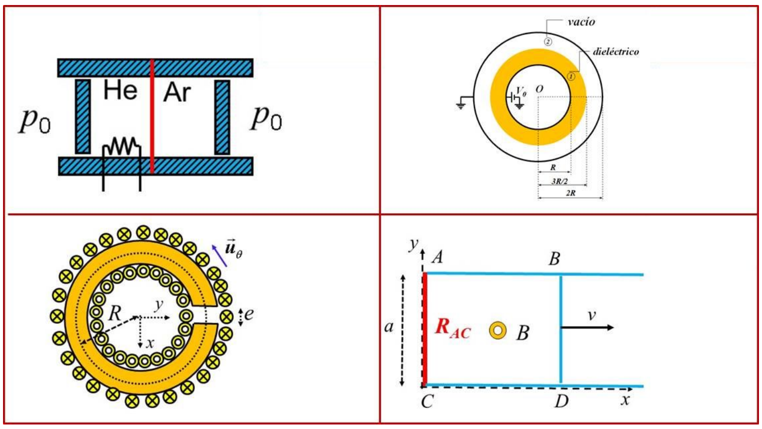
Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO

FÍSICA II

PROBLEMAS RESUELTOS

José Carlos JIMÉNEZ SÁEZ
Santiago RAMÍREZ DE LA PISCINA MILLÁN



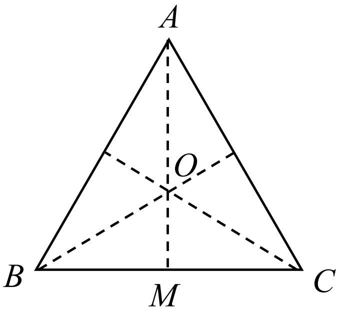
3.- ELECTROSTÁTICA DEL VACÍO

3 Electrostática del Vacío

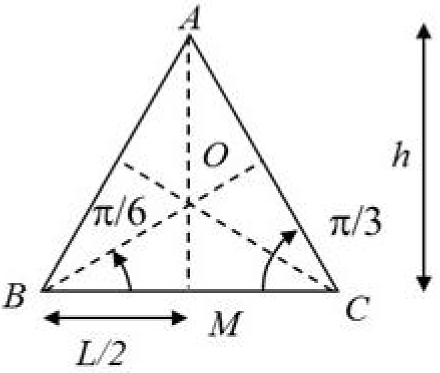
PROBLEMA RESUELTO 3.1

En los vértices ABC de un triángulo equilátero de lado $L = 5\ m$, se encuentran tres cargas $q_A = -2\mu C$, $q_B = 3\mu C$ y $q_C = 3\mu C$

Calcular el campo y el potencial en el baricentro O del triángulo, así como el trabajo realizado por el campo al pasar una carga q_0 de $2\mu C$ desde el punto O hasta el punto M, punto medio del lado BC.



SOLUCIÓN 3.1



Calculamos la posición del baricentro

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{L/2}{\left|O\vec{B}\right|} \Rightarrow \left|O\vec{B}\right| = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

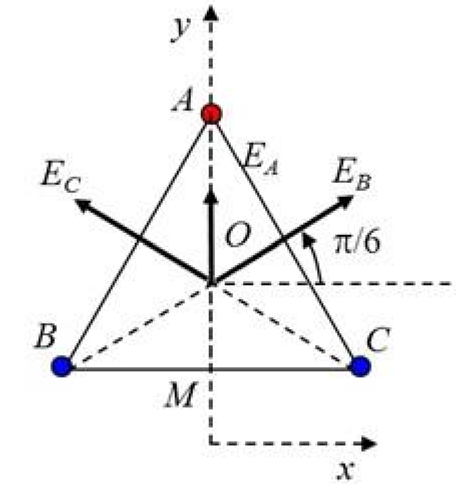
Además:

$$\left|\overrightarrow{OB}\right| = \left|\overrightarrow{OA}\right| = \left|\overrightarrow{OC}\right| = d = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

La altura del triángulo es:

$$\text{sen}(\frac{\pi}{3}) = \frac{h}{L} \Rightarrow h = L\ \text{sen}(\frac{\pi}{3}) = 5\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Por consideraciones de simetría el campo llevará la dirección del eje y, ya que, las cargas B y C son iguales y compensan la componente x del campo.



El módulo del campo de cada una de las cargas es:

$$E_A = \frac{q_A}{4\pi\varepsilon_0 d^2}; \quad E_B = \frac{q_B}{4\pi\varepsilon_0 d^2}$$

$$E_C = \frac{q_C}{4\pi\varepsilon_0 d^2}$$

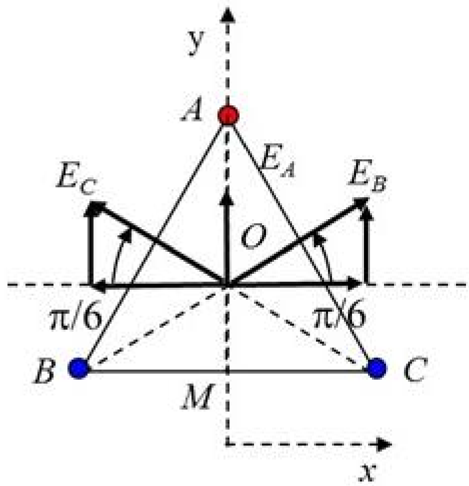
Sustituyendo valores:

$$E_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-2\times10^{-6}}{\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^2} = 2160\frac{\text{V}}{\text{m}}$$

$$E_B = E_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3\times10^{-6}}{\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^2} = 3240\frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Sumamos las componentes del campo en la dirección del eje Oy:

$$\vec{E}_O = E_O\vec{j} = \left((E_B + E_C)\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) + E_A\right)\vec{j}$$



El cálculo del potencial sólo precisa saber la distancia de las cargas al punto O:

$$V_A(O) = \frac{q_A}{4\pi\varepsilon_0 d}; \quad V_B(O) = \frac{q_B}{4\pi\varepsilon_0 d}; \quad V_C(O) = \frac{q_C}{4\pi\varepsilon_0 d}$$

$$V_O = V_A + V_B + V_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3\times10^{-6}}{\frac{5\sqrt{3}}{3}} + \frac{3\times10^{-6}}{\frac{5\sqrt{3}}{3}} - \frac{2\times10^{-6}}{\frac{5\sqrt{3}}{3}}\right) = \frac{108\times10^3}{5\sqrt{3}} = 7200\sqrt{3}\ \text{V}$$

$$V_A(M) = \frac{q_A}{4\pi\varepsilon_0 h} \qquad V_B(M) = \frac{q_B}{4\pi\varepsilon_0 \left(L/2\right)} \qquad V_C(M) = \frac{q_C}{4\pi\varepsilon_0\left(L/2\right)}$$

$$V_M = V_A+V_B+V_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3\times10^{-6}}{\frac{5\sqrt{3}}{2}}+\frac{3\times10^{-6}}{\frac{5}{2}}-\frac{2\times10^{-6}}{\frac{5}{2}}\right) = \frac{18\times10^{3}(\sqrt{3}+1)}{5} = 3600(\sqrt{3}+1)\mathrm{V}$$

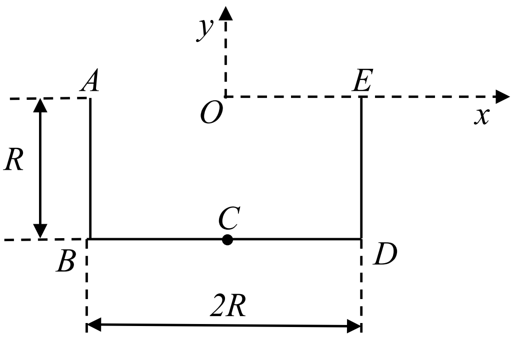
El trabajo realizado por las fuerzas del campo para pasar del punto O al M se obtiene a partir de la diferencia de potencial:

$$W_O^M = -q_0(V_M - V_O) = -2\times10^{-6}(3600(\sqrt{3}+1) - 7200\sqrt{3}) = 7,2\times10^{-3}(\sqrt{3}-1)\ J$$

El signo positivo del resultado indica que las fuerzas del campo ($F = qE$) llevan la carga q_0 desde O (mayor potencial) hasta M (menor potencial).

