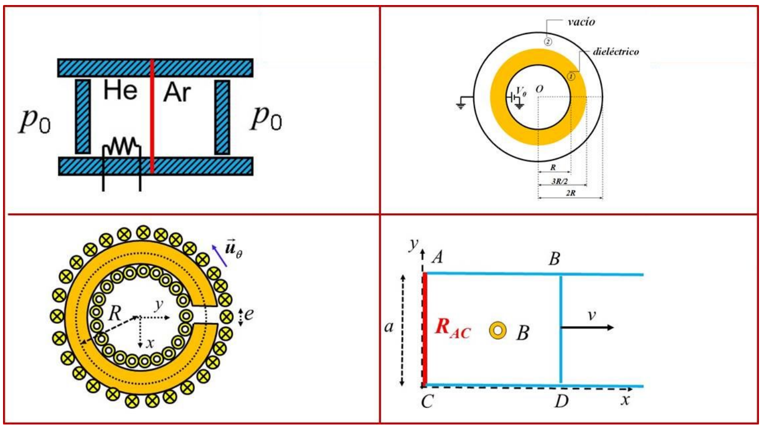
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO

Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

FÍSICA II

PROBLEMAS RESUELTOS

José Carlos JIMÉNEZ SÁEZ
Santiago RAMÍREZ DE LA PISCINA MILLÁN



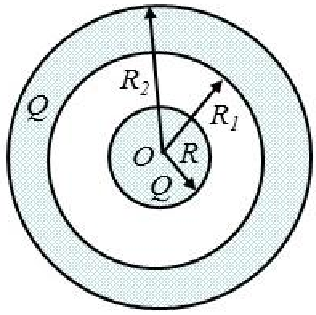
4.- ELECTROSTÁTICA DE CONDUCTORES

4 Electrostática de conductores

PROBLEMA RESUELTO 4.1

La distribución de carga mostrada en la figura consta:

- De una esfera maciza, conductora, de centro O y radio R, que almacena una carga total Q.
- Y de una corteza esférica, también conductora, concéntrica con la esfera, de radio interior R_1 y radio exterior R_2, que también almacena una carga total Q.



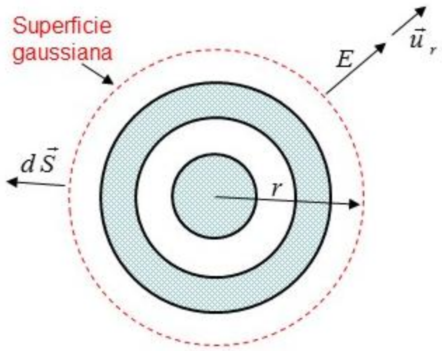
El potencial en el centro O, $V(O)$, es conocido.

Hallar el valor numérico de la carga Q, expresado en nC, teniendo en cuenta los siguientes datos:

$R_1 = 2R \quad R_2 = 3R \quad R = 1\text{m} \quad V(O) = 7\text{V}$

(Se utiliza el criterio de potencial nulo en el infinito)

SOLUCIÓN 4.1



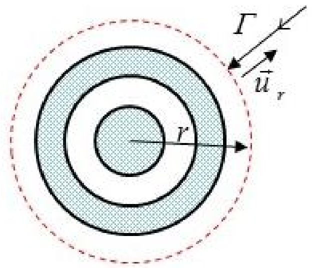
Aplicamos el teorema de Gauss a la esfera de radio r para calcular el campo electrostático:

$$E(r)4\pi r^2 = \frac{2Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(r) = E(r)\,\vec{u}_r = \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$$

Calculamos el potencial a partir de la integral de línea integrando en una línea recta Γ que viene desde el infinito (suponemos además que en el infinito el potencial es 0, esto se puede hacer siempre que la distribución de carga sea finita). En los límites de integración va implícito el sentido de recorrido desde infinito hasta un punto situado a una distancia r del origen.

$$V(r) = \overbrace{V(\infty)}^{0} - \int_{\infty}^{r} E(r)\vec{u}_r \cdot dr\,\vec{u}_r = -\int_{\infty}^{r} E(r)dr$$

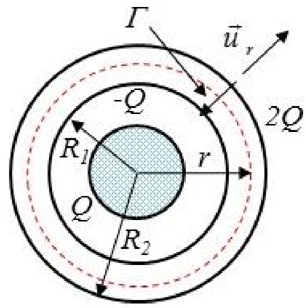
Para $r > R_2$



$$V = -\int_{\infty}^{r} E(r)dr = -\int_{\infty}^{r} \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2Q}{r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V(R_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2Q}{3R}, \quad R_2 = 3R$$

