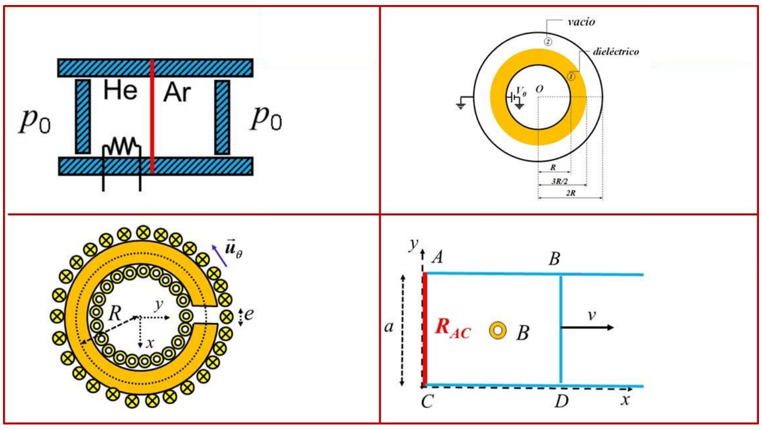
Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO

FÍSICA II

PROBLEMAS RESUELTOS

José Carlos JIMÉNEZ SÁEZ
Santiago RAMÍREZ DE LA PISCINA MILLÁN



7.- MAGNETOSTÁTICA DE MEDIOS MATERIALES

7 Magnetostática de Medios Materiales

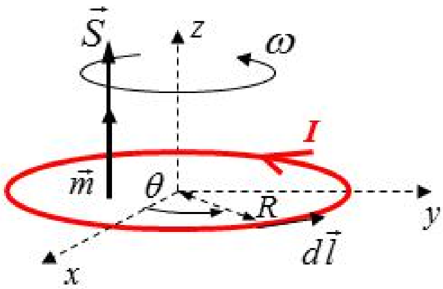
PROBLEMA RESUELTO 7.1

1) Un anillo circular de radio R, contenido en el plano XY, cuyo centro es el origen O tiene una densidad de carga λ constante, y gira de manera uniforme dando n vueltas en un tiempo t. Calcular la corriente eléctrica I que circula por el anillo y su momento magnético $\vec{m}$.

2) Un circuito recorrido por una intensidad I está formado por dos semicircunferencias de radio R unidas entre sí, una situada en el plano XY y otra en el plano YZ. Calcular su momento magnético $\vec{m}$.

3) Calcular la fuerza $\vec{F}$ y el momento $\vec{\tau}$ que actúan sobre los circuitos anteriores si se aplica un campo magnético $\vec{B} = B\vec{k}$.

SOLUCIÓN 7.1



1) La velocidad angular de la espira es:

$$\vec{\omega} = \frac{n2\pi}{t}\vec{k}$$

La intensidad debida al movimiento de la espira utilizando el ángulo azimutal de coordenadas cilíndricas es:

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{\lambda dl}{dt} = \frac{\lambda dl}{dt} = \frac{\lambda R d\theta}{dt} = \lambda R\frac{d\theta}{dt} = \lambda R\omega = \lambda R\frac{n2\pi}{t}$$

La intensidad tiene el sentido de la velocidad angular (antihorario visto desde el eje Oz positivo).

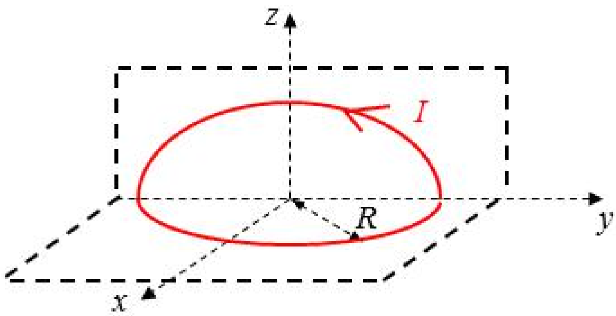
El vector superficie del circuito al tratarse de una superficie plana es el área dirigida en la dirección normal (el sentido lo determina la intensidad que recorre el contorno de acuerdo con la regla del sacacorchos):

$$\vec{S} = \pi R^2 \vec{k}$$

El momento magnético del circuito es la intensidad por el vector superficie:

$$\vec{m} = I\vec{S} = \lambda R\omega\pi\, R^2\vec{k} = \lambda\omega\pi\, R^3\vec{k} = m\vec{k}$$

