



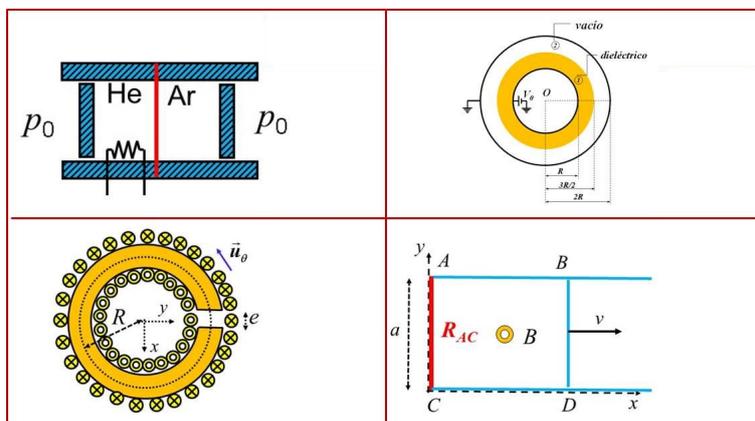
POLITÉCNICA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO

FÍSICA II

TEORÍA

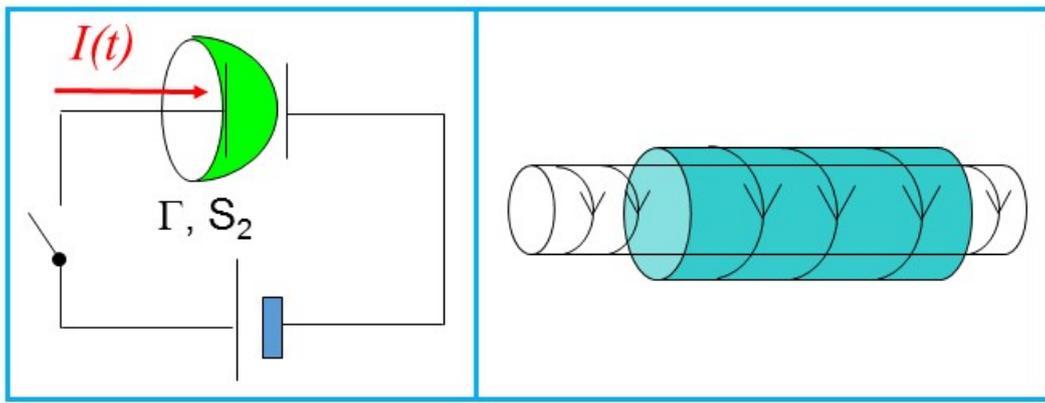
Termodinámica y Electromagnetismo





POLITÉCNICA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO



TEMA 9.- ELECTRODINÁMICA

José Carlos JIMÉNEZ SÁEZ
Santiago RAMÍREZ DE LA PISCINA MILLÁN

9. Electrodinámica	1
9.1. Ley de Faraday-Henry	1
9.2. Ley de Lenz	3
9.3. Ley de Ohm en un conductor bajo inducción	4
9.4. Coeficiente de autoinducción	5
9.4.1. Asociaciones de inductancias en serie y en paralelo	7
9.5. Coeficientes de inducción mutua	9
9.6. Ecuación de Maxwell de la inducción	11
9.7. Energía magnética	12
9.8. Derivada temporal del flujo	13
9.9. Aplicación de la ley de Faraday-Henry	14
9.9.1. Circuito con velocidad y campo magnético estacionario	15
9.9.2. Circuito sin velocidad y campo magnético variable	16
9.9.3. Circuito con velocidad y campo magnético variable	17
9.10. Corriente de desplazamiento	18
9.11. Ecuaciones de Maxwell	20
9.12. Relación de los campos con los potenciales	21

9

9.1. Ley de Faraday-Henry

En el tema 6 hemos visto cómo una corriente que circula por un circuito crea un campo magnético en el espacio que rodea el circuito. Sin embargo, lo contrario no es cierto. Un campo magnético estacionario no crea ninguna corriente en un circuito rígido y estacionario. A principios del siglo XIX, después de que Oersted (1820) descubriera que una corriente eléctrica que circula por un alambre desviaba una aguja magnética suspendida en su proximidad, muchos científicos intentaron conseguir una corriente eléctrica estacionaria sobre un circuito, actuando con campos magnéticos constantes. Este efecto lo buscaban por razones de simetría, es decir, si una corriente produce un campo magnético, ¿por qué un campo magnético no va a producir una corriente en un circuito? El problema es que trabajaban con magnitudes estacionarias y no lograron su objetivo.

El descubrimiento de la inducción electromagnética [1] lo hicieron Michael Faraday y Joseph Henry de forma independiente, aunque casi simultáneamente. Ambos descubrieron el principio de la inducción electromagnética en 1831, aunque a Henry se le atribuye, en particular, el descubrimiento de la autoinducción. Sin embargo, en estas investigaciones, estos autores consiguieron encontrar no sólo lo que buscaban sino que indirectamente plantearon otra de las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo.

Veamos algunos de los experimentos que conducen a la ley de Faraday-Henry:

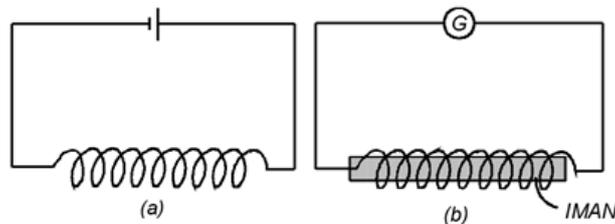


Figura 9.1: Circuitos experimentales, uno con bobina y batería y otro con bobina, imán y galvanómetro.

El circuito de la Fig. 9.1(a) produce un campo magnético, tal como vimos en el tema de Magnetostática, que es más intenso en la zona interior de las espiras. Por el circuito de la Fig. 9.1(b), en el que la batería se ha sustituido por un galvanómetro y en la bobina se ha introducido un imán, no pasa corriente.

Lo mismo ocurre si en lugar del imán se pone otro circuito por el que circula una corriente constante, según se indica en la Fig. 9.2. Es decir, por el galvanómetro tampoco pasa corriente. Si en un campo magnético uniforme colocamos una espira rígida y estacionaria (Fig. 9.3), vemos que por ella no pasa corriente ninguna ya que el galvanómetro no la detecta. Si en lugar de la espira ponemos un conductor rectilíneo C, tampoco sobre él se observa ningún efecto eléctrico.

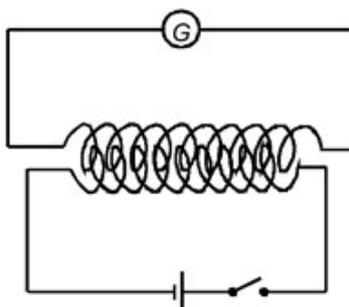


Figura 9.2: Circuito experimental con bobinas acopladas, galvanómetro, batería e interruptor.