Para $R_1 < r < R_2$



Estamos en el interior de un conductor en equilibrio, y por tanto, el campo es cero: $E = 0$

Aplicamos Gauss a una superficie gaussiana de radio r:

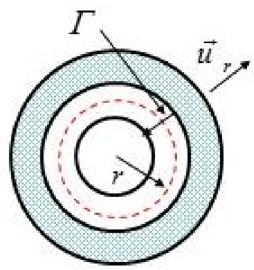
$$E(r)4\pi r^2 = \frac{q_{encerrada}}{\varepsilon_0} \Rightarrow q_{encerrada} = 0$$

De esto se deduce que en la superficie de radio R_2 se alberga una carga $2Q$ mientras que en la de radio R_1 lo hace una carga $-Q$. De esta manera dentro de la superficie gaussiana no hay carga.

Realizamos la circulación a lo largo de una recta radial Γ que va desde R_2 hasta R_1.

$$V(R_1) = V(R_2) - \int_{R_2}^{R_1} E(r)dr = V(R_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2Q}{3R}$$

Para $R < r < R_1$



$$E(r)4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(r) = E(r)\,\vec{u}_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$$

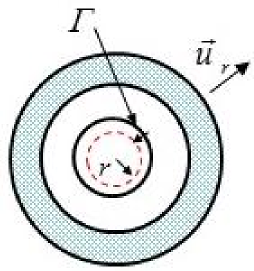
Realizamos la circulación a lo largo de una recta radial Γ que va desde R_1 hasta R.

$$V(R) = V(R_1) - \int_{R_1}^{R} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr = V(R_1) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{R} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{R_1}$$

$$V(R_1) - V(R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-1}{2R}\right),, \quad R_1 = 2R$$

Con lo que:

$$V(R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2Q}{3R} + \frac{Q}{2R}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{7Q}{6R}$$



Para $r < R$

Estamos en el interior de un conductor en equilibrio, y por tanto, el campo es cero: $E = 0$.

Aplicamos Gauss a una superficie gaussiana de radio r:

$$E(r)4\pi r^2 = \frac{q_{encerrada}}{\varepsilon_0} \Rightarrow q_{encerrada} = 0$$

Realizamos la circulación a lo largo de una recta radial Γ que va desde R hasta 0.

$$V(0) = V(R) - \int_R^0 0\, dr = V(R)$$

$$V(R) = V(0) = 7V \Rightarrow Q = 7 \cdot 4\pi\varepsilon_0 \cdot \frac{6R}{7} \quad \Rightarrow Q = \frac{2}{3} nC$$

PROBLEMA RESUELTO 4.2

Tres superficies metálicas esféricas, concéntricas, de radios R_1, R_2 y R_3, tienen cargas uniformemente distribuidas. La carga de cada esfera es proporcional a su radio.

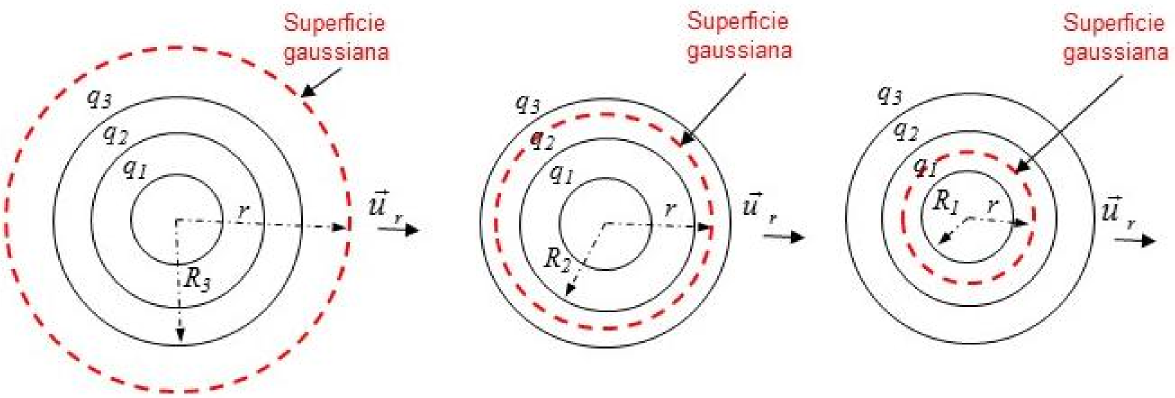
El potencial de la superficie exterior es V_3, tomando como referencia de potencial nulo en el infinito.

