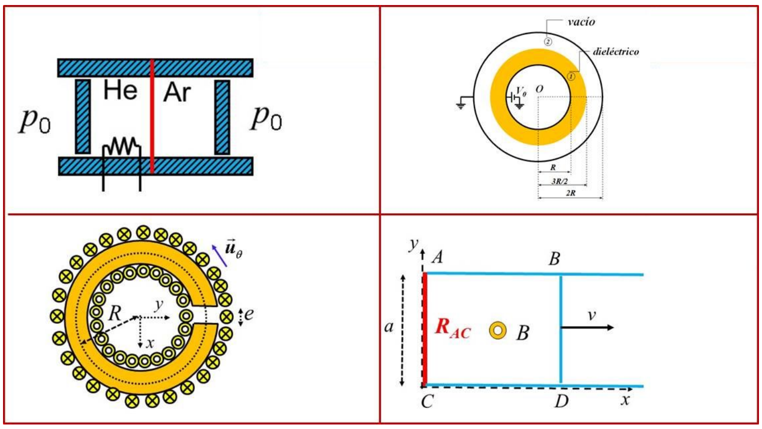
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO

FÍSICA II

PROBLEMAS RESUELTOS

José Carlos JIMÉNEZ SÁEZ
Santiago RAMÍREZ DE LA PISCINA MILLÁN



2.- OPERADORES DIFERENCIALES

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

2 Operadores Diferenciales

PROBLEMA RESUELTO 2.1

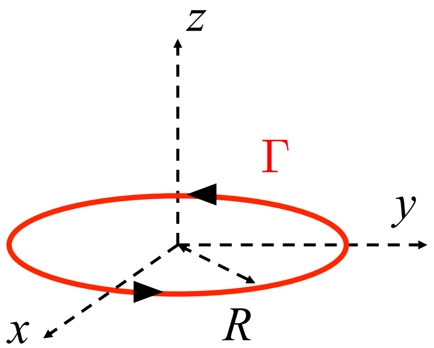
Dado el campo vectorial $\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ siendo $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$ y $\vec{r}$ el vector de posición.
Se pide:

1) El gradiente del módulo.

2) La divergencia del campo.

3) El rotacional del campo.

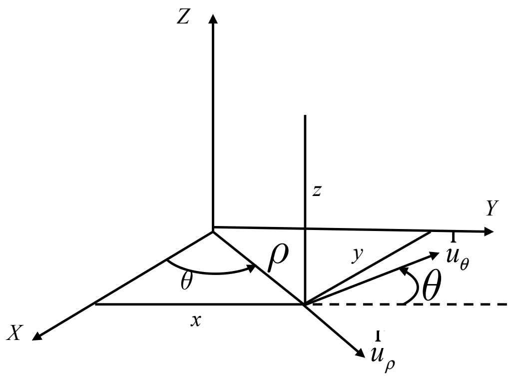
4) Calcular el flujo del rotacional de $\vec{V}$ a través de la superficie encerrada por la circunferencia Γ de la figura, de radio R y centrada en el origen. El sentido de recorrido de la circunferencia determina el sentido del diferencial de superficie de acuerdo con la regla de sacacorchos.



5) Verificar que se cumple el teorema de Stokes.

SOLUCIÓN 2.1

La expresión del campo en función de coordenadas cartesianas es:



$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = \omega\left(-y\vec{\imath} + x\vec{\jmath}\right)$$

Calculamos el módulo $\left|\vec{V}\right| = \omega\sqrt{y^2 + x^2}$

Utilizando coordenadas cartesianas:

$$\nabla\left|\vec{V}\right| = \frac{\partial\left|\vec{V}\right|}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial\left|\vec{V}\right|}{\partial x}\vec{\jmath} = \omega\frac{(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath})}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$$

Se puede obtener en coordenadas cilíndricas: $\left|\vec{V}\right| = \omega\sqrt{y^2+x^2} = \omega\rho$