Ahora bien, en el caso de la Fig. 9.1(b), al introducir o sacar el imán del solenoide, se observa una corriente en el galvanómetro que cesa cuando cesa el movimiento del imán. En el caso del experimento de la Fig. 9.2, el galvanómetro detecta paso de corriente en los períodos de apertura y cierre del interruptor que deja pasar la corriente por el segundo circuito, es decir, cuando la intensidad de corriente es variable y, por tanto, también lo es el campo magnético que produce. En el caso de la espira de la Fig. 9.3, el galvanómetro detecta paso de corriente si deformamos la espira, la hacemos girar o hacemos que varíe el campo magnético con el tiempo. En el conductor C observaríamos una d.d.p. entre sus extremos si lo desplazásemos paralelamente a sí mismo manteniéndolo en el plano perpendicular a las líneas de campo magnético.

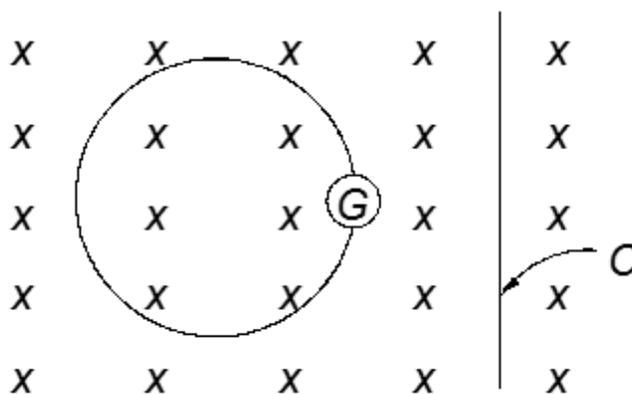


Figura 9.3: Circuito con galvanómetro y conductor C en un campo magnético.

En los experimentos descritos, el paso de corriente por el galvanómetro está asociado a algo común a todos ellos que es la variación con el tiempo del flujo magnético a través de los circuitos. En el caso del conductor C de la Fig. 9.3, el paso de corriente se asocia a la variación del flujo en un circuito cerrado imaginariamente por fuera del conductor. De hecho, experimentalmente se

comprueba que la fuerza (o voltaje) electromotriz (f.e.m.) inducido en un circuito de contorno Γ es igual a la variación del flujo magnético a su través (para cualquier superficie S subtendida por el contorno). Esta ley se escribe:

$$\oint_{\Gamma} \vec{\xi}_m \cdot d\vec{l} = \varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (9.1)$$

y constituye la ley de Faraday-Henry de la inducción electromagnética, en la que ε es la f.e.m. o voltaje inducido en el circuito y ϕ es el flujo que lo atraviesa. El enunciado de esta ley es:

“La f.e.m. inducida en un circuito eléctrico es igual a la variación, cambiada de signo, con respecto al tiempo del flujo magnético que atraviesa la superficie limitada por el circuito”.

Esta ley lleva implícito que el sentido positivo de la circulación del campo motriz y del flujo no son independientes, sino que están ligados por la regla de la mano derecha o del sacacorchos. El sentido positivo de la circulación en la curva Γ va asociado al sentido positivo de la f.e.m., o si se prefiere, de la intensidad inducida si se trata de un circuito cerrado (Fig. 9.4).

Esta importante ley del electromagnetismo es una ley que se deduce experimentalmente y es independiente de cualquier otra y no se puede deducir de ellas. También debemos recordar que el flujo magnético a través de cualquier superficie cerrada es siempre cero. Esta propiedad se deduce de la ley de Maxwell que dice que el campo magnético es solenoidal ($\nabla \cdot \vec{B} = 0$), integrando dicha divergencia en un volumen y aplicando el teorema de la divergencia.

La variación del flujo en el circuito en función del tiempo, como expresa el segundo miembro de la ec. [9.1], se puede conseguir por distintos medios: deformando el circuito, produciendo movimiento en el circuito o variando el campo magnético con el tiempo, sin que en ningún caso sea necesario modificar la expresión de la ley, dada por [9.1].

La ley de Faraday es la base del funcionamiento de los generadores y motores eléctricos y se puede considerar como el punto de partida de la Electrotecnia. De hecho, en uno de los diseños de Faraday se convertía, mediante una bobina giratoria dentro de un campo magnético, energía mecánica en corriente eléctrica (generador). Por su parte, Henry ideó un sistema que actuaba de modo inverso convirtiendo corriente eléctrica en energía mecánica gracias a la misma bobina (motor).

9.2. Ley de Lenz

Si examinamos con cierto detalle la ley de Faraday-Henry, observamos que matemáticamente el signo negativo que aparece en dicha ley indica que la f.e.m. inducida es de tal sentido que tiende a oponerse al cambio en el flujo. Para visualizar este hecho, es necesario tener presente la regla de la mano derecha que asigna a la vez el sentido positivo de intensidad inducida, y de flujo positivo.

Este hecho permitió a Lenz enunciar una ley física equivalente, que se denomina ley de Lenz y cuyo enunciado es:

“Cuando en un circuito aumentamos el flujo magnético, la f.e.m. que se induce y la intensidad consiguiente que se produce crea un campo magnético cuyo flujo es contrario al aumento que estamos produciendo. Y viceversa, cuando en un circuito disminuimos el flujo magnético, la f.e.m. que se induce y la intensidad consiguiente crea un campo magnético cuyo flujo es contrario a la disminución que estamos produciendo”.

Ambos enunciados podemos resumirlos en uno sólo que diría que en todos los fenómenos de inducción electromagnética, las corrientes inducidas tienen un sentido tal que su efecto (cambio de flujo magnético) se opone a la causa que las produjo.

A pesar de que el signo negativo de la ley de Faraday-Henry y la ley de Lenz describen el mismo fenómeno, esto es, la inercia de los sistemas magnéticos a variar su estado, muchas veces encontraremos, por ejemplo, que solamente la aplicación de la ley de Lenz conduce de forma sencilla e inmediata a la determinación del sentido de las corrientes inducidas.

9.3. Ley de Ohm en un conductor bajo inducción

Una vez establecido que el campo electromagnético puede mover las cargas eléctricas en un circuito de forma permanente, es decir, que puede comportarse como un campo motriz, deberíamos examinar con más detalle cuál es la causa del movimiento local de portadores en un conductor sometido a este tipo de campo. De acuerdo con lo visto en el tema 8, en concreto con la ecuación [8.39], se verifica que:

$$\vec{J} = \sigma_c(\vec{E}_e + \vec{\xi}_m) \quad (9.2)$$

es decir, la densidad de corriente es proporcional al campo motriz.

