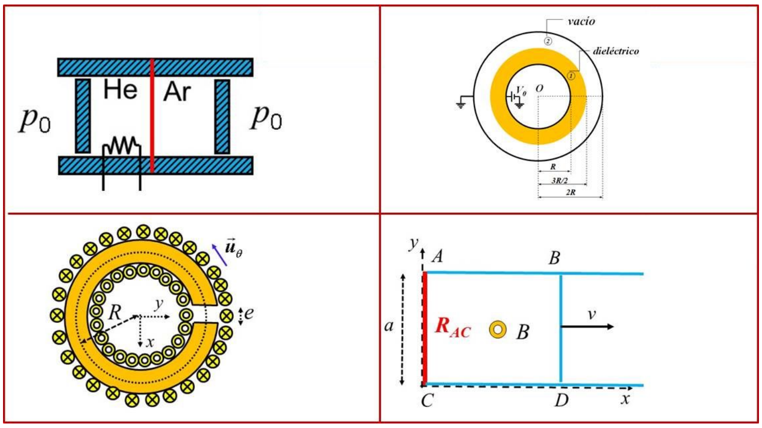
Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO

FÍSICA II

PROBLEMAS RESUELTOS

José Carlos JIMÉNEZ SÁEZ
Santiago RAMÍREZ DE LA PISCINA MILLÁN



6.- MAGNETOSTÁTICA DEL VACÍO

6 Magnetostática del vacío

PROBLEMA RESUELTO 6.1

El modelo atómico de Bohr para el hidrógeno consiste en un electrón que gira alrededor de un protón en una órbita circular estable de radio R, como consecuencia del equilibrio entre la fuerza electrostática y la fuerza centrífuga (visto en un sistema en el que el electrón está parado).

Calcúlese el valor de la intensidad de campo magnético en la posición del protón, debido al movimiento del electrón.

DATOS:

$$R = 5.3 \times 10^{-11} \text{ m} \quad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \quad \text{T} \cdot \text{m/A} \quad e = 1.6 \times 10^{-19}\text{C}$$

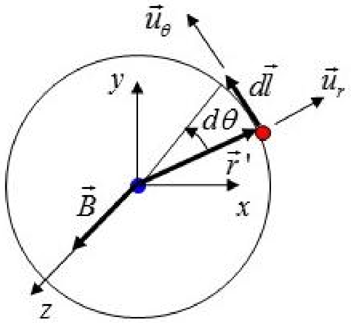
$$m_e = 9.11 \times 10^{-31}\text{kg} \qquad \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9 \ \frac{N \cdot m^2}{C^2}$$

SOLUCIÓN 6.1

Si el electrón se mueve con velocidad v, la intensidad de órbita es $I = \dfrac{e}{T}$, ya que por un determinado punto de la órbita pasa una carga e en un intervalo de tiempo T.

El periodo del movimiento del electrón es el tiempo que tarda en dar una vuelta a la órbita: $T = \dfrac{2\pi R}{v}$ y por lo tanto $I = \dfrac{ev}{2\pi R}$ siendo v la velocidad del electrón en cualquier punto de su órbita.

El campo magnético en el centro de la órbita (posición del protón, $\vec{r} = \vec{0}$) producido por una corriente circular de radio R e intensidad I es (ley de Biot-Savart):

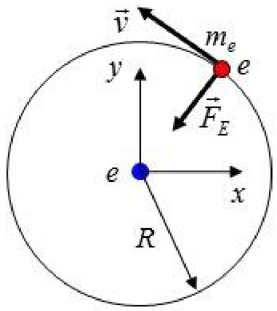


$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l} \times (-\vec{r}')}{r^3} =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{R d\theta \vec{u}_\theta \times (-R\vec{u}_r)}{R^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 d\theta \vec{k}}{R^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{2\pi}{R} \vec{k} = \frac{\mu_0 e v}{4\pi R^2} \vec{k}$$

Usamos la ecuación de Newton para obtener la velocidad v. La fuerza electrostática es igual a la aceleración (o si se prefiere, en un sistema ligado al electrón, a la fuerza centrífuga):

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{m_e v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R m_e}}$$



Por tanto, sustituyendo la velocidad en la intensidad de campo magnético, ésta quedaría:

$$B = \frac{\mu_0 e}{4\pi R^2}\sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R m_e}}$$

Con los datos del problema, resulta: $B = 12.4\ T$

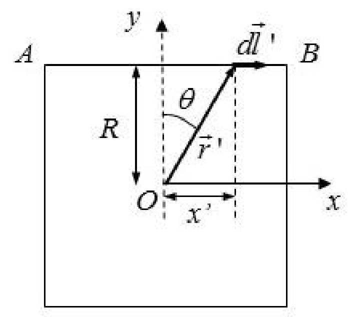
PROBLEMA RESUELTO 6.2

La espira cuadrada de la figura, de lado $2R$ y centro O, está recorrida por una intensidad de corriente I.

Calcular la intensidad de campo magnético producida en el centro O de la espira.

SOLUCIÓN 6.2

Calculamos el campo de inducción magnética aplicando la ley de Biot-Savart:



Lado AB: $\vec{r} = \vec{0}$

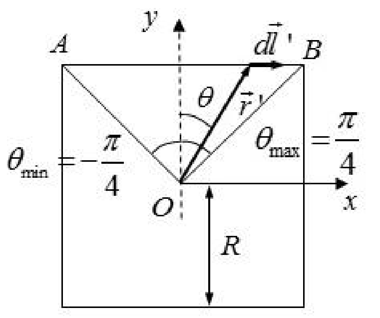
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{l}' \times (-\vec{r}')}{r'^3}$$

$$\left.\begin{array}{l} d\vec{l}' = dx'\,\vec{i} \\ \vec{r}' = x'\vec{i} + R\vec{j} = r'(sen\,\theta\,\vec{i} + cos\,\theta\,\vec{j}) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad d\vec{l}' \times (-\vec{r}') = dx'\; r' \cos\theta(-k') = R\,dx'\,(-\vec{k})$$

$$\int \frac{d\vec{l}' \times (-\vec{r}')}{r'^3} = -\vec{k}\int \frac{R\,dx'}{r'^3}$$

y con el cambio de variable:
$$\left\{\begin{array}{ll} tg\theta = \dfrac{x'}{R}; & dx' = \dfrac{R}{\cos^2\theta}d\theta \\ \cos\theta = \dfrac{R}{r'}; & Rdx' = r'^2 d\theta \end{array}\right\}$$

resulta
$$-\vec{k}\int \frac{r'^2}{r'^3}d\theta = -\vec{k}\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\,\theta}{R}\,d\theta = -\vec{k}\frac{\sqrt{2}}{R}$$



