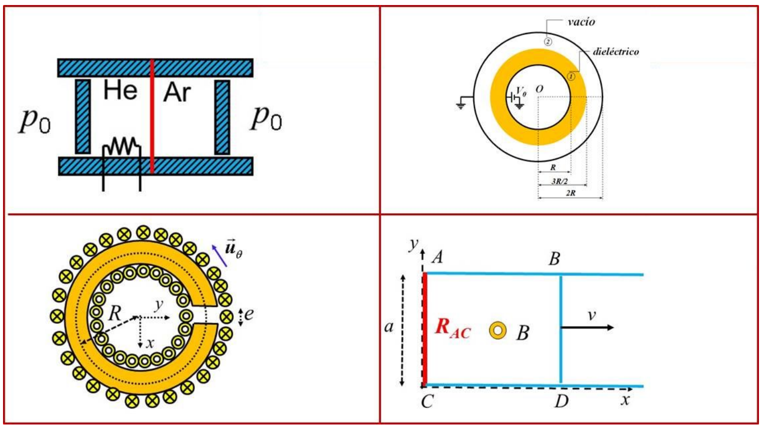
Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO

FÍSICA II

PROBLEMAS RESUELTOS

José Carlos JIMÉNEZ SÁEZ
Santiago RAMÍREZ DE LA PISCINA MILLÁN



5.- ELECTROSTÁTICA DE DIELÉCTRICOS

5 Electrostática de dieléctricos

PROBLEMA RESUELTO 5.1

Se tiene un dipolo eléctrico de momento dipolar $\vec{p} = p\vec{j}$ situado en el origen de un sistema de referencia. Se pide:

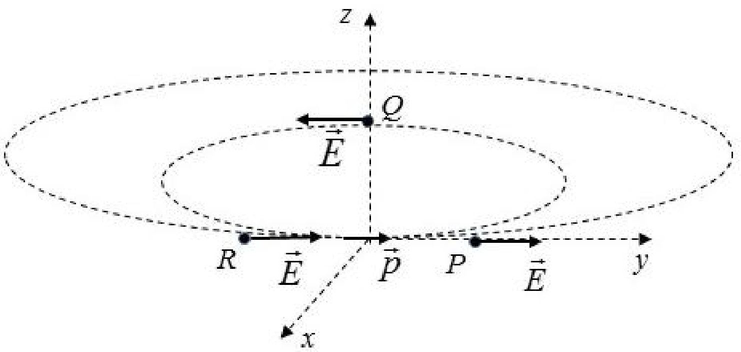
1) Calcular la fuerza eléctrica que ejerce sobre una carga puntual de valor q situada en un punto $P(0, d, 0)$ del eje OY para $d >> 0$ (primera posición de Gauss).

2) Calcular la fuerza eléctrica que ejerce sobre una carga puntual de valor q situada en un punto $Q(0, 0, d)$ del eje OZ para $d >> 0$ (segunda posición de Gauss).

3) Calcular el trabajo realizado por el dipolo para mover la carga anterior desde el punto P hasta el punto Q.

4) Calcular el trabajo realizado por el dipolo para mover la carga anterior desde el punto P hasta el punto $R(0, -d, 0)$.

SOLUCIÓN 5.1



El campo creado por un dipolo eléctrico es:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{\vec{p}}{r^3} + \frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5}\right)$$

Sustituimos el momento dipolar y la posición del punto P:

$$\vec{E}(\vec{r} = y\vec{j}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{p\vec{j}}{|y|^3} + \frac{3py^2\vec{j}}{|y|^5}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2p}{|y|^3}\right)\vec{j} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{p}{y^3}\right)\vec{j}, & y > 0 \\ -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{p}{y^3}\right)\vec{j}, & y < 0 \end{cases}$$

$$\vec{F} = q\vec{E}(\vec{r} = d\vec{j}) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{qp}{d^3}\right)\vec{j}$$

Sustituimos el momento dipolar y la posición del punto Q:

$$\vec{E}(\vec{r}=z\vec{k}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{p\vec{j}}{|z|^3}\right) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{p}{|z|^3}\right)\vec{j}$$

$$\vec{F} = q\vec{E}(\vec{r}=d\vec{k}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{p}{d^3}\right)\vec{j}$$

Calculamos el trabajo a partir del potencial.

El potencial de un dipolo es:

$$V(\vec{r}) = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}|^3}$$

$$W = \int_\Gamma q\vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_\Gamma q\vec{E}\cdot d\vec{r} = -\int_\Gamma q\nabla V\cdot d\vec{r} = -\int_P^Q q dV = -q(V(Q)-V(P))$$

$$W = -q(V(Q)-V(P)) = -q(0-\frac{pd}{4\pi\varepsilon_0 d^3}) = \frac{pq}{4\pi\varepsilon_0 d^2}$$

El trabajo para desplazar la carga desde P a R podemos calcularlo también integrando el campo a lo largo de un camino sencillo como una línea recta sobre el eje Oy.