2) El vector superficie en este caso viene dado por las proyecciones de la superficie sobre los planos coordenados (el sentido viene determinado por el recorrido de la intensidad en la proyección):



$$\vec{S} = \frac{\pi R^2}{2}\vec{k} + \frac{\pi R^2}{2}\vec{i}$$

$$\vec{m} = I\vec{S} = I(\frac{\pi R^2}{2}\vec{k} + \frac{\pi R^2}{2}\vec{i})$$

3) La fuerza sobre un circuito **cerrado** en un campo magnético uniforme es cero:

$$\vec{F} = \oint_{\Gamma} I d\vec{l} \times \vec{B} = I\left(\oint_{\Gamma} d\vec{l}\right) \times \vec{B} = \vec{0}$$

El momento sobre un circuito en un campo magnético uniforme es:

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$$

Para: $\vec{m} = m\vec{k}$ y $\vec{B} = B\vec{k}$: $\vec{\tau} = \vec{0}$

Para: $\vec{m} = m_z\vec{k} + m_x\vec{\imath}$ y $\vec{B} = B_z\vec{k}$: $\vec{\tau} = -m_x B_z\vec{\jmath}$

PROBLEMA RESUELTO 7.2

Obtener el flujo de un dipolo magnético de momento dipolar $\vec{m} = m\vec{k}$, situado en el origen del sistema de referencia, sobre la corona circular de la figura situada en el plano XY. La corona es el área comprendida entre dos circunferencias de radios R_1 y R_2 ($R_1 < R_2$). (Nota: Considérese el flujo positivo en el sentido positivo del eje Oz).

SOLUCIÓN 7.2

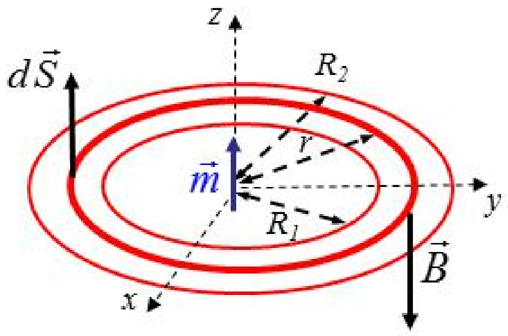
El campo de un dipolo es:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{-\vec{m}}{r^3} + \frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5}\right)$$

Para puntos del plano XY $\vec{m}\perp\vec{r}$, por tanto, quedaría:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{-m\vec{k}}{r^3}\right)$$

El campo magnético es el mismo para todas las distancias separadas r del eje $\vec{k}$.



Por tanto, se puede coger un diferencial de superficie igual a: $d\vec{S} = 2\pi r dr\vec{k}$. El diferencial de flujo a través de una corona de anchura dr es:

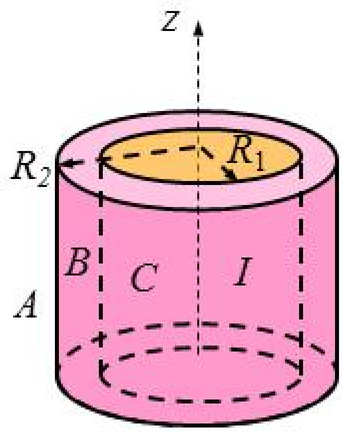
$$d\phi = \vec{B}\cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{-m\vec{k}}{r^3}\right)2\pi r dr\vec{k} = -\frac{\mu_0}{2}\frac{m}{r^2}dr$$

Para calcular el flujo total integramos la distancia r:

$$\phi = \int_{R_1}^{R_2} -\frac{\mu_0}{2}\frac{m}{r^2}dr = \frac{\mu_0 m}{2}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$$

PROBLEMA RESUELTO 7.3

Se tiene un cilindro indefinido conductor de radio R_1 por el que circula una corriente uniforme I en el sentido positivo del eje Oz. Su eje de simetría coincide con el eje Oz. En su exterior se encuentra un tubo cilíndrico de radios R_1 y R_2 ($R_1 < R_2$) de material magnético lineal de permeabilidad relativa $\mu_r = (1 - \alpha r/R_1)$.