Por otro lado, la densidad de corriente en un conductor cuyos portadores son cargas q_p con velocidad \vec{u}_p se define como (ec. [8.2]):

$$\vec{J} = q_p n_p \vec{u}_p \quad (9.3)$$

De acuerdo con la ec. [8.16], la velocidad de deriva de estas cargas debe ser proporcional al campo que actúa sobre ellas para moverlas, en nuestro caso, el dado por la fuerza de Lorentz:

$$\vec{u}_p \propto q_p(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = q_p(\vec{E}_e + \vec{E}_m + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (9.4)$$

En esta última expresión hemos separado el campo eléctrico en dos partes, una conservativa o campo electrostático, y otra no, a la cual llamaremos campo electromotor. Además hemos considerado que el conductor donde se mueven las cargas tiene una velocidad \vec{v} . Obsérvese que no consideramos la fuerza magnética derivada de la propia velocidad de las cargas en el circuito porque resulta siempre perpendicular al movimiento de éstas, además de su pequeño valor [2]. De esta manera, la ley de Ohm microscópica para un conductor de conductividad σ_c moviéndose en el seno de un campo magnético con velocidad \vec{v} (Fig. 9.4) viene dada por:

$$\vec{J} = \sigma_c(\vec{E}_e + \vec{E}_m + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (9.5)$$

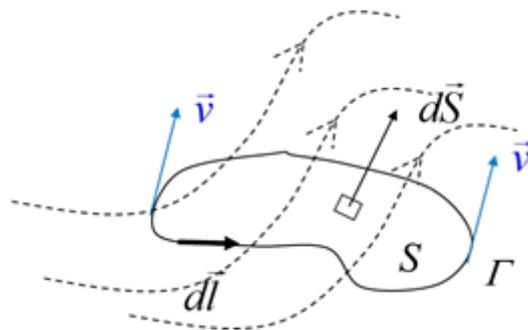


Figura 9.4: Regla de la mano derecha a la hora de elegir el sentido positivo del diferencial de longitud y del diferencial de superficie.

Comparando esta expresión con la [9.2] comprobamos que las cargas en el circuito se pueden mover, bien por el efecto de un campo eléctrico diferente al campo electrostático que hasta ahora no conocíamos, bien por la fuerza debida al campo magnético, o bien por ambos campos. Este campo eléctrico diferente al campo electrostático es un campo que acompaña a los campos magnéticos variables con el tiempo y no surge de las acumulaciones de carga.

Así, por ejemplo, el campo responsable del movimiento de las cargas en el caso del circuito de la Fig. 9.3 (rígido y estacionario) colocado en un campo magnético variable en el tiempo sería el campo electromotor \vec{E}_m , y en el caso del conductor C suponiéndolo en movimiento con velocidad \vec{v} sería el campo $\vec{v} \times \vec{B}$. En este último caso, al ser el circuito abierto, la densidad de corriente tendería en estado estacionario a anularse, de manera que, se produciría una acumulación de carga en sus extremos y aparecería entre estos una d.d.p.. Haciendo cero la densidad de corriente en la ec. [9.5] queda:

$$\vec{E}_e = -\vec{v} \times \vec{B} \rightarrow \Delta V = - \int \vec{E}_e \cdot d\vec{l} = \int (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \quad (9.6)$$

A este resultado igualmente habríamos llegado suponiendo que en dicho estado estacionario la fuerza sobre una carga libre cualquiera debería ser nula. Dicha fuerza sería la debida a la electrostática por acumulación de cargas de un signo en un extremo y de otro signo en el otro más la magnética de Lorentz por movimiento del conductor en un campo magnético, es decir:

$$q_p \vec{E}_e + q_p \vec{v} \times \vec{B} = 0 \quad (9.7)$$

Es claro a partir de esta expresión que las cargas positivas se dirigen hacia donde apunta la fuerza de Lorentz. Si quisiéramos aplicar en este caso concreto la ley de Faraday [9.1] para obtener la d.d.p. [9.6] deberíamos calcular la f.e.m. inducida debida al campo motriz $\vec{v} \times \vec{B}$ en un circuito cerrado formado por el conductor y por cualquier curva fija imaginaria que uniese sus extremos.

9.4. Coeficiente de autoinducción

En un circuito aislado, rígido y de posición estacionaria, el único posible cambio de flujo magnético que lo atraviesa tiene que estar relacionado con la variación con el tiempo de la

intensidad de corriente que recorre el propio circuito. Si esta intensidad es variable, producirá un campo magnético variable que, a su vez, hará que varíe el flujo que atraviesa el circuito, con lo que aparecerá una f.e.m. inducida en el propio circuito que, naturalmente, cumple la ley de Faraday.

Si llamamos I a la intensidad variable que recorre el circuito, la f.e.m. inducida será, por lo que hemos indicado,

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d\phi}{dI} \frac{dI}{dt} \tag{9.8}$$

Como el flujo es proporcional a la intensidad que recorre el circuito, entonces $d\phi/dI$ es una constante del circuito que se designa por

$$L = \frac{d\phi}{dI} \tag{9.9}$$

y que se llama autoinductancia o coeficiente de autoinducción, con lo que la f.e.m. inducida se escribe de la forma

$$\varepsilon = -L \frac{dI}{dt} \tag{9.10}$$

La ecuación de dimensiones de la autoinductancia es :

$$[L] = [\varepsilon] [t] [I]^{-1} = L^2MT^{-2}I^{-2} \tag{9.11}$$

y su unidad en el SI es el henrio, de símbolo H, de modo que $1 \text{ H} = 1 \text{ Wb/A}$.

Ejercicio: Calcúlese el coeficiente de autoinducción de un solenoide recto de longitud l , radio R , compuesto por N espiras, suponiendo que $l \gg R$.

Solución: $L = \mu_0 N^2 \pi R^2 / l$

Ejercicio: Calcúlese el coeficiente de autoinducción de un arrollamiento toroidal de N espiras, siendo l la longitud de la circunferencia media del toro y A el área de la sección recta (suponiendo $l \ll \sqrt{A}$).

Solución: $L = \mu_0 N^2 A / l$

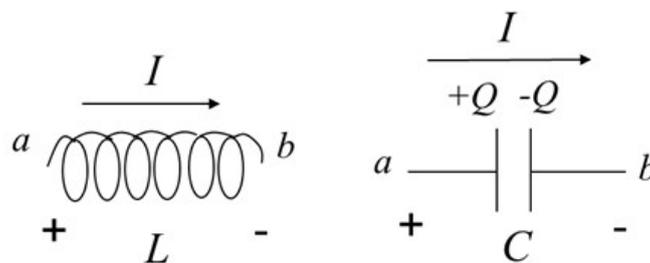


Figura 9.5: Convenios de potencial para una inductancia y un condensador.