$\nabla\left|\vec{V}\right| = \frac{\partial\left|\vec{V}\right|}{\partial\rho}\vec{u}_\rho = \omega\vec{u}_\rho$ donde el unitario radial de coordenadas cilíndricas es:

$$\vec{u}_\rho = \cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath} = \frac{x}{\rho}\vec{\imath} + \frac{y}{\rho}\vec{\jmath} = \frac{(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath})}{(x^2+y^2)^{1/2}}$$

Las superficies equiescalares son cilindros cuyo eje de simetría coincide con el eje Oz. El gradiente es normal a las superficies equiescalares. Por tanto lleva la dirección del unitario radial de coordenadas cilíndricas.

$$\left|\vec{V}\right| = \omega\sqrt{y^2+x^2} = \omega\rho = cte$$

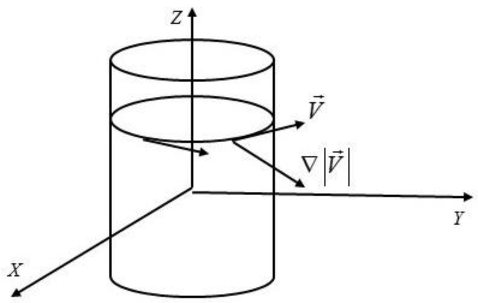
Obtenemos la divergencia en coordenadas cartesianas:

$$\nabla\cdot\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0$$

Es pues un campo solenoidal que carece de fuentes (puntos donde nacen líneas de campo). Expresado en coordenadas cilíndricas el campo quedaría:

$$\vec{V} = \omega(-\rho\sin\theta\vec{\imath} + \rho\cos\theta\vec{\jmath}) = \omega\rho\vec{u}_\theta$$

Por tanto las líneas de campo giran en torno al eje Oz.



El rotacional en coordenadas cartesianas es:

$$\nabla\times\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = 2\omega\vec{k}$$

No es un campo conservativo.

Calculamos el flujo a través de la circunferencia centrada en el origen. El área encerrada más simple es la del círculo. El diferencial de superficie en este círculo es: $d\vec{S} = dS\vec{k}$

Dado que el rotacional es constante, el flujo queda:

$$\phi = \int_S \nabla\times\vec{V}\cdot d\vec{S} = \nabla\times\vec{V}\cdot\vec{S} = 2\omega S = 2\omega\pi R^2$$

El teorema de Stokes afirma que el flujo del rotacional es igual a la circulación del campo. Al tratarse de una circunferencia usamos coordenadas cilíndricas: $d\vec{l} = Rd\theta\vec{u}_\theta$

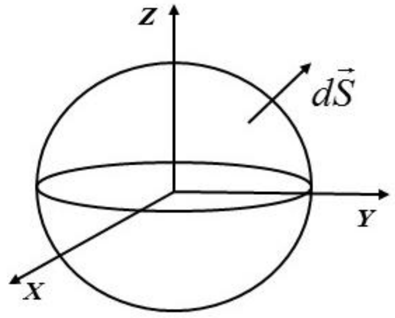
$$\int_S \nabla\times\vec{V}\cdot d\vec{S} = \oint_\Gamma \vec{V}\cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} \omega R\vec{u}_\theta R d\theta\vec{u}_\theta = 2\pi\omega R^2$$

El sentido de giro de la curva Γ determina los límites de integración de 0 a 2π.

PROBLEMA RESUELTO 2.2

Sea el campo el vectorial $\vec{A} = a(4x + 2y + 3z)\vec{\imath} + 7b\sin(xz)\vec{\jmath} + c(-z + y)\vec{k}$

Calcular el flujo a través de la superficie de una esfera de radio R centrada en el origen (superficie S y volumen V).



SOLUCIÓN 2.2

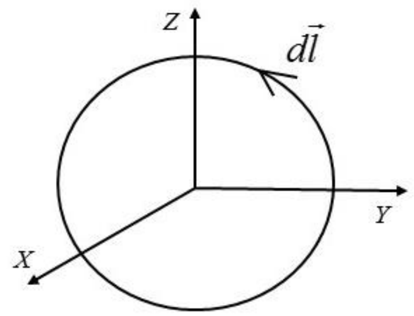
Utilizamos el teorema de la divergencia:

$$\int_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla\vec{A} \cdot dV = \int_V (4a - c) \cdot dV = (4a - c)V = (4a - c)\frac{4}{3}\pi R^3$$

PROBLEMA RESUELTO 2.3

Dado el campo vectorial $\vec{A} = a\cos x\vec{\imath} + b(y - z)\vec{\jmath} + c8z\vec{k}$.