Los límites de integración para el ángulo θ son:

$\theta_{\text{mín}} = -\dfrac{\pi}{4}$ y $\theta_{\text{máx}} = \dfrac{\pi}{4}$

con lo que

$$\vec{B}_{AB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\sqrt{2}}{R}(-\vec{k})$$

Por simetría, el campo producido por toda la espira será cuatro veces el anterior:

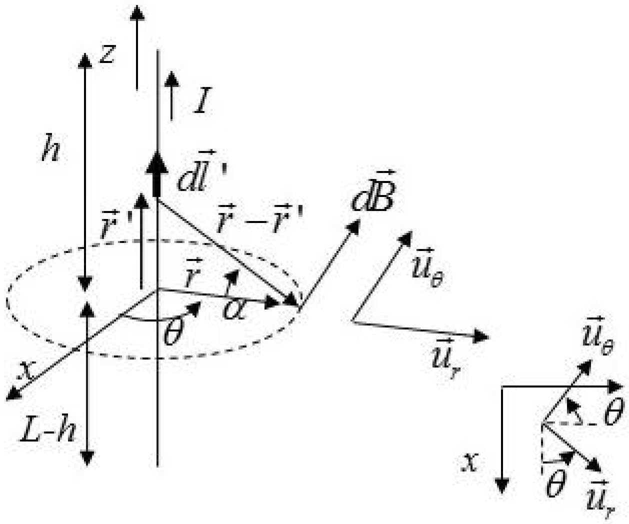
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{\pi R}\sqrt{2}(-\vec{k})$$

PROBLEMA RESUELTO 6.3

Calcular el campo de inducción magnética de un hilo de longitud L por el que circula una intensidad I a una distancia r del hilo en un plano que corta a éste perpendicularmente a una distancia h de su extremo superior.

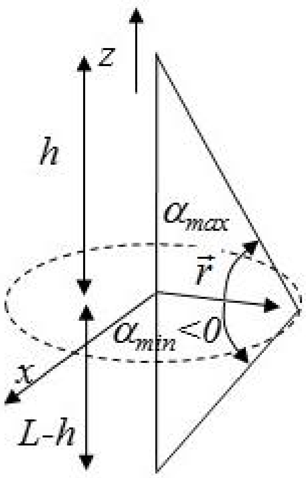
SOLUCIÓN 6.3

Como se puede ver en la figura, el campo que produce un diferencial cualquiera, situado en $\vec{r}$, es radial en el sentido del versor $\vec{u}_\theta$ que se usa en coordenadas polares. Tomemos uno de ellos para integrar:



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\,\frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\left.\begin{array}{l} d\vec{l} = dz'\,\vec{k} \\ \vec{r}' = z'\,\vec{k} \\ \vec{r} = r\,\vec{u}_r = r(\cos\theta\,\vec{i} + sen\,\theta\,\vec{j}) \\ |\vec{r} - \vec{r}'| = \left(r^2 + z'^2\right)^{1/2} \end{array}\right\} \Rightarrow\; d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}') = r\,dz'\,\vec{u}_\theta = r\,dz'\,(-sen\,\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j})$$



$$\vec{B} = \int_{-(L-h)}^{h} \frac{\mu_0 I}{4\pi}\,\frac{r\,dz'}{\left(r^2 + z'^2\right)^{3/2}}\quad \vec{u}_\theta$$

Para resolver la integral se debe hacer el cambio de variable:

$$\left\{ \begin{array}{ll} tg\alpha = \dfrac{z'}{r}; & dz' = \dfrac{r}{\cos^2\alpha} d\alpha \\ \cos\alpha = \dfrac{r}{\left(r^2 + z'^2\right)^{1/2}}; & \begin{array}{l} \text{sen}\alpha_{\text{máx}} = \dfrac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}} \\ \text{sen}\alpha_{\text{mín}} = -\dfrac{(L-h)}{\sqrt{(L-h)^2 + r^2}} \end{array} \end{array} \right\}$$

$$\vec{B} = \int_{\alpha_{\text{mín}}}^{\alpha_{\text{máx}}} \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \cos\alpha \, d\alpha \, \vec{u}_\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}(\text{sen}\alpha_{\text{máx}} - \text{sen}\alpha_{\text{mín}})\vec{u}_\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\left(\frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}} + \frac{(L-h)}{\sqrt{(L-h)^2 + r^2}}\right)\vec{u}_\theta$$

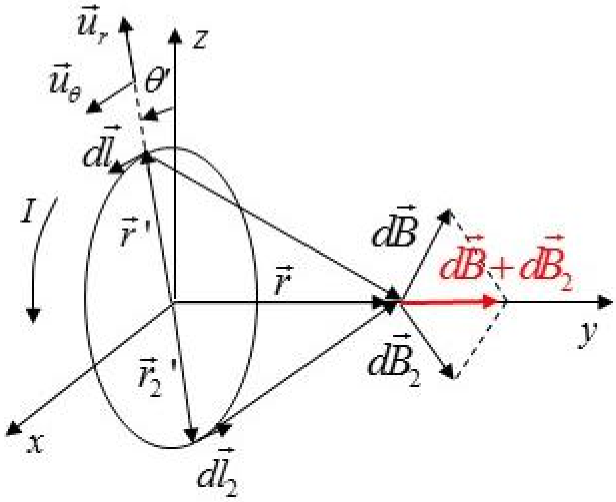
Si el hilo es indefinido:

$$\alpha_{\text{máx}} = -\alpha_{\text{mín}} = \pi/2 \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{u}_\theta$$

PROBLEMA RESUELTO 6.4

Calcular el vector de inducción magnética producido por una espira de radio R por la que circula una intensidad I en puntos de su eje.