PROBLEMA RESUELTO 3.2

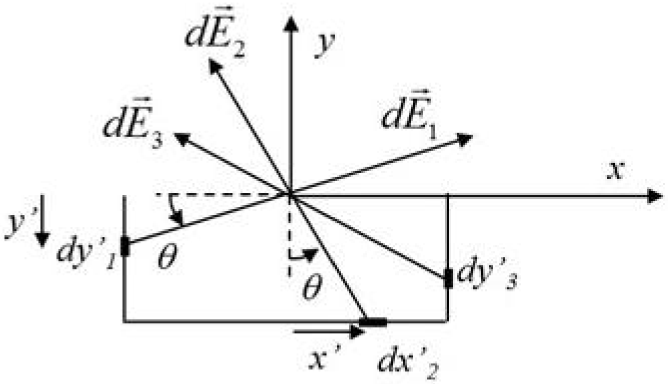
El alambre $ABCDE$ de la figura tiene una carga λ por unidad de longitud. Calcúlese el campo electrostático en el punto O.
(Sugerencia: Calcúlese primero el campo debido al tramo ABC, tomando dos elementos simétricos respecto al eje OB)



SOLUCIÓN 3.2

En principio se podría pensar en calcular el campo de tres alambres de dimensión finita y sumarlos.

Así tendríamos:



El campo que crea el $dl' = dy'_1 = dy'$ en el punto viene dado por la siguiente expresión:

$$d\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dl'(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dy'(R\vec{i}-y'\,\vec{j})}{(y'^2+R^2)^{3/2}}$$

$$\vec{r} = \vec{0} \quad y \quad \vec{r}' = -R\vec{i} + y'\,\vec{j}\ (y' < 0)$$

Hacemos el cambio de variable:

$$\left.\begin{array}{l} d\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dy'(R\vec{i}-y'\,\vec{j})}{(y'^2+R^2)^{3/2}} \\ \\ tg\,\theta = \frac{-y'}{R}\ (y'<0,\theta>0) \quad \Rightarrow \quad dy' = -R\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = -\frac{y'^2+R^2}{R}\,d\theta \\ \\ \cos\theta = \frac{R}{(R^2+y'^2)^{1/2}}; \quad \mathrm{sen}\theta = \frac{-y'}{(R^2+y'^2)^{1/2}} \end{array}\right\}$$

Los límites de integración en este tipo de integrales que no son de línea siempre se hacen de menor a mayor.

Obsérvese que al valor $y' = -R$ le corresponde un ángulo de $\theta = \pi/4$.

$$\vec{E}_1 = \int_{-R}^{0} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda(R\vec{i}-y'\,\vec{j})}{(y'^2+R^2)^{3/2}}dy' = \int_{-R}^{0}\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\cos^3\theta\,\vec{i}}{R^2}+\frac{\mathrm{sen}\theta\,\vec{j}}{(y'^2+R^2)}\right)dy' =$$

$$= \int_{\pi/4}^{0}\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{\cos\theta\,\vec{i}}{R}-\frac{\mathrm{sen}\theta\,\vec{j}}{R}\right)d\theta$$

$$\vec{E}_1 = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_{\pi/4}^{0}\left(\cos\theta\,\vec{i}+\mathrm{sen}\theta\,\vec{j}\right)d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}+(1-\frac{\sqrt{2}}{2})\vec{j}\right)$$

Por simetría para el alambre que hemos llamado 3 se tiene:

$$\vec{E}_3 = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}+(1-\frac{\sqrt{2}}{2})\vec{j}\right)$$

Quedaría por calcular el campo del alambre 2:

$$\vec{E}_2 = \int_L \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dl'(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = \int_{-R}^{R}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx'(-x'\vec{i}+R\,\vec{j})}{(x'^2+R^2)^{3/2}}$$

$$\vec{r} = \vec{0} \quad \text{y} \quad \vec{r}' = x'\vec{i}-R\,\vec{j}$$

Se repetiría el proceso haciendo un nuevo cambio de variable usando otro ángulo θ apropiado.

$$\left.\begin{array}{l} d\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx'(-x'\vec{i}+R\,\vec{j})}{(x'^2+R^2)^{3/2}} \\ \\ tg\,\theta = \frac{x'}{R}\ (x'>0,\theta>0) \quad \Rightarrow \quad dx' = R\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{x'^2+R^2}{R}\,d\theta \\ \\ \cos\theta = \frac{R}{(R^2+x'^2)^{1/2}}; \quad \mathrm{sen}\theta = \frac{x'}{(R^2+x'^2)^{1/2}} \end{array}\right\}$$

$$\vec{E}_2 = \int_{-R}^{R} \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(-x'\vec{i} + R\,\vec{j})}{(x'^2 + R^2)^{3/2}} dx' = \int_{-R}^{R} \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \left(-\frac{\text{sen}\theta\,\vec{i}}{(x'^2 + R^2)} + \frac{\cos^3\theta\,\vec{j}}{R^2} \right) dx' =$$

$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \left(-\frac{\text{sen}\theta\,\vec{i}}{R} + \frac{\cos\theta\,\vec{j}}{R} \right) d\theta$$

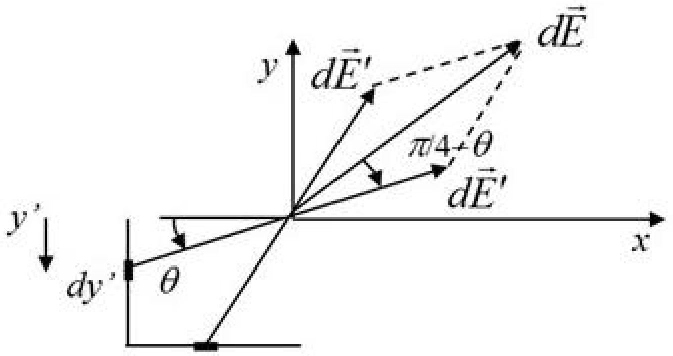
$$\vec{E}_2 = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(-\text{sen}\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} \right) d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R} \left(\sqrt{2}\vec{j} \right)$$

Sumando los campos de las tres varillas:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + (1 - \frac{\sqrt{2}}{2})\vec{j} \right) + \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + (1 - \frac{\sqrt{2}}{2})\vec{j} \right) + \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R} \left(\sqrt{2}\vec{j} \right) =$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R} (2(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) + \sqrt{2}) = \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\vec{j}$$

Vamos a aplicar las consideraciones geométricas que se sugieren en la ayuda:



$$dE_{ABC} = 2\,dE'\,\cos(\pi/4 - \theta)$$

El módulo del campo que crea un $dl' = dy'$ en el punto viene dado por la siguiente expresión:

$$dE' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda dl'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda dy'}{(y'^2 + R^2)}$$

$$\vec{r} = \vec{0} \quad \text{y} \quad \vec{r}' = -R\vec{i} + y'\,\vec{j}\ (y' < 0)$$

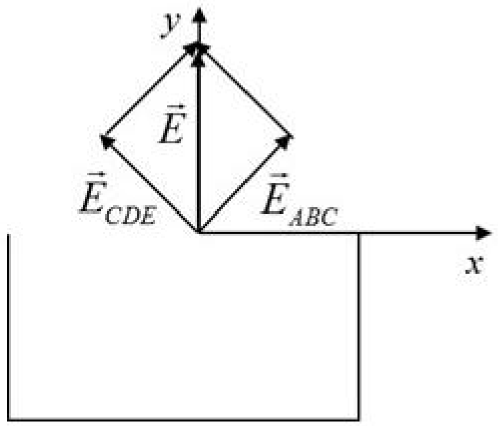
$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{y'^2 + R^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} dE' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dy'}{(y'^2+R^2)} \\ tg\,\theta = \frac{-y'}{R}\;(y'<0,\theta>0) \;\;\Rightarrow\;\; dy' = -R\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = -\frac{y'^2+R^2}{R}\,d\theta \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\;\; dE' = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\,d\theta \;\;\Rightarrow\;\; E = \int 2\,dE'\cos(\pi/4-\theta) = \int_{\pi/4}^{0} -\frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0\,R}\cos(\pi/4-\theta)\,d\theta$$

$$E_{ABC} = \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0\,R}\,sen\;\,(\pi/4-\theta)|_{\frac{\pi}{4}}^{0} \quad\Rightarrow\quad E_{ABC} = \frac{\lambda\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon_0\,R}$$