Calcular su circulación en la circunferencia Γ de la figura de radio R, situada en el plano $x = 0$, y cuyo centro coincide con el origen. El sentido de circulación se muestra en la figura.



SOLUCIÓN 2.3

Utilizamos el teorema de Stokes. Calculamos el rotacional del campo vectorial.

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a\cos x & b(y - z) & 8cz \end{vmatrix} = b\vec{\imath}$$

La superficie más simple encerrada es la del círculo. El sentido del diferencial de superficie que corresponde de acuerdo a la regla del sacacorchos al sentido de circulación es: $d\vec{S} = dS\vec{\imath}$.

$$\oint_\Gamma \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_S b\vec{\imath} \cdot dS\vec{\imath} = bS = b\pi R^2$$

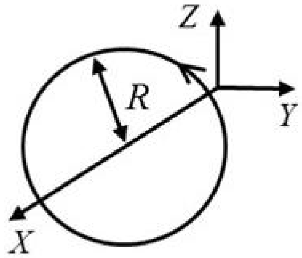
PROBLEMA RESUELTO 2.4

Dado el campo vectorial $\vec{H} = a\vec{r}$ siendo $\vec{r}$ el vector de posición y una circunferencia de radio R, situada en el plano $x = x_0$, y cuyo centro coincide con el eje Ox (véase figura).

Se pide:

1) El flujo a través de la superficie abarcada por la circunferencia.

2) Su circulación a lo largo de la circunferencia.



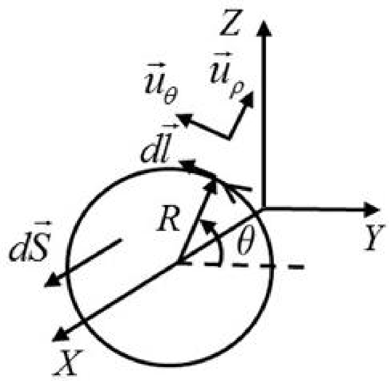
SOLUCIÓN 2.4

El campo en coordenadas cartesianas queda:

$$\vec{H} = a\vec{r} = a(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k})$$

Calculamos el flujo a través de la espira teniendo en cuenta que el diferencial de superficie es: $d\vec{S} = dS\vec{\imath}$

$$\int_S \vec{H} \cdot d\vec{S} = \int_S a x_0 dS = a x_0 \pi R^2$$



Para calcular la circulación utilizamos coordenadas cilíndricas dado que su geometría es la que mejor se adapta a la curva:

$$d\vec{l} = R d\theta \vec{u}_\theta$$

siendo: $\vec{u}_\theta = -\sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath}$ el versor azimutal de las coordenadas cilíndricas.

El campo en coordenadas cilíndricas es:

$$\vec{H} = a\vec{r} = a(x\vec{\imath} + R\vec{u}_\rho) = a(x\vec{\imath} + R\cos\theta\vec{\jmath} + R\sin\theta\vec{k})$$

La circulación resulta:

$$\oint_\Gamma \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0$$

PROBLEMA RESUELTO 2.5

Dado el campo vectorial $\vec{H} = -4ax\vec{\imath} - 16by\vec{\jmath}$, probar que es un campo conservativo.

Calcular el potencial del que deriva ($\vec{H} = \nabla\phi$).

Obtener la integral de línea entre los puntos (0,1,0) y (2,-1,0).

SOLUCIÓN 2.5

Para probar que es conservativo obtenemos el rotacional y comprobamos que es cero:

$$\nabla \times \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -4ax & -16by & 0 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

Para obtener el potencial podemos aplicar dos métodos.