SOLUCIÓN 6.4



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\,\frac{d\vec{l}\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

$$\left.\begin{array}{l} d\vec{l} = Rd\theta'\,\vec{u}_\theta = Rd\theta'\,(\cos\theta\,\vec{i} - sen\,\theta\,\vec{k}) \\ \vec{r}\,' = R\vec{u}_r = R(\cos\theta\,\vec{k} + sen\,\theta\,\vec{i}) \\ \vec{r} = y\,\vec{j} \\ \vec{r}-\vec{r}\,' = y\,\vec{j} - R\cos\theta\,\vec{k} - Rsen\,\theta\,\vec{i} \\ |\vec{r}-\vec{r}\,'| = (y^2+R^2)^{1/2} \end{array}\right\}$$

Sólo interesa el resultado de la componente $\vec{j}$ del producto vectorial, por tanto:

$$d\vec{l}\times(\vec{r}-\vec{r}\,') = (R^2\cos^2\theta' d\theta' + R^2\mathrm{sen}^2\theta' d\theta')\vec{j} + \ldots\vec{i} + \ldots\vec{k} = R^2\,d\theta'\vec{j} + \ldots\vec{i} + \ldots\vec{k}$$

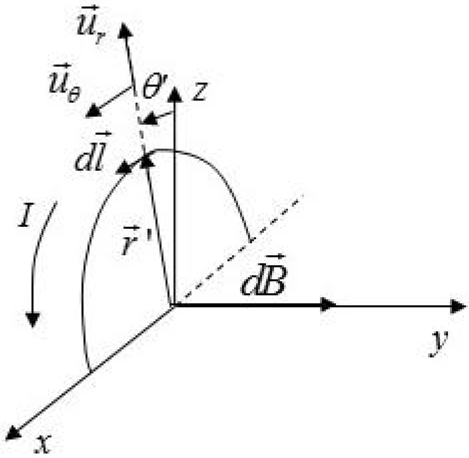
Sustituyendo en la integral, tenemos (obsérvese que el sentido de la intensidad va en los límites de integración que se hacen de 0 hasta 2π):

$$\vec{B} = \int_0^{2\pi}\frac{\mu_0 I}{4\pi}\,\frac{R^2 d\theta'}{(y^2+R^2)^{3/2}}\quad\vec{j} = \frac{\mu_0 I}{2}\,\frac{R^2}{(y^2+R^2)^{3/2}}\vec{j}$$

PROBLEMA RESUELTO 6.5

Calcular el campo de inducción de media espira de radio R recorrida por una intensidad I en su centro.

SOLUCIÓN 6.5



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}$$

$$\left.\begin{array}{l} d\vec{l} = R d\theta' \, \vec{u}_\theta \\ \vec{r}\,' = R\vec{u}_r \\ \vec{r} = \vec{0} \\ \vec{r} - \vec{r}\,' = -R\vec{u}_r \\ |\vec{r} - \vec{r}\,'| = R \end{array}\right\} \Rightarrow \quad d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}\,') = R^2 d\theta' \vec{j}$$

$$\vec{B} = \int_0^\pi \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R^2 d\theta'}{R^3} \vec{j} = \frac{\mu_0 I}{4R} \vec{j}$$

Teoría

Teorema de Ampère: Simetrías

El teorema de Ampère afirma:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

Si el campo tiene tal simetría que $\vec{B}$ es paralelo al $\vec{dl}$, y además el campo toma el mismo valor en módulo (B) en todos los puntos de la curva Γ, dicho módulo se puede sacar fuera de la integral. Es decir:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{\Gamma} B dl = B \oint_{\Gamma} dl = B\ L$$

donde L es la longitud de la curva. Por tanto, si se dan las condiciones de simetría apropiadas el teorema de Ampère se escribe como:

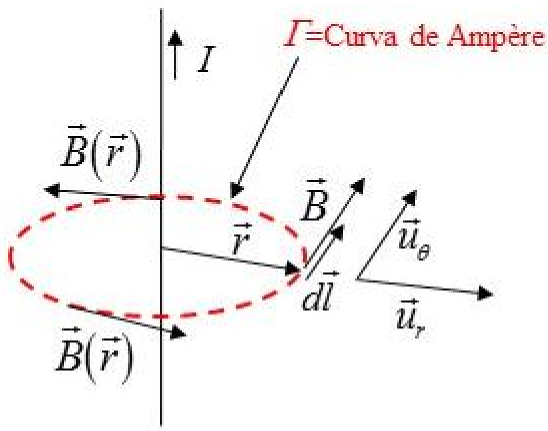
$$B\ L = \mu_0 I$$

En el caso de un hilo infinito o una distribución de corriente cilíndrica infinita de simetría radial (j=j(r)) se cumplen las anteriores condiciones si se toman como curva de Ampére circunferencias concéntricas con el eje.

PROBLEMA RESUELTO 6.6

Calcular el campo de un hilo infinito recorrido por una intensidad I.

SOLUCIÓN 6.6

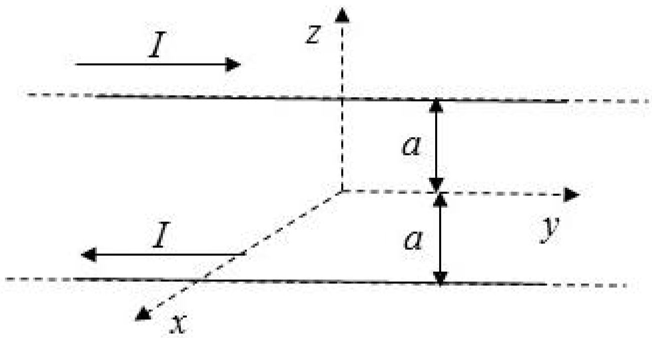


$$\oint_\Gamma \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint_\Gamma B\vec{u}_\theta \cdot dl\vec{u}_\theta = \oint_\Gamma B(r)dl = B(r)\oint_\Gamma dl = B(r)L = B2\pi r$$

$$B2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{u}_\theta$$

PROBLEMA RESUELTO 6.7

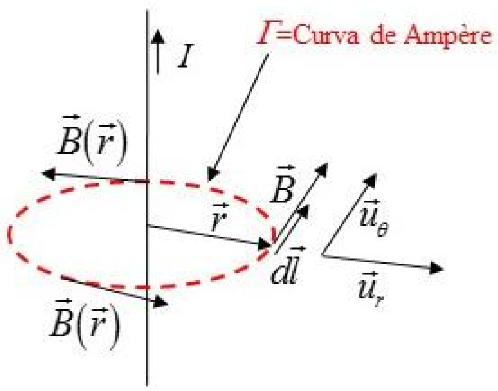
Dos hilos conductores, rectilíneos, paralelos, de longitud infinita, contenidos en el plano $x = 0$, están separados una distancia $2a$ y llevan la misma intensidad I, pero de sentido contrario.