Calcular la carga de cada superficie y el potencial de las otras dos.

DATOS: $R_1 = 1\,\mathrm{m}$ $R_2 = 2\,\mathrm{m}$ $R_3 = 3\,\mathrm{m}$ $V_3 = 1800\,\mathrm{V}$

SOLUCIÓN 4.2

Aplicamos el teorema de Gauss para calcular el campo en una superficie esférica de radio r ($\vec{E} = E_r\vec{u}_r$):



Para $r > R_3$:

$$E_r 4\pi\, r^2 = \frac{q_1 + q_2 + q_3}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_r = \frac{q_1 + q_2 + q_3}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}$$

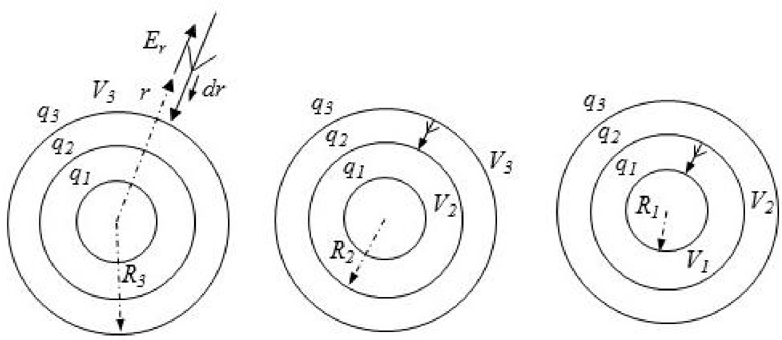
Para $R_2 < r < R_3$:

$$E_r 4\pi\, r^2 = \frac{q_1 + q_2}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_r = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\, r^2\varepsilon_0}$$

Para $R_1 < r < R_2$:

$$E_r 4\pi\, r^2 = \frac{q_1}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_r = \frac{q_1}{4\pi\, r^2\varepsilon_0}$$

Calculamos la integral de línea para calcular el potencial electrostático:



Para $r > R_3$:

$$\int_{\infty}^{V_3} dV = -\int_{\infty}^{R_3} E_r \cdot dr \ \Rightarrow V_3 = -\int_{\infty}^{R_3} E_r \cdot dr \ = -\int_{\infty}^{R_3} \frac{q_1+q_2+q_3}{4\pi\varepsilon_0\, r^2} \cdot dr = \frac{q_1+q_2+q_3}{4\pi\varepsilon_0\, R_3}$$

$$q_1 + q_2 + q_3 = 4\pi\varepsilon_0\, R_3 V_3 \tag{4.1}$$

Para $R_2 < r < R_3$:

$$\int_{V_3}^{V_2} dV = -\int_{R_3}^{R_2} E_r \cdot dr \ \Rightarrow V_2 - V_3 = -\int_{R_3}^{R_2} \frac{q_1+q_2}{4\pi\, r^2 \varepsilon_0} \cdot dr \ = \frac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right)$$

$$V_2 - V_3 = \frac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right) \tag{4.2}$$

Para $R_1 < r < R_2$:

$$\int_{V_2}^{V_1} dV = -\int_{R_2}^{R_1} E_r \cdot dr \ \Rightarrow V_1 - V_2 = -\int_{R_2}^{R_1} \frac{q_1}{4\pi\, r^2 \varepsilon_0} \cdot dr \ = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$V_1 - V_2 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \tag{4.3}$$

Según el enunciado: $\dfrac{q_1}{R_1} = \dfrac{q_2}{R_2} = \dfrac{q_3}{R_3}$

Sustituyendo los datos: $q_2 = 2\, q_1\,; \quad q_3 = 3\, q_1$

Sustituimos en la ecuación (4.1): $6q_1 = 4\pi\varepsilon_0 V_3 R_3 \Rightarrow q_1 = 0.1\ \mu C$

Con lo cual: $q_2 = 0.2\ \mu C \quad q_1 = 0.3\ \mu C$

Sustituimos en la ecuación (4.2):

$$V_2 = V_3 + 0.3 \times 10^{-6} \times 9 \cdot 10^9 \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 1800 + 2.7 \times 10^3 \cdot \frac{1}{6} \ = 2250V$$

Sustituimos en la ecuación (4.1):

$$V_1 = V_2 + 0.1 \times 10^{-6} \times 9 \cdot 10^9 \times \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) = 2250 + 450 = 2700V$$

PROBLEMA RESUELTO 4.3

En el vacío, se dispone de dos placas delgadas metálicas iguales, planas y paralelas, de superficie S muy grande comparada con su separación d, situadas horizontalmente y enfrentadas.