- El primero resuelve las ecuaciones:

$$-4ax = \frac{\partial\phi}{\partial x} \rightarrow \phi = \int -4axdx = -2ax^2 + C_1(y,z)$$

$$-16by = \frac{\partial\phi}{\partial y} \rightarrow \phi = \int -16bydy = -8by^2 + C_2(x,z)$$

  Las constantes se obtienen por tanteo para lograr que se cumpla la ecuación: $\vec{H} = \nabla\phi$.

$$\phi = -2ax^2 - 8by^2 + C$$

  La constante C no depende de las coordenadas.

- Otro método para obtener el potencial es utilizando la integral de línea. Asignamos al origen el potencial ϕ_0.

$$\phi = \phi(0,0,0) + \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} \vec{H}\cdot d\vec{r} = \phi_0 + \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} (-4axdx - 16bydy) = \phi_0 - 2ax^2 - 8by^2$$

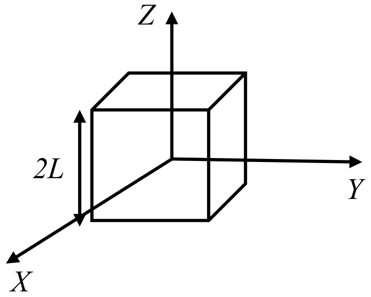
  Para calcular la integral de línea entre dos puntos utilizamos el potencial:

$$\int_{(0,1,0)}^{(2,-1,0)} \vec{H}\cdot d\vec{r} = \int_{(0,1,0)}^{(2,-1,0)} \nabla\phi\cdot d\vec{r} = \int_{(0,1,0)}^{(2,-1,0)} d\phi = \phi(2,-1,0) - \phi(0,1,0)$$

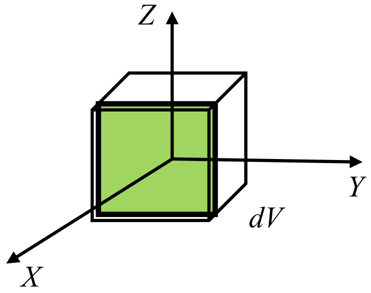
$$\int_{(0,1,0)}^{(2,-1,0)} \vec{H}\cdot d\vec{r} = -8a - 8b + 8b = -8a$$

PROBLEMA RESUELTO 2.6

Dado el campo vectorial $\vec{H} = -ax^3\vec{\imath}+2by\vec{\jmath}+3bz\vec{k}$. Probar que se verifica el teorema de la divergencia en un cubo de lado 2L cuyo centro geométrico se encuentra en el origen de coordenadas.



SOLUCIÓN 2.6



Calculamos la divergencia del campo:

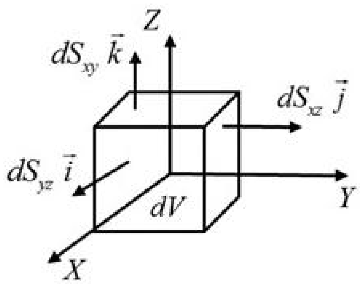
$$\nabla \cdot \vec{H} = \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial y} = -3ax^2 + 5b$$

La integral de volumen de la divergencia se calcula usando un diferencial de volumen que dependa exclusivamente de x ya que así lo hace la divergencia:

$$dV = (2L)(2L)dx$$

De esta manera la integral tiple se convierte en una integral de una única variable:

$$\int_V \nabla \cdot \vec{H} dV = \int_{-L}^{L} (-3ax^2 + 5b)4L^2 dx = -8L^5 a + 40L^3 b$$



Para calcular el flujo debemos tener en cuenta las seis caras del cubo y diferenciales de superficie en cada una de esas seis caras. Dado que el campo es constante en cada una de esas caras tomamos diferenciales genéricos:

$$d\vec{S} = dS_{yz}\vec{\imath};\ d\vec{S} = dS_{yz}(-\vec{\imath});\ d\vec{S} = dS_{xz}\vec{\jmath}$$

$$d\vec{S} = dS_{xz}(-\vec{\jmath});\ d\vec{S} = dS_{xy}\vec{k};\ d\vec{S} = dS_{xy}(-\vec{k})$$

Los diferenciales de superficie apuntan en cada cara hacia fuera de la misma.
El flujo a través del cubo sería:

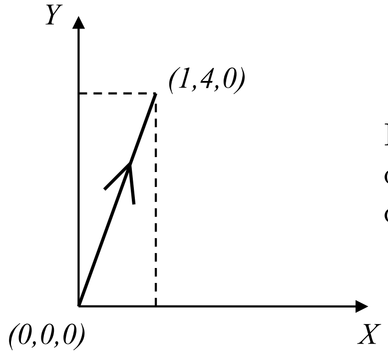
$$\phi = \int_S \vec{H} \cdot d\vec{S}$$

Integrando separadamente para cada cara y haciendo los productos escalares quedaría:

$$\phi = \int -aL^3 dS_{xy} + \int -aL^3 dS_{xy} + \int 2LbdS_{yz} + \int 2LbdS_{yz} + \int 3LbdS_{yz} + \int 3LbdS_{yz}$$

$$\phi = -8aL^5 + 16L^3 b + 24L^3 b = -8aL^5 + 40L^3 b$$

PROBLEMA RESUELTO 2.7



Dado el campo vectorial $\vec{H} = axy\vec{\imath} + bx^3\vec{\jmath} + cz^2\vec{k}$, calcular la integral de línea entre los puntos $(0,0,0)$ y $(1,4,0)$ a lo largo de la recta que une los dos puntos.

SOLUCIÓN 2.7

Calculamos la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos mencionados: $y = ax + b$

Imponiendo las condiciones:$y(x=1) = 4,\ y(x=0) = 0$ se tiene: $y = 4x; \quad z = 0.$

Realizamos la integración utilizando coordenadas cartesianas:

$$d\vec{l} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}$$

$$\int \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int axydx + \int bx^3dy$$

Sustituimos que el $dy = 4dx$, de manera que:

$$\int \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_0^1 ax^2 4dx + \int_0^1 bx^3 4dx = \frac{4}{3}a + b$$

Obsérvese que el sentido de recorrido va en los límites de integración, de esta manera si se pidiera la integral de línea del camino de $(1,4,0)$ a $(0,0,0)$ se debería haber hecho:

$$\int \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_1^0 ax^2 4dx + \int_1^0 bx^3 4dx = \frac{4}{3}a + b$$

Para curvas más complejas definidas por un parámetro se recurre al siguiente procedimiento:
$\begin{cases} y = 4t \\ x = t \\ z = 0 \end{cases}$ donde t es el parámetro que en este caso variaría de 0 a 1 para recorrer la curva.

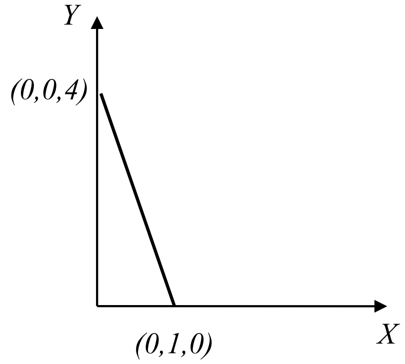
Los diferenciales quedarían: $\begin{cases} dy = 4dt \\ dx = dt \\ dz = 0 \end{cases}$. Sustituyendo en la integral:

$$\int \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int axydx + \int bx^3dy = \int_{t=0}^{t=1} a4t^2dt + \int_0^1 b4t^3dt = \frac{4a}{3} + 4b$$

PROBLEMA RESUELTO 2.8

Dado el campo vectorial $\vec{H} = a\,z\,y\,\vec{\imath}$, calcular el flujo a través del triángulo de la figura situado en el plano $x = 0$ y que corta el eje Oy en el punto $y = 1$ y el Oz en el punto $z = 4$. Considérese positivo el flujo en el sentido positivo del eje Ox.

Realícese el mismo ejercicio para el campo $\vec{H} = a\,y\,\vec{\imath}$.



