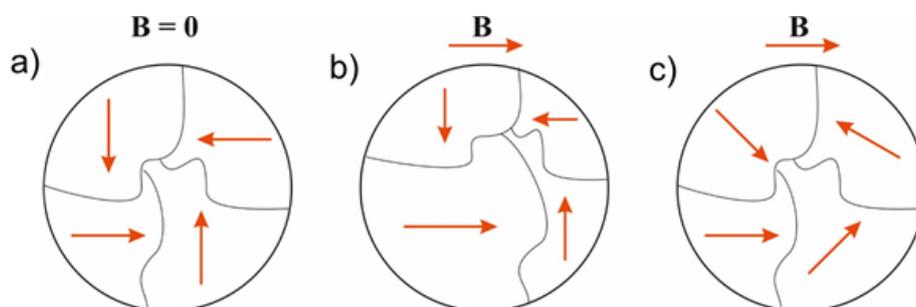
## 7.6. Propiedades magnéticas: Diamagnetismo, paramagnetismo y ferromagnetismo

Como se ha indicado en la sección 7.2, la magnetización de la materia modifica la simetría de los orbitales y la orientación de las órbitas electrónicas. Más concretamente, se pueden identificar tres efectos diferentes a nivel microscópico:

**1. Distorsión de las órbitas electrónicas.** Se genera un momento dipolar magnético que se opone al campo magnético externo. La cuantificación de este efecto necesita el conocimiento detallado de la estructura electrónica del átomo/molécula y requiere el uso de métodos y herramientas de la Mecánica Cuántica que están fuera de los objetivos de este curso. Este es el efecto predominante en los materiales diamagnéticos.

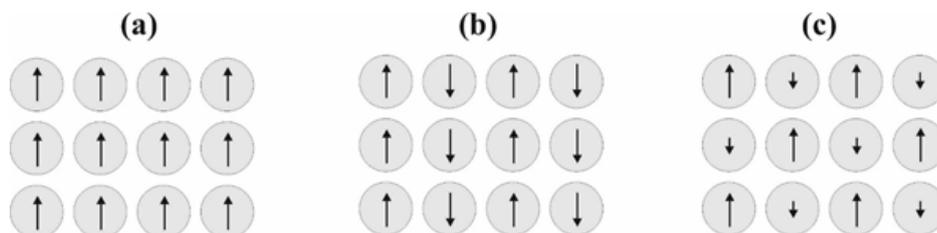
**2. Orientación de los dipolos magnéticos.** Si el átomo/molécula tiene un momento dipolar magnético permanente (debido, por ejemplo, al momento cinético de los electrones de capas incompletas), la aplicación de un campo magnético externo produce un par de fuerzas que tiende a alinear los dipolos, induciendo un movimiento de precesión alrededor de la dirección del campo externo. Este efecto es más intenso que el diamagnetismo y disminuye con la temperatura (ley de Curie  $\chi_m \propto 1/T$ ) debido al efecto desalineador de la agitación térmica.

**3. Ferromagnetismo.** Sólo se presenta en aquellos materiales que tienen una magnetización permanente. Los materiales ferromagnéticos tienen la propiedad de alinear sus momentos magnéticos de forma natural, es decir, de alcanzar su estado fundamental o de mínima energía cuando dichos momentos están alineados. Los materiales ferromagnéticos que se encuentran en la naturaleza no presentan, sin embargo, magnetización alguna pues los momentos magnéticos están alineados sólo en pequeñas regiones microscópicas llamadas *dominios*, cuyo tamaño va del orden desde los micrómetros a los milímetros. Como los dominios están orientados al azar, el campo magnético resultante es nulo. Cuando se aplica un campo exterior, los dominios tienden a alinearse con el campo. Este alineamiento puede permanecer en algunos casos cuando se retira el campo externo, creando un **imán permanente**. Las características esenciales del ferromagnetismo son: i) los materiales ferromagnéticos se magnetizan fuertemente en el mismo sentido que el campo magnético aplicado; ii) la susceptibilidad magnética es positiva y grande, por lo que la permeabilidad relativa es mucho mayor que 1.



**Figura 7.7:** Dominios magnéticos. (a) material ferromagnético sin magnetizar, (b) magnetización por crecimiento de dominios, (c) magnetización por orientación de dominios.