Se pide, en función de r (distancia al eje):

a) Campo magnetizante (campo $\vec{H}$) en todas las regiones del espacio.

b) Inducción magnética (campo magnético) en todas las regiones del espacio.

c) Imanación en el cilindro.

d) Densidad de corriente de magnetización en el cilindro.

SOLUCIÓN 7.3

Por simetría todos los campos tienen el sentido del versor azimutal de las coordenadas cilíndricas: $\vec{B} = B\vec{u}_\theta$, $\vec{H} = H\vec{u}_\theta$ y $\vec{M} = M\vec{u}_\theta$.

Aplicamos el teorema de Ampère al vector $\vec{H}$ en circunferencias de radio r. Colocamos circunferencias en todas las regiones del espacio:

Zona A: $R_2 < r$

Zona B: $R_1 < r < R_2$

Zona C: $r < R_1$

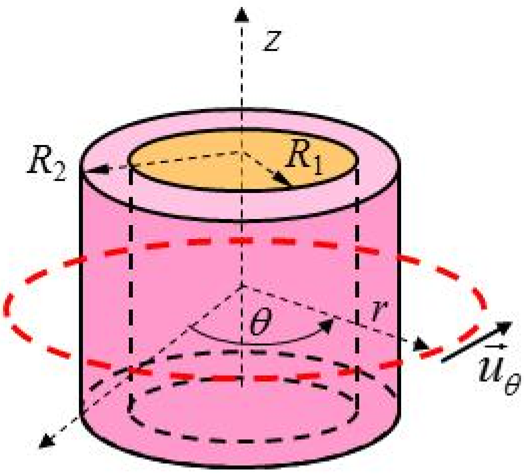
Tomamos los vectores diferenciales de longitud en el sentido del versor azimutal:

$$\int_0^{2\pi} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} H\vec{u}_\theta \cdot rd\theta\vec{u}_\theta = H2\pi r$$

La intensidad que atraviesa la curva en la zona A es I:

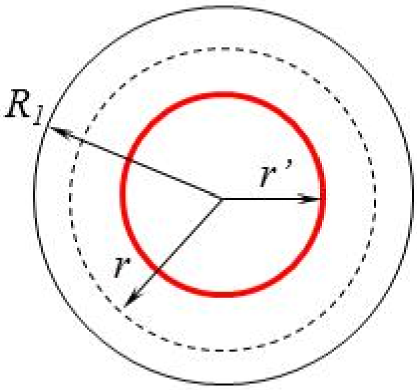
$$H2\pi r = I \rightarrow H = \frac{I}{2\pi r} \rightarrow B = \mu_0 H = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}$$

La curva en la zona B encierra la intensidad I, sin embargo la permeabilidad es distinta de la del vacío:



$$H2\pi r = I \rightarrow H = \frac{I}{2\pi r} \rightarrow B = \mu_0\mu_r H = \frac{\mu_0(1-\alpha r/R_1)I}{2\pi r}$$

Para la curva en la zona C ya no encerramos a toda la intensidad I. En este caso, para calcular la intensidad que pasa dentro de la circunferencia de radio r tomamos coronas circulares de radio r' y grosor dr.



$$H2\pi r = \int_0^r J2\pi r'dr' = J\pi r^2 \rightarrow H = \frac{Jr}{2}$$

Por la definición de intensidad:

$$I = \int_0^{R_1} J2\pi r'dr' = J\pi R_1^2 \rightarrow J = \frac{I}{\pi R_1^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow H = \frac{Jr}{2} = \frac{Ir}{2\pi R_1^2} \rightarrow B = \frac{\mu_0 Ir}{2\pi R_1^2}$$

Calculamos la imanación dentro del material magnético:

$$M = (\mu_r - 1)H = \frac{-\alpha(r/R_1)I}{2\pi r} = -\frac{\alpha I}{2\pi R_1}$$

Calculamos las densidades de corriente de imanación.