En los circuitos eléctricos, el símbolo que se utiliza para indicar la existencia de una autoinducción es el mostrado en la Fig. 9.5. Dentro de un circuito se usa el convenio de considerar la diferencia de potencial positiva en el sentido de entrada de la intensidad (lo mismo ocurre para condensadores o resistencias (Fig. 8.7)). Al hacer esto, la d.d.p. en bornes de inductancias o condensadores viene dada por:

$$V_a - V_b = L \frac{dI}{dt}; \quad V_a - V_b = \frac{Q}{C} \quad (I = \frac{dQ}{dt}) \quad (9.12)$$

En un circuito *LRC* como el de la Fig. 9.6, la ecuación de mallas o suma de diferencias de potencial se escribiría:

$$\varepsilon - Q/C - L(dI/dt) - RI = 0 \quad (9.13)$$

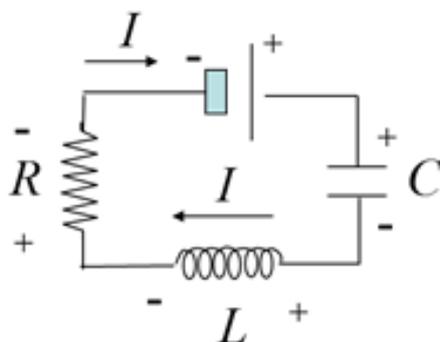


Figura 9.6: Circuito *LRC*.

De esta manera, cada elemento pasivo cumple una función en el circuito, el condensador se ocupa de almacenar energía, la inductancia de atenuar los cambios energéticos y la resistencia de disipar dicha energía. A diferencia del condensador que cuando se cargaba (estado estacionario) no pasaba por él intensidad, la inductancia llegado dicho estado se comporta como un cortocircuito, es decir, como si se tratara de un simple conductor.

9.4.1. Asociaciones de inductancias en serie y en paralelo

Un conjunto de n inductancias conectadas una a continuación de otra recibe el nombre de conexión en serie (véase Fig. 9.7). En esta configuración pasa la misma intensidad I por todas ellas. Sea i e $i+1$ los extremos de la inductancia L_i , la diferencia de potencial entre sus extremos es:

$$V_{i+1} - V_i = L_i(dI/dt) \quad (9.14)$$

Sumando las diferencias de potencial en las n inductancias se tiene:

$$V_{n+1} - V_1 = I(L_n + \dots + L_1) \quad (9.15)$$

El sistema definido sería equivalente a una única inductancia de valor:

$$L_{eq} = L_n + \dots + L_1 \tag{9.16}$$

por la que circula la misma intensidad, ya que, entonces se podría escribir:

$$V_{n+1} - V_1 = L_{eq}(dI/dt) \tag{9.17}$$

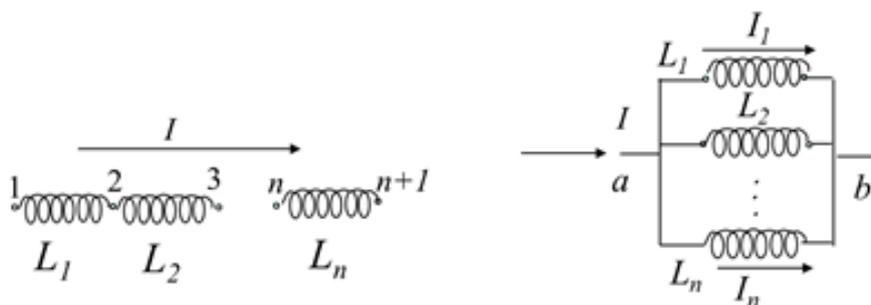


Figura 9.7: Conexión en serie de inductancias (izquierda) y en paralelo (derecha).

Un conjunto de n inductancias están conectadas en paralelo cuando todas ellas se encuentran unidas a los dos mismos nodos (véase Fig. 9.7). En este caso todas las inductancias están sometidas a la misma diferencia de potencial. En el caso de la inductancia i , la derivada de la intensidad que la atraviesa será:

$$(dI_i/dt) = \frac{V_a - V_b}{L_i} \tag{9.18}$$

Sumando todas las derivadas de las intensidades que pasan por las inductancias obtendríamos la derivada de la intensidad total I que entra en el conjunto de inductancias en paralelo con lo cual:

$$dI/dt = dI_1/dt + dI_2/dt + \dots + dI_n/dt = (V_a - V_b) \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n} \right) \tag{9.19}$$

Si fuese una única inductancia la que estuviese conectada entre los dos mismos nodos se tendría la ecuación:

$$dI/dt = (V_a - V_b) \frac{1}{L_{eq}} \tag{9.20}$$

Lo que significa que el conjunto de inductancias en paralelo es equivalente a una sola inductancia cuyo valor satisface la expresión:

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n} \tag{9.21}$$

9.5. Coeficientes de inducción mutua

Si consideramos (Fig. 9.8) dos circuitos rígidos y estacionarios y no influenciados magnéticamente por otros circuitos próximos, el flujo magnético que atraviesa cualquiera de ellos será debido al campo magnético creado por la intensidad que circula por cualquiera de los dos circuitos, de modo que

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \phi_{11} + \phi_{12} = \int_{S_1} \vec{B}_1(I_1) \cdot d\vec{S}_1 + \int_{S_1} \vec{B}_2(I_2) \cdot d\vec{S}_1 \\ \phi_2 &= \phi_{21} + \phi_{22} = \int_{S_2} \vec{B}_1(I_1) \cdot d\vec{S}_2 + \int_{S_2} \vec{B}_2(I_2) \cdot d\vec{S}_2 \end{aligned} \tag{9.22}$$

donde se definen los siguientes flujos:

ϕ_i : flujo magnético total a través del circuito i .

ϕ_{ii} : flujo magnético a través del circuito i debido al campo creado por la intensidad que recorre el propio circuito i .

ϕ_{ij} : flujo magnético a través del circuito i debido al campo creado por la intensidad que recorre el circuito j .

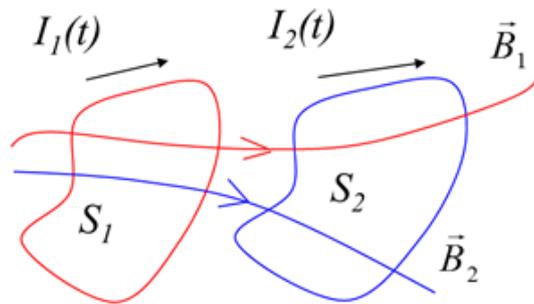


Figura 9.8: Circuitos en inducción mutua.

Como los circuitos son rígidos y estacionarios, la única variación en el flujo que los atraviesa debe provenir de la variación de las intensidades, de modo que la fuerza electromotriz inducida en cada circuito será

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= -\frac{d\phi_1}{dt} = -\frac{d\phi_{11}}{dI_1} \frac{dI_1}{dt} - \frac{d\phi_{12}}{dI_2} \frac{dI_2}{dt} = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - \frac{d\phi_{12}}{dI_2} \frac{dI_2}{dt} \\ \varepsilon_2 &= -\frac{d\phi_2}{dt} = -\frac{d\phi_{21}}{dI_1} \frac{dI_1}{dt} - \frac{d\phi_{22}}{dI_2} \frac{dI_2}{dt} = -\frac{d\phi_{21}}{dI_1} \frac{dI_1}{dt} - L_2 \frac{dI_2}{dt} \end{aligned} \tag{9.23}$$

donde hemos introducido los coeficientes de autoinducción de cada circuito.