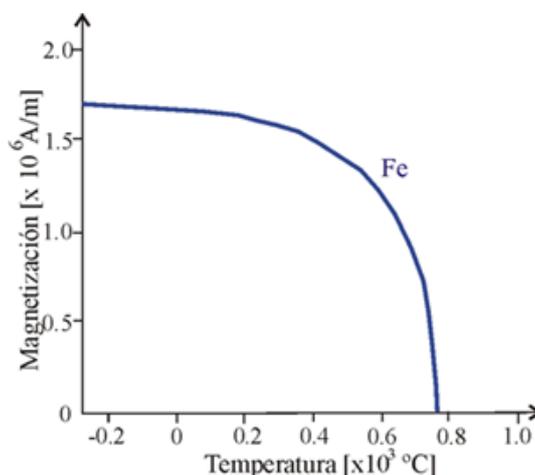
En la Fig. 7.7 se representa esquemáticamente la magnetización de un material ferromagnético. En el material no magnetizado, los dominios se orientan al azar y el campo resultante es nulo, Fig. 7.7(a). Cuando se aplica un campo magnético externo, el material se magnetiza o bien por crecimiento de los subdominios resultando un momento magnético neto en la misma dirección del campo, Fig. 7.7(b), o bien por orientación de los momentos magnéticos de los dominios en la dirección del campo externo, Fig. 7.7(c). En cualquier caso, ha de tenerse en cuenta que la dirección de magnetización depende del tipo de material. Por ejemplo, en materiales con estructura cristalina, la magnetización tiene lugar a lo largo de los ejes del cristal.



**Figura 7.8:** Orientación de los momentos dipolares magnéticos de sustancias (a) ferromagnéticas, (b) antiferromagnéticas y (c) ferrimagnéticas.

Además de los materiales ferromagnéticos, existen materiales similares tales como los **antiferromagnéticos**, Fig. 7.8(b), y los **ferrimagnéticos**, Fig. 7.8(c), cuyos estados fundamentales o de mínima energía se alcanzan cuando los momentos magnéticos son antiparalelos con igual amplitud (p.e. MnO, FeO, NiO) o antiparalelos con distinta amplitud (MOFe<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, donde M es un metal tal como Mn, Co, Ni, Cu, ...).

El ferromagnetismo depende de la temperatura, como se representa en la Fig. 7.9. Por encima de la llamada **temperatura de Curie**  $T_c$  la sustancia se comporta como paramagnética en lugar de ferromagnética debido a que los efectos térmicos de desorden son mayores que los efectos de alineamiento magnético de los dominios. En la Tabla 7.1 se recogen las temperaturas de Curie para distintos materiales.



**Figura 7.9:** Magnetización en función de la temperatura para hierro puro.

Material	$T_c$ (K)	Material	$T_c$ (K)
Fe	1043	Cu <sub>2</sub> MnIn	500
Co	1388	EuO	77
Ni	627	EuS	16.5
Gd	293	MnAs	318
Dy	85	MnBi	670
CrBr <sub>3</sub>	37	GdCl <sub>3</sub>	2.2
Au <sub>2</sub> MnAl	200	Fe <sub>2</sub> B	1015
Cu <sub>2</sub> MnAl	630	MnB	578

Tabla 7.1. Temperaturas de Curie de diversos materiales ferromagnéticos y aleaciones.

### 7.6.1. Materiales diamagnéticos

Si la distorsión de las órbitas electrónicas es el efecto dominante, estaremos en el caso de materiales **diamagnéticos**, es decir, aquellos con  $\chi_m < 0$  y  $\mu_r < 1$ , Fig. 7.10(a). En general, el comportamiento diamagnético se presenta en aquellas sustancias cuyo momento magnético de los átomos/moléculas que lo componen es nulo. Así pues, que un material sea o no diamagnético depende solo de su configuración electrónica, siendo insensible a las variaciones de densidad y/o temperatura.

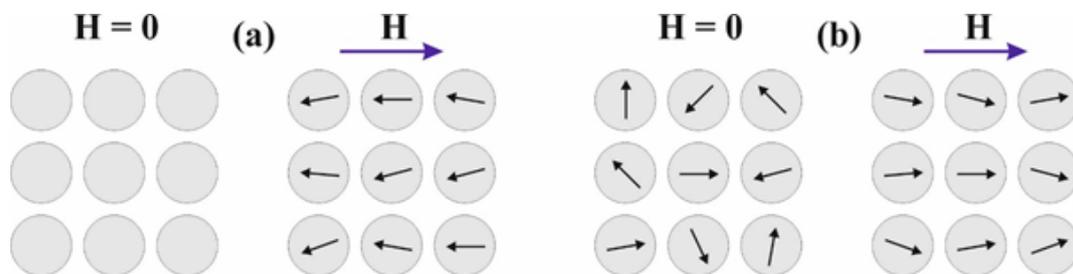


Figura 7.10: (a) Configuración de los dipolos atómicos para un material diamagnético con y sin campo magnético exterior. En ausencia de campo exterior no existen dipolos. Si se aplica un campo magnético exterior, se inducen dipolos que producen un campo en dirección opuesta al campo exterior. (b) Configuración de los dipolos para un material paramagnético con y sin campo magnético exterior.

