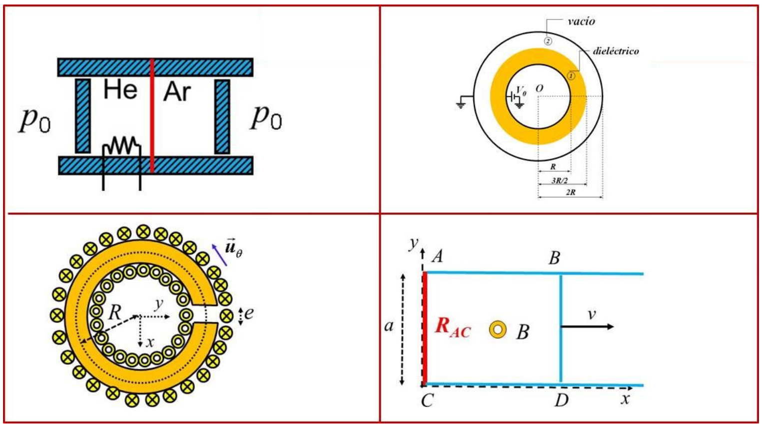
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO

FÍSICA II

PROBLEMAS RESUELTOS

José Carlos JIMÉNEZ SÁEZ
Santiago RAMÍREZ DE LA PISCINA MILLÁN



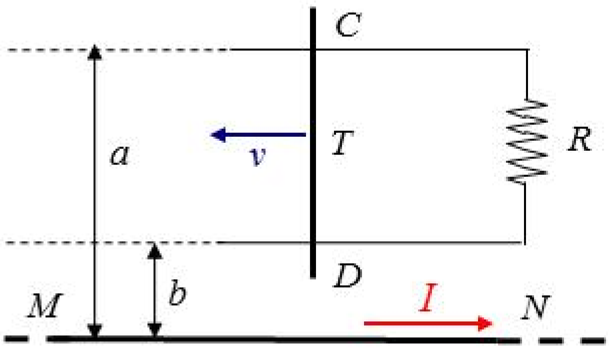
9.- ELECTRODINÁMICA

9 Electrodinámica

PROBLEMA RESUELTO 9.1

En un plano horizontal, según el esquema de la figura, se dispone de:

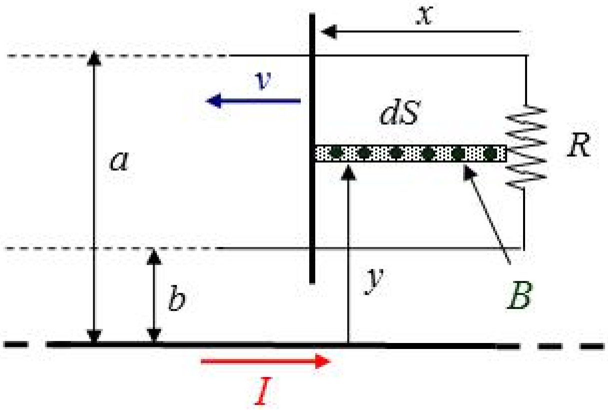
- Un conductor MN indefinido, recorrido por una intensidad de corriente I.
- Dos barras metálicas C y D, de resistencia despreciable, unidas por un resistor R.
- Una barra metálica transversal, de resistencia despreciable, que apoya en las anteriores y que desliza sobre ellas, sin rozamiento, con velocidad v.



Calcular la intensidad de corriente en la resistencia R.

SOLUCIÓN 9.1

El campo a una distancia y del conductor rectilíneo es, aplicando el teorema de Ampere al campo producido por un hilo rectilíneo indefinido:



$$\vec{B}(y) = \frac{\mu_0 I}{2\pi y}(-\vec{k})$$

El sentido del campo es saliente de la hoja.

Elegimos un sentido para el dS en la espira rectangular: $d\vec{S} = dS\,\vec{k}$.

