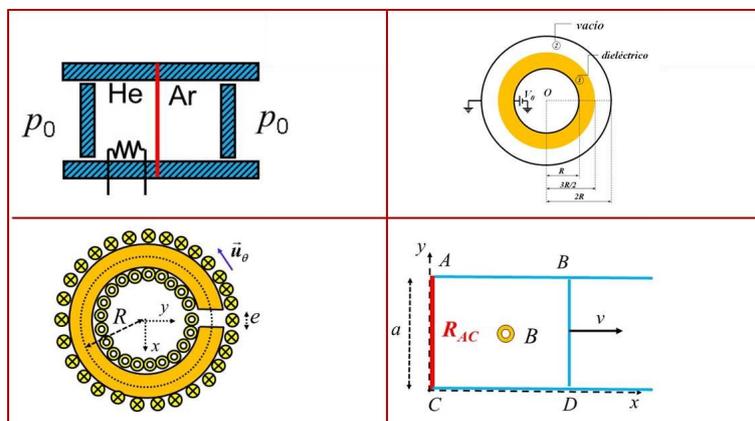


# ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO

## FÍSICA II

### PROBLEMAS RESUELTOS

*José Carlos JIMÉNEZ SÁEZ*  
*Santiago RAMÍREZ DE LA PISCINA MILLÁN*



### 1.- TERMODINÁMICA

# 1

## Termodinámica

### PROBLEMA RESUELTO 1.1

En un laboratorio se dispone de un gas desconocido y se supone que se comporta como un gas ideal. Se toma una muestra en un cilindro térmicamente aislado, cerrado por un émbolo también aislante del calor.

A partir de unas condiciones de presión y temperatura ( $p_0$ ,  $T_0$ ) se comprime lentamente el gas hasta que su temperatura es  $T_1$  y su presión  $p_1$ .

Dedúzcase la capacidad calorífica molar del gas a volumen constante.

DATOS:

$$p_0 = 100 \text{ kPa}$$

$$T_0 = 279 \text{ K}$$

$$p_1 = 120 \text{ kPa}$$

$$T_1 = 300 \text{ K}$$

$$R = 0.082 \text{ (atm.l)/(K.mol)}$$

### SOLUCIÓN 1.1

La transformación realizada es adiabática. Se verifica que:

$$pV^\gamma = cte \Rightarrow \frac{nRT}{V} V^\gamma = cte \Rightarrow TV^{\gamma-1} = cte \Rightarrow T \left( \frac{nRT}{p} \right)^{\gamma-1} = cte \Rightarrow T^\gamma p^{1-\gamma} = cte$$

Dado que los datos son los de presión y temperatura usamos la última expresión:

$$T_0^\gamma p_0^{1-\gamma} = T_1^\gamma p_1^{1-\gamma} \Rightarrow \left( \frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \frac{T_0}{T_1}$$

Tomando logaritmos se tiene:

$$\frac{1-\gamma}{\gamma} \log \frac{p_1}{p_0} = \log \frac{T_0}{T_1} \Rightarrow \frac{1-\gamma}{\gamma} = \frac{\log \frac{T_0}{T_1}}{\log \frac{p_1}{p_0}} = \frac{\log \frac{279}{300}}{\log \frac{120}{100}} = -0.398$$

Despejando  $\gamma$ :  $\gamma = 1.67 \approx \frac{5}{3}$

Por tanto se trata de un gas monoatómico:

$$c_v = \frac{3}{2}R = 12.5 \frac{\text{J}}{\text{K} \cdot \text{mol}}$$

$$c_p = \frac{5}{2}R = 20.8 \frac{\text{J}}{\text{K} \cdot \text{mol}}$$

## PROBLEMA RESUELTO 1.2

Un cilindro vertical, cerrado por un émbolo de sección  $S$  y de peso despreciable, contiene  $n$  moles de un gas monoatómico, a la presión atmosférica  $p_a$  y a la temperatura ambiente  $T_a$ . Se pone una masa  $M$  sobre el émbolo, el gas se comprime bruscamente y llega a un estado de equilibrio. En estas condiciones, se aísla térmicamente el cilindro y el émbolo y se comunica calor al gas lentamente hasta que el émbolo, con la masa encima, llega a la posición de partida.

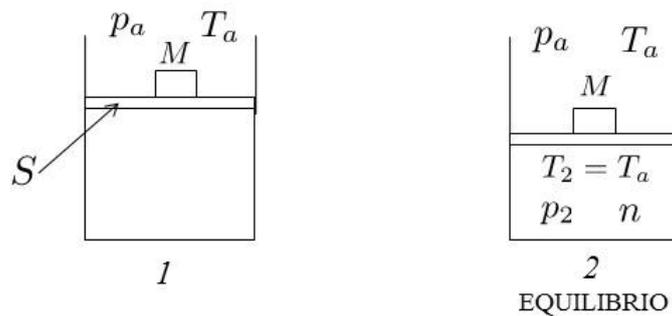
Calcular:

- 1) Trabajo que se realiza sobre el gas en la compresión brusca, presión y volumen final de la misma.
- 2) Calor que es preciso comunicar al gas en el segundo proceso, presión y temperatura al final de este proceso.