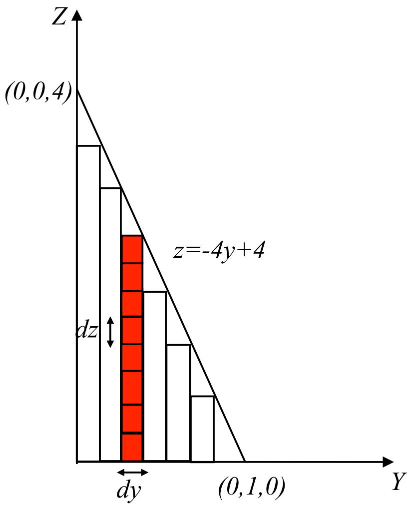
SOLUCIÓN 2.8

La dificultad en este caso estriba en que no es posible elegir como diferencial de superficie ni $d\vec{S} = y\,dz\,\vec{\imath}$ ni $d\vec{S} = z\,dy\,\vec{\imath}$ pues el campo depende tanto de la variable z como de la variable y. Por tanto en este caso el diferencial de superficie debe ser:

$$d\vec{S} = dz\,dy\,\vec{\imath}$$

Por tanto debemos resolver:

$$\int_S \vec{H} \cdot d\vec{S} = \int_S a\,z\,y\,dzdy$$



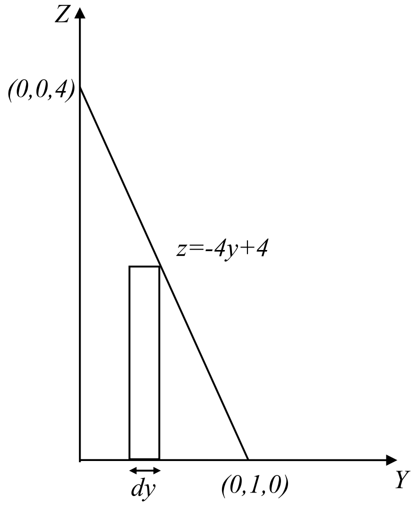
La ecuación que delimita el lado inclinado del triángulo es: $z = -4y + 4$ (Esta ecuación se calcula partiendo de una genérica $z = ay + b$ e imponiendo que $z(y = 0) = 4$ y $z(y = 1) = 0$).

Procederemos integrando la variable z en primer lugar y luego la y, aunque se puede proceder también a la inversa (teorema de Fubini). Para una determinada posición y la variable z toma valores entre 0 y $-4y + 4$. La variable y debe tomar todos los valores posibles para reconstruir el triángulo, por tanto, debe variar entre 0 y 1.

La integración en el flujo siempre se hace de menor a mayor.

$$\int\limits_S \vec{H} \cdot d\vec{S} = \int\limits_0^1 aydy \int\limits_0^{-4y+4} zdz = \int\limits_0^1 \frac{aydy}{2}(-4y+4)^2 = \int\limits_0^1 8aydy(1 + y^2 - 2y)$$

$$\int\limits_S \vec{H} \cdot d\vec{S} = \int\limits_0^1 8ady(y + y^3 - 2y^2) = a(6 - \frac{16}{3}) = \frac{2a}{3}$$

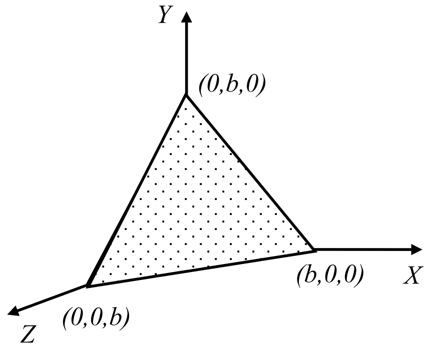


Si el campo es $\vec{H} = a\,z\,y\,\vec{\imath}$ se puede tomar como diferencial de superficie: $d\vec{S} = z\,dy\,\vec{\imath}$ ya que en todos los puntos de dicho diferencial el campo toma el mismo valor, de manera que:

$$\int_S \vec{H} \cdot d\vec{S} = \int_0^1 ayzdy = \int_0^1 ay(-4y+4)dy = \int_0^1 4a(-y^2+y)dy$$

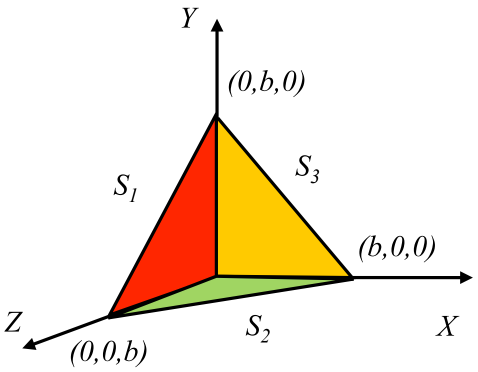
$$\int_S \vec{H} \cdot d\vec{S} = 4a(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}) = \frac{2a}{3}$$