El diferencial de línea sería:

$$W = -q\int_P^R \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\,q\int_d^{-d}\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{p}{|y|^3}\right)dy = -\,q\int_d^{0}\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{p}{y^3}\right)dy + q\int_0^{-d}\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{p}{y^3}\right)dy =$$

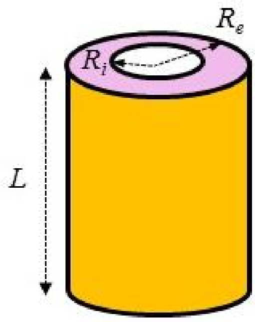
$$W = \frac{qp}{4\pi\varepsilon_0}\left.\frac{1}{y^2}\right|_d^0 - \frac{qp}{4\pi\varepsilon_0}\left.\frac{1}{y^2}\right|_0^{-d} = \frac{qp}{4\pi\varepsilon_0}(-\frac{1}{d^2}-\frac{1}{d^2}) = -\frac{qp}{2\pi\varepsilon_0 d^2}$$

A partir de la expresión del potencial de un dipolo se observa que el potencial es antisimétrico en torno al plano $y=0$.

PROBLEMA RESUELTO 5.2

Un condensador cilíndrico de longitud L, radio interior R_i y radio exterior R_e está relleno de dieléctrico de permitividad relativa constante ε_r. El condensador se encuentra conectado a una batería de potencial V, estando la armadura exterior a mayor potencial que la armadura interior.

Despreciando los efectos de borde debidos a la longitud finita del condensador para poder suponer constantes las densidades de carga, calcular:



1) El campo eléctrico y el potencial en todas las zonas del espacio. Tómese potencial cero en la armadura exterior $V(r = R_e) = 0$.

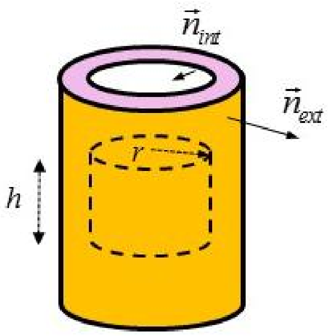
2) La densidad superficial y volumétrica de carga de polarización del dieléctrico. Compruébese que la carga de polarización total es cero.

3) La capacidad y energía almacenada.

Nota: Considérese nulo el campo en la parte exterior del condensador.

SOLUCIÓN 5.2

Aplicamos el teorema de Gauss para el vector desplazamiento eléctrico $\vec{D}$ en cilindros de altura h y distinto radio r situadas en las zonas:



Zona A: $r < R_i$

Zona B: $R_i < r < R_e$

Zona C: $R_e < r$

Todos los campos tienen simetría cilíndrica radial: $\vec{D} = D\vec{u}_r$; $\vec{E} = E\vec{u}_r$; $\vec{P} = P\vec{u}_r$ siendo $\vec{u}_r$ el vector unitario radial de coordenadas cilíndricas. Vamos a llamar Q_i a la carga que adquiere la armadura interior y Q_e a la carga que adquiere la armadura exterior.

- En la zona A no se encierra ninguna carga, por tanto el vector desplazamiento y el campo eléctrico son cero. Por tanto:

$$D_A = 0 \rightarrow E_A = 0$$

- En la zona B se encierra la carga de la armadura interior Q_i. En el teorema de Gauss del vector desplazamiento no se tienen en cuenta las cargas de polarización. La carga encerrada en una superficie gaussiana de altura h es, dado que la distribución es uniforme, la densidad de carga en esa dirección por la longitud:

$$D_B 2\pi r h = \frac{Q_i}{L} h \qquad D_B = \frac{Q_i}{2\pi r L} \rightarrow E_B = \frac{D_B}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{Q_i}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r L}$$

- En la zona C se encierran las cargas de la armadura interior Q_i y exterior Q_e. No se tienen en cuenta las cargas de polarización. El campo nos dice el enunciado que es cero.

$$0 = D_C 2\pi r h = Q_i + Q_e \rightarrow Q_i = -Q_e$$

La polarización en el dieléctrico es:

$$P = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E_B = \frac{(\varepsilon_r - 1)Q_i}{2\pi\varepsilon_r r L}$$

La carga de polarización en la superficie exterior del dieléctrico se obtiene a partir del vector polarización proyectándolo en la dirección de la normal a la superficie:

$$\sigma_p(R_e) = \vec{P}(R_e)\cdot\vec{n}_{ext} = \frac{(\varepsilon_r - 1)Q_i}{2\pi\varepsilon_r R_e L}, \quad \vec{P} = P\vec{u}_r, \quad \vec{n}_{ext} = \vec{u}_r$$

Y en la superficie interior:

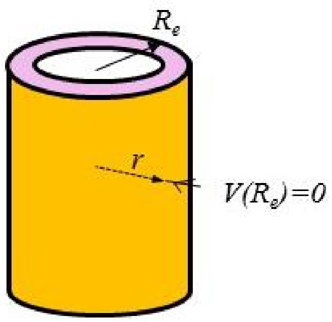
$$\sigma_p(R_i) = \vec{P}(R_i)\cdot\vec{n}_{\text{int}} = -\frac{(\varepsilon_r - 1)Q_i}{2\pi\varepsilon_r R_i L}; \quad \vec{P} = P\vec{u}_r, \quad \vec{n}_{\text{int}} = -\vec{u}_r$$

La densidad volumétrica de carga de polarización es:

$$\rho_p = -\nabla\cdot\vec{P} = -\frac{1}{r}\frac{\partial(r\,P)}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{(\varepsilon_r - 1)Q_i}{2\pi\varepsilon_r L}\right) = 0$$

Se comprueba que la carga total de polarización es cero:

$$\sigma_p(R_i)L2\pi R_i + \sigma_p(R_e)L2\pi R_e = 0$$



Para calcular los potenciales integramos desde $r = R_e$ (punto origen de potencial) mediante una curva radial (en cilíndricas) hasta diferentes distancias r del eje de simetría de la distribución.

Para la zona B se tiene:

$$V_B(r) = -\int_{R_e}^{r}\frac{Q_i}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r L}dr = -\frac{Q_i}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}\int_{R_e}^{r}\frac{1}{r}dr = -\frac{Q_i}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}\ln\left(\frac{r}{R_e}\right)$$

Para la zona A se tiene que el potencial es constante dando que el campo en esa zona es cero:

$$V_A(r) = -\int_{R_e}^{R_i}E_B dr - \int_{R_i}^{r}\underbrace{E_A}_{0}\,dr = -\int_{R_e}^{R_i}\frac{Q_i}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r L}dr = -\frac{Q_i}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}\ln\left(\frac{R_i}{R_e}\right)$$

La diferencia de potencial entre armaduras es:

$$V = V_{R_e} - V_{R_i} = -V_B(R_i) = \frac{Q_i}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}\ln\left(\frac{R_i}{R_e}\right)$$

La carga que adquieren las armaduras es:

$$Q_i = \frac{V 2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}{\ln\left(\frac{R_i}{R_e}\right)}$$

La capacidad del condensador, teniendo en cuenta que Q_i es negativa, es:

$$C = \frac{-Q_i}{V} = -\frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}{\ln\left(\frac{R_i}{R_e}\right)} = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)} > 0$$

Finalmente la energía electrostática almacenada en el condensador es:

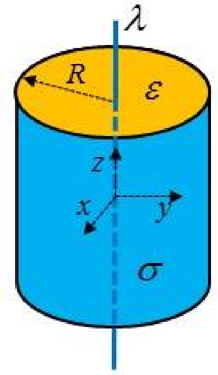
$$U_e = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)}V^2$$

La energía electrostática se puede calcular también por integración en las zonas donde hay campo:

$$U_e = \frac{1}{2}\int_v \vec{D}\cdot\vec{E}dv = \frac{1}{2}\int_{R_i}^{R_e}\left(\frac{Q_i}{2\pi r L}\right)^2\frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon_r}2\pi r L dr = \frac{Q_i^2}{4\varepsilon_0\varepsilon_r\pi L}\int_{R_i}^{R_e}\frac{dr}{r}$$

$$U_e = \frac{Q_i^2}{4\varepsilon_0\varepsilon_r\pi L}\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right) = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r\pi L V^2}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)}$$

PROBLEMA RESUELTO 5.3



Se tiene una hilo de longitud infinita conductor con sección circular de radio despreciable, y cargado con densidad longitudinal λ, situado en el eje OZ. Rodeando a este hilo, y concéntrico con él, existe otro conductor de longitud infinita en forma de superficie cilíndrica de radio R y densidad superficial de carga σ. El hueco interior se encuentra relleno completamente de un dieléctrico lineal de constante dieléctrica $\varepsilon = \varepsilon_0 \left(1 + {}^{\alpha r}/_{R}\right)$ siendo r la distancia al eje del cilindro.

Se pide en función de la distancia al hilo r:

1) Campos de desplazamiento $\vec{D}(r)$, eléctrico $\vec{E}(r)$ y de polarización $\vec{P}(r)$ en todas las regiones del espacio.

2) Valor de la densidad superficial de carga σ para que el campo en el exterior sea cero.

3) Densidades de carga de polarización superficial en la superficie del cilindro y volumétrica en su interior.

4) Potencial eléctrico en todas las regiones del espacio tomando $V(r = R) = 0$.

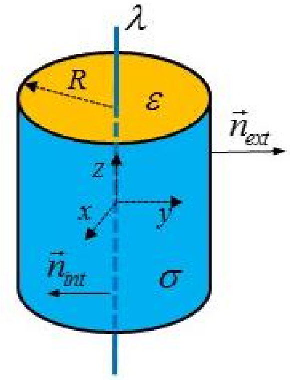
$$\text{Ayuda: } \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \ln\left(\frac{2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac}}\right)$$

SOLUCIÓN 5.3

Aplicamos el teorema de Gauss para el vector desplazamiento eléctrico $\vec{D}(r)$ en cilindros de altura h y distinto radio r situadas en las zonas:

$$\text{Zona A:} \quad r > R$$
$$\text{Zona B:} \quad R > r$$

Todos los campos tienen simetría radial: $\vec{D} = D\vec{u}_r$; $\vec{E} = E\vec{u}_r$; $\vec{P} = P\vec{u}_r$ siendo $\vec{u}_r$ el vector unitario radial de coordenadas cilíndricas.