Resuélvase literalmente y hágase aplicación con los siguientes DATOS:

$$n = 2 \text{ mol} \quad p_a = 1 \text{ atm} \quad T_a = 300 \text{ K} \quad M = 20 \text{ kg} \quad S = 100 \text{ cm}^2 \quad g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

## SOLUCIÓN 1.2



El volumen inicial es:  $V_1 = \frac{nRT_a}{p_a}$

La presión exterior, y por tanto, la final del gas es:  $p_2 = p_a + p_M = p_a + \frac{Mg}{S}$

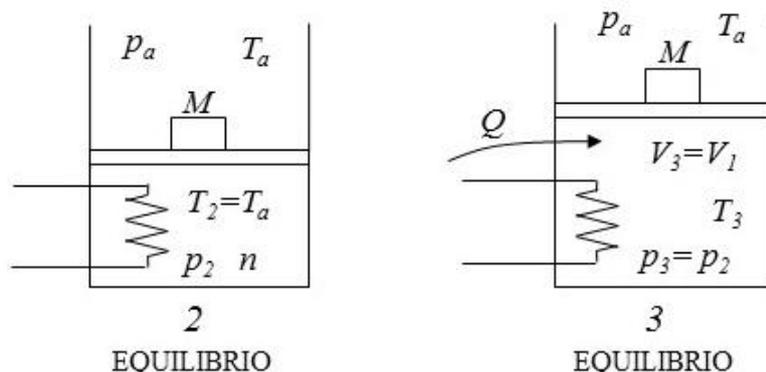
La temperatura final es, debido a la pared diatérmica:  $T_2 = T_a$

El volumen final es  $V_2 = \frac{nRT_a}{p_a + p_M}$

El trabajo realizado en este proceso irreversible a presión exterior constante:

$$W_{12} = - \int_{V_1}^{V_2} p_{ext} dV = - \int_{V_1}^{V_2} (p_a + p_M) dV = -(p_a + p_M)(V_2 - V_1) = -9.3 \text{ atm} \cdot l$$

Nota: En procesos irreversibles también son válidas las expresiones :  $Q = \Delta U - W$  y para gases ideales:  $\Delta U = nc_v(T_f - T_i)$  y  $\Delta S = nc_v \ln \frac{T_2}{T_1} + nR \ln \frac{V_2}{V_1}$



El segundo proceso es reversible (por tanto, se puede sustituir la presión exterior por la interior en la integral del trabajo  $p_{ext} = p_{interior}$ ), y además es a presión contante  $p_3 = p_2$

$$W_{23} = - \int p dV = -p\Delta V = -p_2(V_3 - V_2) = -(p_a + p_M)(V_1 - V_2)$$

Al ser el gas monoatómico  $c_v = (3/2)R$  y  $c_p = (5/2)R$ , y al ser un gas ideal se verifica que la variación de energía interna es sólo función de las temperaturas (válido para procesos reversibles e irreversibles):

$$\left. \begin{aligned} \Delta U &= nc_v(T_3 - T_2) = n\frac{3}{2}R(T_3 - T_a) \\ T_3 &= \frac{p_3V_3}{nR} = \frac{p_2V_1}{nR} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta U = n\frac{3}{2}R\left(\frac{p_2V_1}{nR} - \frac{p_aV_1}{nR}\right) = \frac{3}{2}p_MV_1$$

Aplicando el primer principio (válido para procesos reversibles o irreversibles):

$$Q = \Delta U - W = \frac{3}{2}p_MV_1 + (p_a + p_M)(V_1 - V_2) = 23.4 \text{ atm} \cdot l$$



## PROBLEMA RESUELTO 1.3

Un volumen de  $V_1 = 100 \text{ cm}^3$  de un gas biatómico, que está en equilibrio a una temperatura de  $t_1 = 10^\circ\text{C}$  y a  $p_1 = 10 \text{ atm}$  de presión, evoluciona de forma reversible hasta que la presión es de  $p_2 = 1 \text{ atm}$ . Calcular el trabajo realizado por el gas suponiendo que la transformación es:

- Isoterma.
- Adiabática.

Explique de forma cualitativa la diferencia entre los valores obtenidos.

## SOLUCIÓN 1.3

- Isoterma:

$$nRT = p_1V_1 = p_2V_{2i}$$

$$W_T = - \int p dV = - \int \frac{nRT}{V} dV = - \int_{V_1}^{V_{2i}} p_1V_1 \frac{dV}{V} = -p_1V_1 \ln \frac{V_{2i}}{V_1}$$

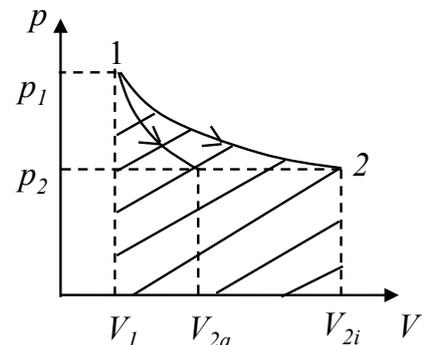
Utilizando la ecuación de los procesos:

$$p_1V_1 = p_2V_{2i} \Rightarrow \frac{V_{2i}}{V_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

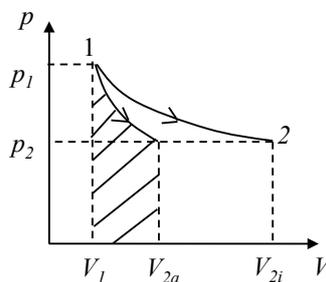
$$V_{2i} = V_1 \frac{p_1}{p_2} = 10V_1$$

$$W_T = -p_1V_1 \ln \frac{p_1}{p_2}$$

$$W_T = -2,30 \text{ atm} \cdot l$$



- Adiabática:



La ecuación del proceso es:

$$p_1V_1^\gamma = p_2V_{2a}^\gamma = pV^\gamma = k(\text{cte})$$

$$W_Q = - \int p dV = - \int_{V_1}^{V_{2a}} \frac{k}{V^\gamma} dV = - \frac{k V^{-\gamma+1}}{(1-\gamma)} \Big|_{V_1}^{V_{2a}} = - \frac{p_2 V_{2a}^\gamma V_{2a}^{-\gamma+1} - p_1 V_1^\gamma V_1^{-\gamma+1}}{(1-\gamma)}$$

$$W_Q = - \frac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{(1-\gamma)}$$

$$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_{2a}^\gamma \Rightarrow V_{2a} = V_1 \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \Rightarrow V_{2a} = 5.179 V_1$$

$$W_Q = -1.21 \text{ atm} \cdot l$$

La transformación isoterma se realiza en contacto con una fuente térmica y todo el calor absorbido se convierte en trabajo.

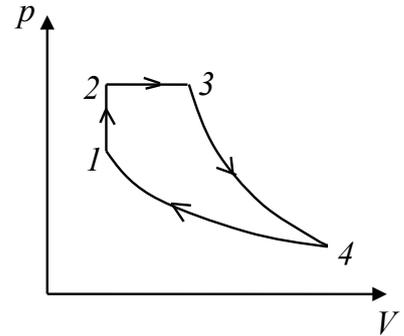
La transformación adiabática, sin intercambio de calor, realiza trabajo a costa de la energía interna del gas, este se enfría, su temperatura final es menor que en el caso anterior y el trabajo, que es igual al área bajo la curva de la transformación en el diagrama  $p - V$  (zona rayada), es menor en valor absoluto.



## PROBLEMA RESUELTO 1.4

Un gas perfecto biatómico describe el ciclo indicado en la figura, en el sentido indicado, definido por los siguientes procesos:  $1 \rightarrow 2$  a volumen constante,  $2 \rightarrow 3$  a presión constante,  $3 \rightarrow 4$  sin intercambio de calor con el ambiente,  $4 \rightarrow 1$  isoterma.

Del ciclo se conocen presión, volumen y temperatura en el punto 1 ( $p_1, V_1, T_1$ ), la presión en el punto 2 ( $p_2 = 1.5p_1$ ) y el volumen en el punto 4 ( $V_4 = 10V_3$ ).



Calcular:

- 1) Las coordenadas termodinámicas de los vértices del ciclo en función de  $p_1, V_1, T_1$
- 2) El calor absorbido por ciclo, en función de  $p_1 V_1$ .
- 3) El calor cedido por ciclo en función de  $p_1 V_1$ .
- 4) El valor numérico del rendimiento.

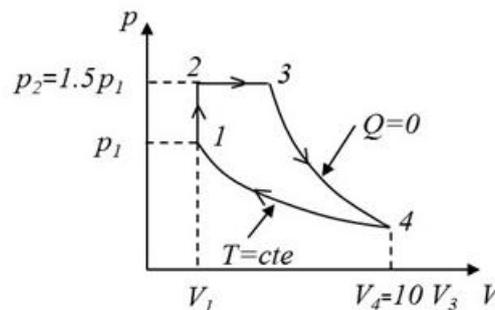
## SOLUCIÓN 1.4

1) Se trata de un gas biatómico con lo cual el índice adiabático, la capacidad calorífica molar a presión y a volumen constante son:

$$\gamma = \frac{7}{5}$$

$$c_p = \frac{7}{2}R$$

$$c_v = \frac{5}{2}R$$



Usamos en primer lugar las ecuaciones de los procesos para obtener todas las coordenadas termodinámicas de los vértices del ciclo:

En el proceso isocoro de 1 a 2 ( $p_2 = 1.5p_1$ ):

$$V_1 = V_2 \Rightarrow \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \Rightarrow T_2 = 1.5T_1$$

En el proceso isobara de 2 a 3:  $p_3 = p_2 = 1.5 p_1$

En el proceso adiabático de 3 a 4 ( $V_4 = 10V_3$ ):

$$p_3 V_3^\gamma = p_4 V_4^\gamma \Rightarrow 1.5 p_1 V_3^\gamma = p_4 \cdot 10^\gamma \cdot V_3^\gamma \Rightarrow p_4 = \frac{1.5}{10^\gamma} p_1 = 0.0597 p_1$$

En el proceso isoterma de 4 a 1:

$$p_1 V_1 = p_4 V_4 \Rightarrow V_4 = \frac{p_1}{p_4} V_1 = \frac{10^\gamma}{1.5} V_1 = 16.75 V_1$$

Dado que  $V_4 = 10V_3$  se tiene que:  $V_3 = \frac{10^{\gamma-1}}{1.5} V_1 = 1.675 V_1$