Se define el coeficiente de inducción mutua entre los circuitos 1 y 2 mediante

$$M_{12} = \frac{d\phi_{12}}{dI_2}; \quad M_{21} = \frac{d\phi_{21}}{dI_1} \tag{9.24}$$

y se puede demostrar que siempre se cumple $M_{12} = M_{21} = M$, con lo que no puede haber ambigüedad en los subíndices.

Demostración: Para probar la anterior igualdad hacemos uso del potencial magnético vector y del teorema de Stokes.

$$\phi_{12} = \int_{S_1} \nabla \times \vec{A}_2 \cdot d\vec{S}_1 = \oint_{\Gamma_1} d\vec{l}_1 \cdot \vec{A}_2 = I_2 \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} d\vec{l}_1 \cdot \oint_{\Gamma_2} \frac{d\vec{l}_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \right) = M_{12} I_2 \quad (9.25)$$

Haciendo el mismo desarrollo para ϕ_{21} se comprueba que son iguales.

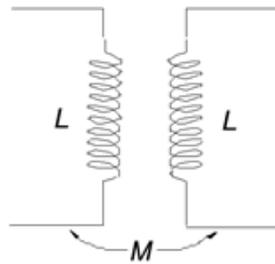


Figura 9.9: Símbolo de la inducción mutua entre dos bobinas de la misma inductancia.

En función de los coeficientes de autoinducción y de inducción mutua, las fuerzas electromotrices inducidas se puede escribir de la forma

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= -L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt} \\ \varepsilon_2 &= -M \frac{dI_1}{dt} - L_2 \frac{dI_2}{dt} \end{aligned} \quad (9.26)$$

cuya importancia práctica se verá en el estudio de circuitos de corriente alterna, y en especial, en el diseño de transformadores eléctricos.

En los esquemas eléctricos, para indicar que entre dos circuitos existe inducción mutua se utiliza el símbolo indicado en la Fig. 9.9.

De la definición [9.24] del coeficiente de inducción mutua entre dos circuitos se deduce que la ecuación de dimensiones y las unidades de este coeficiente son las mismas que las del coeficiente de autoinducción indicadas en el apartado anterior.

Aunque el caso que más frecuentemente se presenta de inductancia mutua es aquel en el que intervienen solamente dos circuitos, la exposición que se ha hecho antes se puede generalizar al caso de que haya más circuitos que influyan magnéticamente unos sobre otros.

Ejercicio: Considerando el solenoide recto del ejercicio propuesto en el apartado 9.4, supóngase que existe, situado de forma coaxial con él, otro solenoide de longitud $l_2 (< l)$ y radio $r (< R)$, que tiene N_2 espiras; calcúlese el coeficiente de inducción mutua.

Solución: $M = \mu_0 N N_2 \pi r^2 / l$

Ejercicio: Sobre el mismo soporte toroidal del ejercicio segundo propuesto en el apartado 9.4, supóngase un segundo arrollamiento de N_2 espiras; calcúlese el coeficiente de inducción mutua.

Solución: $M = \mu_0 N N_2 A / l$

9.6. Ecuación de Maxwell de la inducción

Las ecuaciones de Maxwell desarrollan en su mayoría principios físicos que habían sido postulados previamente por otros autores. La ecuación de Maxwell relativa a la inducción no iba a ser menos. Faraday era un gran experimentador, pero no un buen matemático. De esta manera, tuvo que ser Maxwell en 1865 quien enunciara los principios que subyacían detrás de la ley de Faraday.

Vamos a considerar un circuito rígido y de posición estacionaria de contorno Γ y abarcando una superficie S en el seno de un campo magnético variable en el tiempo. Si aplicamos la ec. [9.1] tendríamos en este sistema:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (9.27)$$

donde el campo motriz que mueve los portadores de carga en el circuito es un campo eléctrico (no conservativo pues su circulación no es cero) asociado a un campo magnético variable, lo que habíamos llamado campo electromotor.

Utilizando el teorema de Stokes y teniendo en cuenta que el circuito no se mueve queda:

$$\int_S \nabla \times \vec{E}_m \cdot d\vec{S} = \oint_{\Gamma} \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (9.28)$$

Dado que esta ecuación se verifica independientemente de la forma del circuito Γ y de la sección S que subtiende, podemos decir que en todos los puntos del espacio existe un campo eléctrico (electromotor) asociado al campo magnético, de modo que se satisface en cada punto la ecuación:

$$\nabla \times \vec{E}_m = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (9.29)$$

Si existiese un campo electrostático o irrotacional, el campo eléctrico considerado sería:

$$\vec{E} = \vec{E}_e + \vec{E}_m \quad (9.30)$$

y verificaría también la ecuación:

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (9.31)$$

Esta ecuación permite inferir ciertas características del campo electromotor, entre ellas que es un campo que nace rodeando a las variaciones temporales del vector campo magnético y que no sólo se halla circunscrito al interior del circuito conductor, si bien es allí donde produce una f.e.m.

9.7. Energía magnética

Para calcular la energía almacenada en el campo magnético, vamos a considerar un circuito simple con f.e.m., resistencia R e inductancia L (Fig. 9.10):

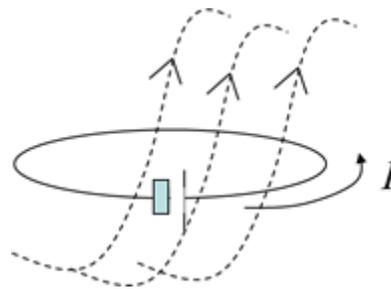


Figura 9.10: Circuito con batería, autoinducción y resistencia.

De acuerdo con la ec. [9.13] se verifica:

$$\varepsilon = L(dI/dt) + RI \quad (9.32)$$

El trabajo que realiza la batería para transportar un diferencial de carga dq a lo largo del circuito es:

$$dW = \varepsilon dq = \varepsilon I dt = RI^2 dt + L \frac{dI}{dt} I dt = RI^2 dt + \frac{d\phi}{dt} I dt \quad (9.33)$$

Como se observa en la ecuación anterior parte de la energía se disipa por efecto Joule y parte se almacena en el campo magnético. Esta última viene dada por:

$$dU_m = Id\phi \quad (9.34)$$

Si ponemos el flujo en función de la autoinducción $d\phi = LdI$, y partimos de una intensidad nula hasta alcanzar una intensidad I , la energía almacenada en el campo magnético es:

$$U_m = \int_0^I I L dI = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} I\phi \quad (9.35)$$

Si ponemos el flujo en función del potencial magnético vector se tiene:

$$\phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{l} \rightarrow U_m = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \vec{A} \cdot I d\vec{l} \quad (9.36)$$

O teniendo en cuenta su equivalente con la densidad de corriente: $U_m = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \vec{A} \cdot \vec{J} dv$.