La densidad de corriente es:

$$\vec{J}_m = \nabla \times \vec{M} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \vec{u}_r & r\vec{u}_\theta & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & r\left(-\dfrac{\alpha I}{2\pi R_1}\right) & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\alpha I}{2\pi r R_1}\vec{k}$$

En la superficie de radio R_2 la normal exterior es el vector $\vec{u}_r$ de coordenadas cilíndricas. La densidad de corriente superficial es:

$$\vec{J}_{Sm}(R_2) = \vec{M} \times \vec{u}_r = \frac{\alpha I}{2\pi R_1}\vec{k}$$

En la superficie de radio R_1 la normal exterior es el vector $-\vec{u}_r$ de coordenadas cilíndricas. La densidad de corriente superficial es:

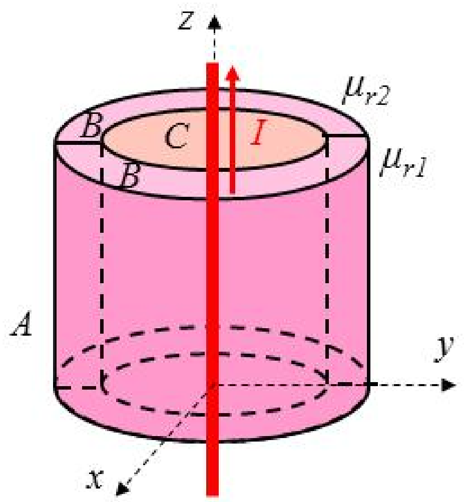
$$\vec{J}_{Sm}(R_1) = \vec{M} \times (-\vec{u}_r) = -\frac{\alpha I}{2\pi R_1}\vec{k}$$

Se puede probar que la intensidad total de imanación es cero:

$$\vec{J}_{Sm}(R_2)2\pi R_2 + \vec{J}_{Sm}(R_1)2\pi R_1 + \int_{R_1}^{R_2} \vec{J}_m \cdot 2\pi r dr \vec{k}$$

PROBLEMA RESUELTO 7.4

Se tiene un hilo de corriente indefinido (que coincide con el eje Oz) por el que circula una intensidad I en el sentido positivo del eje Oz. En su exterior se encuentra un cilindro hueco de radios R_i y R_e ($R_i < R_e$) de material magnético lineal. La mitad del cilindro (la parte que ocupa el espacio $x < 0$) tiene una permeabilidad relativa constante μ_{r2} y la otra mitad una permeabilidad relativa constante μ_{r1} tal y como se muestra en la figura. Se pide en función de la distancia al eje r:



a) Campo magnetizante (campo $\vec{H}$) en todas las regiones del espacio.

b) Inducción magnética (campo magnético) en todas las regiones del espacio.

c) Imanación en el cilindro.

d) Densidad de corriente de magnetización en el cilindro.

SOLUCIÓN 7.4

Por simetría todos los campos tienen el sentido del versor azimutal de las coordenadas cilíndricas: $\vec{B} = B\vec{u}_\theta$, $\vec{H} = H\vec{u}_\theta$ y $\vec{M} = M\vec{u}_\theta$.

Aplicamos el teorema de Ampère al vector $\vec{H}$ en circunferencias de radio r.

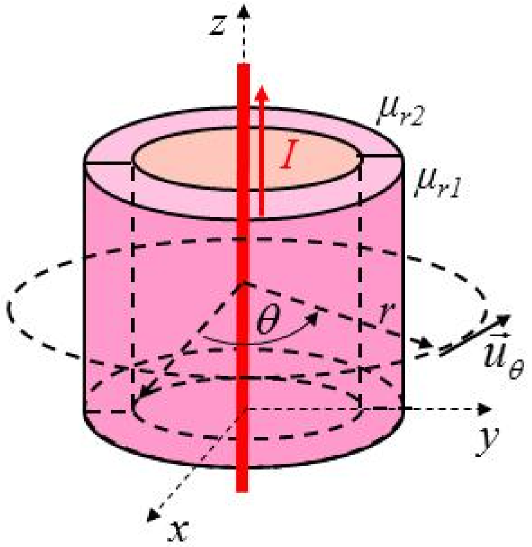
Colocamos circunferencias en todas las regiones del espacio:

$$\text{Zona A:} \quad R_e < r$$

$$\text{Zona B:} \quad R_i < r < R_e,\ x > 0;\ R_i < r < R_e,\ x < 0$$

$$\text{Zona C:} \ r < R_i$$

Tomamos los diferenciales de longitud en el sentido del versor azimutal:



$$\int_0^{2\pi} \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} H\vec{u}_\theta \cdot r d\theta \vec{u}_\theta$$

Las curvas en las zonas A y C encierran la intensidad I:

$$H2\pi r = I \rightarrow H = \frac{I}{2\pi r} \rightarrow B = \mu_0 H = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}$$

La curva en la zona B encierra la intensidad I, sin embargo la permeabilidad es distinta de la del vacío.