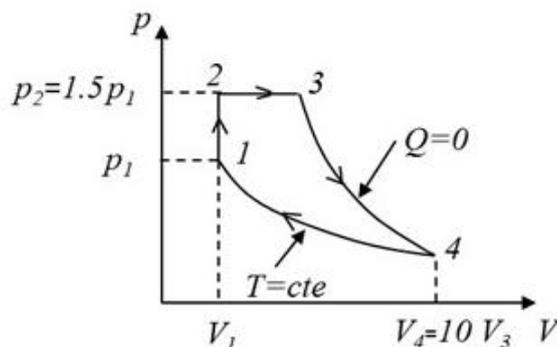
Faltaría por calcular la temperatura en el punto 3, imponiendo que se tiene el mismo número de moles:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_3 V_3}{T_3} \Rightarrow T_3 = T_1 \frac{p_3 V_3}{p_1 V_1} = T_1 \cdot 1.5 \cdot \frac{10^{\gamma-1}}{1.5} \Rightarrow T_3 = 10^{\gamma-1} T_1 = 2.51 T_1$$

Resumiendo:

	$p$	$V$	$T$
1	$p_1$	$V_1$	$T_1$
2	$1.5 p_1$	$V_1$	$1.5 T_1$
3	$1.5 p_1$	$1.675 V_1$	$10^{\gamma-1} T_1 = 2.51 T_1$
3	$1.5 \cdot 10^{-\gamma} p_1 = 0.0597 p_1$	$10 V_3 = 16.75 V_1$	$T_1$

*Datos en color rojo*



2) y 3) El calor absorbido por ciclo es el calor positivo, mientras que el calor cedido por ciclo es el calor negativo:

Por el primer principio y al tratarse de un gas ideal:

$$Q_{12} = \Delta U_{12} = n c_V (T_2 - T_1) = n \frac{5}{2} R (T_2 - T_1) = \frac{5}{2} (p_2 V_2 - p_1 V_1) = \frac{5}{4} p_1 V_1 > 0$$

En un proceso a presión constante, de un gas perfecto ( $c_p = cte$ ):

$$Q_{23} = n c_p (T_3 - T_2) = n \frac{7}{2} R (10^{\gamma-1} T_1 - 1.5 T_1) = \frac{7}{2} \cdot 1.01 \cdot n R T_1 = 3.54 p_1 V_1 > 0$$

Por el primer principio y al tratarse de una isoterma de un gas ideal:

$$(p_1V_1 = p_4V_4 = nRT_1)$$

$$Q_{41} = -W_{41} = \int_{V_4}^{V_1} p dV = \int_{V_4}^{V_1} \frac{nRT_1}{V} dV = p_1V_1 \int_{V_4}^{V_1} \frac{dV}{V} = p_1V_1 \ln \frac{V_1}{V_4} = p_1V_1 \ln \frac{1.5}{10^7} = -2.82 p_1V_1 < 0$$

$$Q_{ABS} = Q_{12} + Q_{23}$$

$$Q_{CED} = Q_{41}$$

4) En un ciclo, se tiene que el trabajo es igual al calor  $W = -Q$ . De esta manera podemos calcular el trabajo neto por ciclo como:  $W = -(Q_{ABS} + Q_{CED})$

El valor numérico del rendimiento es entonces:

$$\eta = \frac{|W|}{Q_{ABS}} = \frac{Q_{ABS} + Q_{CED}}{Q_{ABS}} = \frac{1.25 + 3.54 - 2.82}{1.25 + 3.54} = 0.41$$

$$\eta \approx 41 \%$$

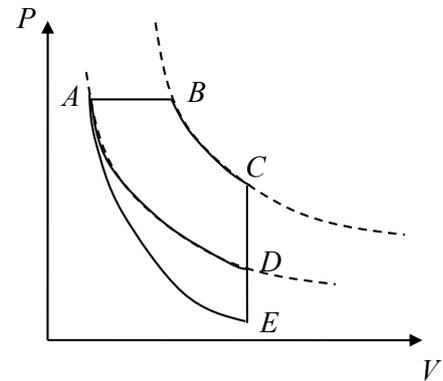


## PROBLEMA RESUELTO 1.5

Un gas perfecto monoatómico puede realizar dos ciclos:  $ABCD$  y  $ABCDEA$ .

Las condiciones de presión, volumen y temperatura en  $A$  ( $p_A, V_A, T_A$ ) son conocidas. Además se conocen los volúmenes en  $B$  ( $V_B = 2V_A$ ) y en  $C$  ( $V_C = 3V_A$ ).

$BC$  y  $DA$  son isothermas y  $EA$  es adiabática.



- 1) Indicar razonadamente, sin cálculos previos, cuál de los dos ciclos tiene mayor rendimiento.
- 2) Calcular, en función de los datos conocidos, las coordenadas termodinámicas del ciclo  $ABCD$  y el valor numérico de su rendimiento.

## SOLUCIÓN 1.5

1) En la fórmula del rendimiento intervienen todos los trabajos positivos y negativos, y sólo los calores positivos. Los ciclos son descritos en sentido horario.

$$\eta = \frac{|W_{neto}|}{Q_{Absorbido}}$$

- Los calores absorbidos, y por tanto, positivos son  $Q_{AB}$  (trabajo positivo e incremento de energía interna positivo) y  $Q_{BC}$  (trabajo positivo e igual al calor).
- Son negativos  $Q_{CD}$  o  $Q_{CE}$  (incremento de energía interna negativo, trabajo cero) y  $Q_{DA}$  (trabajo negativo, incremento de energía interna cero).
- Finalmente  $Q_{EA} = 0$ .

El trabajo neto coincide con el área encerrada en el ciclo y en el caso del ciclo  $ABCDEA$  es mayor en valor absoluto.