La placa inferior C se conecta a tierra y en la superior B se almacena una carga $+Q$.

Suponiendo que la carga se distribuye de manera uniforme (se desprecian los efectos de borde), y considerando que el sistema está en equilibrio, se pide, en función de A, d, Q y ε_0 (constante dieléctrica en el vacío):

1) Razonar porque no existe campo eléctrico fuera de la zona entre placas.

2) Carga en la placa inferior C.
Campo eléctrico entre placas indicando su sentido.
Potencial de cada placa.
Capacidad del sistema.

Se coloca, por encima de ambas, una tercera placa D igual a las anteriores, paralela a ellas, a una distancia $2d$ de la superior y mediante un dispositivo se mantiene a un potencial $+V$.

Calcular, en este nuevo estado de equilibrio, en función de A, d, Q, V y ε_0:

3) Campo eléctrico entre las placas C y B indicando su sentido.
Campo eléctrico entre las placas B y D; calcular al valor V_0 de V que anularía este campo e indicar el sentido de este campo en los casos $V < V_0$ y $V > V_0$.
Potencial de la placa intermedia B.
Carga en la placa inferior C.

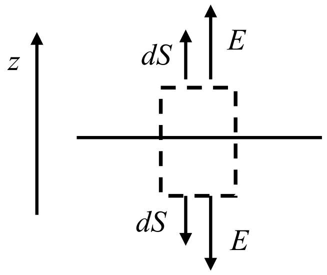
SOLUCIÓN 4.3

1) Pensemos en términos de fuerzas y supongamos que en el infinito no hay cargas. La carga Q supuesta positiva atrae cargas negativas que suben por la conexión a tierra. Atrae tantas cargas como necesitaría para equilibrar el exceso de carga positiva y conseguir que desapareciesen las fuerzas de atracción. Por tanto, la placa C se carga con una carga $-Q$. Sin embargo, estas cargas no pueden alcanzar las cargas positivas puesto que no pueden abandonar la placa C. Ambas, las cargas de C y de B se mantienen lo más cerca posible.

2) La densidad de carga de la placa C es la misma que la de B cambiada de signo.

$$\sigma_A = -\sigma_B \rightarrow Q_A = -Q = -\sigma A$$

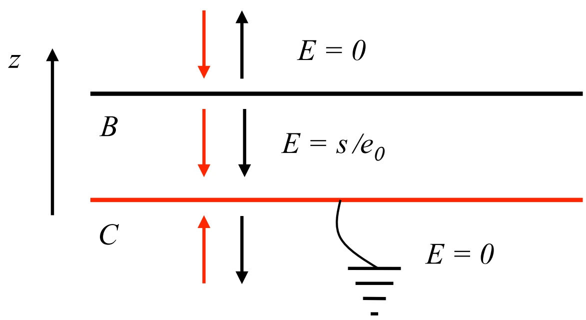
El campo de una placa plano paralela de densidad σ se obtiene aplicando Gauss a una gaussiana de sección transversal S:



$$2ES = \sigma S/\varepsilon_0 \rightarrow E = \sigma/2\varepsilon_0$$

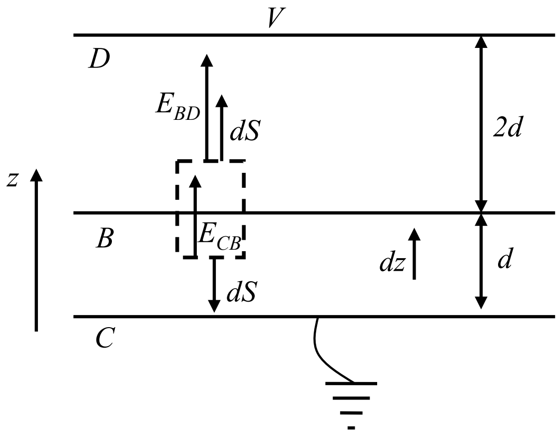
Por el principio de superposición el campo fuera es nulo y dentro es:

$$\vec{E} = (-\sigma/2\varepsilon_0 - \sigma/2\varepsilon_0)\vec{k} = -(\sigma/\varepsilon_0)\,\vec{k} = -Q/(A\varepsilon_0)\,\vec{k} = -E\vec{k}$$



También se puede obtener aplicando el teorema de Gauss a la gaussiana de la figura:

$$ES = \sigma S/\varepsilon_0 \to E = \sigma/\varepsilon_0 = Q/(A\varepsilon_0)$$