La dirección es la correspondiente a un ángulo de $\pi/4$ con el eje x: $\vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i}+\vec{j})$



Con lo que el campo del tramo ABC es:

$$\vec{E}_{ABC} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0\,R}\,(\vec{i}+\vec{j})$$

Por simetría, el campo debido al tramo CDE es:

$$\vec{E}_{CDE} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0\,R}\,(-\vec{i}+\vec{j})$$

Y el campo total, sumando ambos,

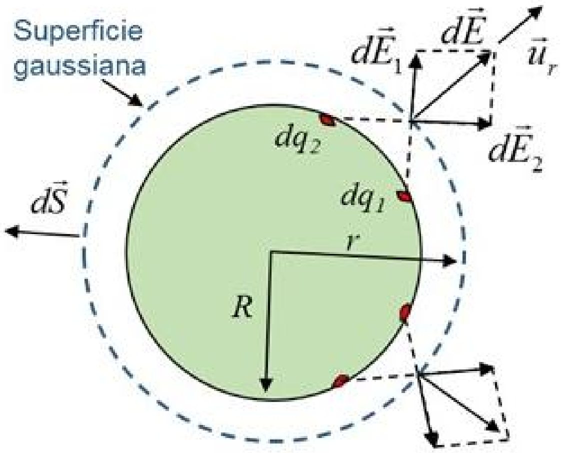
$$\vec{E} = \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0\,R}\;\vec{j}$$

Teoría

Teorema de Gauss: Simetrías

Simetría esférica radial ($\rho = \rho(r)$)

Ejemplo: Esfera de radio R y densidad ρ



Aplicamos el teorema de Gauss a la esfera de radio r para calcular el campo electrostático.

Por razones de simetría el campo tiene dirección radial, además debe tomar el mismo valor a una misma distancia del origen con lo cual lo podemos sacar de la integral.

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E\,\vec{u}_r \cdot dS\,\vec{u}_r = \oint_S E(r)\,dS = E(r)\oint_S dS = E(r)4\pi r^2$$

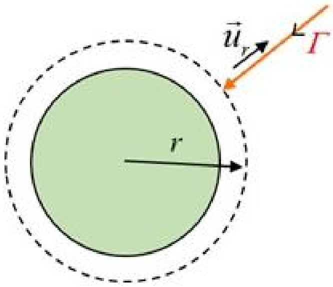
Aplicando el teorema de Gauss para una simetría esférica radial ($\rho = \rho(r)$):

$$E(r)4\pi r^2 = \frac{q_{encerrada}}{\varepsilon_0}$$

Siendo $q_{encerrada}$ la carga dentro de la superficie gaussiana.

Ejemplo: Suponemos una esfera no conductora de densidad ρ

$$E(r)4\pi r^2 = \frac{\rho\frac{4}{3}\pi R^3}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(r) = E(r)\,\vec{u}_r = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r \quad \text{con} \quad r \geq R$$



Calculamos el potencial a partir de la integral de línea integrando en una línea recta Γ que viene desde el infinito (suponemos además que en el infinito el potencial es 0, esto se puede hacer siempre que la distribución de carga sea finita). En los límites de integración va implícito el sentido de recorrido desde el infinito hasta un punto situado a una distancia r del origen.

$$V(\vec{r}) = \overbrace{V(\vec{r}_0)}^{0} - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}(r)\cdot d\vec{r} \rightarrow V(r) = \overbrace{V(\infty)}^{0} - \int_{\infty}^{r} E(r)\vec{u}_r \cdot dr\,\vec{u}_r = -\int_{\infty}^{r} E(r)dr$$

En el caso del ejemplo, se tiene que para $r > R$:

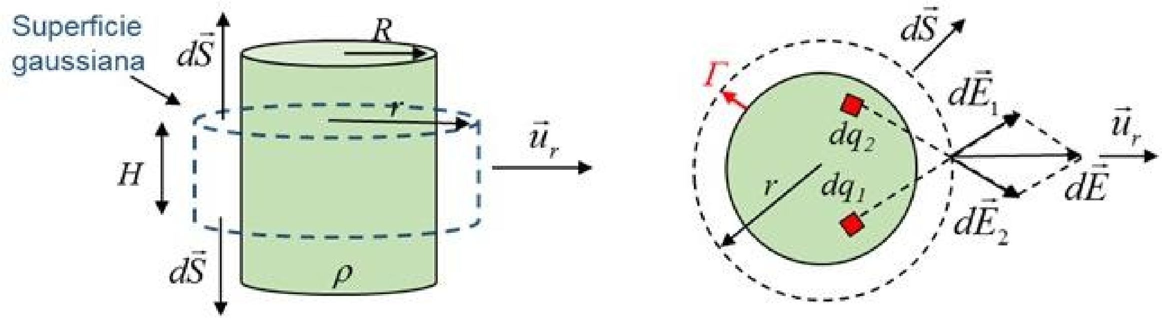
$$V = -\int_{\infty}^{r} E(r)dr = -\int_{\infty}^{r} \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}dr = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}$$

En general, en simetría esférica radial ($\rho = \rho(r)$):

$$V(r) = V(r_0) - \int_{r_0}^{r} E(r)dr$$

Simetría cilíndrica radial $(\rho = \rho(r))$

Ejemplo: Cilindro de longitud infinita, radio R y densidad ρ.



Las tapas superior e inferior del cilindro no contribuyen al flujo puesto que el diferencial de superficie es perpendicular al campo.

La simetría del campo es radial, por tanto, el campo y el diferencial de superficie en la pared lateral son paralelos; además el campo vale lo mismo a la misma distancia r:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E\, \vec{u}_r \cdot dS\, \vec{u}_r = \oint_S E(r)\, dS = E(r) \oint_S dS = E(r) H 2\pi r$$

En general, en simetría cilíndrica radial $(\rho = \rho(r))$:

$$E(r) H 2\pi r = \frac{q_{encerrada}}{\varepsilon_0}$$

Ejemplo: Si suponemos que la densidad es constante, se tiene:

$$E(r) H 2\pi r = \frac{q_{encerrada}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho H \pi R^2}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r} \Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r} \vec{u}_r, ,\ r \geq R$$

Para obtener el potencial no podemos suponer que es cero en el infinito pues allí hay carga.
Consideramos que es cero a una distancia R del eje del cilindro.
Y hacemos la circulación desde allí a lo largo de una recta Γ (ver figura) en la dirección radial hasta una distancia de valor r.

$$V(r) = \overbrace{V(R)}^{0} - \int_R^r \vec{E}(r) \cdot d\vec{r} = -\int_R^r E(r) \vec{u}_r \cdot dr\, \vec{u}_r = -\int_R^r E(r) dr$$

En el caso del ejemplo con densidad constante se tiene:

$$V(r) = -\int_R^r E(r) dr = -\int_R^r \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r} dr = -\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} \ln \frac{r}{R}, ,\ r \geq R$$

En general, en simetría cilíndrica radial $(\rho = \rho(r))$:

$$V(r) = V(r_0) - \int_{r_0}^r E(r) dr$$

Simetría plana ($\rho(z) = \rho(-z)$)

Ejemplo: Plano infinito de densidad σ.

Por simetría el campo lleva la dirección del eje z, además el campo vale lo mismo a la misma distancia del plano $z = 0$.

La tapa lateral del cilindro que constituye la superficie gaussiana no contribuye al flujo puesto que el diferencial de superficie es perpendicular al campo.

El flujo por la tapa superior es igual que el flujo por la tapa inferior, ya que, el campo y el diferencial de superficie son paralelos y del mismo sentido.