Calcular el campo de inducción magnética B en puntos del eje x.

Hallar el punto de dicho eje en el cuál el módulo del campo es máximo.

SOLUCIÓN 6.7



Obtenemos el campo magnético de un hilo indefinido usando el teorema de Ampère.

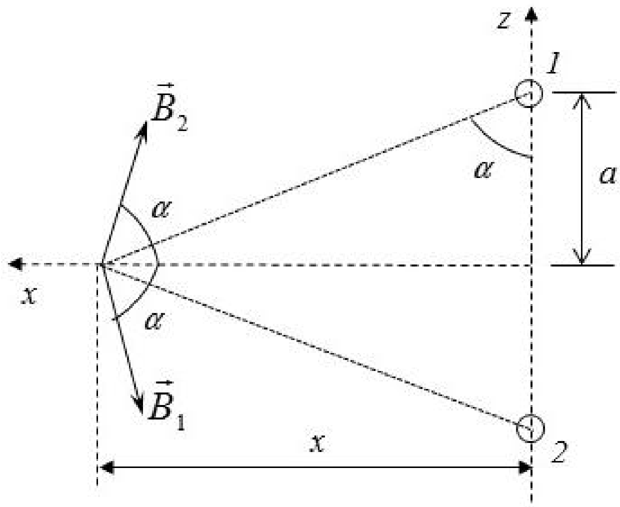
$$B2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{u}_\theta$$

Particularizando esta expresión para los datos de nuestro problema tenemos que el campo de un hilo indefinido obtenido por la ley de Ampère viene dado por la expresión:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{a^2 + x^2}}$$

Y su dirección es rodeando a la corriente (vector unitario azimutal en cilíndricas) en el sentido antihorario visto en el sentido de la corriente.

Por simetría la componente en la dirección de z se anula. Y la componente en x es el doble de la que crearía un único hilo.



$$B_x = 2B\cos\alpha = \frac{2\mu_0 I}{2\pi\sqrt{a^2+x^2}}\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I a}{\pi(a^2+x^2)}(-\vec{i}\,)$$

Este valor será máximo cuando lo sea la función: $F(x) = \dfrac{1}{x^2+a^2}$

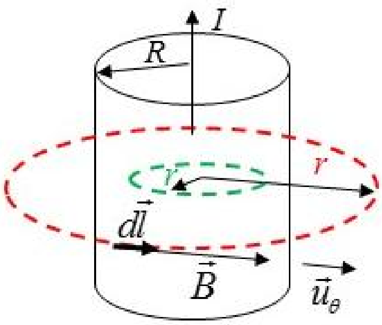
Derivando e igualando a cero se obtiene como resultado $x = 0$ para el máximo.

$$\frac{dF}{dx}(x) = -\frac{2x}{(x^2+a^2)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$$

PROBLEMA RESUELTO 6.8

Calcular el campo en todas las regiones del espacio de una conductor cilíndrico de radio R infinito de densidad de corriente $j = kr$ (k desconocida) y por el que circula una corriente I.

SOLUCIÓN 6.8



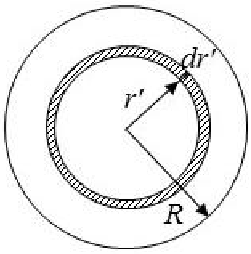
Aplicamos el teorema de Ampère en dos circunferencias una de radio mayor que R y otra de radio menor que R.

$$r > R, \quad B2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{u}_\theta$$

Para el caso $r < R$ debemos considerar solo la corriente I_r que pasa por dentro de la curva de Ampère de radio r.

$$r \leq R, \quad B2\pi r = \mu_0 I_r = \mu_0 \int_0^r j \, dS$$

Tanto para calcular k como para calcular I_r usamos, por tanto, la definición de la intensidad de corriente:



$$I = \int_0^R j \, dS = \int_0^R kr' \, 2\pi r' dr' = 2\pi k \int_0^R r'^2 dr' = 2\pi k \frac{R^3}{3} \Rightarrow k = \frac{3I}{2\pi R^3}$$

$$I_r = \int_0^r j \, dS = \int_0^r kr' \, 2\pi r' dr' = 2\pi k \int_0^r r'^2 dr' = 2\pi k \frac{r^3}{3}$$

Con lo cual quedaría:

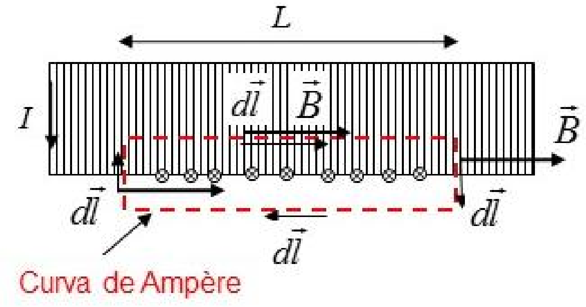
$$r \leq R, \quad B2\pi r = \mu_0 I_r = \mu_0 2\pi k \frac{r^3}{3} \Rightarrow \vec{B} = \mu_0 k \frac{r^2}{3}\vec{u}_\theta$$

PROBLEMA RESUELTO 6.9

Calcular el campo en el interior de un solenoide infinito por el que circula una intensidad I y de n espiras por unidad de longitud.

SOLUCIÓN 6.9

Sólo la línea del interior paralela al solenoide produce circulación. En las demás el campo es perpendicular al $d\vec{l}$ (si el paso de espira tiende a cero el campo fuera se hace cero).