-En la zona A se encierra carga correspondiente al hilo. De esta manera se tiene:

$$D_A 2\pi r h = \lambda h$$

$$D_A = \frac{\lambda}{2\pi r} \to E_A = \frac{\lambda}{2\pi r \varepsilon} = \frac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_0 (1 + \alpha r/R)}$$

Para que el campo en el exterior sea cero tiene que ser: $\sigma = -\lambda/2\pi R$.

-En la zona B se encierra carga correspondiente al hilo y al cilindro. De esta manera se tiene:

$$D_B 2\pi r h = \lambda h + \sigma h 2\pi R$$

$$D_B = \frac{\lambda + \sigma 2\pi R}{2\pi r} \rightarrow E_B = \frac{D_B}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda + \sigma 2\pi R}{2\pi r \varepsilon_0}$$

Para que el campo en la zona B sea cero tiene que ser: $\sigma = -\lambda/2\pi R$

La polarización en el dieléctrico es:

$$P = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E_A = \frac{\lambda(\alpha r/R)}{2\pi r(1 + \alpha r/R)} = \frac{\lambda\alpha}{2\pi R(1 + \alpha r/R)}$$

La carga de polarización en la superficie exterior del dieléctrico se obtiene a partir del vector polarización proyectándolo en la dirección de la normal a la superficie:

$$\sigma_p(R) = \vec{P}(R) \cdot \vec{n}_{ext} = \frac{\lambda\alpha}{2\pi R(1+\alpha)}, \quad \vec{P} = P\vec{u}_r, \quad \vec{n}_{ext} = \vec{u}_r$$

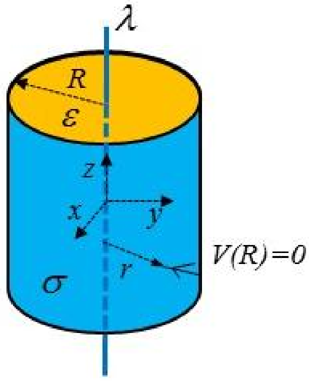
La densidad volumétrica de carga de polarización es:

$$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P} = -\frac{1}{r}\frac{\partial(r\,P)}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\lambda r \alpha}{2\pi R + \alpha 2\pi r}\right) = -\frac{1}{r}\frac{(\lambda\alpha(2\pi R + \alpha 2\pi r) - \lambda r \alpha^2 2\pi)}{(2\pi R + \alpha 2\pi r)^2}$$

$$\rho_p = -\frac{\lambda\alpha 2\pi R}{r(2\pi R + \alpha 2\pi r)^2}$$

Para calcular los potenciales integramos desde $r = R$ (punto origen de potencial) mediante una curva radial (en cilíndricas) hasta diferentes distancias r del eje de simetría de la distribución.

Para la zona B se tiene:



$$V_B(r) = -\int_R^r \frac{\lambda + \sigma 2\pi R}{2\pi r' \varepsilon_0} dr' = -\frac{\lambda + \sigma 2\pi R}{2\pi r \varepsilon_0} \ln\left(\frac{r}{R}\right)$$

Para la zona A se tiene:

$$V_A(r) = -\int_R^r \frac{\lambda}{2\pi r' \varepsilon_0 + 2\pi r'^2 \varepsilon_0 \alpha/R} dr' = -\frac{R\lambda}{2\alpha\pi\varepsilon_0}\int_R^r \frac{1}{(R/\alpha)r' + r'^2} dr'$$

Haciendo uso de la ayuda:

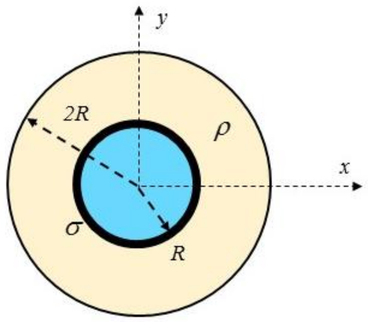
$$V_A(r) = -\frac{R\lambda}{2\alpha\pi\varepsilon_0}\int_R^r \frac{1}{(R/\alpha)r' + r'^2} dr' = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{r'}{r' + R/\alpha}\right)\Bigg|_R^r$$

$$V_A(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln\left(\frac{\alpha r}{\alpha r + R}\right) - \ln\left(\frac{\alpha}{\alpha + 1}\right)\right)$$

PROBLEMA RESUELTO 5.4

Se tiene una corteza esférica dieléctrica de radios R y $2R$ de permitividad relativa $\varepsilon_r = 2$ y cargado con una densidad volumétrica uniforme de carga ρ.