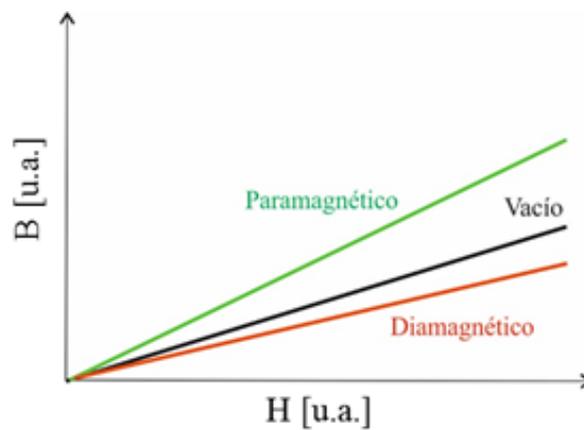
### 7.6.2. Materiales paramagnéticos

Si la alineación de los dipolos es el efecto dominante, el material es **paramagnético** y, por tanto,  $\chi_m > 0$  y  $\mu_r > 1$ , Fig. 7.10(b). Los valores de la susceptibilidad magnética dependen del estado de agregación del material, siendo aproximadamente del orden de  $10^{-4}$  para sólidos y de  $10^{-7}$  para gases ( $O_2$  a 1 atm). En la Tabla 7.2 se dan los valores de la susceptibilidad magnética

de diversos materiales a temperatura ambiente. Es importante destacar que el diamagnetismo y el paramagnetismo son efectos débiles que persisten solo mientras los materiales estén sometidos a un campo magnético exterior, como se muestra en la Fig. 7.11.

Diamagnéticos		Paramagnéticos	
Material	$\chi_m (\times 10^{-5})$	Material	$\chi_m (\times 10^{-5})$
Bismuto	-16.6	Aluminio	2.07
Carbono	-1.60	Cesio	5.10
Cobre	-0.96	Cromo	31.3
Mercurio	-2.85	Molibdeno	11.9
Plata	-2.38	Sodio	0.85
Plomo	-1.80	Titanio	18.1
Zinc	-1.56	Uranio	41.4
Agua	-0.91	Zirconio	10.9

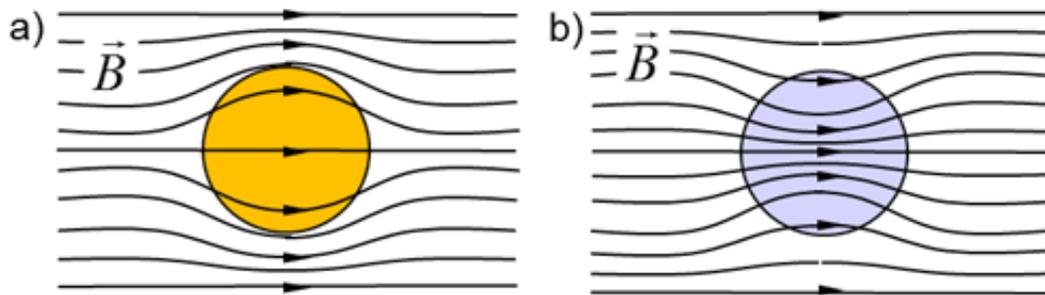
**Tabla 7.2.** Susceptibilidad magnética de materiales diamagnéticos y paramagnéticos a temperatura ambiente.



**Figura 7.11:** Dependencia de la inducción magnética con respecto a la intensidad del campo magnético en materiales diamagnéticos y paramagnéticos. [u.a.] significa unidades arbitrarias.

En la Fig. 7.12 se comparan las líneas de inducción magnética en una esfera de material diamagnético o paramagnético. Los materiales diamagnéticos “repelen” las líneas de campo, mientras que los paramagnéticos las “atraen”. El caso límite será el de una esfera de material superconductor ( $\chi_m = -1$  y  $\mu_r = 0$ ), en el que se inducen corrientes tales que anulan el campo magnético en su interior (efecto *Meissner*), siendo un material diamagnético perfecto. En cualquier caso, en los materiales habituales diamagnéticos o paramagnéticos, tales como los recogidos en la Tabla 7.2, la susceptibilidad es lo suficientemente baja para que la deformación

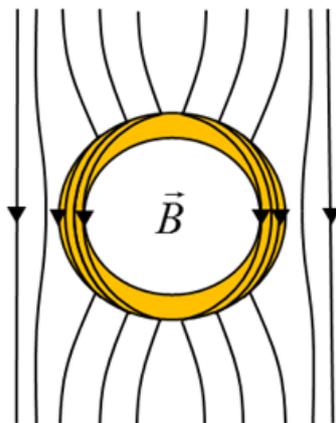
de las líneas de campo sea muy pequeña, despreciable en muchos casos, sobre todo cuando se compara con los materiales ferromagnéticos.



**Figura 7.12:** Distribución de las líneas del campo  $\vec{B}$  (a) en una esfera de material diamagnético y (b) en una esfera de material paramagnético.