Notación: 1  $\Leftrightarrow ABCDA$  y 2  $\Leftrightarrow ABCDEA$ .

$$\eta_1 = \frac{|W_1|}{Q_{AB} + Q_{BC}}; \eta_2 = \frac{|W_2|}{Q_{AB} + Q_{BC}} \Rightarrow \text{como } |W_2| > |W_1| \Rightarrow \eta_2 > \eta_1$$

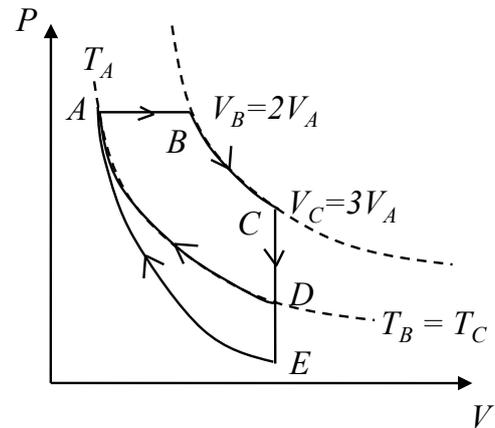
2) Entre  $A$  y  $B$  al tratarse de un proceso isóbaro  $p_B = p_A$ . Además imponemos que se conserva el número de moles:

$$\frac{p_A V_A}{T_A} = \frac{p_B V_B}{T_B} = \frac{p_A 2V_A}{T_B} \Rightarrow T_B = 2T_A$$

Como  $BC$  es isoterma:  $T_C = 2T_A$

Entre  $A$  y  $C$  imponemos que se conserva el número de moles:

$$\frac{p_A V_A}{T_A} = \frac{p_C V_C}{T_C} = \frac{p_C 3V_A}{2T_A} \Rightarrow p_C = \frac{2}{3}p_A$$



Como  $CD$  es isocora  $V_C = V_D$  e imponiendo la conservación del número de moles:

$$\frac{p_A V_A}{T_A} = \frac{p_D V_D}{T_D} = \frac{p_D 3V_A}{T_A} \Rightarrow p_D = \frac{p_A}{3}$$

Resumiendo:

	$p$	$V$	$T$
$A$	$p_A$	$V_A$	$T_A$
$B$	$p_A$	$2V_A$	$2T_A$
$C$	$(2/3)p_A$	$3V_A$	$2T_A$
$D$	$p_A/3$	$3V_A$	$T_A$
$E$		$3V_A$	

*Datos en color rojo*

## Trabajos y calores:

Isobara:

$$W_{AB} = -p_A(V_B - V_A) = -p_A V_A$$

Isoterma:

$$W_{BC} = -nRT_B \ln \frac{V_C}{V_B} = -nRT_B \ln \frac{3V_A}{2V_A} = -nR2T_A \ln \frac{3}{2} = -2p_A V_A \ln \frac{3}{2}$$

Isocora:

$$W_{CD} = 0$$

Isoterma:

$$W_{DA} = -nRT_D \ln \frac{V_A}{V_D} = -nRT_A \ln \frac{V_A}{3V_A} = -nRT_A \ln \frac{1}{3} = -p_A V_A \ln \frac{1}{3}$$

Isobara, dado que se trata de un gas perfecto monoatómico  $c_p = (5/2)R = cte$

$$Q_{AB} = n c_p \Delta T = n c_p (2T_A - T_A) = n c_p \frac{p_A V_A}{nR} = \frac{5}{2} p_A V_A$$

Isoterma:

$$Q_{BC} = -W_{BC} = 2p_A V_A \ln \frac{3}{2}$$

Llevando estos valores a la fórmula del rendimiento:

$$\eta_1 = \frac{|(W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA})|}{Q_{AB} + Q_{BC}}$$
$$\eta_1 = \frac{p_A V_A + 2p_A V_A \ln \frac{3}{2} + p_A V_A \ln \frac{1}{3}}{\frac{5}{2} p_A V_A + 2p_A V_A \ln \frac{3}{2}} = \frac{1 + 2 \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{1}{3}}{\frac{5}{2} + 2 \ln \frac{3}{2}} \approx 0.22$$



## PROBLEMA RESUELTO 1.6

$n$  moles de un gas ideal biatómico evolucionan, de forma reversible, según el siguiente ciclo:

1→2: Calentamiento isobárico desde la temperatura inicial  $T_1$  hasta  $T_2 = 3T_1$

2→3 Compresión isoterma.

3→1 Expansión adiabática, volviendo al estado inicial.

Determinar, en función de  $n$ ,  $R$  y  $T_1$ :

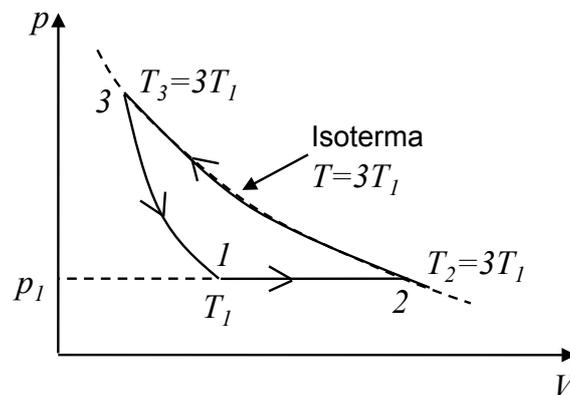
- 1) Trabajo desarrollado y calor absorbido en cada proceso.
- 2) Variación de energía interna y de entropía en cada proceso.
- 3) Representar el ciclo gráficamente, de forma cualitativa, en un diagrama pV.