Lo más complicado es contabilizar todas las líneas de corriente que atraviesan la curva de Ampère. En este caso un total de nL. Con lo cual:

$$B\ L = \mu_0 I_{total} = \mu_0\ n\ L\ I \Rightarrow B\ = \mu_0\ n\ \ I$$

PROBLEMA RESUELTO 6.10

Calcular el campo en el interior de un solenoide toroidal por el que circula una intensidad I, de N espiras, siendo L la longitud del radio de la circunferencia media del toro y S el área de la sección recta.

SOLUCIÓN 6.10

Aplicamos el teorema de Ampère a la circunferencia media del toro. Por simetría, $\vec{B}$ y $\vec{dl}$ son paralelos en todo momento:

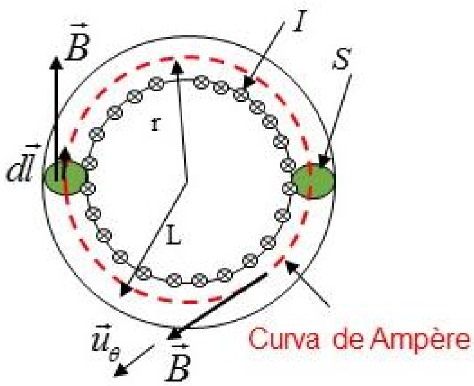
$$B\ 2\pi r = \mu_0 I_{total} = \mu_0\ N\ I \Rightarrow B\ (r) = \mu_0\ \frac{N}{2\pi r}\ \ I$$

Si el radio de la sección recta es pequeña comparada con la longitud L:

$$B(r)\ = \mu_0\ \frac{N}{2\pi r}\ \ I \approx B = \mu_0\ \frac{N}{2\pi L}\ \ I$$

$$\vec{B} = \mu_0\ n\ I\ \vec{u}_\theta\ , \quad n = número\ de\ espiras\ por\ unidad\ de\ longitud$$

Suponemos que la sección recta es suficientemente pequeña de modo que el campo en toda ella es uniforme e igual aproximadamente al valor calculado usando la curva media como curva de Ampère.

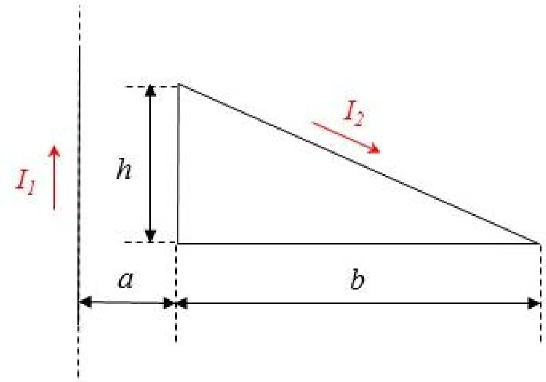


PROBLEMA RESUELTO 6.11

Una espira triangular y un conductor rectilíneo indefinido, ambos rígidos y estacionarios, están contenidos en un plano y recorridos por intensidades de corriente I_2 e I_1 respectivamente.

Hallar la fuerza que se ejerce sobre el conductor rectilíneo.

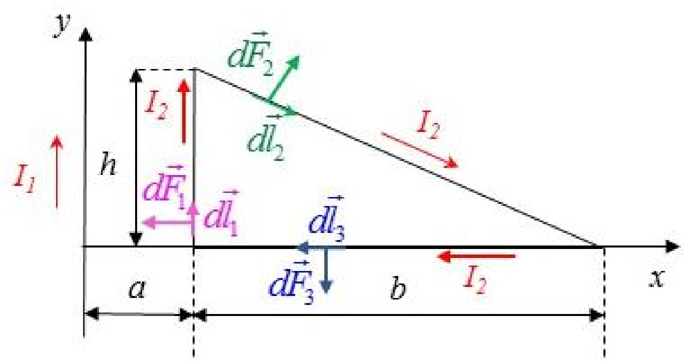
DATOS: $a = 1\ m \quad b = 2\ m$
$h = 1\ m \quad I_2 = I_1 = 1\ A$



SOLUCIÓN 6.11

En cables se verifica el principio de acción y reacción, por tanto, la fuerza sobre el cable rectilíneo es igual y de sentido contrario a la que ejerce el cable rectilíneo sobre el triángulo. Calculamos esta última.

En el hilo rectilíneo indefinido: $\vec{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}(-\vec{k})$; $d\vec{F} = I_2\, \overrightarrow{dl} \times \vec{B}$



En el cable 1: $d\vec{l} = dy\,\vec{j}$

$$d\overrightarrow{F_1} = I_2\, dy\ \vec{j} \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}(-\vec{k}) \quad \Rightarrow \overrightarrow{F_1} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a} I_2 \int_0^h dy\,(-\vec{i}) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{F_1} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 h}{2\pi a}\,(-\vec{i})$$

En el cable 3: $d\vec{l} = dx\,\vec{i}$ (el sentido de la intensidad establece los límites de integración, no afecta al diferencial)

$$d\vec{F_3} = I_2\,(dx\,\vec{i}) \times \ \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}\,(-\vec{k}) \ = \ \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\,\frac{dx}{x}\,\vec{j} \Rightarrow \vec{F_3} = \int_{a+b}^{a} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\,\frac{dx}{x}\,\vec{j} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{F_3} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}(\ln a - \ln(a+b))\vec{j} \ \Rightarrow \vec{F_3} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}(\ln\frac{a}{(a+b)})\vec{j}$$

En el cable 2: $d\vec{l} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j}$ (el sentido de la intensidad establece los límites de integración, no afecta al diferencial)

$$d\vec{F}_2 = I_2\,(dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j}) \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}\,(-\vec{k}) \Rightarrow d\vec{F}_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\,(\frac{dx}{x}\,\vec{j} - \frac{dy}{x}\,\vec{i})$$

La ecuación de la recta es: $y = -\frac{h}{b}x + \frac{(a+b)}{b}h \Rightarrow dy = -\frac{h}{b}dx$

$$\vec{F}_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\,(\int_a^{a+b} \frac{dx}{x}\,\vec{j} - \int_h^0 \frac{dy}{x}\,\vec{i}) = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}(\ln\frac{(a+b)}{a}\vec{j} + \int_a^{a+b} \frac{h}{b}\frac{dx}{x}\,\vec{i})$$