### 7.6.3. Materiales ferromagnéticos

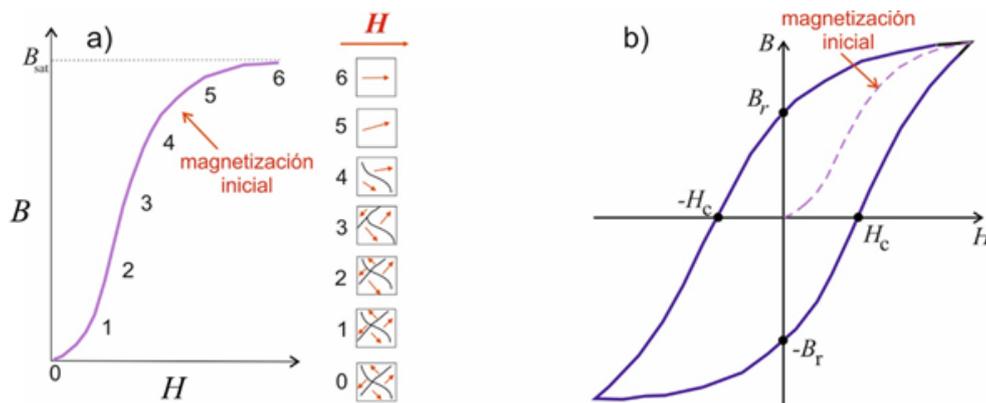
Como hemos visto al comienzo de esta sección, si el material está dividido en subdominios magnetizados, pequeños campos exteriores provocan en él una fuerte magnetización. Los materiales que presentan este comportamiento se denominan **ferromagnéticos** y presentan una gran susceptibilidad y permeabilidad relativa, es decir,  $\chi_m \gg 0$  y  $\mu_r \gg 1$ . Las sustancias ferromagnéticas a temperatura ambiente son el Fe, Ni, Co, sus aleaciones, algunos elementos de las tierras raras y algunos compuestos del manganeso. A menores temperaturas otros materiales también presentan comportamiento ferromagnético. La enorme amplificación del campo externo en el material se debe no al valor del campo exterior, sino más bien al crecimiento y orientación de los subdominios, que están magnetizados en su estado natural (Fig. 7.7). La concentración de las líneas del campo  $\vec{B}$  en un material ferromagnético se ilustra en la Fig. 7.13.



**Figura 7.13:** Distribución de las líneas del campo en un toroide de material ferromagnético.

Cuando un material ferromagnético inicialmente desmagnetizado se coloca en una región del espacio donde hay un campo magnético se produce la magnetización del material. Es de interés conocer cómo cambia la magnetización conforme varía el campo aplicado. Para ello se

utiliza normalmente un anillo de *Rowland*, que consiste en un anillo o toroide del material a ensayar sobre el que se arrolla una bobina primaria a la que se conecta una fuente de corriente variable. Se utiliza otra bobina secundaria para medir el flujo magnético dentro del anillo, que será proporcional a la inducción magnética  $B$ . Conforme se aumenta la corriente de la bobina primaria, aumenta el campo magnético en el toroide y se va magnetizando el material. El proceso comienza con el crecimiento de los subdominios magnéticos para alinearse parcialmente con el campo exterior. Este proceso da lugar al crecimiento rápido de  $B$  conforme aumenta  $H$ , Fig. 7.14(a). Si se sigue aumentando la intensidad de corriente, comienza la orientación de los subdominios que no están completamente alineados. En este caso, el crecimiento de  $B$  con  $H$  es más lento, hasta que se llega a la saturación cuando todos los subdominios están alineados con el campo externo. Aumentos adicionales de la intensidad de la bobina primaria no aumentarán el campo  $B$ . Nótese la dependencia **no lineal** de la inducción magnética con  $H$ . Esta curva se denomina curva de magnetización inicial, ya que solamente es aplicable a materiales ferromagnéticos desmagnetizados. Si a continuación se desmagnetiza el material, la evolución de  $B$  con  $H$  es más compleja y se recoge en la Fig. 7.14(b). Al disminuir  $H$ ,  $B$  sigue una trayectoria distinta de la representada en la Fig. 7.14(a), disminuyendo más lentamente que en dicha figura (**histéresis**) debido a que la alineación de subdominios y su crecimiento son fenómenos altamente no lineales.

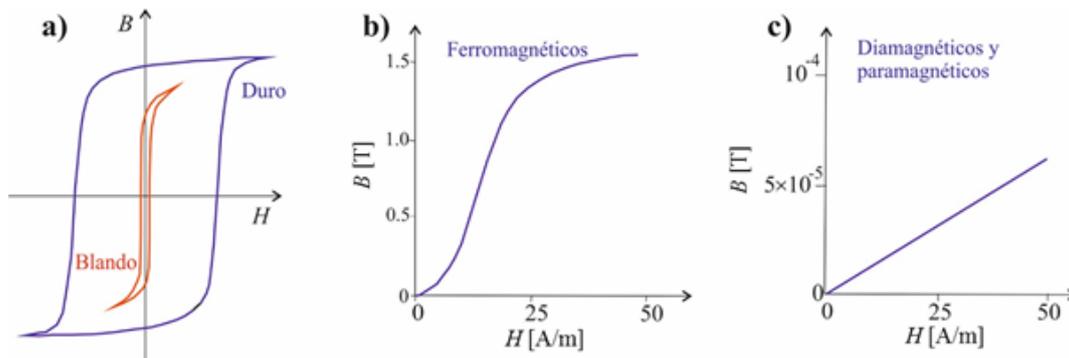


**Figura 7.14:** a), b) Inducción magnética  $B$  como función de la intensidad del campo magnético  $H$  en un material ferromagnético. Se representa la configuración de los subdominios magnéticos para distintos estados de magnetización.  $B_{sat}$  es la inducción magnética de saturación. b) Ciclo de histéresis de un material ferromagnético. La línea discontinua representa la curva de magnetización inicial a).  $B_r$  y  $H_c$  son la remanencia y la coercitividad, respectivamente.