El flujo a través de la espira rectangular es:

$$\phi = \int_b^a \frac{\mu_0 I}{2\pi y}(-\vec{k}) \cdot dS\,\vec{k} = \int_b^a -\frac{\mu_0 I}{2\pi y}\,x\,dy = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\,x\,\ln\frac{a}{b}$$

La f.e.m. inducida en la espira es por la ley de Faraday-Lenz:

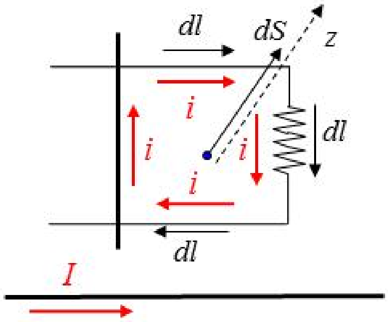
$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d\phi}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = -v\,\frac{d\phi}{dx} = \frac{\mu_0 I v}{2\pi}\,\ln\frac{a}{b}$$

Aplicando la ley de Ohm, la intensidad de corriente inducida es:

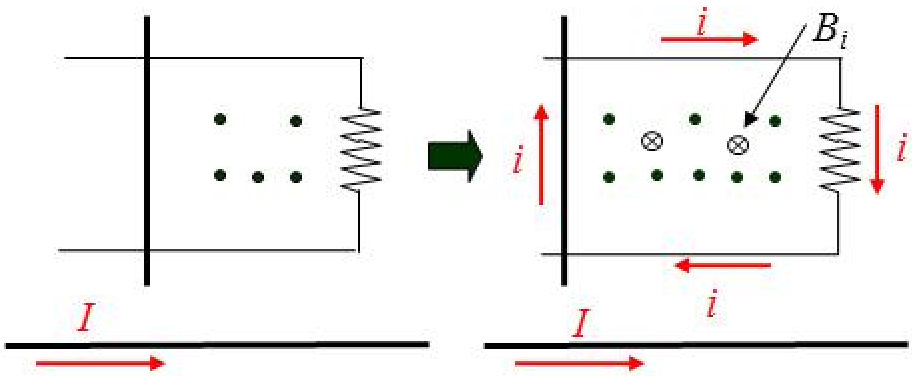
$$i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\oint \vec{\xi}_m \cdot d\vec{l}}{R} = \frac{\mu_0 I v}{2\pi}\cdot\frac{1}{R}\cdot\ln\frac{a}{b}$$

El sentido tomado para el $d\vec{S}$ fija el sentido de los diferenciales de longitud alrededor del circuito, que lo han de rodear en sentido antihorario **(visto desde el semieje Oz positivo)**.

El campo electromotriz ($\vec{\xi}_m = \vec{v}\times\vec{B}$) lleva el mismo sentido que la intensidad inducida.



Si la intensidad inducida es positiva, entonces su sentido es el de los diferenciales de longitud. Si es negativa, entonces lleva el sentido contrario. En este caso lleva el mismo sentido.



También podemos deducir el sentido de la intensidad analizando la evolución temporal del número de líneas de campo que atraviesan la espira. Dado que el número de líneas de campo aumenta, el circuito reacciona creando líneas de campo de sentido opuesto (B_i) para evitar un cambio tan brusco.

Otra forma de resolver el problema es hacienda uso de la fórmula:

$$\varepsilon = \int (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

$$\varepsilon = \int_{y=b}^{y=a} [v\vec{i} \times \frac{\mu_0 I}{2\pi y}(-\vec{k})] \cdot dy\vec{j} = \int_{y=b}^{y=a} v\frac{\mu_0 I}{2\pi y}\, dy = v\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{a}{b}$$

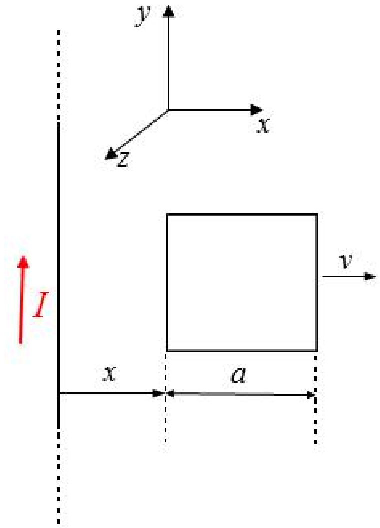
PROBLEMA RESUELTO 9.2

En un plano están contenidos:

-Una línea recta indefinida, rígida y estacionaria que conduce una intensidad I.

-Una espira cuadrada, de lado a y resistencia R, que se mueve, paralelamente a sí misma, con la velocidad v indicada.

Calcular la intensidad de corriente inducida en la espira, así como su sentido, despreciando los efectos de autoinducción en la propia espira.