Utilizando la ecuación de Ampère: $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$ para eliminar la densidad de corriente y la propiedad: $\nabla \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\nabla \times \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\nabla \times \vec{b})$ llegamos a la expresión:

$$U_m = \frac{1}{2} \int_v \vec{H} \cdot \nabla \times \vec{A} dv - \frac{1}{2} \int_S (\vec{A} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} \tag{9.37}$$

Basta ahora hacer tender a infinito el volumen v con su correspondiente superficie S de integración para darse cuenta que el segundo término converge a cero. En esta situación el comportamiento de las variables integradas será: $|\vec{A}| \sim \frac{1}{r}$; $|\vec{H}| \sim \frac{1}{r^2}$; $dS \sim r^2$ siendo r la distancia al sistema. De esta manera al hacer tender r a infinito la integral de superficie se anula. La expresión final para la energía magnética es por tanto:

$$U_m = \frac{1}{2} \int_{v \rightarrow \infty} \vec{H} \cdot \vec{B} dv \tag{9.38}$$

9.8. Derivada temporal del flujo

Para calcular la derivada temporal del flujo en un circuito en movimiento debemos obtener:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\int_{S_b} \vec{B}(t + dt) \cdot d\vec{S}_b - \int_S \vec{B}(t) \cdot d\vec{S}}{dt} \tag{9.39}$$

donde la superficie S_b es la que tiene el circuito en un instante $t+dt$ y la superficie S es la que tiene en el instante t (Fig. 9.11)

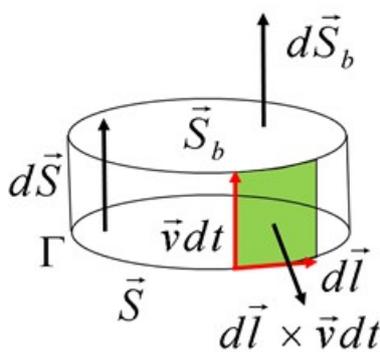


Figura 9.11: Cálculo de la derivada temporal del flujo en circuitos en movimiento.

Teniendo en cuenta que el flujo en la superficie cerrada de la Fig. 9.11 de altura $\vec{v}dt$ es cero dado que la divergencia del campo magnético es cero, se verifica:

$$\int_{S_b} \vec{B}(t + dt) \cdot d\vec{S}_b - \int_S \vec{B}(t + dt) \cdot d\vec{S} + dt \int_{\Gamma} \vec{B}(t + dt) \cdot (d\vec{l} \times \vec{v}dt) = 0 \tag{9.40}$$

Usando la propiedad cíclica del producto mixto

$$dt \int_{\Gamma} \vec{B}(t+dt) \cdot (d\vec{l} \times \vec{v}) = dt \int_{\Gamma} (\vec{v} \times \vec{B}(t+dt)) \cdot d\vec{l} = \quad (9.41)$$

y el teorema de Stokes:

$$= dt \int_S \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}(t+dt)) \cdot d\vec{S} \approx dt \int_S \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}(t)) \cdot d\vec{S} \quad (9.42)$$

Desarrollando en serie el campo magnético:

$$\int_S \vec{B}(t+dt) \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} + \int_S \frac{\partial}{\partial t} (\vec{B}(t) \cdot d\vec{S}) dt \quad (9.43)$$

Sustituyendo [9.42] y [9.43] en [9.40] queda:

$$\int_{S_b} \vec{B}(t+dt) \cdot d\vec{S}_b - \int_S \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} - dt \int_S \frac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t} \cdot d\vec{S} + dt \int_S \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} = 0 \quad (9.44)$$

Con lo cual la expresión [9.39] se simplifica y queda:

$$\frac{d\phi}{dt} = \int_S \frac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t} \cdot d\vec{S} - \int_S \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} \quad (9.45)$$

Aplicando finalmente el teorema de Stokes, se tiene:

$$\frac{d\phi}{dt} = \int_S \frac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t} \cdot d\vec{S} - \oint_{\Gamma} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \quad (9.46)$$

Este resultado es válido para cualquier campo vectorial siempre y cuando su divergencia sea nula.

9.9. Aplicación de la ley de Faraday-Henry

El cálculo de la f.e.m. en un circuito se puede realizar aplicando la ecuación [9.1], lo que supone calcular el flujo en el circuito en función del tiempo y realizar posteriormente su derivación, o bien aplicando la ecuación [9.46]. Veamos los distintos casos que nos podemos encontrar:

9.9.1. Circuito con velocidad y campo magnético estacionario

En el caso de que el circuito entero o una parte de él se mueva con velocidad \vec{v} y el campo magnético sea independiente del tiempo, según las ecs. [9.46] y [9.1] la f.e.m. se puede obtener como:

$$\varepsilon = \oint_{\Gamma} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \tag{9.47}$$

Haciendo la circulación de la ley de Ohm microscópica (ec. [9.5]) a lo largo del circuito (véanse ecs. [8.41] y [8.48]) (supuesto este cerrado para que circule intensidad) se llega a un resultado equivalente:

$$\varepsilon = RI_{ind} = \oint_{\Gamma} \frac{\vec{J} \cdot d\vec{l}}{\sigma_c} = \oint_{\Gamma} \vec{E}_m \cdot d\vec{l} + \oint_{\Gamma} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \tag{9.48}$$

De ambas ecuaciones concluimos que la corriente se debe al movimiento del conductor en el campo magnético y que el campo electromotor es nulo.

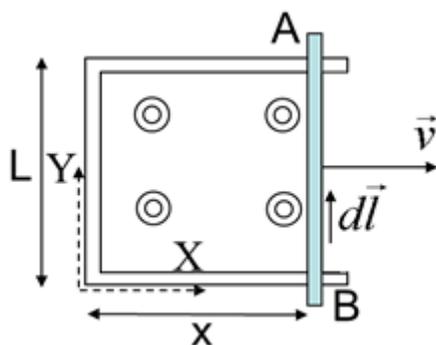


Figura 9.12: Circuito en movimiento en campo estacionario.

Ejemplo: En la Fig. 9.12 se muestra una varilla conductora AB en movimiento con velocidad $\vec{v} = v\vec{i}$ entre guías en un campo magnético uniforme $\vec{B} = B\vec{k}$. En la configuración mostrada obténgase la f.e.m. inducida en el circuito (consideramos positivo el sentido antihorario y por tanto el flujo saliente).