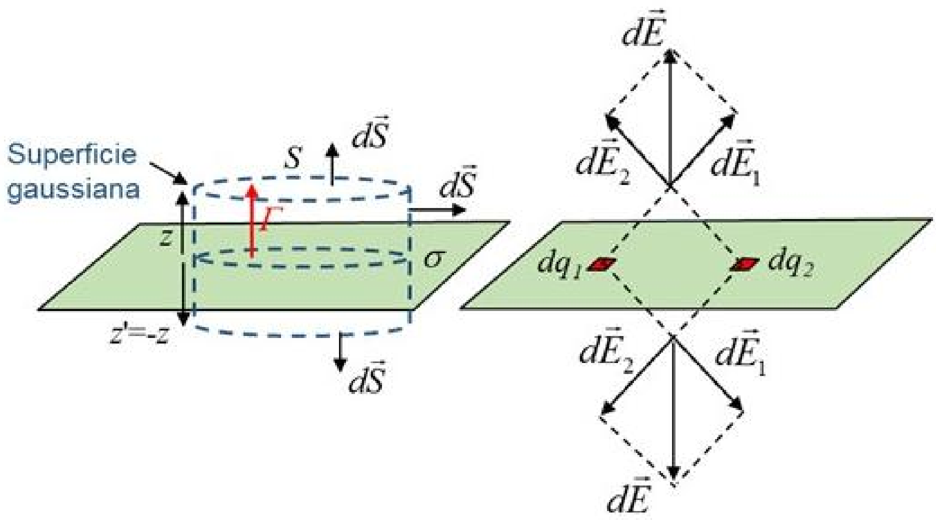
$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint_S E(z)\,\vec{k}\cdot dS\,\vec{k} + \oint_S E(z'=-z)\,\vec{k}\cdot dS(-\vec{k})$$

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = 2\oint_S E(z)\,dS = 2E(z)\oint_S dS = 2E(z)S$$

En general, para la simetría plana respecto del plano $z = 0$: $E(z) = -E(z' = -z)$

$$2E(z)S = \frac{q_{encerrada}}{\varepsilon_0}$$

Ejemplo: Una lámina plana paralela al plano xy de densidad constante:



Para obtener el potencial no podemos suponer que es cero en el infinito pues allí hay carga.

$$2E(z)S = \frac{q_{encerrada}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \Rightarrow \begin{cases} \vec{E} = E(z)\vec{k} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k},, \quad z > 0 \\ \vec{E} = E(z')\vec{k} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k},, \quad z' < 0 \end{cases}$$

Consideramos que es cero en $z = 0$. Y hacemos la circulación desde allí a lo largo de una recta Γ (ver figura) en la dirección de $\vec{k}$ hasta una distancia de valor z.

$$V(z) = \overbrace{V(0)}^{0} - \int_0^z \vec{E}(z) \cdot d\vec{r} = -\int_0^z E(z)\,\vec{k} \cdot dz\,\vec{k} = -\int_0^z E(z)\,dz$$

En el caso de nuestro ejemplo:

$$V(z) = -\int_0^z E(z)\,dz = -\int_0^z \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,dz = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}z,, \quad z > 0$$

Si nos movemos en la circulación hacia las z' negativas:

$$V(z') = -\int_0^{z'} \vec{E}(z') \cdot d\vec{r} = -\int_0^{z'} E(z')\,\vec{k} \cdot dz'\,\vec{k} = -\int_0^{z'} E(z')\,dz'$$

En el caso de nuestro ejemplo:

$$V(z') = -\int_0^{z'} E(z')\,dz' = \int_0^{z'} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,dz' = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}z',, \quad z' < 0$$

Se puede ver por tanto como el potencial decrece a ambos lados de la lámina y el campo va dirigido hacia los potenciales decrecientes.

En general, para la simetría plana respecto del plano $z = 0$ tanto para $z > 0$ como para $z < 0$:

$$V(z) = V(z_0) - \int_{z_0}^{z} E(z)\,dz$$

PROBLEMA RESUELTO 3.3

Una esfera hueca, no conductora, de radios interior R_1 y exterior R_2, se encuentra cargada eléctricamente con una densidad volumétrica de carga dada por:

$$\rho(r) = \frac{Q_0}{2\pi(R_2^2 - R_1^2)r}$$

Se pide calcular:

1) Las dimensiones y unidades de medida de la constante Q_0 en el SI.

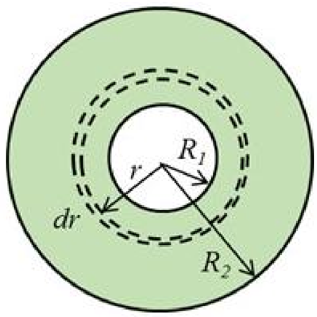
2) El valor de la carga total contenida en la esfera.
   ¿Admite una interpretación física sencilla la constante Q_0?

3) Los valores del campo y del potencial eléctrico en cada punto del espacio.

SOLUCIÓN 3.3

1) Q_0 tiene dimensiones de carga; $[Q_0] = IT$
   Unidad de medida de Q_0 : Culombio

2) Para calcular la carga total integramos la densidad de carga tomando como diferencial de volumen una corteza esférica de espesor dr:



$$dV = 4\pi r^2 dr$$

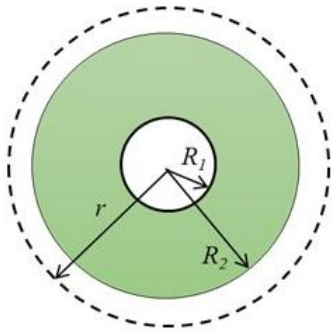
$$Q = \frac{Q_0}{2\pi(R_2^2 - R_1^2)} \int_{R_1}^{R_2} 4\pi r dr = Q_0$$

3) Para calcular el campo en todas las regiones del espacio tomamos gaussiana de radio r.

Todos los campos tienen la dirección del unitario radial de coordenadas esféricas:

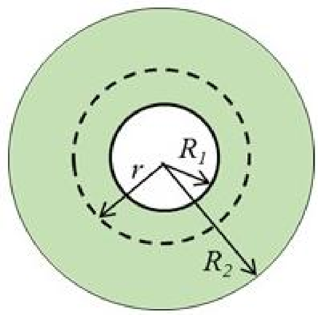
$$\vec{E} = E\vec{u}_r$$

Para $R_2 < r$ la carga encerrada es Q_0:



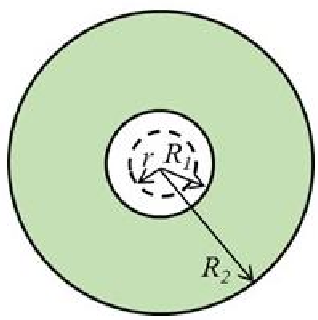
$$E_A 4\pi r^2 = \frac{Q_0}{\varepsilon_0} \rightarrow E_A = \frac{Q_0}{\varepsilon_0 4\pi r^2}$$

Para $R_1 < r < R_2$ la carga encerrada se obtiene integrando con el mismo tipo de diferencial de volumen: $dV = 4\pi r'^2 dr'$



$$E_B 4\pi r^2 = \frac{\frac{Q_0}{2\pi(R_2^2-R_1^2)} \int\limits_{R_1}^{r} 4\pi r' dr'}{\varepsilon_0} \rightarrow E_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_0}{r^2}\frac{(r^2-R_1^2)}{(R_2^2-R_1^2)}$$

Finalmente para $r < R_1$ no se encierra carga por tanto el campo es nulo:

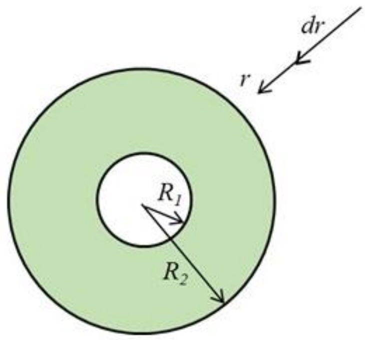


$$E_C 4\pi r^2 = \frac{0}{\varepsilon_0} \rightarrow E_C = 0$$

Para calcular el potencial realizamos integrales de línea en curvas radiales procedentes de infinito, donde el potencial es nulo, hasta puntos de separación r del centro de la distribución.

La forma que se aplica es: $V(r) = -\int_{\infty}^{r} E(r')dr'$

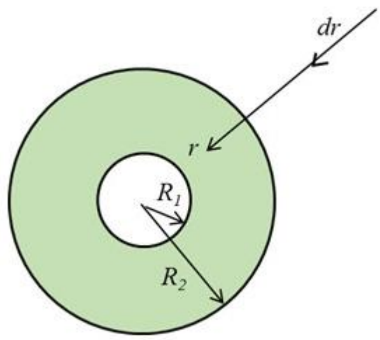
Para $R_2 < r$:



$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} E_A dr' = -\int_{\infty}^{r} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r'^2} dr' = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

La expresión es análoga a la de una carga puntual de valor Q.