Cuando el campo  $H$  se anula, todavía existe un campo residual  $B_r$ , denominado **remanencia**, de manera que el material permanece magnetizado en ausencia de campos magnéticos externos. La inducción magnética en el material ferromagnético se anula cuando se aplica un campo externo  $-H_c$  negativo, es decir, de dirección opuesta a la del campo inicial. La magnitud de  $H_c$  se conoce como **coercitividad**. Si se continúa disminuyendo el campo  $H$  se produce la saturación en el sentido opuesto y se repite la curva de histéresis, ahora en el sentido de campo creciente, Fig. 7.14(b), dando lugar a una remanencia negativa,  $-B_r$ , y una coercitividad positiva,  $+H_c$ . Si se repite esta operación de aumento/disminución de  $H$  (ciclo de

magnetización-desmagnetización), el material recorre siempre el ciclo, representado en la Fig. 7.14(b), que se conoce con el nombre de ciclo de histéresis y es característico de cada material magnético.

El tamaño y la forma del ciclo de histéresis es una característica muy importante de los materiales ferromagnéticos. El área del ciclo es la energía magnética por unidad de volumen perdida en cada ciclo de magnetización-desmagnetización. Esta energía se manifiesta en forma de calor dentro del material, pudiendo aumentar su temperatura e incluso cambiar sus propiedades.



**Figura 7.15:** Comparación de los materiales ferromagnéticos duros y blandos. Comparación de las curvas de magnetización  $B(H)$  de materiales b) ferromagnéticos y c) diamagnéticos y paramagnéticos.

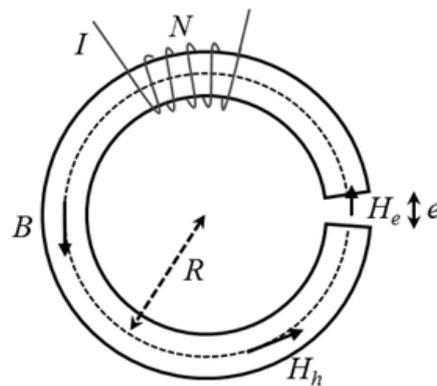
Los **materiales magnéticos blandos** son aquellos que tienen una alta permeabilidad inicial y una baja coercitividad, Fig. 7.15(a). Un material con estas propiedades puede alcanzar su magnetización de saturación con un campo exterior relativamente pequeño y puede realizar ciclos de magnetización-desmagnetización con poca pérdida de energía. Estos materiales son ideales para aplicaciones que impliquen una operación cíclica tales como los transformadores. Otra propiedad deseable para los materiales magnéticos blandos es que tengan una alta conductividad con objeto de minimizar las pérdidas óhmicas de las corrientes inducidas por variaciones temporales del campo magnético, como se verá en el siguiente capítulo.

Por el contrario, los **materiales magnéticos duros** tienen una alta remanencia y coercitividad, baja permeabilidad inicial y grandes pérdidas de energía por histéresis, Fig. 7.15(a). Estos materiales se usan típicamente en imanes permanentes por su alta resistencia a la desmagnetización.

Es interesante comparar la curva  $B(H)$  para materiales ferromagnéticos, diamagnéticos y paramagnéticos. En las Fig. 7.15 (b) y (c) se comparan las curvas de dichos materiales, donde es de destacar el carácter lineal de los materiales para y diamagnéticos frente a la fuerte no linealidad de los ferromagnéticos. Nótese también los valores muy pequeños del campo  $B$  en los materiales paramagnéticos y diamagnéticos comparado con los ferromagnéticos.

## 7.7. Circuitos magnéticos

Se llaman circuitos magnéticos a aquellos dispositivos que permiten el confinamiento de las líneas del campo magnético en una región del espacio. Teniendo en cuenta las propiedades magnéticas de los materiales, resulta evidente afirmar que los circuitos magnéticos han de estar formados por materiales de alta permeabilidad, tales como los ferromagnéticos. Por ejemplo, un anillo de *Rowland* es un circuito magnético.