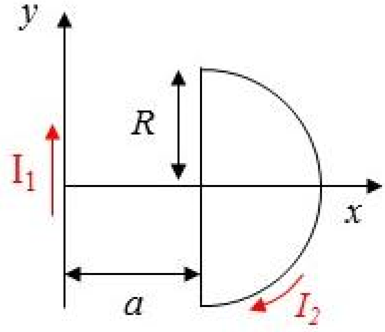
$$\vec{F}_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}(\ln\frac{(a+b)}{a}\vec{j} + \frac{h}{b}\ln\frac{(a+b)}{a}\vec{i}) = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\ln\frac{(a+b)}{a}(\vec{j} + \frac{h}{b}\vec{i})$$

Y la fuerza total es:

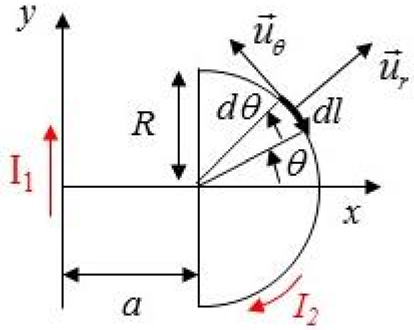
$$\vec{F}_1 + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\left(-\frac{h}{a} + \frac{h}{b}\,\ln\frac{a+b}{a}\right)\vec{i}$$

PROBLEMA RESUELTO 6.12

Calcular la fuerza que ejerce un hilo de corriente I_1 sobre un cable circular de radio R recorrido por una intensidad I_2 situado a una distancia a de ésta tal y como se muestra en la figura.



SOLUCIÓN 6.12



$$d\vec{F} = I_2\,(dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j}) \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}\,(-\vec{k})$$

$$d\vec{F} = I_2\,(Rd\theta\,\vec{u}_\theta) \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(a + R\cos\theta)}(-\vec{k})$$

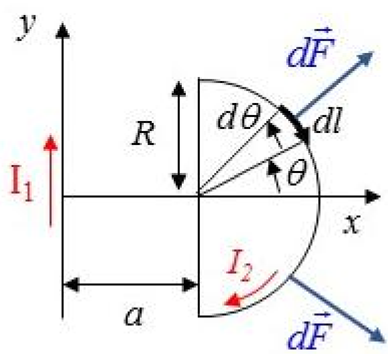
$$d\vec{F} = I_2\,Rd\theta\,\frac{\mu_0 I_1}{2\pi(a + R\cos\theta)}\,(-\vec{u}_r)$$

Dado que: $\vec{u}_r = \cos\theta\,\vec{i} + \mathrm{sen}\theta\vec{j}$, integramos teniendo en cuenta que el sentido de la intensidad va en los límites de integración.

$$\vec{F} = -\frac{\mu_0 I_2 I_1 R}{2\pi}\,\left(\int_{\pi/2}^{-\pi/2} \frac{\cos\theta d\theta}{(a + R\cos\theta)}\vec{i} + \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \frac{\mathrm{sen}\theta d\theta}{(a + R\cos\theta)}\vec{j}\,\right)$$

Por razones de simetría la fuerza resultante sólo tiene componente en la dirección de x, la componente en la dirección de y se anula.

$$\vec{F} = -\frac{\mu_0 I_2 I_1 R}{2\pi}\,\left(\int_{\pi/2}^{-\pi/2} \frac{\cos\theta d\theta}{(a + R\cos\theta)}\,\vec{i}\,\right)$$



PROBLEMA RESUELTO 6.13

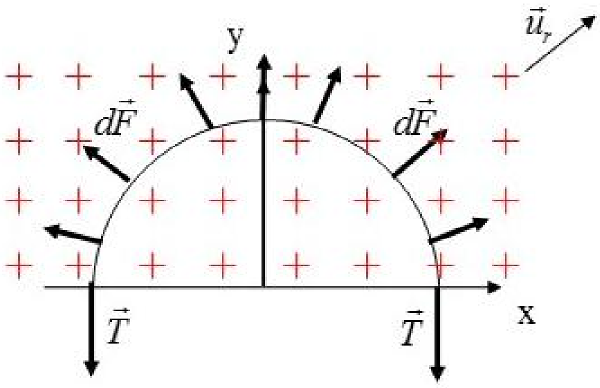
Una espira circular de radio R, formada por un hilo conductor de sección recta S, está recorrida por una intensidad de corriente I.

Se encuentra en un campo magnético de inducción B, perpendicular al plano de la espira, entrante a la hoja.

Calcular la tensión mecánica y el esfuerzo mecánico al que está sometido el hilo de la espira.

SOLUCIÓN 6.13

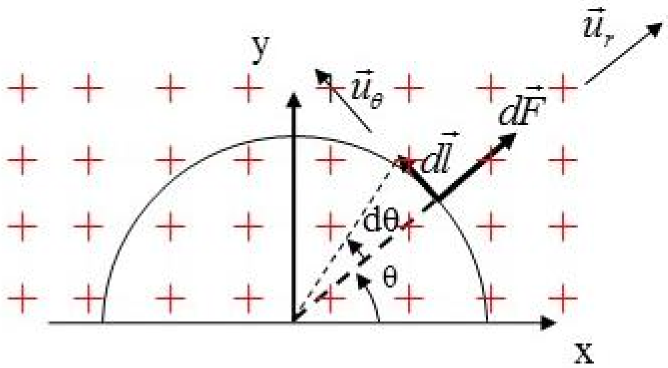
Para calcular el esfuerzo mecánico interno al que está sometido la espira cortamos está por la mitad para tener una fuerza interna simétrica en los extremos de la semiespira y analizamos el equilibrio de la semiespira.



La fuerza que actúa sobre un elemento $\vec{dl}$ de la espira debido al campo magnético es:

$$d\vec{F} = I\ d\vec{l} \times \vec{B} = IRd\theta\vec{u}_\theta \times B(-\vec{k}) = IR\ d\theta B\ \vec{u}_r$$

La componente en la dirección de x de la fuerza se anula dado que el diferencial de longitud en θ compensa la componente x de la fuerza producido por el diferencial de longitud en $\pi - \theta$.