## SOLUCIÓN 1.6

Para un gas biatómico, el índice diabático, la capacidad calorífica molar a presión y volumen constante son:

$$\gamma = 7/5 \quad c_p = 7R/2 \quad c_v = 5R/2$$

La gráfica p-V o de Clapeyron es (por Reech la pendiente de la adiabática es mayor que la de la isoterma):



- 1) Usamos en primer lugar las ecuaciones de los procesos.

Imponiendo que el número de moles es idéntico y la igualdad de la presión entre los puntos 1 y 2 se tiene que:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} = \frac{p_1 V_2}{3T_1} \Rightarrow V_2 = 3V_1$$

Entre los puntos 1 y 3 imponemos que tenemos un proceso adiabático y que  $T_3 = 3T_1$ :

$$T_3 V_3^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1} \Rightarrow 3V_3^{\gamma-1} = V_1^{\gamma-1} \Rightarrow V_3 = V_1 / 3^{1/\gamma-1} = V_1 / 3^{5/2}$$

A partir de las dos ecuaciones anteriores:

$$V_3 = V_2 / (3 \cdot 3^{1/\gamma-1}) = V_2 / (3^{\gamma/\gamma-1}) = V_2 / (3^{\gamma/\gamma-1}) = V_2 / 3^{7/2}$$

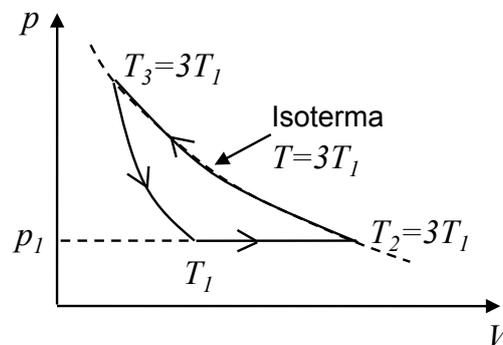
Si queremos saber  $p_3$ :

$$p_3 = \frac{nRT_3}{V_3} = \frac{nR3T_1}{V_1/3^{5/2}} = p_1 3^{7/2}$$

Resumiendo:

	$p$	$V$	$T$
1	$p_1?$	$V_1?$	$T_1$
2	$p_1$	$3V_1$	$3T_1$
3	$3^{7/2} p_1$	$V_1/3^{5/2}$	$3T_1$

*Datos en color rojo*



Calculamos el trabajo y el calor en el proceso isóbaro que va desde el punto 1 hasta el 2:

$$W_{12} = -p_1(V_2 - V_1) = -nRT_2 + nRT_1 = -nR3T_1 + nRT_1 = -2nRT_1$$

$$Q_{12} = nc_p(T_2 - T_1) = nc_p(3T_1 - T_1) = nc_p 2T_1 = 7nRT_1$$

Calculamos el trabajo y el calor en el proceso isotermo que va desde el punto 2 hasta el 3:

$$Q_{23} = -W_{23} = nRT_2 \ln \frac{V_3}{V_2} = 3nRT_1 \ln \frac{1}{3^{(7/2)}} = -\frac{21}{2}nRT_1 \ln 3$$

Calculamos el trabajo y el calor en el proceso adiabático que va desde el punto 3 hasta el 1 ( $c_V = (5/2)R$ ):

$$Q_{31} = 0; \quad W_{31} = \Delta U_{31} = nc_V(T_1 - T_3) = -5nRT_1$$

2) La variación de energía interna en los procesos es:

$$\Delta U_{12} = Q_{12} + W_{12} = 5nRT_1 ; \quad \Delta U_{23} = 0 ; \quad \Delta U_{31} = -5nRT_1$$

Calculamos la variación de entropía a partir de la integral de  $\delta q/T$  (recordando que sólo vale si el proceso debe ser reversible):

Isobara:

$$\Delta S_{12} = \int \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{nc_p dT}{T} = nc_p \ln \frac{T_2}{T_1} = \frac{7}{2}nR \ln 3$$

Isoterma:

$$\Delta S_{23} = \int \frac{\delta Q}{T} = \frac{1}{T} \int \delta Q = \frac{Q_{23}}{3T_1} = -\frac{7}{2}nR \ln 3$$

Adiabática:

$$\Delta S_{31} = 0$$

3) La gráfica  $p - V$  es la que aparece al comienzo de la página



## PROBLEMA RESUELTO 1.7

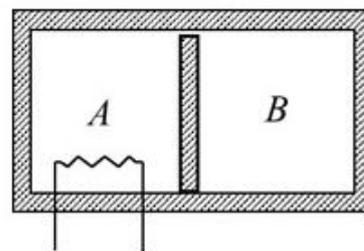
El recipiente de la figura, aislado térmicamente, está dividido en dos partes por un embolo también aislante que puede deslizarse sin rozamiento.

Cada cámara contiene  $n$  moles de un gas perfecto biatómico y en el instante inicial las condiciones de presión, volumen y temperatura de ambas cámaras son  $p_0, V_0, T_0$ .

Se comunica calor lentamente a la cámara A hasta que su volumen aumenta a  $V_{A1} = 1.5V_0$ .