La mitad de la curva está en zona de permeabilidad μ_{r1} y la otra mitad en zona de permeabilidad μ_{r2}:

$$H_1\pi r + H_2\pi r = I$$

$$B_1 = \mu_0\mu_{r1}H_1, \qquad x > 0$$

$$B_2 = \mu_0\mu_{r2}H_2, \qquad x < 0$$

De acuerdo a las condiciones de contorno el campo magnético se conserva en la interfase de los dos medios magnéticos:

$$B_2 = \mu_0\mu_{r2}H_2 = B_1 = \mu_0\mu_{r1}H_1 \rightarrow H_2 = \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}}H_1$$

$$H_1\pi r + \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}}H_1\pi r = I \rightarrow H_1\pi r\left(\frac{\mu_{r2}+\mu_{r1}}{\mu_{r2}}\right) = I \rightarrow H_1 = \frac{I}{\pi r}\left(\frac{\mu_{r2}}{\mu_{r2}+\mu_{r1}}\right)$$

Calculamos la imanación dentro de los materiales magnéticos:

$$M_1 = (\mu_{r1}-1)H_1 = \frac{I}{\pi r}\left(\frac{(\mu_{r1}-1)\mu_{r2}}{\mu_{r2}+\mu_{r1}}\right), \quad x > 0$$

$$M_2 = (\mu_{r2}-1)H_2 = \frac{I}{\pi r}\left(\frac{(\mu_{r2}-1)\mu_{r1}}{\mu_{r2}+\mu_{r1}}\right), \quad x < 0$$

En este caso no hay densidad de corriente de imanación en ninguno de los dos materiales pues:

$$\vec{J}_m = \nabla\times\vec{M} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \vec{u}_r & r\vec{u}_\theta & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & rM_i & 0 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

Teniendo en cuenta que la normal exterior e interior son $\vec{u}_r$ y $-\vec{u}_r$ respectivamente, la densidad superficial de magnetización en la superficie interior es:

$$\vec{J}_{Sm}(R_i) = \vec{M}_1 \times (-\vec{u}_r) = \frac{I}{\pi R_i}\left(\frac{(\mu_{r1}-1)\mu_{r2}}{\mu_{r2}+\mu_{r1}}\right), \quad x > 0$$

$$\vec{J}_{Sm}(R_i) = \vec{M}_2 \times (-\vec{u}_r) = \frac{I}{\pi R_i}\left(\frac{(\mu_{r2}-1)\mu_{r1}}{\mu_{r2}+\mu_{r1}}\right), \quad x < 0$$

Y en la superficie exterior es:

$$\vec{J}_{Sm}(R_e) = \vec{M}_1 \times \vec{u}_r = -\frac{I}{\pi R_e}\left(\frac{(\mu_{r1}-1)\mu_{r2}}{\mu_{r2}+\mu_{r1}}\right), \quad x > 0$$

$$\vec{J}_{Sm}(R_e) = \vec{M}_2 \times \vec{u}_r = -\frac{I}{\pi R_e}\left(\frac{(\mu_{r2}-1)\mu_{r1}}{\mu_{r2}+\mu_{r1}}\right), \quad x < 0$$

PROBLEMA RESUELTO 7.5

Se tiene una esfera de radio R cuyo centro coincide con el origen de coordenadas hecha de material ferromagnético no lineal y magnetizado permanentemente. La magnetización de la esfera tiene igual valor en todos sus puntos $\vec{M} = M_0\vec{k}$. No hay corrientes de conducción.

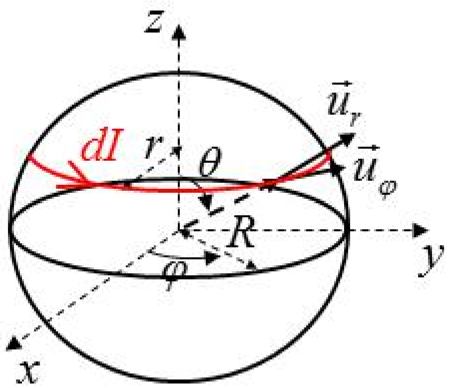
Calcular los campos $\vec{B}$ y $\vec{H}$ en el origen de coordenadas.