La diferencia de potencial entre placas se obtiene:

$$V_B = -\int_{z=0}^{z=d} \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\int_0^d (\sigma/\varepsilon_0)\,(-\vec{k})\;dz\vec{k} = (\sigma/\varepsilon_0)\,d = Qd/(A\varepsilon_0)$$

Y la capacidad: $C = \dfrac{Q}{V_B} = \varepsilon_0 \dfrac{A}{d}$

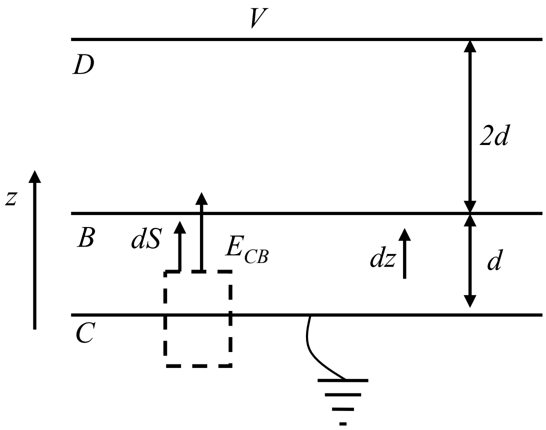
3) Conocemos la diferencia de potencial entre C y D:

$$\vec{E} = E_{CB}\vec{k} + E_{BD}\vec{k}; \quad d\vec{r} = dz\vec{k}$$

$$V = V_D - V_C = -\int_{z=0}^{z=3d} \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\int_0^d E_{CB}\vec{k}\cdot\; dz\vec{k} - \int_d^{3d} E_{BD}\vec{k}\cdot\; dz\vec{k}$$

$$V = -E_{CB}d - E_{BD}2d$$

Aplicando el teorema de Gauss a la gaussiana de la figura tenemos:



$$-E_{CB}S + E_{BD}S = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \rightarrow -E_{CB} + E_{BD} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Resolviendo las dos ecuaciones queda:

$$E_{CB} = -\left(\frac{V}{3d} + \frac{2\sigma}{3\varepsilon_0}\right) \rightarrow \vec{E}_{CB} = E_{CB}\vec{k}$$

$$E_{BD} = \left(-\frac{V}{3d} + \frac{\sigma}{3\varepsilon_0}\right) \rightarrow \vec{E}_{BD} = E_{BD}\vec{k}$$

El valor del potencial que anula este campo es: $V_0 = \dfrac{\sigma d}{\varepsilon_0}$.

Si $V > V_0$ entonces el campo va en la dirección de $\vec{k}$.

Si $V < V_0$ entonces el campo va en la dirección de $\vec{k}$

$$V_B = V_B - V_C = -\int_{z=0}^{z=d} \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\int_0^d E_{CB}\vec{k}\cdot\ dz\vec{k}$$

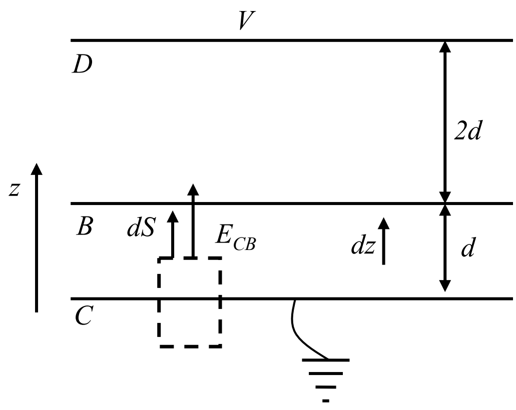
$$V_B = -E_{CB}d = \left(\frac{V}{3} + \frac{2Qd}{3S\varepsilon_0}\right)$$

Para saber la carga en la placa C basta saber el campo normal en su superficie y aplicar la condición de contorno:

$$\sigma_C = \varepsilon_0 E_{CB} = -\left(\frac{V\varepsilon_0}{3d} + \frac{2\sigma}{3}\right)$$

O aplicar el teorema de Gauss a la superficie gaussiana de la figura:

$$E_{CB}S = \frac{\sigma_C S}{\varepsilon_0} \rightarrow \sigma_C = E_{CB}\ \varepsilon_0$$



PROBLEMA RESUELTO 4.4

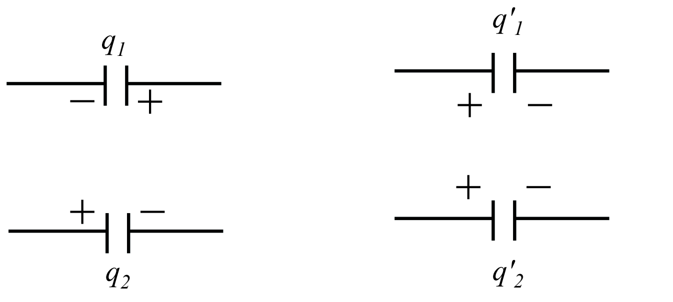
Dos condensadores de capacidades C_1 y C_2 se cargan por separado a un potencial V_0. Una vez cargados se conectan en paralelo, uniendo las armaduras que se encuentran cargadas con electricidad de signos contrarios.