Calcular, en función de  $p_0, V_0$ :

- 1) Condiciones finales de presión, volumen y temperatura en la cámara B:  $p_{B1}, V_{B1}$ , y  $T_{B1}$ .
- 2) Condiciones finales de presión y temperatura en la cámara A:  $p_{A1}$  y  $T_{A1}$ .
- 3) Trabajo realizado sobre el gas en B.
- 4) Calor suministrado al gas contenido en A.



## SOLUCIÓN 1.7

1) En B el proceso es adiabático y al ser el gas biatómico:  $\gamma = 7/5 = 1.4$ . El sistema verifica la ligadura:  $V_A + V_B = 2V_0$ .

Por tanto, en el estado final:  $V_{B1} = 0.5V_0$  ya que  $V_{A1} = 1.5V_0$

Usamos la ecuación de una adiabática:

$$p_0 V_0^\gamma = p_{B1} V_{B1}^\gamma \Rightarrow p_{B1} = p_0 \left( \frac{V_0}{V_{B1}} \right)^\gamma = 2^\gamma p_0 \Rightarrow p_{B1} = 2^\gamma p_0 = 2.64 p_0$$

Por conservación del número de moles:

$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{p_{B1} V_{B1}}{T_{B1}} \Rightarrow T_{B1} = T_0 \frac{p_{B1} V_{B1}}{p_0 V_0} = T_0 2^\gamma \frac{1}{2} = T_0 2^{\gamma-1} \Rightarrow T_{B1} = 1.32 T_0$$

2) El proceso A es tal que:  $V_A + V_B = 2V_0$  y  $p_A = p_B$  dado que la pared que separa las dos cámaras es móvil.

$$V_{A1} = 1.5V_0 = \frac{3}{2}V_0 ; p_{A1} = p_{B1} = 2.64 p_0$$

Por conservación del número de moles:

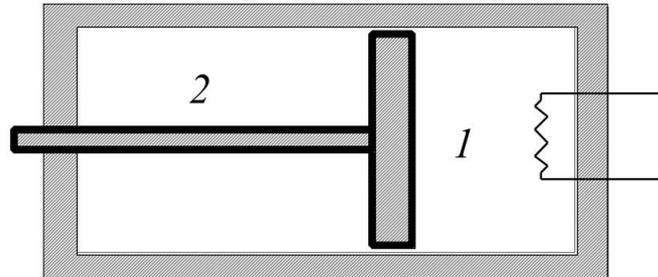
$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{p_{A1} V_{A1}}{T_{A1}} \Rightarrow T_{A1} = T_0 \frac{p_{A1} V_{A1}}{p_0 V_0} = T_0 2^\gamma \frac{3}{2} \Rightarrow T_{A1} = T_0 2^{\gamma-1} 3 = 3.96 T_0$$



## PROBLEMA RESUELTO 1.8

Un instrumento de control está compuesto por un cilindro con un émbolo móvil que lo separa en dos cámaras.

Tanto las paredes del cilindro como el émbolo están térmicamente aislados.



Las variables termodinámicas iniciales del gas ideal encerrado en ambas cámaras son las siguientes:

	presión	temperatura	volumen	moles	$\gamma$
cámara 1	$p_0$	$T_0$	$V_0$	$n$	1.5
cámara 2	$p_0$	$T_0$	$2V_0$	$2n$	1.5

Mediante una resistencia se comunica calor a la cámara 1 hasta que la cámara 2 tiene un volumen  $\frac{9V_0}{16}$ , por desplazamiento del émbolo sin rozamiento.

Obtener, en función de  $n$ ,  $c_V$  (calor específico a volumen constante) y  $T_0$ :

- 1) Temperatura final en la cámara 2.
- 2) Trabajo realizado contra el gas de la cámara 2.
- 3) Temperatura final en la cámara 1.
- 4) Calor recibido por el gas en la cámara 1.
- 5) Trabajo total realizado por el sistema formado por el gas de ambas cámaras.

## SOLUCIÓN 1.8

1) El gas de la cámara 2 sufre un proceso adiabático ya que no recibe calor. Aplicando la ecuación de un proceso adiabático:

$$TV^{\gamma-1} = cte \Rightarrow T_0(2V_0)^{\gamma-1} = T_2\left(\frac{9V_0}{16}\right)^{\gamma-1} \Rightarrow T_2 = T_0\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

2) Aplicamos el primer principio al gas en la cámara 2. El trabajo recibido por el gas en la cámara 2 es:

$$W_2 - \Delta U_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad W_2 = -2nc_V(T_0 - T_2) = -2nc_V T_0 \frac{3 - 4\sqrt{2}}{3} > 0$$

$$W_2 = -2nc_V T_0 \frac{4\sqrt{2} - 3}{3}$$

3) La ecuación de estado del gas y la ligadura interna nos permite obtener el estado final de los gases en las cámaras:

$$\left. \begin{array}{l} p_1 V_1 = nRT_1 \\ p_2 V_2 = 2nRT_2 \end{array} \right\} \text{Dividiendo} \quad \frac{T_1}{2T_2} = \frac{p_1 V_1}{p_2 V_2} \quad (1.1)$$

Del equilibrio del émbolo se obtiene:  $p_1 = p_2 = p$

Los volúmenes son:  $V_2 = \frac{9V_0}{16}$        $V_1 = 3V_0 - V_2$

Sustituyendo en (1.1):

$$T_1 = \frac{26}{3} T_2 = \frac{26}{3} \frac{4\sqrt{2}}{3} T_0 \rightarrow T_1 = \frac{104\sqrt{2}}{9} T_0$$