Para $R_1 < r < R_2$ atravesamos dos zonas con valores de campos distintos:

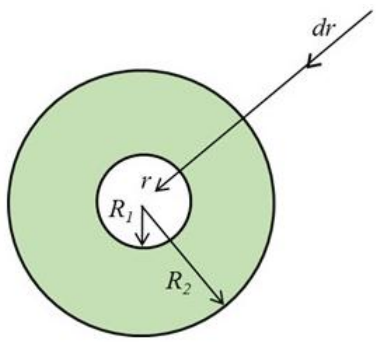


$$V(r) = -\int_{\infty}^{R_2} E_A dr' - \int_{R_2}^{r} E_B dr' =$$

$$= -\int_{\infty}^{R_2} \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r'^2} dr' - \int_{R_2}^{r} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_0}{r^2} \frac{(r^2 - R_1^2)}{(R_2^2 - R_1^2)} dr'$$

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_0}{r} \left(1 - \frac{(R_2 - r)^2}{(R_2^2 - R_1^2)}\right)$$

Finalmente para $r < R_1$ atravesamos 3 zonas, en la última el campo es cero, por tanto basta sustituir en la expresión anterior $r = R_1$:



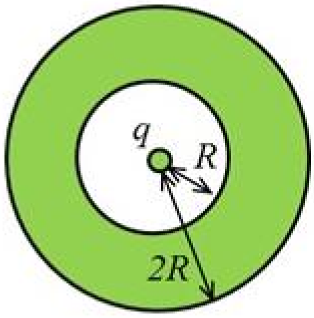
$$V(r) = -\int_{\infty}^{R_2} E_A dr' - \int_{R_2}^{R_1} E_B dr' - \int_{R_1}^{r} E_C dr' =$$

$$= -\int_{\infty}^{R_2} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r'^2} dr' - \int_{R_2}^{R1} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_0}{r^2} \frac{(r^2 - R_1^2)}{(R_2^2 - R_1^2)} dr'$$

$$V(r) = \frac{Q_0}{2\pi\varepsilon_0} \frac{(R_2 - R_1)}{(R_2^2 - R_1^2)}$$

PROBLEMA RESUELTO 3.4

Una carga puntual q está rodeada de una carga uniformemente distribuida en una corteza esférica de radios $R_1 = R$ y $R_2 = 2R$, concéntrica con la carga puntual.



Se sabe que el potencial en un punto P que dista $4R$ de la carga puntual es cero.

Se pide, en función de q y de R:

1) Valor de la carga Q distribuida en la corteza esférica y la densidad volumétrica de carga.

2) El campo eléctrico en las siguientes zonas:

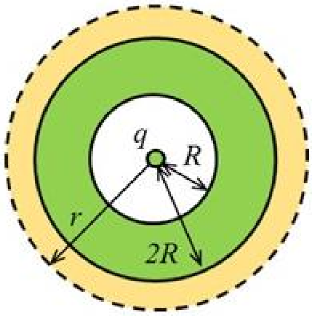
- zona A: $2R < r < \infty$
- zona B: $R < r < 2R$
- zona C: $0 < r < R$

SOLUCIÓN 3.4

Aplicamos el teorema de Gauss a las tres zonas para obtener el campo:

Gaussiana zona A de radio r:

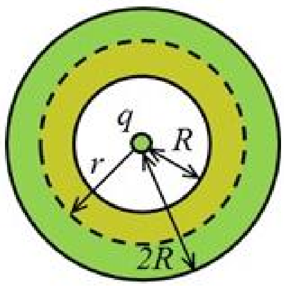
$$E 4\pi r^2 = \frac{q + \rho V}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q+\rho V}{r^2}$$



Donde V es el volumen de la corteza y la carga encerrada es la carga puntual y toda la distribución uniforme.

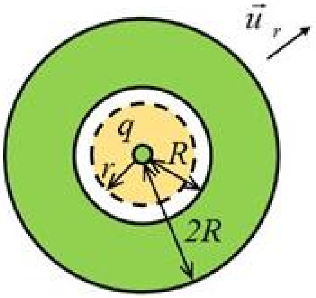
Gaussiana zona B de radio r:

$$E 4\pi r^2 = \frac{q + \rho V_e}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q+\rho \frac{4}{3}\pi(r^3 - R^3)}{r^2}$$



En este caso no se encierra toda la carga de la corteza sino un volumen Ve o corteza esférica de radio interior R y exterior r.

Gaussiana zona C de radio r:



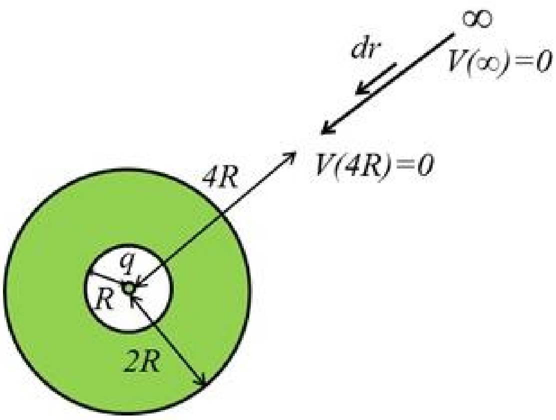
$$E 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \rightarrow \vec{E} = E\vec{u}_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}_r$$

En este caso solo se encierra la carga puntual. El campo tiene la dirección del unitario radial de coordenadas esféricas.

Aplicaremos la condición del enunciado de que el potencial en un punto P es cero: $V(4R) = 0$.
Realizamos una integral del línea por un camino radial viniendo desde ∞ donde suponemos también el potencial nulo.

$$0 = V(4R) = -\int_{\infty}^{4R} E dr = -\int_{\infty}^{4R} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q+\rho V}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q+\rho V}{4R} \rightarrow \rho = \frac{-q}{(4/3)\pi(8R^3 - R^3)} = \frac{-3q}{28\pi R^3}$$

La carga total en la corteza es: $Q = \rho V = -q$

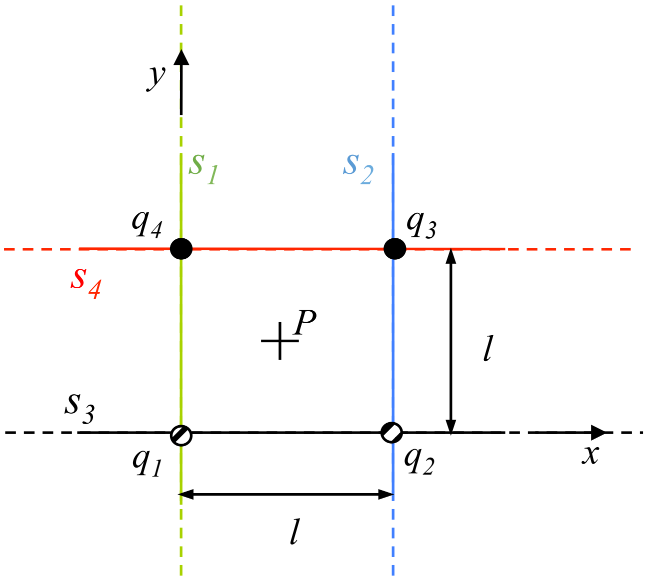


PROBLEMA RESUELTO 3.5

En la figura se representa una configuración electrostática de carga formada por cuatro placas indefinidas, paralelas dos a dos y que se cortan perpendicularmente, con las densidades de carga indicadas. En los vértices del cuadrado de la figura existen cargas puntuales indicadas. Utilizando los ejes dibujados, calcular la expresión del campo electrostático en el punto medio del cuadrado.

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 1\mathrm{C/m^2}\ ; \quad q_1 = q_2 = 1\mathrm{C}$$

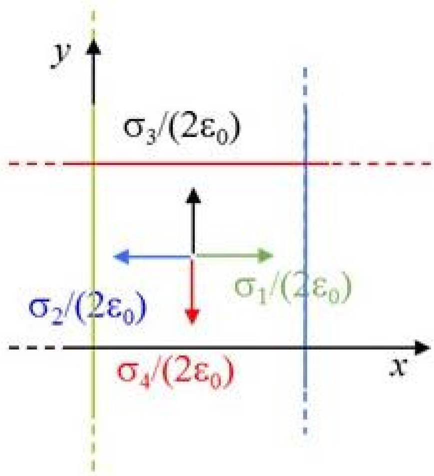
$$\sigma_4 = -1\mathrm{C/m^2}\ ; \quad q_3 = q_4 = -2\mathrm{C}\ ; \quad l = 2\mathrm{m}$$



SOLUCIÓN 3.5

Por Gauss sabemos que el campo producido por una placa indefinida es $\sigma/(2\varepsilon_0)$ saliente si σ es positiva y entrante si σ es negativa.