En su interior se encuentra una superficie esférica metálica de radio R, cuyo centro coincide con el centro del dieléctrico y cargada con una densidad σ.



Calcular en todo punto del espacio en función de la distancia al origen r el potencial, el campo eléctrico, la polarización y las densidades de carga de polarización.

(Nota: Considérese nulo el potencial para $r \to \infty$).

SOLUCIÓN 5.4

Aplicamos el teorema de Gauss para el vector desplazamiento eléctrico $\vec{D}$ en superficies esféricas de distinto radio r situadas en las zonas:

Zona A: $r < R$

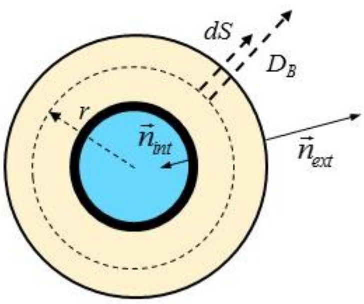
Zona B: $R < r < 2R$

Zona C: $2R < r$

Todos los campos tienen simetría radial: $\vec{D} = D\vec{u}_r$; $\vec{E} = E\vec{u}_r$; $\vec{P} = P\vec{u}_r$ siendo $\vec{u}_r$ el vector unitario radial de coordenadas esféricas.

- En la zona A no se encierra ninguna carga, por tanto el vector desplazamiento y el campo eléctrico son cero:
$$D_A = 0 \to E_A = 0$$
- En la zona B se encierra carga correspondiente a la densidad ρ y toda la carga correspondiente a la densidad σ.

De esta manera se tiene:



$$D_B 4\pi r^2 = \sigma 4\pi R^2 + \rho(\frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi R^3)$$

$$D_B = \frac{\sigma R^2}{r^2} + \frac{\rho}{3r^2}(r^3 - R^3)$$

El campo eléctrico en esa zona sería:

$$E_B = \frac{D_B}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{\sigma R^2}{2\varepsilon_0 r^2} + \frac{\rho}{6\varepsilon_0 r^2}(r^3 - R^3)$$

La polarización es entonces:

$$P = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E_B = \frac{\sigma R^2}{2r^2} + \frac{\rho}{6r^2}(r^3 - R^3)$$

La carga de polarización en la superficie exterior del dieléctrico se obtiene a partir del vector polarización proyectándolo en la dirección de la normal a la superficie:

$$\sigma_{p\ ext} = \vec{P}(2R)\cdot\vec{n}_{ext} = \frac{\sigma}{8} + \frac{7\rho R}{24}, \quad \vec{P} = P\vec{u}_r, \quad \vec{n}_{ext} = \vec{u}_r$$

Y en la superficie interior:

$$\sigma_{p\ \mathrm{int}} = \vec{P}(R)\cdot\vec{n}_{\mathrm{int}} = -\frac{\sigma}{2}; \quad \vec{P} = P\vec{u}_r, \quad \vec{n}_{\mathrm{int}} = -\vec{u}_r$$

La densidad volumétrica de carga de polarización es:

$$\rho_p = -\nabla\cdot\vec{P} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 P)}{\partial r} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\sigma R^2}{2} + \frac{\rho}{6}(r^3 - R^3)\right) = -\frac{\rho}{2}$$

- En la zona C se encierra toda la carga correspondiente a las densidades ρ y σ. De esta manera se tiene:

$$D_C 4\pi r^2 = \sigma 4\pi R^2 + \rho(\frac{4}{3}\pi(2R)^3 - \frac{4}{3}\pi R^3)$$

$$D_C = \frac{\sigma R^2}{r^2} + \frac{\rho}{3r^2}(7R^3)$$

El campo eléctrico en esa zona sería:

$$E_C = \frac{D_C}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2} + \frac{\rho}{3\varepsilon_0 r^2}(7R^3)$$

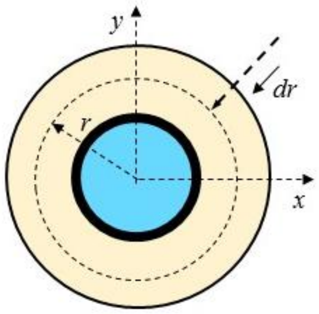
Para calcular los potenciales integramos desde infinito por una curva radial hasta diferentes distancias r del origen de la distribución. Para la zona C se tiene:

$$V_C = -\int_\infty^r E_C dr' = -\int_\infty^r \left(\frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r'^2} + \frac{\rho}{3\varepsilon_0 r'^2}(7R^3)\right)dr' = \left(\frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0} + \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(7R^3)\right)\frac{1}{r}$$

Para la zona B:

$$V_B = -\int_\infty^{2R} E_C dr' - \int_{2R}^r E_B dr' = \left(\frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0} + \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(7R^3)\right)\frac{1}{2R} - \int_{2R}^r E_B dr'$$