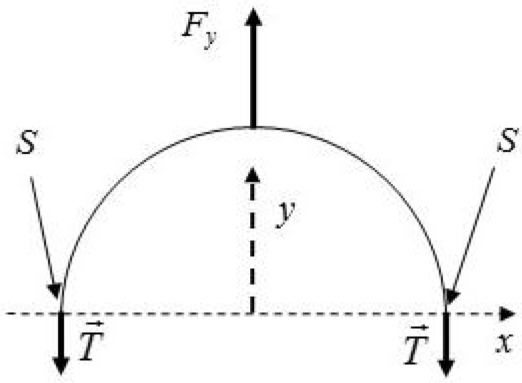


Por tanto, queda solo la componente en la dirección de y:

$$dF_y = dF\ \text{sen}\theta = IR\ d\theta B\ \text{sen}\theta$$

Integramos entre 0 y π para obtener la fuerza total sobre la semiespira:

$$F_y = \int_0^{\pi} IRB \,\text{sen}\theta \, d\theta = 2IBR$$



La semiespira debe estar en equilibrio por las fuerzas internas ejercidas por el resto de la espira. Además por simetría estas fuerzas internas deben ser idénticas en cada extremo de la semiespira.

$$2T = F_y$$

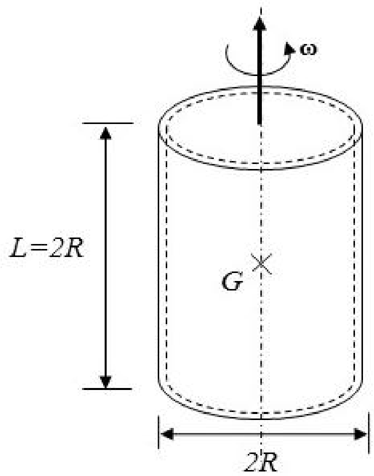
Por tanto: $T = IBR$
El esfuerzo se obtiene dividiendo por la superficie de una sección recta de la espira:

$$\sigma = \frac{IBR}{S}$$

PROBLEMA RESUELTO 6.14

La superficie lateral de un cilindro de revolución, de altura L y radio $R = L/2$, tiene una carga σ por unidad de superficie y gira alrededor de su eje con velocidad angular ω.

Calcular el vector intensidad de campo magnético en el punto G, centro geométrico del cilindro.

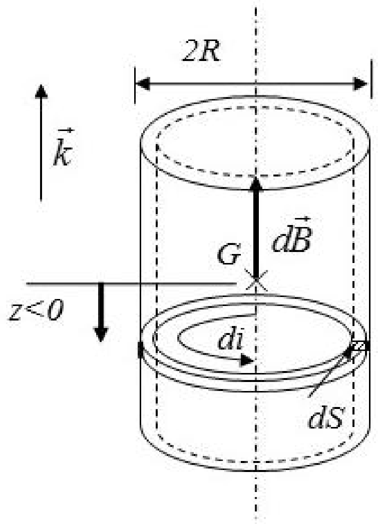


AYUDA:
Campo de una espira de radio a en un punto de su eje a la distancia z del plano de la espira

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{a^2}{(a^2+z^2)^{3/2}}\vec{k}$$

SOLUCIÓN 6.14

Un elemento transversal de la superficie lateral del cilindro se puede considerar como una espira de espesor dz.



La carga en la "espira" de altura dz es: $dq = \sigma\ 2\pi R\ dz$

El tiempo que tarda en dar una vuelta es: $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

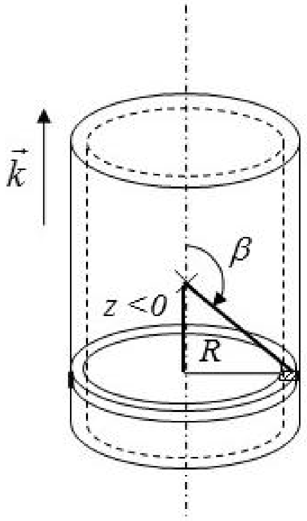
La carga por unidad de tiempo que pasa por una sección dS es: $di = \dfrac{dq}{T} = \dfrac{\omega\sigma 2\pi R\ dz}{2\pi} = \omega\sigma R\ dz$

El campo en G debido a esta espira es de acuerdo con los datos del enunciado:

$$d\vec{B}(G) = \frac{\mu_0 di}{2}\frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}\vec{k} = \frac{\mu_0\omega\sigma R\ dz}{2}\frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}\vec{k}$$

El campo total se obtiene integrando a lo largo del cilindro entre $-R$ y R:

$$\vec{B}(G) = \frac{\mu_0\omega\sigma R^3}{2}\int_{-R}^{R}\frac{dz}{(R^2+z^2)^{3/2}}\ \vec{k}$$



Para realizar la integral debemos hacer un cambio de variables:

$$\tan\beta = \frac{R}{z} \rightarrow z = \frac{R}{\tan\beta}$$

$$dz = -\frac{R}{\tan^2\beta}\,\frac{1}{\cos^2\beta}\,d\beta \; = -\frac{R}{\operatorname{sen}^2\beta}\,d\beta$$

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}}; \quad \cos\beta = \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

Haciendo la integral:

$$\vec{B}(G) = \frac{\mu_0\omega\sigma R^3}{2}\int_{-R}^{R}\left(\frac{\operatorname{sen}\beta}{R}\right)^3 R\,\frac{-1}{\operatorname{sen}^2\beta}\,d\beta\,\vec{k} = -\frac{\mu_0\omega\sigma R^3}{2}\int_{\beta_{\text{máx}}}^{\beta_{\text{mín}}}\left(\frac{\operatorname{sen}\beta}{R^2}\right)d\beta\,\vec{k}$$

$$\vec{B}(G) = \frac{\mu_0\omega\sigma R}{2}(\cos\beta_{\text{mín}} - \cos\beta_{\text{máx}})\vec{k}$$

$$\vec{B}(G) = \frac{\mu_0\omega\sigma R}{2}\left(\frac{R}{\sqrt{R^2+R^2}} - \frac{-R}{\sqrt{R^2+R^2}}\right)\vec{k} = \frac{\mu_0\omega\sigma R}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)\vec{k}$$