Calculamos el campo en el punto P por superposición sumando el campo de las distintas configuraciones de carga:

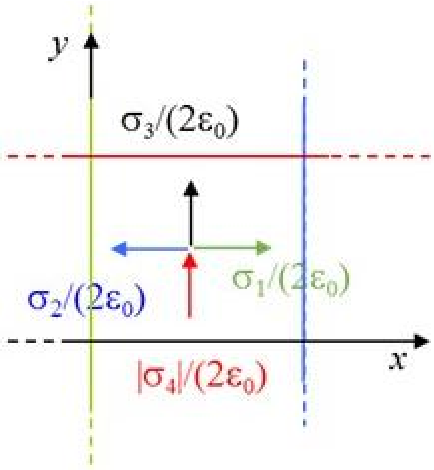


Campo debido a σ_1 más campo debido a σ_2:

$$\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\vec{i} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}(-\vec{i}) = \vec{0}$$

Campo debido a σ_3 $\quad \vec{E}_3 = \dfrac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}\vec{j}$

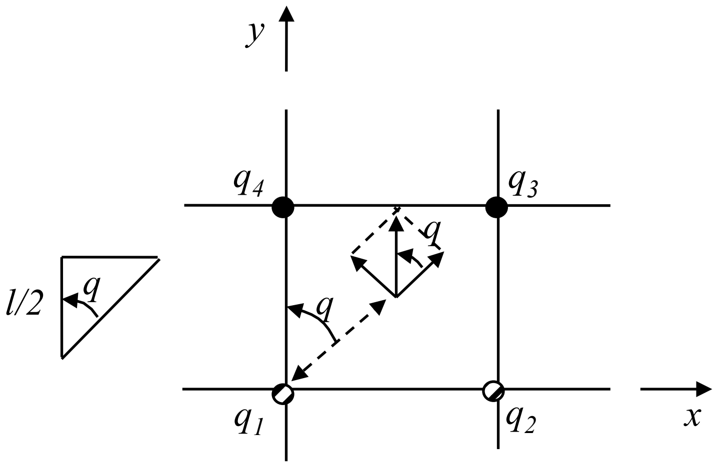
Campo debido a σ_4 $\quad \vec{E}_4 = \dfrac{\sigma_4}{2\varepsilon_0}(-\vec{j})$



El campo debido a σ_4 va en realidad en sentido opuesto al dibujado, es decir, en la dirección de $-\vec{i}$, ya que el valor de σ_4 es negativo:

$$\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}\vec{j} + \frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0}(-\vec{j}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\vec{j} \quad \frac{N}{C}$$

Sumamos los campos debidos a las cargas puntuales:



Campo debido a q_1 más campo debido a q_2:

$$\vec{E}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1}{\left(\frac{l}{2}\sqrt{2}\right)^2} \cdot (\cos\theta\vec{j} + \mathrm{sen}\theta\vec{i}) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_2}{\left(\frac{l}{2}\sqrt{2}\right)^2}(\cos\theta\vec{j} - \mathrm{sen}\theta\vec{i})$$

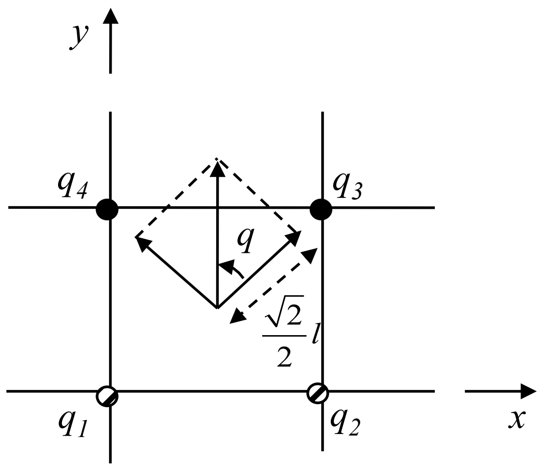
Se verifica además que: $\cos\theta = \frac{l/2}{\sqrt{2}\,l/2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\vec{E}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1}{\left(\frac{l}{2}\sqrt{2}\right)^2}\cdot\cos\theta\cdot 2\,\vec{j} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1}{\left(\frac{l}{2}\sqrt{2}\right)^2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2\,\vec{j} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{l^2}\,\vec{j} \quad \Rightarrow \vec{E}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{j} \quad \frac{N}{C}$$

Campo debido a q_3 más campo debido a q_4:

Al ser las cargas negativas va dirigido hacia las cargas. Además al ser ambas de valor el doble que q_1 y q_2 y estar a la misma distancia, el campo será el doble que el producido por la suma de los campos de q_1 y q_2 y en el mismo sentido.

$$\vec{E}_{34} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \sqrt{2}\,\vec{j} \quad \frac{N}{C}$$

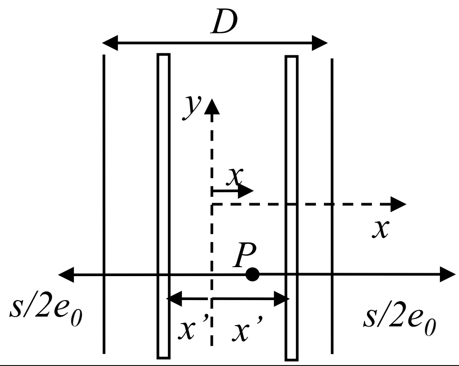


El campo total se obtiene sumando los resultados anteriores:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(4\pi + \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}\right)\vec{j} \;\; = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(4\pi + 1.5\sqrt{2})\,\vec{j} \quad \frac{N}{C}$$

PROBLEMA RESUELTO 3.6

Calcular el campo creado por una lámina indefinida plana de espesor D y densidad volumétrica constante ρ en un punto P de su interior.



SOLUCIÓN 3.6

Dividimos la lámina en otras de espesor infinitesimal y carga $d\sigma = \rho dx'$.

Calculamos el campo como suma de dos contribuciones: por un lado el de las láminas que tienen un $x' > x \quad (dE = -d\sigma/2\varepsilon_0)$ y por otro el de las láminas que tienen un $x' < x \quad (dE = -d\sigma/2\varepsilon_0)$.

Para las primeras se tiene (la integración siempre se hace de menor a mayor):

$$d\vec{E}_1 = -\frac{\rho dx'}{2\varepsilon_0}\vec{i} \Rightarrow \vec{E}_1 = \int_x^{D/2} -\frac{\rho dx'}{2\varepsilon_0}\vec{i} = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}(\frac{D}{2} - x)\vec{i}$$

Para las segundas se tiene:

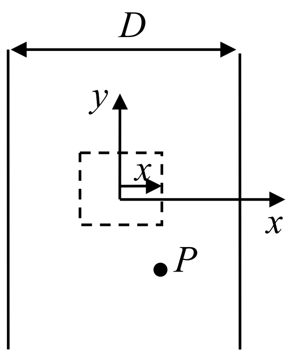
$$d\vec{E}_2 = \frac{\rho dx'}{2\varepsilon_0}\vec{i} \Rightarrow \vec{E}_2 = \int_{-D/2}^{x} \frac{\rho dx'}{2\varepsilon_0}\vec{i} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}(x + \frac{D}{2})\vec{i}$$

El campo total será $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho x}{\varepsilon_0}\vec{i}$

En este caso el campo se podría haber calculado por Gauss usando una superficie gaussiana cilíndrica que pase por P.

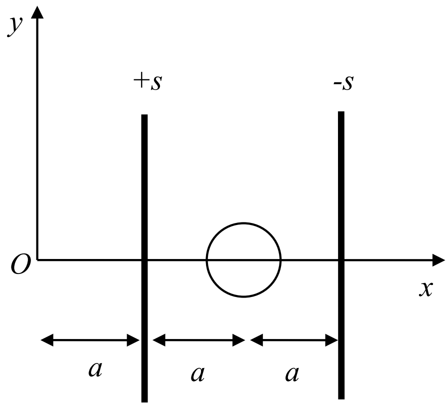
La carga dentro de la gaussiana será $\rho 2Sx$ y el flujo $2ES$ siendo S la base del cilindro.

$$2ES = \frac{\rho 2xS}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho x}{\varepsilon_0}$$



PROBLEMA RESUELTO 3.7

En la figura se representa una configuración electrostática de carga formada por dos placas infinitas con las densidades de carga indicadas y una esfera hueca de radio $R = a/3$ y densidad de carga $\sigma_E = 9\sigma$.