(Ayuda:
Calcúlese la inducción magnética a partir del campo creado por una espira, además: $\int \sin^2\theta d\theta = \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4}$)

SOLUCIÓN 7.5

Si la imanación es uniforme, la densidad de corriente de imanación es cero. Sólo hay corrientes superficiales. Sea $\vec{u}_r$ el vector radial de coordenadas esféricas:

$$\vec{J}_{Sm} = \vec{M} \times \vec{u}_r = M_0\vec{k} \times \vec{u}_r = M_0\vec{u}_\varphi$$



Donde $\vec{u}_\varphi$ es el unitario azimutal.
La intensidad de corriente de magnetización que circula por la superficie de la esfera es:

$$I = \int \vec{J}_{Sm} \cdot Rd\theta\vec{u}_\varphi = \int_0^\pi J_{Sm}\vec{u}_\varphi \cdot Rd\theta\vec{u}_\varphi = M_0\pi R$$

$$dI = J_{Sm}Rd\theta = M_0Rd\theta$$

El campo producido en el origen sería el de una espira:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 dIr^2}{2(r^2 + (R\cos\theta)^2)^{3/2}}\vec{k} = \frac{\mu_0 dIr^2}{2R^3}\vec{k}$$

Integrando:

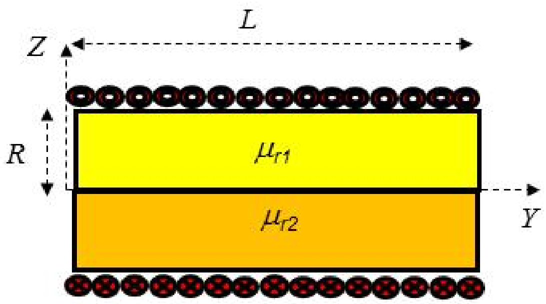
$$\vec{B} = \int_0^\pi \frac{\mu_0 dIr^2}{2R^3}\vec{k} = \int_0^\pi \frac{\mu_0 M_0 r^2 d\theta}{2R^2}\vec{k} = \int_0^\pi \frac{\mu_0 M_0 \sin^2\theta d\theta}{2}\vec{k}$$

Cuyo resultado es: $\vec{B} = \frac{\mu_0 M_0 \pi}{4}\vec{k}$

El campo $\vec{H}$ se obtiene de: $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$

PROBLEMA RESUELTO 7.6

Se tiene un solenoide largo y estrecho de longitud L y radio R cuyo eje de simetría coincide con el eje Oy (véase figura)



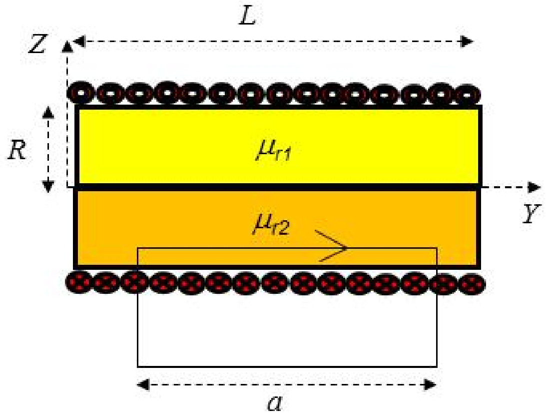
Arrollado al solenoide se encuentra un devanado de N espiras por las que circula una intensidad I en el sentido indicado en la figura. Su interior (cilindro de radio R) se encuentra ocupado por un medio magnético lineal.

El material de la mitad superior (el que ocupa el semiespacio $z > 0$) tiene una permeabilidad relativa constante μ_{r1} y el material de la mitad inferior tiene una permeabilidad relativa también constante μ_{r2}.

Calcular el campo magnético en el interior del solenoide así como las corrientes superficiales de imanación en la interfase de los dos materiales magnéticos.

SOLUCIÓN 7.6

Por simetría todos los campos tienen el sentido del versor $\vec{B}$: $\vec{B} = B\vec{\jmath}$, $\vec{H} = H\vec{\jmath}$ y $\vec{M} = M\vec{\jmath}$. Aplicamos el teorema de Ampère al vector $\vec{H}$ en la curva de la figura.