**Figura 7.16:** Esquema de un anillo de Rowland con entrehierro.

Como ejemplo, supondremos un circuito formado por un toroide de material ferromagnético con un arrollamiento de  $N$  espiras por el que circula una corriente de intensidad  $I$ . Al núcleo ferromagnético se le ha cortado un trozo de material de pequeño espesor, Fig. 7.16. Aplicando la ley de *Ampère* a lo largo de la circunferencia del toroide, obtenemos:

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint_{\Gamma} H dl = H_e e + H_h (2\pi R - e) = N I \quad (7.36)$$

siendo  $H_e$  el módulo de la intensidad de campo magnético en el entrehierro y  $H_h$  el módulo de la intensidad de campo magnético en el material ferromagnético,  $e$  el ancho del entrehierro y  $R$  el radio medio del toroide. Suponiendo que no hay fugas en el entrehierro y que su espesor es pequeño (no hay efectos bidimensionales), como la componente normal del campo  $B$  ha de ser continua, ec. [7.23], se tendrá:

$$B_e = \mu_0 H_e = B_h = \mu_h H_h ; \quad H_e = \mu_r H_h \quad (7.37)$$

Por lo que la ec. [7.36] puede escribirse en la forma:

$$H_h (2\pi R - e + \mu_r e) = N I ; \quad H_h = \frac{N I}{2\pi R + e (\mu_r - 1)} \quad (7.38)$$

y, por tanto,

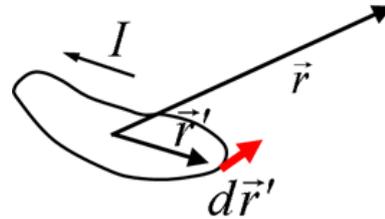
$$H_e = \frac{\mu_r N I}{2\pi R + e (\mu_r - 1)} ; \quad B_e = B_h = \frac{\mu N I}{2\pi R + e (\mu_r - 1)} \quad (7.39)$$

lo que completa el cálculo aproximado de los campos  $B$  y  $H$  en el material ferromagnético y en el entrehierro.

# A

## Apéndice A: Campo magnético producido por una espira alabeada

Si la forma del dipolo es una curva alabeada cerrada  $\Gamma$  (Fig. A.1), se puede llegar también a la expresión [7.4] mediante un desarrollo en serie (desarrollo multipolar) análogo al que vimos en el capítulo 5. Veamos los pasos más significativos del mismo.



**Figura A.1:** Espira en forma de curva alabeada cerrada y vectores de posición medidos desde un punto muy próximo a la espira y alejado de donde se calcula el campo.

Consideremos para simplificar que el sistema de referencia está situado muy próximo a la espira y alejado del punto de donde calculamos el potencial vector. Mediante un desarrollo de primer orden tenemos:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{I d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma} I d\vec{r}' \left[ \frac{1}{|\vec{r}|} + \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \cdot \vec{r}' + \dots \right] \quad (\text{A.1})$$

donde hemos tenido en cuenta que:  $\nabla'(1/|\vec{r} - \vec{r}'|)|_{\vec{r}'=0} = \vec{r}'/|\vec{r}|^3$  (el operador  $\nabla'$  actúa sobre las variables con prima '). El primer término del desarrollo es cero pues se integra en una curva cerrada ( $\oint_{\Gamma} d\vec{r}' = 0$ ) quedando únicamente el segundo término. Haciendo uso de la propiedad:

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{r}') d\vec{r}' = \frac{1}{2} (\vec{r}' \times d\vec{r}') \times \vec{\alpha} + \frac{1}{2} d((\vec{\alpha} \cdot \vec{r}') \vec{r}'), \quad \vec{\alpha} = \vec{r}'/|\vec{r}'|^3 \quad (\text{A.2})$$

a la cual se llega sumando estas dos ecuaciones que el lector reconocerá más fácilmente:

$$(\vec{r}' \times d\vec{r}') \times \vec{\alpha} = (\vec{\alpha} \cdot \vec{r}') d\vec{r}' - (\vec{\alpha} \cdot d\vec{r}') \vec{r}' \quad (\text{A.3})$$

$$d((\vec{\alpha} \cdot \vec{r}') \vec{r}') = (\vec{\alpha} \cdot \vec{r}') d\vec{r}' + (\vec{\alpha} \cdot d\vec{r}') \vec{r}'$$

se obtiene:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma} I d\vec{r}' \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \cdot \vec{r}' = \oint_{\Gamma} I \left( \frac{\vec{r}' \times d\vec{r}'}{2} \right) \times \left[ \frac{\mu_0 \vec{r}'}{4\pi r'^3} \right] = \vec{m} \times \left[ \frac{\mu_0 \vec{r}}{4\pi r^3} \right] \quad (\text{A.4})$$

En la ecuación previa hemos utilizado, por un lado, que para una espira cualquiera no necesariamente plana el momento dipolar se define como  $\vec{m} = I\vec{S}$  siendo  $\vec{S}$  el vector superficie de la espira definido en la ec. [6.33]; y por otro, que la integral de un diferencial en una curva cerrada es cero ( $\oint_{\Gamma} d((\vec{\alpha} \cdot \vec{r}')\vec{r}') = 0$ ). Por tanto, aunque el desarrollo matemático es más complejo, el resultado final es completamente equivalente. Si la espira no estuviese próxima al origen, sino a un punto de coordenadas  $\vec{r}_c$ , la expresión anterior se podría escribir como:

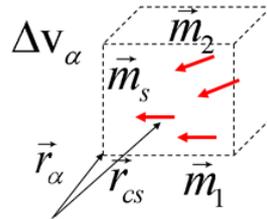
$$\vec{A}(\vec{r}) = -\vec{m} \times \nabla \left[ \frac{\mu_0}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}_c|} \right] \quad (\text{A.5})$$

donde el operador  $\nabla$  actúa sobre las coordenadas de  $\vec{r}$ . Esta ecuación la utilizaremos en el siguiente apéndice.