Calcular la expresión vectorial del campo electrostático en puntos x del eje Ox tales que:

1) $0 < x < a$

2) $a < x < 5a/3$

3) $5a/3 < x < 7a/3$

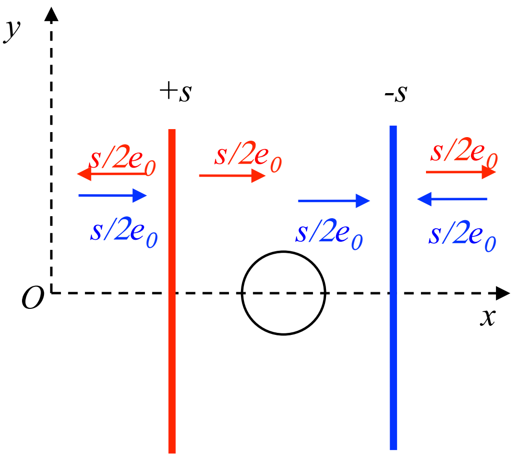
4) $7a/3 < x < 3a$

5) $3a < x$

SOLUCIÓN 3.7

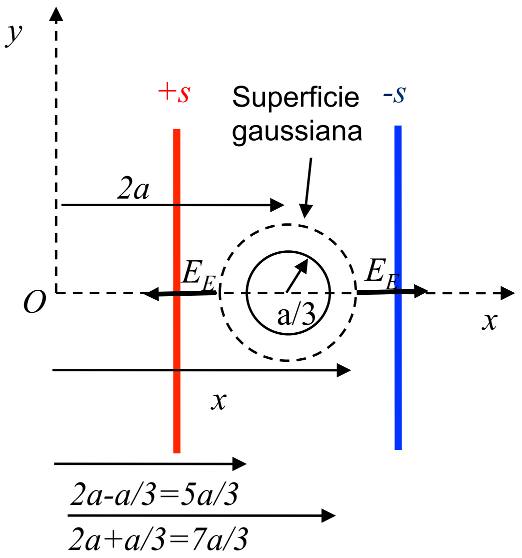
El campo debido a las placas es, por superposición:

$$\vec{E}_P = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} = 0 & \text{si } 0 < x < a \\ (\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0})\vec{i} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{i} & \text{si } a < x < 3a \\ \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} = 0 & \text{si } 3a < x \end{cases}$$



El campo debido a la esfera es cero en el interior dado que, aplicando el teorema de Gauss, no hay carga en el interior de una superficie gaussiana de radio inferior al radio de la esfera. Fuera de la esfera el campo es, por el teorema de Gauss:

$$E_r 4\pi\,(x-2a)^2 = \frac{(9\sigma)4\pi(a/3)^2}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_r = \frac{(9\sigma)4\pi(a/3)^2}{4\pi\,(x-2a)^2\varepsilon_0} = \frac{\sigma a^2}{(x-2a)^2\varepsilon_0}$$



$$\vec{E}_E = \begin{cases} \frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0(2a-x)^2}(-\vec{i}) & \text{si } 0 < x < \frac{5a}{3} \\ 0 & \text{si } \frac{5a}{3} < x < \frac{7a}{3} \\ \frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0(2a-x)^2}\,\vec{i} & \text{si } \frac{7a}{3} < x \end{cases}$$

Aplicando el principio de superposición calculamos el campo en todas las regiones del espacio:

Intervalo	campo placas	campo esfera	campo total
$0 < x < a$	0	$\frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0(2a-x)^2}(-\vec{i})$	$\frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0(2a-x)^2}(-\vec{i})$
$a < x < 5a/3$	$\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\vec{i}$	$\frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0(2a-x)^2}(-\vec{i})$	$\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0(2a-x)^2}\right)\vec{i}$
$5a/3 < x < 7a/3$	$\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\vec{i}$	0	$\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\vec{i}$
$7a/3 < x < 3a$	$\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\vec{i}$	$\frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0(2a-x)^2}\,\vec{i}$	$\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0} + \frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0(2a-x)^2}\right)\vec{i}$
$3a < x$	0	$\frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0(2a-x)^2}\,\vec{i}$	$\frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0(2a-x)^2}\,\vec{i}$

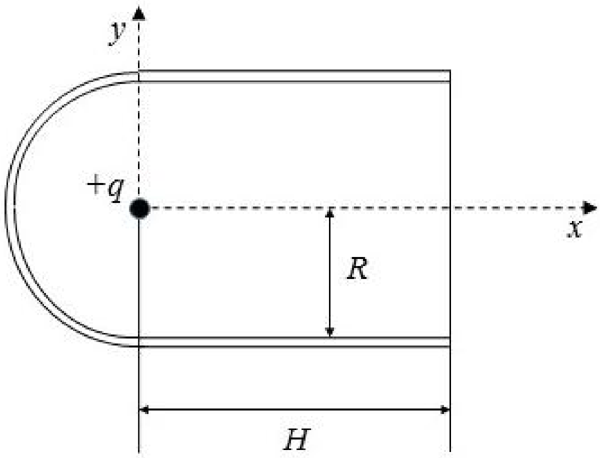
PROBLEMA RESUELTO 3.8

Una campana, de espesor despreciable, está compuesta por una superficie semiesférica y la superficie lateral de un cilindro recto de revolución, según se indica en sección en la figura.

Dicha superficie tiene una carga uniformemente distribuida de densidad $+\sigma$.

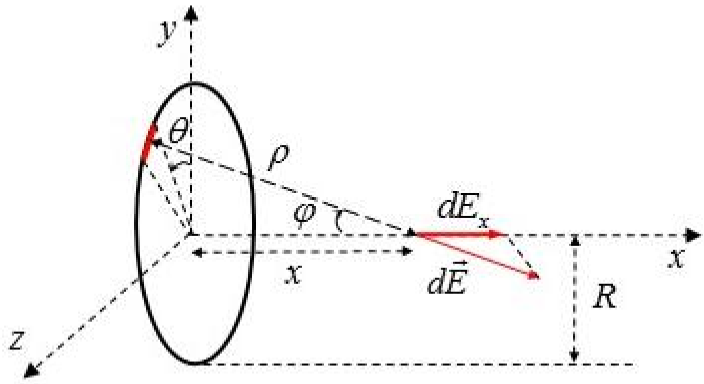
En el centro de la semiesfera se coloca una carga puntual de valor $+q$.

Calcular la relación que debe existir entre R y H para que la fuerza electrostática entre la carga puntual y la campana sea nula.



SOLUCIÓN 3.8

Calculamos en primer lugar el campo de una espira de carga q en su eje. Por simetría sólo queda la componente x del campo.

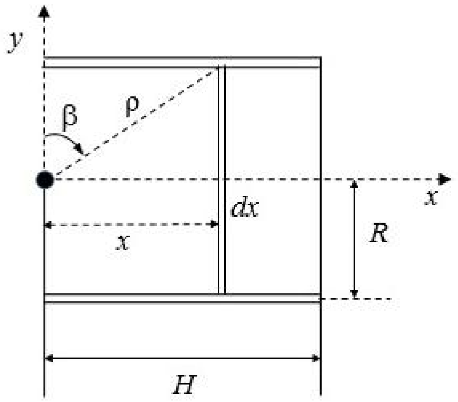


$$dE_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{\rho^2}\cos\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{xdq}{\rho^3}$$

Integrando y teniendo en cuenta que el dq es: $dq = \lambda R d\theta$

$$E_x = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x\lambda R d\theta}{\rho^3} = \frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{x\lambda R}{(x^2+R^2)^{3/2}}, \quad \vec{E} = E_x\vec{i}$$

Esta expresión es válida para $x > 0$ y $x < 0$.



Calculamos el campo del cilindro por superposición de aros teniendo en cuenta que la densidad lineal de cada uno es: $\lambda = \sigma dx$.