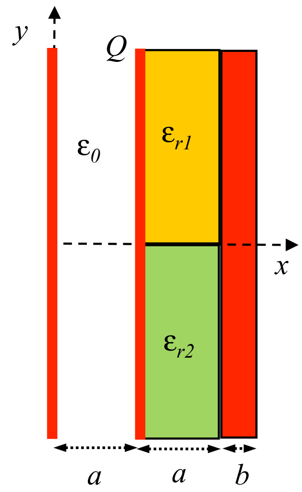
$$V_B = \frac{\sigma R^2}{4\varepsilon_0}\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{R}\right) + \frac{\rho}{12\varepsilon_0}(17R^2 - r^2) - \frac{R^3}{6\varepsilon_0}\frac{\rho}{r}$$



Particularizando para $r = R$ obtenemos el potencial en la superficie metálica.

$$V_B(R) = \frac{\sigma R}{4\varepsilon_0} + \frac{4R^2\rho}{3\varepsilon_0} - \frac{R^2\rho}{6\varepsilon_0} = \frac{\sigma R}{4\varepsilon_0} + \frac{7R^2\rho}{6\varepsilon_0}$$

PROBLEMA RESUELTO 5.5



Se tienen tres conductores planos de superficie muy grande A, dos muy estrechos situado en $x = 0$ y $x = a$, y el tercero de espesor b situado entre $x = 2a$ y $x = 2a + b$.
Los conductores están dispuestos simétricamente en torno al plano XZ.
El conductor en $x = 0$ se encuentra a potencial cero, el conductor en $x = a$ tiene carga Q y el conductor de espesor b se encuentra a potencial V.
Ocupando el espacio entre $x = a$ y $x = 2a$ hay dos dieléctricos de permitividades relativas $\varepsilon_{r1} = 4$ y $\varepsilon_{r2} = 2$ colocados según se muestra en la figura.
Se pide:

1) El potencial y el campo eléctrico en todas las regiones del espacio.

2) El vector polarización y las densidades de carga de polarización.

3) La energía almacenada en el sistema.

(Nota: Considérese nulo el potencial para $x \to -\infty$ y V para $x \to +\infty$)

SOLUCIÓN 5.5

Trabajamos con unidades fundamentales SI. En la figura aparecen las zonas del espacio que podemos definir.
Aplicamos el teorema de Gauss para el vector desplazamiento eléctrico $\vec{D}$ en cilindros de base S paralela a los planos.
En una de sus bases el campo debe ser cero para poder calcular el campo en la otra que tiene una posición x.

Distinguimos las siguientes zonas donde puede estar el cilindro en función del valor de x e y:

$$0 < x < a, y > 0 : \text{zona } A_u$$

$$0 < x < a, y < 0 : \text{zona } A_d$$

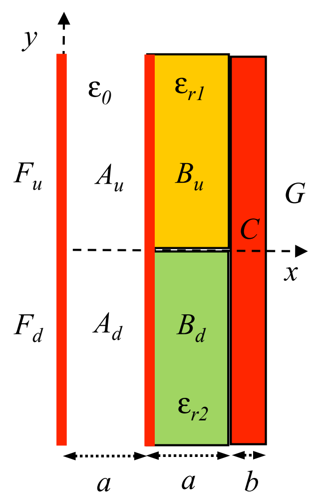
$$a < x < 2a, y > 0 : \text{zona } B_u$$

$$a < x < 2a, y < 0 : \text{zona } B_d$$

$$2a < x < 2a + b : \text{zona } C$$

$$x < 0 : \text{zona } F$$

$$2a + b < x : \text{zona } G$$



Todos los campos por simetría tienen únicamente componente x:

$$\vec{D} = D\vec{i}; \quad \vec{E} = E\vec{i}; \quad \vec{P} = P\vec{i}$$

Dado que fuera de las placas conductoras no hay diferencia de potencial el campo en las regiones F_u y F_d es nulo:

$$0 = V(0) - V(-\infty) = \int_{-\infty}^{0} E_{F_u} dx \rightarrow E_{F_u} = 0$$

$$0 = V(\infty) - V(2a+b) = \int_{2a+b}^{\infty} E_G dx \rightarrow E_G = 0$$

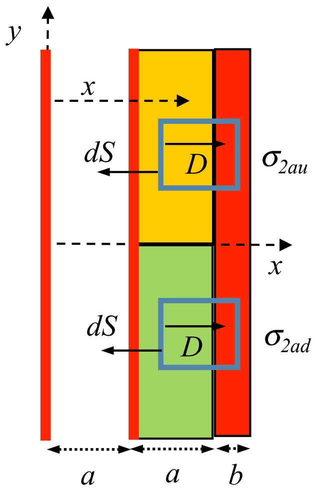
Por la condición de contorno podemos calcular la densidad de carga en la cara 2a+b:

$$\sigma_{2a+b} = \vec{E}_G \cdot \vec{n} = 0$$

Siendo $\vec{n}$ la normal exterior, por tanto: $\vec{n} = \vec{\imath}$

En el interior del conductor el campo es cero y el potencial es constante, por tanto:

$$D_C = 0 \rightarrow E_C = 0 \rightarrow V_C = V$$



Colocamos superficies gaussianas en forma de cilindro de área de base S de manera que en una de las bases el campo sea cero:

- El cilindro de la zona A_u encierra parte de carga de la placa derecha (σ_{2au}, σ_{2ad}) y parte de la del centro (σ_{au}, σ_{ad}):

$$-D_{A_u} S = \sigma_{2a_u} S + \sigma_{a_u} S \rightarrow D_{A_u} = -(\sigma_{2a_u} + \sigma_{a_u})$$

$$E_{A_u} = -(\sigma_{2a_u} + \sigma_{a_u})/\varepsilon_0$$

- El cilindro de la zona B_u encierra sólo parte de carga de la placa derecha:

$$-D_{B_u} S = \sigma_{2a_u} S \rightarrow D_{B_u} = -\sigma_{2a_u}$$

$$E_{B_u} = -\sigma_{2a_u}/\varepsilon_{r1}\varepsilon_0$$

Análogamente para la parte inferior:

- El cilindro de la zona A_d encierra parte de carga de la placa izquierda y parte de la del centro:

$$-D_{A_d} S = \sigma_{2a_d} S + \sigma_{a_d} S \rightarrow D_{A_d} = -(\sigma_{2a_d} + \sigma_{a_d})$$

$$E_{A_d} = -(\sigma_{2a_d} + \sigma_{a_d})/\varepsilon_0$$

- El cilindro de la zona B_d encierra sólo parte de carga de la placa derecha:

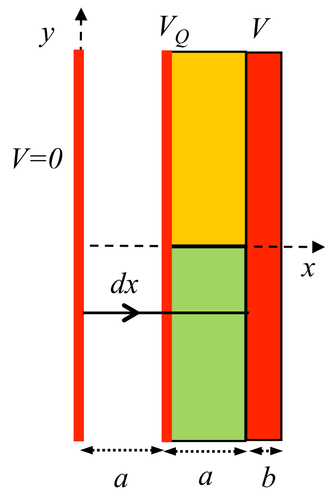
$$-D_{B_d} S = \sigma_{2a_d} S \rightarrow D_{B_d} = -\sigma_{2a_d} \rightarrow E_{B_d} = -\sigma_{2a_d}/\varepsilon_{r2}\varepsilon_0$$

En la interfase de dos medios se verifica la conservación de la componente tangencial del campo, por tanto en la interfase de los dos dieléctricos se verifica:

$$E_{B_u} = -\sigma_{2a_u}/\varepsilon_{r1}\varepsilon_0 = E_{B_d} = -\sigma_{2a_d}/\varepsilon_{r2}\varepsilon_0 \rightarrow \sigma_{2a_u} = \sigma_{2a_d}(\varepsilon_{r1}/\varepsilon_{r2}) = 2\sigma_{2a_d}$$

Esta ecuación resulta también de imponer que la d.d.p. a lo largo de una recta desde un conductor a otro es la misma pudiendo estar dicha recta en $y > 0$ o en $y < 0$.

Realizando la integral de línea entre los dos conductores metálicos se tiene para la recta en la parte superior:



$$V_Q = V(a) - \underbrace{V(0)}_{0} = -\int_0^a -(\sigma_{2a_u} + \sigma_{a_u})/\varepsilon_0 dx = (\sigma_{2a_u} + \sigma_{a_u})a/\varepsilon_0$$

$$V - V_Q = \underbrace{V(2a)}_{V} - V(a) = -\int_0^a -\sigma_{2a_u}/\varepsilon_{r1}\varepsilon_0 dx = \sigma_{2a_u} a/\varepsilon_{r1}\varepsilon_0$$

Para la recta en la parte inferior:

$$V_Q = (\sigma_{2a_d} + \sigma_{a_d})a/\varepsilon_0$$

$$V - V_Q = \sigma_{2a_d} a/\varepsilon_{r2}\varepsilon_0$$

De ambas expresiones se llega a: $\sigma_{2a_u} = \sigma_{2a_d}(\varepsilon_{r1}/\varepsilon_{r2}) = 2\sigma_{2a_d}$

$$(\sigma_{2a_d} + \sigma_{a_d}) = (\sigma_{2a_u} + \sigma_{a_u}) \to \sigma_{a_u} = \sigma_{a_d} - \sigma_{2a_d}$$

Imponemos que la carga en la placa del medio sea Q y obtenemos otra ecuación para despejar las densidades de carga en dicha placa:

$$\sigma_{a_d}\frac{A}{2} + \sigma_{a_u}\frac{A}{2} = Q \to \sigma_{a_u} = \frac{2Q}{A} - \sigma_{a_d}$$

$$\sigma_{a_u} = \frac{2Q}{A} - \sigma_{a_d} = \sigma_{a_d} - \sigma_{2a_d} \to \sigma_{a_d} = \frac{Q}{A} + \frac{\sigma_{2a_d}}{2}$$