# B

## Apéndice B: Cálculo de la densidad de corriente de magnetización por superposición de momentos dipolares

Se pueden obtener las expresiones de las densidades de corriente de magnetización, ecs. [7.8] y [7.14], de forma análoga a como se hizo en la Electrostática de Dieléctricos superponiendo los momentos dipolares de celdillas elementales en las que dividimos el material de volumen  $v$ . Trataremos este supuesto de una forma más resumida que allí. Consideremos el volumen infinitesimal  $\Delta v_\alpha$  de una celdilla situada en una posición  $\vec{r}_\alpha$  conteniendo un conjunto grande de átomos/moléculas de momento dipolar  $\vec{m}_s$  situados en una posición  $\vec{r}_{cs}$  cada uno de ellos (véase Fig. B.1).



**Figura B.1:** Celdilla o elemento de volumen conteniendo un número muy grande de átomos/moléculas magnetizados.

El potencial vector producido por todos los átomos/moléculas contenidos en el material en cuestión es, en aproximación dipolar, aplicando el principio de superposición y de acuerdo con la ec. [A.5]:

$$\vec{A}(\vec{r}) = - \sum_{\alpha} \sum_s \vec{m}_s \times \nabla \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_{cs}|} \right] \quad (\text{B.1})$$

donde el primer sumatorio en  $s$  se realiza sobre los momentos dipolares de la celdilla, y el segundo sobre todas las celdillas. Para poder obtener una expresión más simple debemos considerar un efecto promedio de los dipolos en cada celdilla, de manera que se puede aproximar su posición por la del volumen:  $\vec{r}_{cs} \approx \vec{r}_\alpha$ . Sustituyendo entonces los momentos dipolares por el vector magnetización y pasando al continuo queda:

$$\vec{A}(\vec{r}) = - \sum_{\alpha} \Delta v_{\alpha} \vec{M}(\vec{r}_{\alpha}) \times \nabla \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_{\alpha}|} \right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = - \int_{\mathcal{V}} \vec{M}(\vec{r}') \times \nabla \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dv'$$
(B.2)

Nos interesa expresar la ecuación anterior de una forma diferente haciendo uso de dos propiedades matemáticas. Utilizando la igualdad:

$$\nabla' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$
(B.3)

en la relación:

$$\nabla' \times \left( \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = \frac{\nabla' \times \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \vec{M}(\vec{r}') \times \nabla' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} =$$

$$= \frac{\nabla' \times \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \vec{M}(\vec{r}') \times \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$
(B.4)

podemos escribir el potencial vector (ec. [B.1]) como:

$$\vec{A}(\vec{r}) = - \int_{\mathcal{V}} \nabla' \times \left( \frac{\mu_0 \vec{M}(\vec{r}')}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dv' + \int_{\mathcal{V}} \frac{\mu_0 \nabla' \times \vec{M}(\vec{r}')}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$$
(B.5)

Utilizando el segundo teorema integral de Gauss, siendo  $S$  la superficie del material magnético de volumen  $\mathcal{V}$ , nos queda finalmente:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times d\vec{S}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\nabla' \times \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$$
(B.6)

Para un material con una densidad de corriente superficial de magnetización  $\vec{J}_{Sm}$  y una densidad de corriente  $\vec{J}_m$  el potencial vector producido sería (ec. [6.58]):

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\vec{J}_{Sm} dS'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{J}_m dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$
(B.7)

Por tanto, a todos los efectos, debido a la superposiciones internas de corriente, el material magnético se ha convertido en un sistema con una densidad de corriente volumétrica de imanación:

$$\vec{J}_m = \nabla \times \vec{M}$$
(B.8)

y una densidad de corriente superficial de imanación:

$$\vec{J}_{Sm} = \vec{M} \times \vec{n} \quad (\text{B.9})$$

donde  $\vec{n}$  es la normal exterior al material magnético:  $d\vec{S}' = \vec{n} dS'$ .

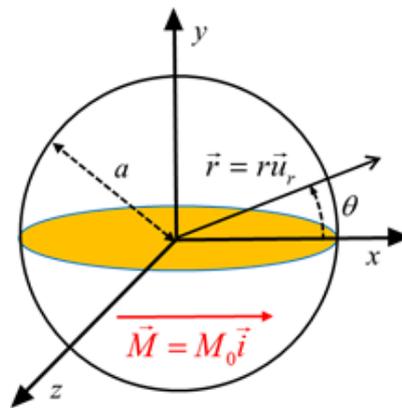
Por tanto, vemos como hemos reproducido los resultados obtenidos previamente justificándolos matemáticamente. Finalmente diremos que aunque la expresión [B.7] permite calcular el potencial (y el campo) magnético sólo en puntos alejados del material, por razonamientos análogos a los esgrimidos en el apartado 5.5, también permite obtener el potencial (y el campo) macroscópico promedio en el interior de éste sin ningún tipo de error.