PROBLEMA RESUELTO 2.9



Dado el campo vectorial $\vec{H} = ax\vec{\imath} + cx\vec{k}$, calcular el flujo a través de la superficie S del triángulo de la figura que corta a los ejes coordenados en los puntos $(b, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ y $(0, 0, b)$. Calcular la circulación a lo largo del contorno Γ de dicha superficie suponiendo que se recorre antihorariamente desde el punto de vista de observación de la figura.

SOLUCIÓN 2.9



Para obtener la solución y ante la dificultad de parametrizar el diferencial de superficie, si no es por cambio de coordenadas, optamos por aplicar el teorema de Gauss (o de la divergencia) a un volumen V definido por las caras planas triangulares contenidas en los planos coordenados que determinan los puntos $(0, 0, 0)$, $(b, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ y $(0, 0, b)$ además de la superficie dada.

La divergencia del campo es: $\nabla \cdot \vec{H} = a$

La integral de volumen resulta:

$$\int_V \nabla \cdot \vec{H} dV = aV = a\frac{1}{3}(Area\, base)Altura = a\frac{1}{6}b^3$$

El flujo del campo a través de las tres superficies de la figura de diferenciales:

$$d\vec{S}_1 = dS_1(-\vec{\imath})$$

$$d\vec{S}_2 = dS_2(-\vec{\jmath})$$

$$d\vec{S}_3 = dS_3(-\vec{k})$$

Resulta ser:

$$\phi_1 = \int_{S_1} \vec{H} \cdot d\vec{S}_1 = \int_{S_1} 0 dS_1 = 0$$

$$\phi_2 = \int_{S_2} \vec{H} \cdot d\vec{S}_2 = \int_{S_2} 0 dS_2 = 0$$

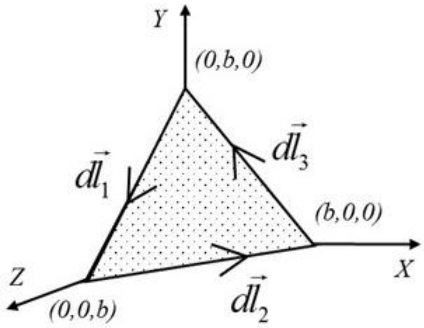
$$\phi_3 = \int_{S_3} \vec{H} \cdot d\vec{S}_3 = -\int_{S_3} cxydx = -\int_0^b cx(-x+b)dx = \int_0^b c(x^2-bx)dx = c\frac{b^3}{3} - c\frac{b^3}{2} = -cb^3\frac{1}{6}$$

Donde hemos tenido en cuenta que la ecuación de la recta que define S_3 es:

$$\int_{S_3} \vec{H} \cdot d\vec{S}_3 = -\int_{S_3} cxydx = -\int_0^b cx(-x+b)dx = \int_0^b c(x^2-bx)dx = c\frac{b^3}{3} - c\frac{b^3}{2} = -cb^3\frac{1}{6}$$

El resultado pedido aplicando el teorema de la divergencia y descomponiendo el flujo en suma de flujos es:

$$\phi = \int_S \vec{H} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{H} dV - \phi_1 - \phi_2 - \phi_3 = \frac{1}{6}(ab^3 + cb^3)$$



Calculamos la circulación a lo largo del contorno dividiendo la curva en tres tramos:

$$\int_{\Gamma_1} \vec{H} \cdot d\vec{l}_1 = \int_{\Gamma_1} \vec{0} \cdot d\vec{l}_1 = 0$$

$$\int_{\Gamma_2} \vec{H} \cdot d\vec{l}_2 = \int_{\Gamma_2} (ax\vec{\imath} + cx\vec{k}) \cdot (dx\vec{\imath} + dz\vec{k}) = \int_{\Gamma_2} (axdx + cxdz) =$$

$$= \int_0^b axdx + \int_b^0 cxdz = a\frac{b^2}{2} + \int_b^0 c(-z+b)dz = a\frac{b^2}{2} + c\frac{b^2}{2} - cb^2 = a\frac{b^2}{2} - c\frac{b^2}{2}$$

donde hemos tenido en cuenta que la ecuación de la curva es $x = -z + b$.