Sumando las diferencias de potencial se tiene:

$$V = (\sigma_{2a_u} + \sigma_{a_u})a/\varepsilon_0 + \sigma_{2a_u} a/\varepsilon_{r1}\varepsilon_0$$

$$V = (\sigma_{2a_d} + \sigma_{a_d})a/\varepsilon_0 + \sigma_{2a_d} a/\varepsilon_{r2}\varepsilon_0$$

Sustituimos en la ecuación de abajo σ_{ad} y operamos para despejar σ_{2ad}:

$$\sigma_{2a_d} = (V\varepsilon_0 - \frac{Q}{A}a)/2a$$

Seguimos aplicando el teorema de Gauss a un cilindro en la zona F_u y tenemos que no hay flujo, por tanto, la carga encerrada es cero. En este caso encerramos cargas también del conductor en $x = 0$ (σ_{0u} y σ_{0d}):

$$\sigma_{2a_u}A/2 + \sigma_{a_u}A/2 + \sigma_{0_u}A/2 = 0 \to \sigma_{0_u} = -\sigma_{a_u} - \sigma_{2a_u}$$

Para un cilindro en la zona F_d: $\sigma_{0d} = -\sigma_{ad} - \sigma_{2a_d}$

Calculamos la polarización en el dieléctrico y las densidades de carga de polarización.
Para la parte superior:

$$P_u = \varepsilon_0(\varepsilon_{r1} - 1)E_{B_u} = -(\varepsilon_{r1} - 1)\sigma_{2a_u}/\varepsilon_{r1} = -3\sigma_{2a_u}/4$$

Para la parte inferior:

$$P_d = \varepsilon_0(\varepsilon_{r2} - 1)E_{B_d} = -(\varepsilon_{r2} - 1)\sigma_{2a_d}/\varepsilon_{r2} = -\sigma_{2a_d}/2$$

No hay densidad volumétrica de carga de polarización pues la divergencia es cero. Las densidades superficiales son en la posición $x = 2a$ donde la normal exterior es $\vec{\imath}$:

$$\sigma_{p\ 2a_u} = \vec{P}_u \cdot \vec{\imath} = P_u = -3\sigma_{2a_u}/4$$

$$\sigma_{p\ 2a_d} = \vec{P}_d \cdot \vec{\imath} = P_d = -\sigma_{2a_d}/2$$

En la posición $x = a$ donde la normal exterior al dieléctrico es $-\vec{\imath}$:

$$\sigma_{p\ a_u} = \vec{P}_u \cdot (-\vec{\imath}) = -P_u = 3\sigma_{2a_u}/4$$

$$\sigma_{p\ a_d} = \vec{P}_d \cdot (-\vec{\imath}) = -P_d = \sigma_{2a_d}/2$$

Para calcular la energía electrostática podemos recurrir a la fórmula:

$$U_e = \frac{1}{2}Q(x=0)V(x=0) + \frac{1}{2}Q(x=a)V(x=a) + \frac{1}{2}Q(x=2a)V(x=2a)$$

$$U_e = \frac{1}{2}(\sigma_{a_u}A/2 + \sigma_{a_d}A/2)V_Q + \frac{1}{2}(\sigma_{2a_u}A/2 + \sigma_{2a_d}A/2)V$$

O integrar los campos:

$$U_e = \frac{1}{2}\int\limits_{A_u} \vec{D}\cdot\vec{E}\mathrm{dv} + \frac{1}{2}\int\limits_{A_d} \vec{D}\cdot\vec{E}\mathrm{dv} + \frac{1}{2}\int\limits_{B_u} \vec{D}\cdot\vec{E}\mathrm{dv} + \frac{1}{2}\int\limits_{B_d} \vec{D}\cdot\vec{E}\mathrm{dv}$$

$$U_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0\int\limits_0^a (-(\sigma_{2a_u} + \sigma_{a_u})/\varepsilon_0)^2 dxA/2 + \frac{1}{2}\varepsilon_0\int\limits_0^a (-(\sigma_{2a_d} + \sigma_{a_d})/\varepsilon_0)^2 dxA/2 +$$
$$+ \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_{r1}\int\limits_a^{2a} (-\sigma_{2a_u}/\varepsilon_{r1}\varepsilon_0)^2 dxA/2 + \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_{r2}\int\limits_a^{2a} (-\sigma_{2a_d}/\varepsilon_{r2}\varepsilon_0)^2 dxA/2$$

$$U_e = \frac{1}{4}(\sigma_{2a_u} + \sigma_{a_u})^2\frac{aA}{\varepsilon_0} + \frac{1}{4}(\sigma_{2a_d} + \sigma_{a_d})^2\frac{aA}{\varepsilon_0} + \frac{1}{4}(\sigma_{2a_u})^2\frac{aA}{\varepsilon_{r1}\varepsilon_0} + \frac{1}{4}(\sigma_{2a_d})^2\frac{aA}{\varepsilon_{r2}\varepsilon_0}$$