# C

## Apéndice C: Campo producido por una esfera uniformemente magnetizada

En el caso de una esfera uniformemente magnetizada en el vacío ( $\vec{M} = M_0 \vec{i}$ ) de radio  $a$ , Fig. C.1, no hay corrientes libres por lo que la ley de *Ampère* se reduce a:

$$\nabla \times \vec{H} = 0 \quad (C.1)$$



**Figura C.1:** Esquema de una esfera uniformemente magnetizada.

Definimos el potencial magnético (escalar)  $V_m$  por:

$$\vec{H} = -\nabla V_m \quad (C.2)$$

Este potencial escalar permite asociar al polo norte un potencial magnético positivo y al sur uno negativo semejante al potencial electrostático, con la diferencia ahora de que en magnetostática no existen monopolos y que este potencial solo está definido en ausencia de corrientes libres.

De la ecuación  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  y teniendo en cuenta la ec. [7.22] se obtiene:

$$\nabla^2 V_m = -\rho_m \quad ; \quad \rho_m = -\nabla \cdot \vec{M} \quad (C.3)$$

que es una ecuación de *Poisson* magnetostática con una densidad de carga efectiva  $\rho_m$ . Como se ha visto en electrostática, la solución de esta ecuación es:

$$V_m = \frac{1}{4\pi} \int_v \frac{\nabla \cdot \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\vec{M}(\vec{r}') \cdot d\vec{S}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (C.4)$$

donde el primer término representa la contribución del volumen de la esfera y el segundo la “carga magnética” superficial debido a la discontinuidad en el vector de magnetización, que solo es distinto de cero dentro de la esfera (incluida su superficie). Puesto que la esfera está uniformemente magnetizada, el primer término de la ecuación anterior se anulará, resultando:

$$V_m(r, \theta) = \frac{M_0 a^2}{4\pi} \int_{4\pi} \frac{\cos \theta}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\Omega' \quad (\text{C.5})$$

habiéndose supuesto  $\vec{M} = M_0 \vec{i}$  y siendo  $d\Omega'$  el diferencial de ángulo sólido sobre la esfera. Los demás parámetros se definen en la Fig. C.1.

Haciendo uso del siguiente desarrollo en serie del término  $1/|\vec{r} - \vec{r}'|$  en función de armónicos esféricos siendo  $OX$  el eje polar tenemos:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r_-^l}{r_+^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (\text{C.6})$$

donde  $\vec{r}(r, \theta, \varphi)$  y  $\vec{r}'(r', \theta', \varphi')$  son los vectores de posición del punto en el que se calcula el potencial y un punto cualquiera de la esfera magnetizada, respectivamente,  $Y_{lm}$  son funciones especiales llamadas armónicos esféricos [3],  $r_-$  ( $r_+$ ) es el menor (mayor) valor de  $|\vec{r}|$  y  $|\vec{r}'|$ . En nuestro caso de la esfera uniformemente magnetizada, solo hay contribución de la superficie, ec. [C.5], por lo que  $|\vec{r}'| = a$  y al introducir el desarrollo [C.6] en [C.5] se anulan todos los términos menos el  $l=1$ , reduciéndose el potencial a la expresión:

$$V_m(r, \theta) = \frac{M_0 a^2}{3} \frac{r_-}{r_+^2} \cos \theta \quad (\text{C.7})$$

Dentro de la esfera,  $r_- = r$  y  $r_+ = a$ , por lo que  $V_m = M_0 r \cos \theta / 3 = M_0 x / 3$  y los campos  $\vec{H}$  y  $\vec{B}$  en el interior de la esfera serán:

$$\vec{H}_i = -\frac{1}{3} \vec{M}; \quad \vec{B}_i = \frac{2}{3} \mu_0 \vec{M} \quad (\text{C.8})$$

que son los valores dados en [7.6]. En el exterior de la esfera, el campo coincide con el de una esfera de momento dipolar  $\vec{m} = (4\pi/3) \vec{M}$ . Los campos  $\vec{H}$  y  $\vec{B}$  se representan en la Fig. 7.6.

## Bibliografía

---

- [1] R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands, Física, The Feynman Lectures on Physics, Vol. II: Electromagnetismo y Materia, Ed. Pearson Education, Naucalpán de Juárez, México (1998-2000).
- [2] J.D. Jackson, Electrodinámica Clásica, Ed. Alhambra, Madrid (1980).
- [3] R. Courant y D. Hilbert, Methods of Mathematical Physics, Vol. I, Ed. Wiley-Interscience (1963).