$$\int_{\Gamma_3} \vec{H} \cdot d\vec{l}_3 = \int_{\Gamma_3} (ax\vec{\imath} + cx\vec{k}) \cdot (dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath}) = \int_b^0 axdx = -a\frac{b^2}{2}$$

Obsérvese que el sentido de circulación va en los límites de integración.
Sumando los tres resultados se obtiene:

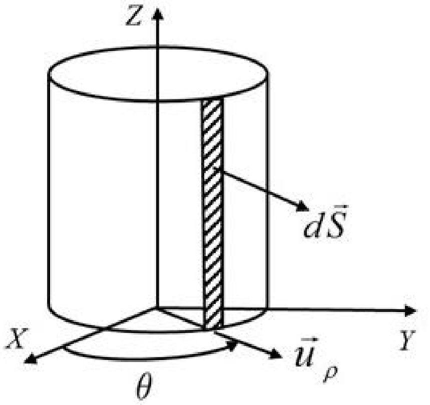
$$\int_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = a\frac{b^2}{2} - c\frac{b^2}{2} - a\frac{b^2}{2} = -c\frac{b^2}{2}$$

PROBLEMA RESUELTO 2.10

Dado el campo vectorial $\vec{H} = ax\,\vec{\imath} + cx\,\vec{k}$, calcular el flujo a través de la superficie S de un cilindro de radio R cuyo eje de simetría coincide con el eje Oz situado entre los planos $z = 0$ y $z = H$. Calcular la circulación del campo alrededor de la circunferencia Γ de radio R situada en el plano $z = 0$ y recorrida en el sentido horario vista desde el sentido positivo del eje Oz.

Ayuda: $\int \cos^2\theta d\theta = \dfrac{\theta}{2} + \dfrac{\sin 2\theta}{4} + C$

SOLUCIÓN 2.10



Pasamos el campo a coordenadas cilíndricas:

$$\vec{H} = ax\vec{\imath} + cx\vec{k} = aR\cos\theta\vec{\imath} + cx\vec{k}$$

Como diferencial de superficie tomamos:

$$d\vec{S} = HRd\theta\vec{u}_\rho = HRd\theta(\cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath})$$

Realizamos el producto escalar:

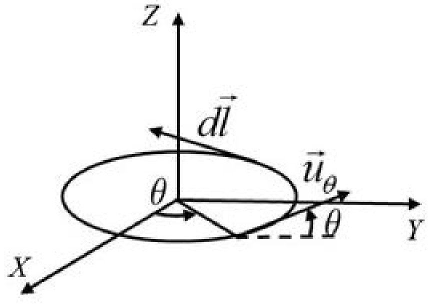
$$\vec{H}\cdot d\vec{S} = aHR^2\cos^2\theta d\theta$$

Integramos para obtener el flujo, los límites de integración siempre se toman de menor a mayor:

$$\int_S \vec{H}\cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} aHR^2\cos^2\theta d\theta = aHR^2\pi$$

Calculamos la circulación sobre la circunferencia de radio R.
El diferencial de longitud es ahora:

$$d\vec{l} = Rd\theta\vec{u}_\theta = Rd\theta(-sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath})$$



Realizamos el producto escalar:

$$\vec{H}\cdot d\vec{l} = -aR^2\cos\theta\sin\theta d\theta = -\frac{aR^2}{2}\sin 2\theta d\theta$$

Realizamos la integración:

$$\oint_\Gamma \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_0^{-2\pi} -\frac{aR^2}{2}\sin 2\theta d\theta = \frac{aR^2}{4}\cos 2\theta\Big|_0^{-2\pi} = \frac{aR^2}{4}(1-1) = 0$$

Obsérvese que el sentido de circulación se pone en los límites de integración, no en el diferencial, a diferencia de lo que ocurre en el flujo.