El tramo interior de longitud a de la curva paralelo al solenoide puede estar en la zona $z > 0$ o $z > 0$.

Sólo la parte interior contribuye a la circulación.

$$\int_0^a \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_0^a H\vec{j} \cdot dy\vec{j} = Ha \quad \rightarrow \quad Ha = \frac{N}{L} aI \rightarrow H = \frac{N}{L} I$$

Debemos recordar que en la interfase de los dos materiales magnéticos se verifica la conservación de la componente tangencial del campo magnetizante. La componente tangencial del campo magnético sí que puede ser discontinua. Para calcular el campo magnético debemos diferenciar la zona $z > 0$ y $z < 0$:

$$B_1 = \mu_0 \mu_{r1} \frac{N}{L} I, \quad z > 0$$

$$B_2 = \mu_0 \mu_{r2} \frac{N}{L} I, \quad z < 0$$

La magnetización también depende de la zona del material:

$$M_1 = (\mu_{r1} - 1)H = (\mu_{r1} - 1)\frac{N}{L} I, \quad z > 0$$

$$M_2 = (\mu_{r2} - 1)H = (\mu_{r2} - 1)\frac{N}{L} I, \quad z < 0$$

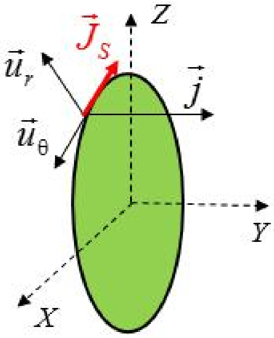
Para calcular la densidad superficial de corrientes de magnetización en la interfase tenemos en cuenta que la normal exterior a la superficie puede ser $-\vec{k}$ o $\vec{k}$ dependiendo de si se trata del material de la parte superior o de la inferior. Para el material de la parte superior:

$$\vec{J}_{S1} = \vec{M}_1 \times (-\vec{k}) = (\mu_{r1} - 1)\frac{N}{L} I\vec{j} \times (-\vec{k}) = (\mu_{r1} - 1)\frac{N}{L} I(-\vec{i}), \quad z > 0$$

Para el material de la parte inferior:

$$\vec{J}_{S2} = \vec{M}_2 \times \vec{k} = (\mu_{r2} - 1)\frac{N}{L} I\vec{j} \times \vec{k} = (\mu_{r2} - 1)\frac{N}{L} I\vec{i}, \quad z < 0$$

La densidad de corriente de magnetización es cero pues el rotacional de $\vec{M}$ es cero. Y las densidades superficiales en la parte curva del material se obtendrían teniendo en cuenta que la normal exterior en ambos materiales coincide con el vector unitario radial de coordenadas cilíndricas $\vec{u}_r$. Por tanto, se tendrían corrientes azimutales en sentido opuesto a las que circulan por el solenoide.

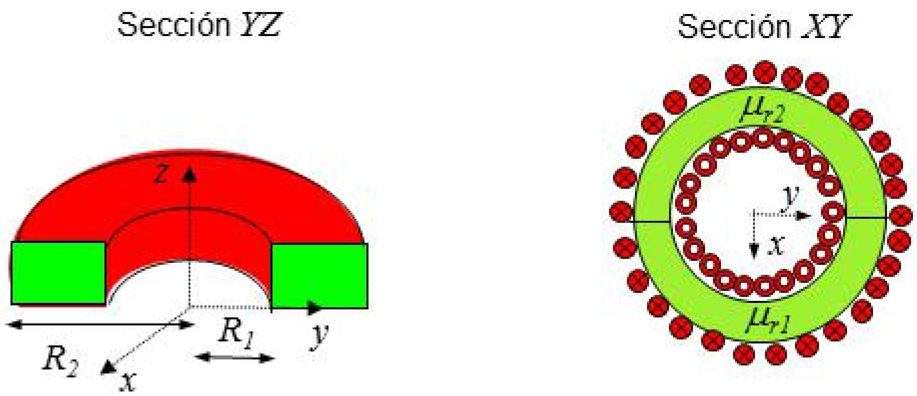


$$\vec{J}_{S1} = \vec{M}_1 \times \vec{u}_r = (\mu_{r1} - 1)\frac{N}{L} I(-\vec{u}_\theta) \quad z > 0$$

$$\vec{J}_{S2} = \vec{M}_2 \times \vec{u}_r = (\mu_{r2} - 1)\frac{N}{L} I(-\vec{u}_\theta) \quad z < 0$$

PROBLEMA RESUELTO 7.7

Se tiene un solenoide toroidal de radios interior y exterior R_1 y R_2 respectivamente, de sección cuadrada de lado muy pequeño comparado con su radio interior y cuyo eje de simetría coincide con el eje Oz (véase figura).