$$\vec{B}(G) = \frac{\mu_0\omega\sigma R}{\sqrt{2}}\vec{k}$$

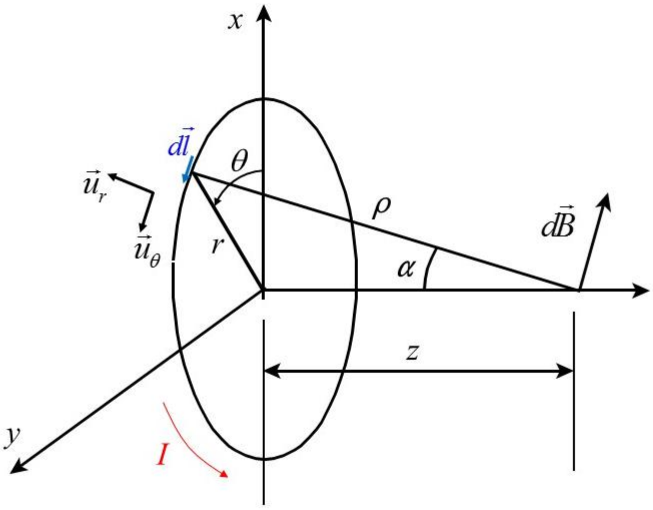
PROBLEMA RESUELTO 6.15

Deducir el campo de inducción magnética creado en un punto del eje una espira circular de radio r, recorrida por una intensidad de corriente constante I.

SOLUCIÓN 6.15

Un diferencial de campo magnético producido por un $\vec{dl}$ de la espira es: $d\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{dl} \times \dfrac{\vec{\rho}}{\rho^3}$

Donde: $\vec{\rho} = \vec{r} - \vec{r'}$



Por simetría sólo queda campo en la dirección del eje z: $\vec{B} = B\vec{\imath}$

En cilíndricas, siendo $z = 0$ la posición de la espira de radio r en el eje Oz:

$$\vec{\rho} = z\vec{k} - r\vec{u}_r; \quad \vec{dl} = r\,d\theta\vec{u}_\theta$$

La componente $\vec{k}$ del campo es:

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{r^2 d\theta}{\rho^3} \to B = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{r^2 d\theta}{\rho^3} = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{r^2}{(z^2+r^2)^{3/2}}$$

PROBLEMA RESUELTO 6.16

Una esfera de radio R con carga neta Q, uniformemente distribuida en su superficie con densidad σ, gira alrededor de uno de sus diámetros con velocidad angular constante ω.

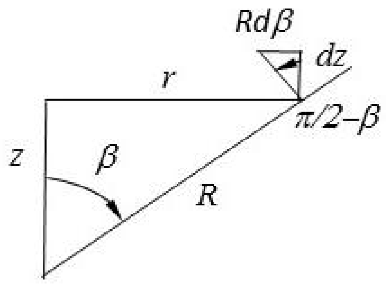
Deducir el campo de inducción magnética creado en el centro geométrico de la esfera.

SOLUCIÓN 6.16

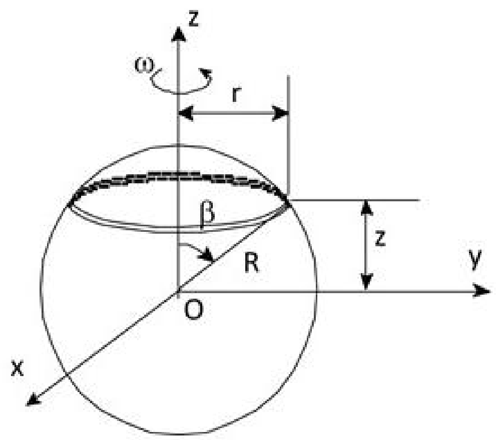
El campo magnético en el centro de la esfera lo obtenemos por superposición.

En la espira dibujada el diferencial de carga es:

$$dq = \sigma dS = \sigma\, Rd\beta\, 2\pi r$$



$$\cos(\pi/2{-}\beta) = \frac{dz}{Rd\beta} \rightarrow dq = \sigma 2\pi r \frac{dz}{\cos(\pi/2-\beta)} = \sigma 2\pi r \frac{dz}{sin\beta}$$



Esta carga pasa por una sección recta de la esfera en un periodo:

$$dI = \frac{2\pi R\sigma dz}{2\pi/\omega} = \omega R\sigma dz$$

Geométricamente:

$$\left(r^2 + z^2\right)^{3/2} = R^3$$

El campo de esta espira en el origen es: $dB_z = \dfrac{\mu_0 dI}{2}\dfrac{r^2}{\left(z^2+r^2\right)^{3/2}} = \dfrac{\mu_0\omega\sigma}{2}\dfrac{r^2}{R^2}dz$

Previamente, para una espira, se cumplen las siguientes relaciones geométricas:

$$\cos^2\beta = \frac{z^2}{R^2}\,; \qquad \sin^2\beta = \frac{r^2}{R^2}\,; \qquad \frac{r^2}{R^2} = 1 - \frac{z^2}{R^2}$$

$$B_z = \int_{-R}^{R} \frac{\mu_0\omega\sigma}{2}\left(1 - \frac{z^2}{R^2}\right)dz = \mu_0\omega\sigma \int_{0}^{R}\left(1 - \frac{z^2}{R^2}\right)dz = \mu_0\omega\sigma(R - R/3)$$

$$B_z = \frac{2}{3}\mu_0\omega\sigma R$$

Nota:

Si se quiere obtener el diferencial de volumen, este es: $\begin{cases} dV = \pi r^2 R d\beta \approx \pi r^2 dz \\ dS = 2\pi r R d\beta \neq 2\pi R dz \end{cases}$

No se puede despreciar el área $2\pi r R d\beta - 2\pi r dz = 2\pi r \dfrac{dz}{\sin\beta} - 2\pi r dz = 2\pi r(\dfrac{1}{\sin\beta} - 1)dz$, pues es un diferencial de primer orden.

En el cálculo del volumen se desprecia el área de un triángulo ($\frac{1}{2}drdz$) multiplicado por $2\pi r$ que es un diferencial de segundo orden:

$$dV = \pi r^2 dz + \frac{1}{2} drdz \, 2\pi r \approx \pi r^2 dz$$