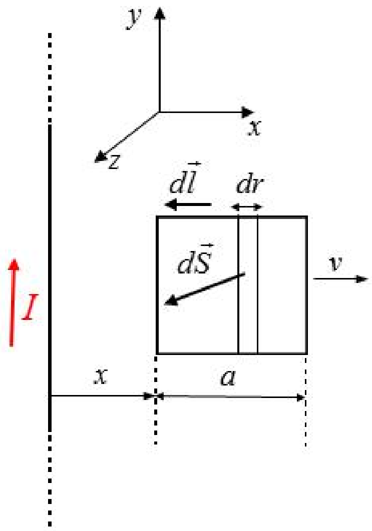
SOLUCIÓN 9.2

La fuerza electromotriz inducida se obtiene derivando el flujo, la intensidad por la ley de Ohm:

$$I_i = \frac{\varepsilon_i}{R}\ ; \quad \varepsilon_i = -\frac{d\phi}{dt}\ ; \quad \phi = \int \vec{B}\cdot\vec{dS}$$

El campo $\vec{B}$ a una distancia r de la línea es:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}(-\vec{k})$$



Tomamos como diferencial de superficie y diferencial de longitud asociado el dibujado en la figura: $d\vec{S} = a\,dr\vec{k}$

$$\phi = \int \vec{B}\cdot d\vec{S} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_x^{x+a}\frac{dr}{r} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ \ln\frac{x+a}{x}$$

Para calcular la derivada aplicamos la regla de la cadena:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = v\cdot\frac{d\phi}{dx} = \frac{\mu_0 I v}{2\pi}\ \frac{a}{x(x+a)}$$

$$\oint \vec{\xi}\cdot d\vec{l} = \varepsilon_i = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\mu_0 I v a}{2\pi x(x+a)}$$

La intensidad inducida es, pues,

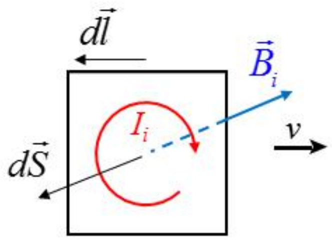
$$I_i = -\frac{\mu_0 I v a}{2\pi R x(x+a)}$$

La intensidad inducida es, pues,

$$I_i = -\frac{\mu_0 I v a}{2\pi R x(x+a)}$$

Al ser negativa el campo motriz $\vec{\xi}_m$ es opuesto al diferencial de longitud $d\vec{l}$. Ese es por tanto el sentido de la corriente.

Aplicando la ley de Lenz, también se concluye que el sentido del recorrido es el de las agujas del reloj.

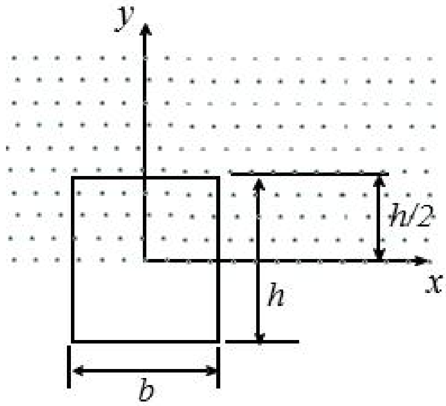


La explicación es clara, al alejarse la espira, ésta es atravesada cada vez por menos líneas de campo.

La intensidad inducida intenta pues producir líneas de campo que intenten compensar esta pérdida de líneas de campo entrantes en la hoja de papel. La forma de que las líneas de campo entren en la hoja es tener una intensidad horaria.

PROBLEMA RESUELTO 9.3

Una espira cuadrada, de dimensiones $b = 3\ cm$, $h = 0.4\ m$ y resistencia $R = 10\ \Omega$, está situada en un campo magnético uniforme que solo existe en la región $y \geq 0$, de inducción $\vec{B} = B\,\vec{k} = 2\,\vec{k}\quad T$ según se indica en la figura.



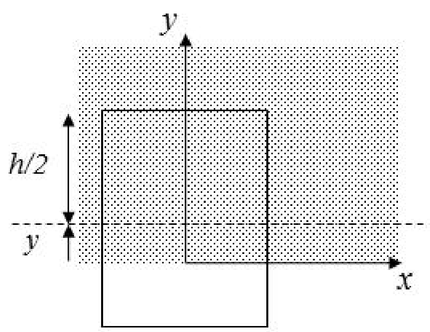
1) Calcular la intensidad inducida en la espira cuando, en la posición indicada, se mueve, con velocidad $\vec{v} = v\,\vec{j} = 4\,\vec{j}\quad m/s$, en el sentido positivo del eje Oy.