Calcular la carga final de cada condensador y la d.d.p. entre sus armaduras después de la conexión.

DATOS: $C_1 = 20\,\mu\mathrm{F}$ $\quad C_2 = 40\,\mu\mathrm{F}$ $\quad V_0 = 10\,\mathrm{V}$

SOLUCIÓN 4.4

Cuando se cargan por separado adquieren las siguientes cargas:



Antes de conectar — Después de conectar

$$q_1 = C_1 V_0 = 200\ \mu C$$

$$q_2 = C_2 V_0 = 400\ \mu C$$

Las placas unidas en A quedan cargadas positivamente porque $q_2 > q_1$.

Las nuevas cargas cumplen:

Ecuación de nudos (nº de ecuaciones=nº de nudos-1):

En este caso la carga en el nudo no es cero ya que inicialmente los condensadores se hallaban cargados.

$$q_1' + q_2' = -q_1 + q_2 = 200\,\mu C$$

Ecuación de mallas (nº de ecuaciones=nº de mallas):

Se suman las caídas o subidas de potencial (con signo diferente si se trata de una u otra) y se igualan a cero. Si se recorre el circuito horariamente V_1' es caída y V_2' es subida, por tanto, deben llevar diferente signo.

$$V_1' - V_2' = 0 \Rightarrow \quad \frac{q'_1}{C_1} - \frac{q'_2}{C_2} = 0 \quad \Rightarrow \frac{q'_1}{20} = \frac{q'_2}{40}$$

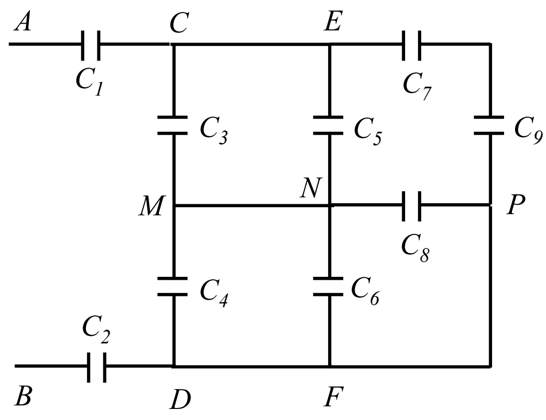
y resolviendo se obtiene $q_1' = \dfrac{200}{3}\mu C \qquad q_2' = \dfrac{400}{3}\mu C$

La d.d.p. es: $V_{AB} = V_2' = \dfrac{q'_2}{C_2} \quad \Rightarrow \quad V_{AB} = \dfrac{400}{3 \times 40} \quad \Rightarrow V_{AB} = \dfrac{10}{3}\ V$

PROBLEMA RESUELTO 4.5

En la red de la figura, calcular:

- Capacidad equivalente
- Carga almacenada en cada condensador
- Energía electrostática cuando se aplica entre A y B una d.d.p. de $V_A - V_B = 100$ V.



DATOS: $C_1 = C_2 = 8\mu$F, $C_3 = C_5 = 2\mu$F, $C_4 = C_6 = C_8 = 4/3\mu$F, $C_7 = C_9 = 4\mu$F

SOLUCIÓN 4.5

C_7 y C_9 están en serie: $C_{79} = 2\mu$F

$$C_{79} = \frac{C_7 C_9}{C_7 + C_9}$$

C_3 y C_5 están en paralelo:

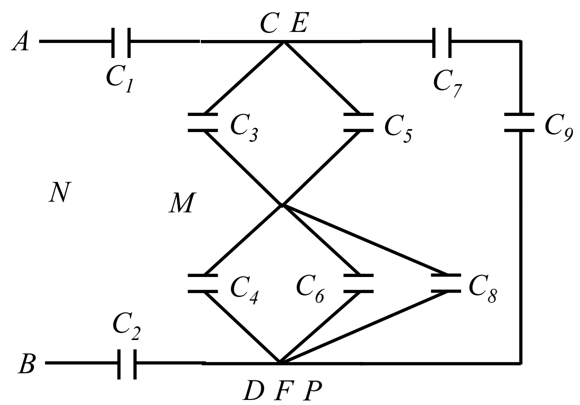
$$C_{35} = 4\mu\text{F}$$

$$C_{35} = C_3 + C_5$$

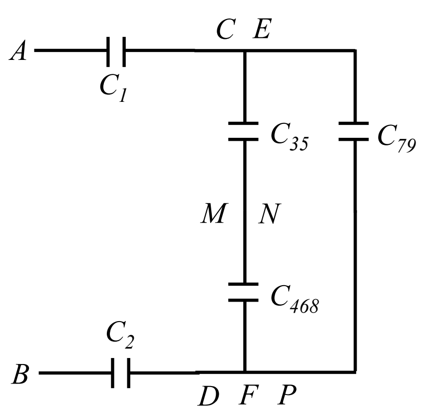
C_4, C_6 y C_8 están en paralelo:

$$C_{468} = 4\mu\text{F}$$

$$C_{468} = C_4 + C_6 + C_8$$



El circuito simplificado quedaría como se muestra en la figura. Los condensadores C_{35} y C_{468} están en serie. El condensador serie está en paralelo con el condensador C_{79}.

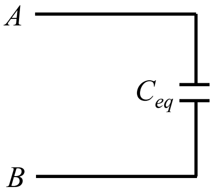


Por tanto:

$$C_{35468} = \frac{C_{35} C_{468}}{C_{35} + C_{468}} = 2\mu F$$

$$C_{3546879} = C_{35468} + C_{79} = 4\mu F$$

La capacidad equivalente final resulta de hacer la serie de C_1, C_2 y $C_{3546879}$.



$$C_{eq} = \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_{3546879}} \rightarrow C_{eq} = 2\mu F$$

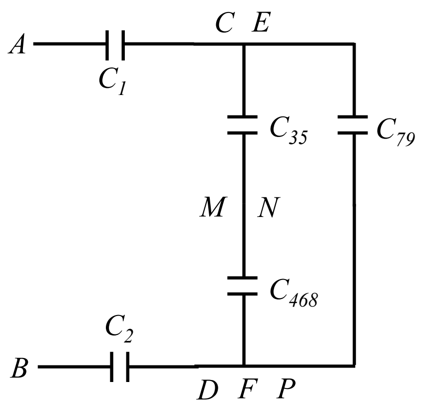
La carga que adquiere conectado a una batería de 100 V es de

$$q_{eq} = 200\mu C$$

La energía electrostática que almacena el sistema es:

$$U_e = \frac{1}{2} C_{eq} V^2 = 10^4 \mu J$$

Para calcular la carga de todos los condensadores debemos volver hacia atrás en la simplificación del circuito:



Los condensadores C_1, C_2 y $C_{3546879}$ adquieren también la misma carga:

$$q_1 = q_2 = q_{3546879} = 200\mu C$$

La diferencia de potencial entre C y D es:

$$V_{CD} = \frac{q_{3546879}}{C_{3546879}} = 50V \rightarrow q_{79} = C_{79} V_{CD} = 100\mu C$$

Al estar en serie el condensador C_7 y C_9 resulta:

$$q_7 = q_9 = 100\mu C$$

Análogamente: $q_{35} = q_{468} = 100\mu C$

La diferencia de potencial entre C y M es:

$$V_{CM} = \frac{q_{35}}{C_{35}} = 25V \rightarrow q_3 = C_3 V_{CM} = 50\mu C; \quad q_5 = C_5 V_{CM} = 50\mu C$$

La diferencia de potencial entre M y D es:

$$V_{MD} = \frac{q_{468}}{C_{468}} = 25V \rightarrow \begin{cases} q_4 = C_4 V_{MD} = \dfrac{100}{3}\mu C \\ q_6 = C_6 V_{MD} = \dfrac{100}{3}\mu C \\ q_8 = C_8 V_{MD} = \dfrac{100}{3}\mu C \end{cases}$$

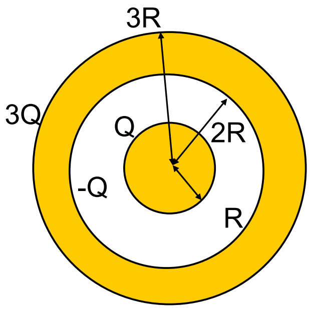
PROBLEMA RESUELTO 4.6

Se tiene una distribución de carga formada por:

- Una esfera metálica de radio $R_1 = R$ y carga neta Q.
- Una corteza esférica metálica, concéntrica con la anterior, de radios $R_2 = 2R$ y $R_3 = 3R$ con carga neta $2Q$.