Arrollado al solenoide se encuentra un devanado de N espiras por las que circula una intensidad I en el sentido indicado en la figura. Su interior se encuentra totalmente ocupado por dos materiales magnéticos simétricos en su colocación respecto del plano YZ, de manera que un material ocupa la zona $x > 0$ (material 1) y el otro la zona $x < 0$ (material 2).

1) Suponiendo que el material 1 tiene una imanación nula y el 2 una imanación $\vec{M}$. Calcular el campo magnetizante en los dos materiales.

2) Suponiendo que los dos materiales magnéticos son lineales de permeabilidades relativas constantes μ_{r1} y μ_{r2}. Calcular el campo magnetizante en los dos materiales.

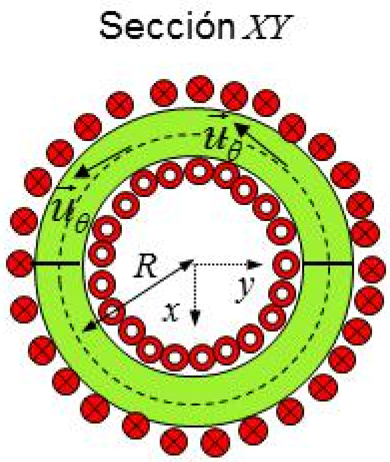
SOLUCIÓN 7.7

1) Dado que el lado de la sección transversal $R_2 - R_1$ es muy pequeño comparado con el radio interior del toroide R_1 el campo en el interior se puede suponer uniforme e igual al que existe en la zona central, zona determinada por el radio medio del toroide:

$$R = \frac{R_2 + R_1}{2}$$

Por simetría todos los campos tienen el sentido del versor azimutal: $\vec{B} = B\vec{u}_\theta$, $\vec{H} = H\vec{u}_\theta$ y $\vec{M} = M\vec{u}_\theta$.

Aplicamos el teorema de Ampère al vector $\vec{H}$ a una circunferencia de radio R en el interior del toroide. La mitad de la curva se encuentra en la zona de material 1 y la otra mitad en la zona de material 2:



$$\int_0^{2\pi} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} H\vec{u}_\theta \cdot Rd\theta\vec{u}_\theta$$

$$H_1\pi R + H_2\pi R = NI \to H_1 + H_2 = \frac{NI}{\pi R}$$

La condición de contorno en la frontera de los dos medios magnéticos impone que debe conservarse la componente normal del campo magnético:

$$B_1 = \mu_0 H_1 \quad B_2 = \mu_0(H_2 + M) \quad B_2 = B_1 \to M = H_1 - H_2$$

Utilizando la ecuación de Ampère y la anterior se obtiene:

$$H_1 = (\frac{NI}{\pi R} + M)/2; \quad H_2 = (\frac{NI}{\pi R} - M)/2$$

2) En el caso de que los medios sean lineales se tiene:

$$B_1 = \mu_0\mu_{r1}H_1 \quad B_2 = \mu_0\mu_{r2}H_2$$

$$B_2 = B_1 \to H_1 = \frac{\mu_{r2}}{\mu_{r1}}H_2$$

Sustituyendo en la ecuación de Ampère se obtiene el campo magnetizante:

$$\frac{\mu_{r2}}{\mu_{r1}}H_2 + H_2 = \frac{NI}{\pi R} \to H_2 = \frac{\mu_{r1}NI}{\pi R(\mu_{r1} + \mu_{r2})}$$

$$H_1 = \frac{\mu_{r2}NI}{\pi R(\mu_{r1} + \mu_{r2})}$$

Los campos magnéticos quedarían:

$$B_1 = B_2 = \frac{\mu_{r1}\mu_{r2}NI}{\pi R(\mu_{r1} + \mu_{r2})}$$