La variable x es positiva, y el campo va orientado en el sentido negativo de las x por eso es necesario hacer un cambio de signo en la fórmula previa:

$$dE_x = -\frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{x\sigma dxR}{(x^2+R^2)^{3/2}} \to E_x = \int_0^H -\frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{x\sigma dxR}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$

Haciendo el cambio de variable:

$$\tan\beta = \frac{x}{R} \to d\beta/\cos^2\beta = dx/R$$

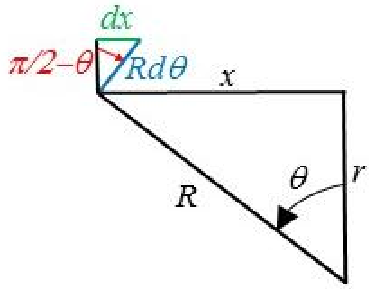
$$\rho\cos\beta = R; \quad \rho^3 = (x^2+R^2)^{3/2}$$

Sustituyendo queda:

$$E_x = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^{\beta_{\text{máx}}} \sin\beta d\beta = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\cos\beta_{\text{máx}} - 1), \quad cos\beta_{\text{máx}} = \frac{R}{(H^2+R^2)^{1/2}}$$

Calculamos el campo del casquete esférico por superposición de aros.

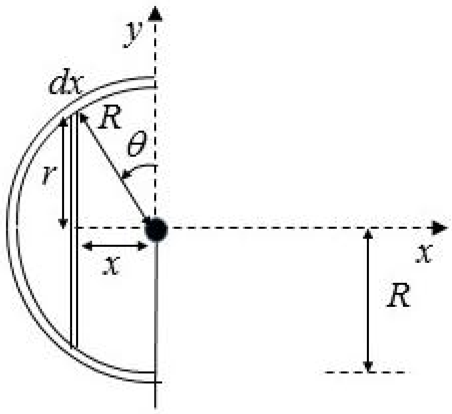
La densidad lineal es:



$$\lambda = \sigma R d\theta = \sigma\frac{dx}{\sin(\pi/2-\theta)} = \sigma\frac{dx}{cos\theta}$$

Teniendo en cuenta ahora que la coordenada x es positiva y el campo tiene el sentido positivo del eje Ox:

$$dE_x = \frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{x\sigma r dx/\cos\theta}{\left(x^2+r^2\right)^{3/2}} \to E_x = \int_0^R \frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{x\sigma dx}{R^2} = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}$$

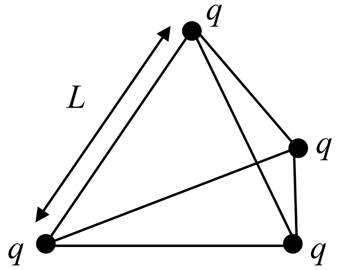


La expresión del campo y de la esfera deben de ser iguales en módulo, o si se prefiere ambas componentes deben sumar cero.
Por tanto:

$$1-\cos\beta_{\text{máx}} = \frac{1}{2} \to \beta_{\text{máx}} = \pi/3 \to \tan\beta_{\text{máx}} = H/R = \sqrt{3}$$

PROBLEMA RESUELTO 3.9

Una configuración electrostática de carga ha sido formada situando cuatro cargas $+q$, iguales, en los vértices de un tetraedro regular de arista L:



1) Calcular la energía de la configuración.

2) Suponiendo que las cargas han sido situadas una a una, calcular el trabajo que ha sido necesario realizar para llevar cada una de ellas desde el infinito hasta su posición actual.

SOLUCIÓN 3.9

1) Calculamos la energía potencial del sistema:

$$U_e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} q_i V_i$$

El potencial en la posición de una carga es la suma de los potenciales creados por las otras tres cargas:

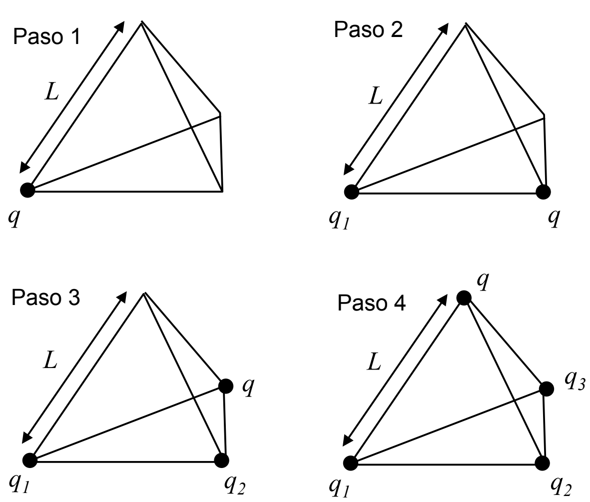
$$V_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{L} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{L} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{L} = \frac{3}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{L}$$

Sustituyendo y sumando:

$$U_e = \frac{3}{8\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{L} + \frac{3}{8\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{L} + \frac{3}{8\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{L} + \frac{3}{8\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{L}$$

$$U_e = \frac{6}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{L}$$

2) Este segundo método es generalmente más fácil de aplicar.



$W_1 = 0$

$W_2 = qV_1 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q^2}{L}$

$W_3 = qV_{1,2} = q(\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{L} + \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{L}) = \dfrac{2}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q^2}{L}$

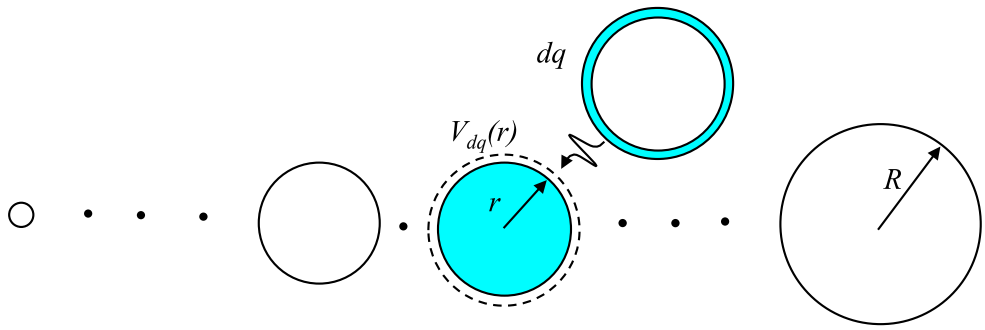
$W_4 = qV_{1,2,3} = q(\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{L} + \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{L} + \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{L}) = \dfrac{3}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q^2}{L}$

$$W = \sum_{i=1}^{4} W_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{6q^2}{L}$$

PROBLEMA RESUELTO 3.10

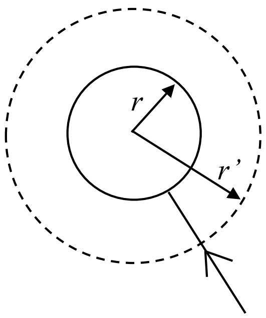
Calcular la energía electrostática de una esfera de radio R y densidad volumétrica de carga uniforme ρ.

SOLUCIÓN 3.10



La carga que traemos es: $dq = \rho\, 4\pi r^2 dr$. Tenemos que saber el potencial que crean las cargas ya traídas donde dejamos el dq, es decir, $V_{dq}(r)$.

El campo que crea la esfera de radio r por Gauss a distancia r' es:



$$E 4\pi r'^2 = \frac{\rho(4/3)\pi r^3}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho r^3}{3\varepsilon_0 r'^2}$$

El potencial a una distancia r se obtiene haciendo la integral de línea del campo desde el infinito hasta r':

$$V_{dq}(r) = -\int_{\infty}^{r} \frac{\rho r^3}{3\varepsilon_0 r'^2} dr' = \left.\frac{\rho r^3}{3\varepsilon_0 r'}\right|_{\infty}^{r} = \frac{\rho r^2}{3\varepsilon_0}$$

(No olvidemos que el potencial de una carga esférica a una distancia r>R siempre viene dado por: $V_{dq}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\rho\frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\rho r^2}{3\varepsilon_0}$)

El trabajo electrostático que realizamos para traer la carga dq es:

$$dW = dqV_{dq} = \rho\, 4\pi r^2 dr \frac{\rho r^2}{3\varepsilon_0} = \frac{4\pi\rho^2 r^4 dr}{3\varepsilon_0}$$

El trabajo total para realizar todo el proceso, y por tanto, la energía electrostática, es:

$$U_e = W = \int dW = \int dqV_{dq} = \int_0^R \frac{4\pi\rho^2 r^4}{3\varepsilon_0} dr = \frac{4\pi\rho^2 R^5}{15\varepsilon_0}$$