Indíquese la distribución de cargas y calcúlese la energía potencial electrostática de la distribución.

SOLUCIÓN 4.6



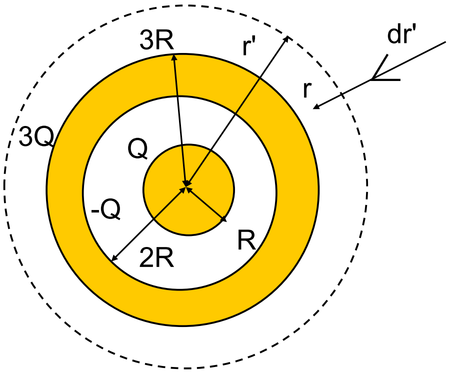
Esfera: carga Q en la superficie.
La carga en un conductor está en la superficie.
Llamaremos V_1 a su potencial.
Corteza: carga $-Q$ en la superficie interior.

Si se toma una gaussiana esférica dentro de la corteza esta debe encerrar carga nula pues el campo en el interior del conductor es nulo, por ello la suma de la carga en R_1 y de la carga en R_2 es cero. Llamaremos V_2 a su potencial.

Carga 3Q en la superficie exterior.

La carga total en la corteza esférica es $2Q$, si hay $-Q$ en la superficie interior, en la exterior hay $3Q$. La carga de un conductor en equilibrio sólo se encuentra en las superficies ya sean interiores o exteriores. La energía electrostática de un conductor es:

$$U_e = \frac{1}{2}QV_1 + \frac{1}{2}(2Q)\,V_2$$



Para calcular los potenciales obtenemos los campos aplicando el teorema de Gauss a superficies esféricas de distinto radio r'.
El potencial se calcula aplicando la integral de línea viniendo desde infinito, donde el potencial es cero, hasta puntos situados a una distancia r del centro de la distribución.

Para una superficie esférica de radio r' tal que $3R < r'$:

$$E_f 4\pi r'^2 = \frac{3Q}{\varepsilon_0} \to E_f = \frac{3Q}{4\pi\varepsilon_0 r'^2} \to V_f(r) = -\int_{\infty}^{r} E_f dr' = \frac{3Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

El valor del potencial es análogo al de una carga puntual de valor $3Q$.

Para una superficie esférica de radio r' tal que $R < r' < 2R$:

$$E_d 4\pi r'^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \to E_d = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r'^2} \to V_d(r) = -\int_{\infty}^{3R} E_f dr' - \int_{2R}^{r} E_d dr' = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 3R} - \left(-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\,(2R)}\right)$$

También se podría calcular como:

$$V_d(r) = V(2R) - \int_{2R}^{r} E_d dr' = V(3R) - \left(-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\,(2R)}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 3R} - \left(-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\,(2R)}\right)$$

También se podría obtener integrando la ecuación:

$$\vec{E} = -\nabla' V \to E = -\frac{dV}{dr'} \to V(r) = -\int E dr'$$

$$V_d(r) = -\int E_d dr' \to V_d(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + C_d$$

$$V_f(r) = -\int E_f dr' \to V_f(r) = \frac{3Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + C_f$$

Las constantes C_1 y C_2 las obtenemos imponiendo que:

$$V_f(\infty) \to 0 \Rightarrow C_f = 0$$

$$V_d(2R) = V_f(3R) = \frac{3Q}{4\pi\varepsilon_0(3R)} = V_2 \Rightarrow C_d = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 3R} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\,(2R)}$$

En el resto de las zonas el campo es cero al tratarse de conductores. En ellos el potencial es constante.

Sustituyendo en los puntos de interés.

$$V_d(R) = \frac{3Q}{8\pi\varepsilon_0 R} = V_1$$

La energía electrostática queda:

$$U_e = \frac{Q}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3Q}{2R} + \frac{2Q}{R}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{7Q^2}{4R}$$

PROBLEMA RESUELTO 4.7

Calcular la energía electrostática de una carga puntual q y un cascarón esférico conductor de radio R y carga $-Q$, en cuyo centro está la carga puntual.

SOLUCIÓN 4.7

Traemos en primer lugar la carga q, proceso que no cuesta trabajo.

A continuación traemos carga dq' hasta un total de $-Q$.

El potencial $V_{dq'}$ a una distancia R es suma del creado por la carga puntual y del creado por la carga q' ya traída.

$$U_e = W = \int dW = \int dq' V_{dq'} = \int_0^{-Q} dq' \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 R} \right) = \frac{(-Q)q}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$