Aplicando la fórmula [9.47],

$$\varepsilon = \oint_{\Gamma} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \int_{y=0}^L vB(-\vec{j}) \cdot dy\vec{j} = -vBL \tag{9.49}$$

Haciendo uso de la ec. [9.1],

$$\phi = BLx \rightarrow \varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -BL\frac{dx}{dt} = -BLv \tag{9.50}$$

Por tanto, ambos métodos llegan al mismo resultado.

9.9.2. Circuito sin velocidad y campo magnético variable

En el caso de que el circuito esté fijo y el campo magnético dependa del tiempo, según [9.46] y [9.1] la f.e.m. se puede obtener como:

$$\varepsilon = - \int_S \frac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (9.51)$$

Haciendo la circulación de la ley de Ohm microscópica se llegaría a un resultado equivalente teniendo en cuenta la ley de Maxwell de la inducción (o a la inversa de aquí se concluye que debe verificarse dicha ley como se vio en el apartado 9.6):

$$\varepsilon = RI_{ind} = \oint_{\Gamma} \frac{\vec{J} \cdot d\vec{l}}{\sigma_c} = \oint_{\Gamma} \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \int_S \nabla \times \vec{E}_m \cdot d\vec{S} \quad (9.52)$$

Esto demuestra que la corriente inducida se debe al campo eléctrico, en concreto al campo electromotor.

Ejemplo: En la Fig. 9.13 se muestra un circuito fijo cuadrado de lado L en un campo magnético variable con el tiempo $\vec{B} = Ct^2y\vec{k}$ siendo C una constante. En la configuración mostrada obténgase la f.e.m. inducida en el circuito.

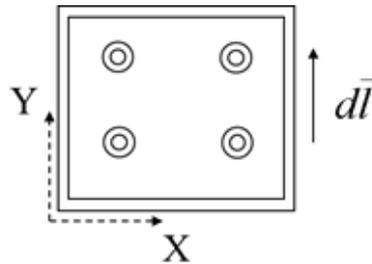


Figura 9.13: Circuito fijo en campo variable con el tiempo.

Haciendo uso de la ec. [9.51],

$$\varepsilon = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = - \int_0^L 2Cty\vec{i} \cdot Ldy\vec{i} = -2Ct \frac{L^3}{2} \quad (9.53)$$

Utilizando la ec. [9.1],

$$\phi = \int_0^L Ct^2yLdy = Ct^2 \frac{L^3}{2} \rightarrow \varepsilon = - \frac{d\phi}{dt} = -2Ct \frac{L^3}{2} \quad (9.54)$$

Análogamente al caso anterior, obtenemos el mismo resultado.

9.9.3. Circuito con velocidad y campo magnético variable

En el caso de que el circuito entero o una parte de él se mueva con velocidad \vec{v} y el campo magnético depende del tiempo, según [9.46] y [9.1] la f.e.m. se puede obtener también como:

$$\varepsilon = - \int_S \frac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \oint_{\Gamma} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \quad (9.55)$$

Haciendo la circulación de la ley de Ohm microscópica se llegaría según lo visto anteriormente a un resultado equivalente teniendo en cuenta la ley de Maxwell de la inducción:

$$\varepsilon = RI_{ind} = \oint_{\Gamma} \frac{\vec{J} \cdot d\vec{l}}{\sigma_c} = \oint_{\Gamma} \vec{E}_m \cdot d\vec{l} + \oint_{\Gamma} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \int_S \nabla \times \vec{E}_m \cdot d\vec{S} + \oint_{\Gamma} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \quad (9.56)$$

En este caso la corriente se debe al movimiento del conductor en el campo magnético y al campo electromotor.

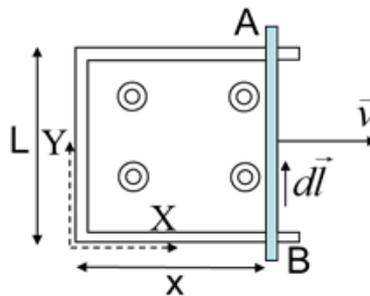


Figura 9.14: Circuito en movimiento en campo variable con el tiempo.

Ejemplo: En la Fig. 9.14 se muestra una varilla conductora AB en movimiento con velocidad $\vec{v} = v\vec{i}$ entre guías en un campo magnético variable con el tiempo $\vec{B} = B(y, t)\vec{k} = Ct^2y\vec{k}$ siendo C una constante. En la configuración mostrada obténgase la f.e.m. inducida en el circuito.

Utilizando la ec. [9.55]:

$$\varepsilon = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \oint_{\Gamma} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = - \int_0^L 2Cty\vec{k} \cdot xdy\vec{k} - \int_{y=0}^L vB(y, t)\vec{j} \cdot dy\vec{j} = \quad (9.57)$$

$$= -2Ctx \frac{L^2}{2} - vCt^2 \frac{L^2}{2}$$

Aplicando la Ley de Faraday [9.1] se obtiene:

$$\phi = \int_0^L Ct^2yxdy = Ct^2x \frac{L^2}{2} \rightarrow \varepsilon = - \frac{d\phi}{dt} = -2Ctx \frac{L^2}{2} - vCt^2 \frac{L^2}{2} \quad (9.58)$$

Por tanto, el resultado es idéntico por ambos procedimientos.

9.10. Corriente de desplazamiento

James Clerk Maxwell en 1865 postuló un conjunto de ecuaciones que gobiernan todos los fenómenos electromagnéticos. Su principal aportación al margen de formular matemáticamente todas las ecuaciones fue introducir en la ecuación de Ampère lo que llamó densidad de corriente de desplazamiento:

$$\vec{J}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (9.59)$$

o intensidad de corriente de desplazamiento (considerando que S es una superficie fija):

$$I_d = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \quad (9.60)$$

El incorporar este término a la ley de Ampère solucionaba la siguiente contradicción que se tenía en el proceso de carga de un condensador. Apliquemos la ley de Ampère a un circuito como el de la Fig. 9.15 donde el generador proporciona una intensidad constante. En el caso de una superficie S_1 que corte al cable conductor tenemos:

$$\int_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{S_1} \vec{J} \cdot d\vec{S} = I \quad (9.61)$$

En el caso de la superficie S_2 interior al condensador, se tiene:

$$\int_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{S_2} \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (9.62)$$

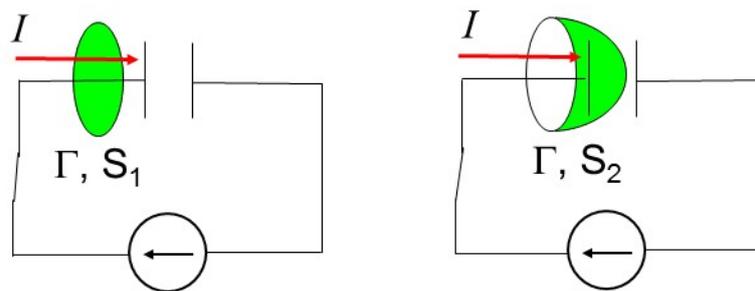


Figura 9.15: Circuito de carga de un condensador con generador de intensidad constante.