4) El primer principio aplicado al gas en la cámara 1 y teniendo en cuenta que el trabajo que realiza el gas 1 es el mismo que recibe el gas 2:

$$Q_1 = \Delta U_1 - W_1 = \Delta U_1 + W_2 = nc_V(T_1 - T_0) + 2nc_V T_0 \frac{4\sqrt{2} - 3}{3}$$

Y sustituyendo el valor de  $T_1$  se obtiene:

$$Q_1 = \left( \frac{128\sqrt{2}}{9} - 3 \right) nc_V T_0$$

5)

$$V_1 + V_2 = V_{TOTAL} \rightarrow dV_1 + dV_2 = 0 \rightarrow pdV_1 + pdV_2 = p_1 dV_1 + p_2 dV_2 = \delta W_1 + \delta W_2 = 0$$

$$W_{TOTAL} = W_1 + W_2 = 0$$



## PROBLEMA RESUELTO 1.9

Un motor reversible de Carnot funciona entre dos focos de temperaturas  $T_1 = 1000K$  y  $T_2 = 300K$ . El calor que se le suministra a  $1000K$  es  $Q_1 = 1000kJ$ .

Una máquina frigorífica de Carnot funciona entre el foco de temperatura  $T_2 = 300K$  y otro de temperatura  $T_3 = 250K$ . El calor cedido desde esta máquina al foco de  $300K$  es  $Q_{F2} = 2700kJ$

Parte del trabajo del motor se utiliza para accionar la máquina frigorífica.

- 1) Calcular el porcentaje del trabajo motor que se utiliza para mover la máquina frigorífica.
- 2) Si la máquina frigorífica reversible se sustituye por otra real cuya eficiencia es el 80 % de la reversible, calcular el trabajo a suministrar para que esta máquina real funcione proporcionando el mismo calor  $Q_{F2}$  al foco a temperatura  $T_2$ .

## SOLUCIÓN 1.9

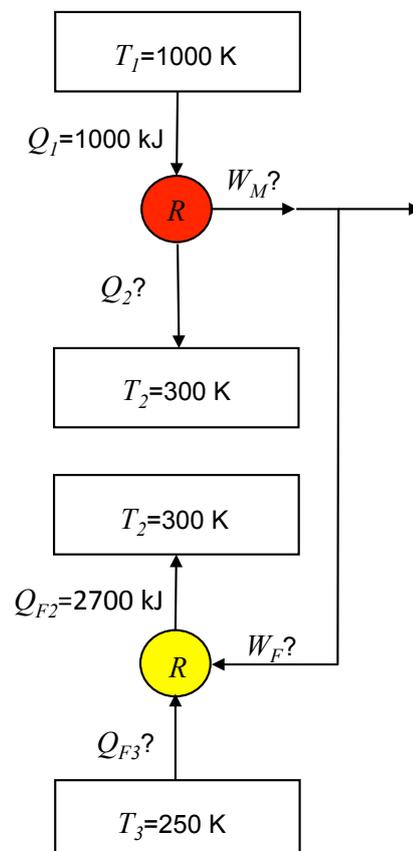
- 1) El rendimiento de un motor de Carnot es:

$$\eta_M = 1 - \frac{T_2}{T_1} = \frac{7}{10}$$

Del rendimiento se puede obtener el trabajo realizado por el motor:

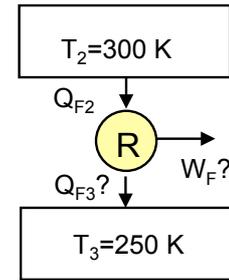
$$\eta_M = \frac{|W_M|}{Q_1} \Rightarrow \frac{7}{10} = \frac{|W_M|}{1000kJ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_M = -700kJ$$



El rendimiento de la máquina frigorífica funcionando como motor térmico es:

$$\left. \begin{aligned} \eta &= 1 - \frac{250}{300} = \frac{1}{6} \\ \eta &= \frac{|W_F|}{Q_{F2}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{6} = \frac{|W_F|}{2700}$$



Por lo tanto, el trabajo realizado por la máquina frigorífica funcionando como motor es:

$$W_F = -450 \text{ kJ}$$

En consecuencia, el porcentaje del trabajo del motor de Carnot que se utiliza para mover la máquina frigorífica es  $W_F = -450 \text{ kJ} = -64.3\%$  de  $W_M$

2) La eficiencia de la máquina frigorífica es:

$$e = \frac{Q_{F3}}{|W_F|} = \frac{|Q_{F2}| - |W_F|}{|W_F|} = \frac{2700 - 450}{450} = 5$$

También:

$$e = \frac{Q_{F3}}{|W_F|} = \frac{Q_{F3}}{|Q_{F2}| - |Q_{F3}|} = \frac{1}{\frac{|Q_{F2}|}{|Q_{F3}|} - 1} = \frac{1}{\frac{T_2}{T_3} - 1} = \frac{T_3}{T_2 - T_3} = 5$$

La eficiencia de la nueva máquina es:

$$e' = 0.8 e = 0.8 \times 5 = 4$$

$$e' = \frac{|Q_{F2}| - |W'_F|}{|W'_F|} \Rightarrow 4 |W'_F| = 2700 - |W'_F|$$

El trabajo que debemos suministrar ahora a la máquina frigorífica es:

$$W'_F = 540 \text{ kJ}$$