Es decir, la misma ley en función de la superficie apoyada en la curva Γ ofrece distintos resultados. La idea de Maxwell fue introducir una corriente derivada de la variación temporal del campo eléctrico (y no del transporte de cargas) que continuase en el interior del condensador la corriente de conducción del circuito. Es decir:

$$\int_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{S_2} \vec{J}_d \cdot d\vec{S} = I \quad (9.63)$$

La forma que ideó Maxwell para hacer esto fue modificar la ley diferencial de Ampère introduciendo un término adicional o densidad de corriente de desplazamiento:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \vec{J}_d = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (9.64)$$

A esta ecuación se la llama ley de Ampère-Maxwell. Esta densidad de corriente debería verificar dos propiedades:

$$\int_{S_2} \vec{J}_d \cdot d\vec{S} = I; \quad \int_{S_1} \vec{J}_d \cdot d\vec{S} = 0 \quad (9.65)$$

Veamos que la densidad de la ec. [9.59] las verifica. La segunda de ellas es inmediata dado que el campo eléctrico en el conductor es constante al serlo la intensidad. Consideremos una superficie S cerrada formada por S_1 y S_2 y apliquemos el teorema de la divergencia:

$$\begin{aligned} \int_{S_2} \vec{J}_d \cdot d\vec{S} &= \int_{S_2} \vec{J}_d \cdot d\vec{S} + \int_{S_1} \vec{J}_d \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{J}_d \cdot d\vec{S} = \oint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \nabla \cdot \vec{D} dv = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dv = \frac{\partial q}{\partial t} = I \end{aligned} \quad (9.66)$$

Por tanto, se comprueba que la intensidad de corriente de desplazamiento en el condensador es igual a la intensidad de corriente en el circuito.

La ley de Ampère-Maxwell va intrínsecamente ligada a la ley de conservación de la carga (sección 8.2). Tomando la divergencia de la ecuación [9.64], se tiene:

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \nabla \cdot (\vec{J} + \vec{J}_d) = \\ &= \nabla \cdot \vec{J} + \left(\nabla \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = \nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{D}) = \nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \end{aligned} \quad (9.67)$$

En esta ecuación se observa que las variaciones temporales del desplazamiento eléctrico van asociadas a corrientes no estacionarias (aquellas en las que la divergencia de la densidad de corriente libre no es cero). Esta ecuación en forma integral, aplicada a un volumen v delimitado por una superficie S , queda:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dv = - \int_V \nabla \cdot \vec{J} dv = \oint_S \vec{J} \cdot (-d\vec{S}) = I_{neta} \quad (9.68)$$

La intensidad neta (saliente <0, entrante >0) que atraviesa un volumen es igual a la variación temporal de carga en el mismo.

9.11. Ecuaciones de Maxwell

Reunimos en este apartado las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial e integral acompañadas de una breve explicación física de su significado. Las ecuaciones diferenciales son:

- Ley de Gauss: las líneas de campo del vector desplazamiento nacen o mueren en las densidades de carga.

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (9.69)$$

- Ley de Gauss para el campo magnético: las líneas de campo magnético son cerradas, no nacen ni mueren en ningún punto.

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (9.70)$$

- Ley de Faraday-Henry: El campo eléctrico rodea a las variaciones temporales de campo magnético.

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (9.71)$$

- Ley de Ampère-Maxwell: El campo magnetizante rodea a las corrientes libres y a las variaciones con el tiempo del campo de desplazamiento eléctrico.

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (9.72)$$

Las ecuaciones integrales son:

- Ley de Gauss: el flujo del vector desplazamiento en una superficie cerrada S es igual a la carga libre encerrada.

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q \quad (9.73)$$

- Ley de Gauss para el campo magnético: el flujo del campo magnético en una superficie cerrada S es cero.

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (9.74)$$

- Ley de Faraday-Henry: La circulación del campo eléctrico en una curva cerrada Γ es igual (salvo signo) a la variación temporal del flujo del campo magnético a través de cualquier superficie S apoyada en la curva.

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (9.75)$$

- Ley de Ampère-Maxwell: La circulación del campo magnetizante en una curva cerrada Γ es igual a la intensidad libre que atraviesa cualquier superficie S apoyada en la curva más la variación temporal del flujo del vector desplazamiento a través de dicha superficie.

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I + \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \quad (9.76)$$

A lo largo del curso hemos ido introduciendo poco a poco estas ecuaciones, así en la parte de la Electroestática vimos las ecuaciones: $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$ y $\nabla \times \vec{E} = 0$ y en la parte de la Magnetostática presentamos las relaciones: $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ y $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$.

9.12. Relación de los campos con los potenciales

En el tema 6 (sec. 6.1) vimos que el campo magnético se relaciona con el potencial magnético vector de acuerdo a la expresión:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (9.77)$$

Faltaría por ver qué relación liga al campo eléctrico con el potencial una vez introducidos los efectos de inducción, y habiendo comprobado la existencia de un campo eléctrico que tiene por origen las variaciones temporales del campo magnético. La respuesta es muy simple:

$$\nabla \times \vec{E} = \nabla \times \vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{A}) \quad (9.78)$$

$$\nabla \times \vec{E}_m = -\nabla \times \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \quad (9.79)$$

$$\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (9.80)$$

Por tanto, el campo electromotor es igual salvo signo a las variaciones temporales del potencial magnético vector. En resumen:

$$\vec{E} = \vec{E}_e + \vec{E}_m = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (9.81)$$

Introduciendo esta ecuación en la ley de Gauss [9.69] nos queda:

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot (\vec{E}_e + \vec{E}_m) + \nabla \cdot \vec{P} = \rho \quad (9.82)$$

$$\nabla \cdot \vec{E}_e - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{A} = \frac{\rho - \nabla \cdot \vec{P}}{\varepsilon_0} \quad (9.83)$$

Considerando que la divergencia del potencial magnético vector es cero (sec. 6.11) y volviendo hacia atrás tenemos:

$$\nabla \cdot \vec{E}_e = \frac{\rho - \nabla \cdot \vec{P}}{\varepsilon_0} \rightarrow \nabla \cdot (\vec{E}_e + \varepsilon_0 \vec{P}) = \rho \quad (9.84)$$

donde $\vec{D}_e = \vec{E}_e + \varepsilon_0 \vec{P}$ proviene de la parte irrotacional del campo eléctrico (que hemos llamado electrostática) y que por tanto es la que nace en las cargas.

Bibliografía

- [1] P. Lorrain y D.E. Corson, Campos y Ondas Electromagnéticas, Ed. Selecciones Científicas, Madrid (1972).
- [2] <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/electric/miccur.html>