2) Calcular, en función del tiempo, la intensidad inducida en la espira cuando, en la posición indicada, comienza a girar con velocidad angular $\vec{\omega} = 4\,\vec{j}\ \dfrac{rad}{s}$ alrededor del eje Oy.

3) Calcular, en función del tiempo, la intensidad inducida en la espira cuando, en la posición indicada, realiza simultáneamente los dos movimientos anteriores.

SOLUCIÓN 9.3

1) Obtenemos el flujo que atraviesa la espira, el campo magnético lleva la dirección de $\vec{k}$ y elegimos un diferencial de superficie también en esa dirección y sentido:



$$\phi = \int B\vec{k} \cdot dS\vec{k} \rightarrow \quad \phi = \int BdS$$

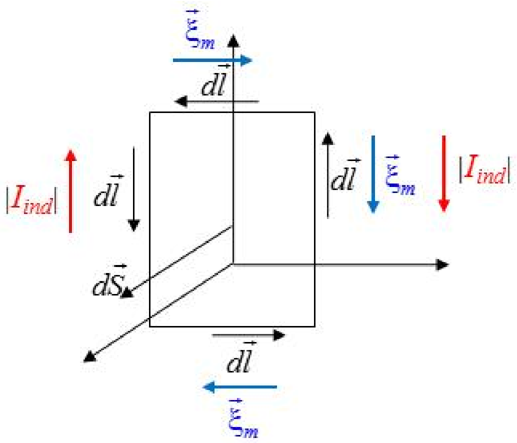
$$\phi = BS = Bb\left(\frac{h}{2} + y\right)$$

$$RI_{ind} = \varepsilon = -\frac{d\phi}{dt}\ ; \quad \phi = Bb\left(\frac{h}{2} + y\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_{ind} = -\frac{1}{R}\frac{d\phi}{dt} = -\frac{Bb}{R}\frac{dy}{dt} = -\frac{Bbv}{R} = -0.24\ A$$

¿Cómo obtener el sentido de la intensidad a partir del signo obtenido en la ley de Faraday?

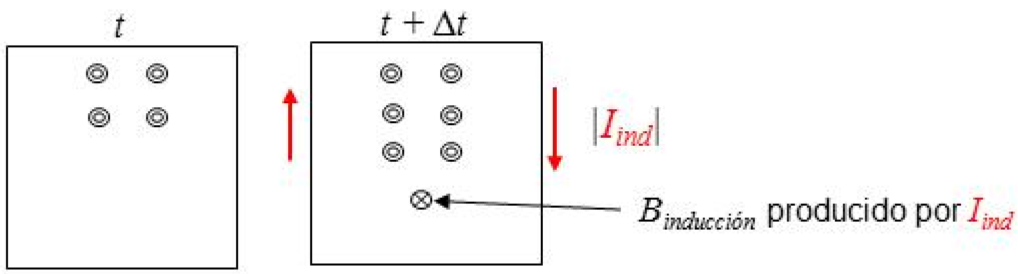
Establecido el sentido del $d\vec{S}$ para obtener el flujo (éste se puede elegir arbitrariamente), los diferenciales de longitud $d\vec{l}$ giran en sentido antihorario en torno al $d\vec{S}$. Al ser negativa la fem, el sentido del campo motriz $\vec{\xi}_m$ es opuesto al de los $d\vec{l}$.



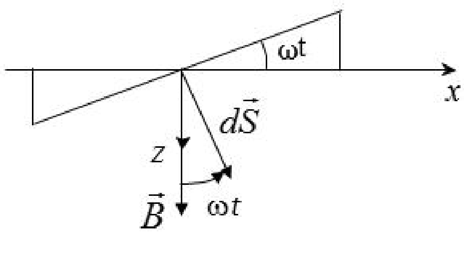
El sentido de la intensidad es el mismo que el del campo motriz.

$$RI_{ind} = \varepsilon = \oint_{\Gamma} \vec{\xi}_m \cdot d\vec{l} < 0$$

Desde el punto de vista físico también se puede obtener siguiendo el siguiente razonamiento: El flujo que atraviesa el campo aumenta con el tiempo. La espira tiende a oponerse a ese cambio de manera que crea una corriente inducida que produce un campo de inducción, que a su vez, frena el aumento del flujo. De esta manera el aumento no es tan grande, así se observa en el dibujo como se pasa de 6 a 5 líneas gracias al campo de inducción.



2) Observamos la espira desde arriba:

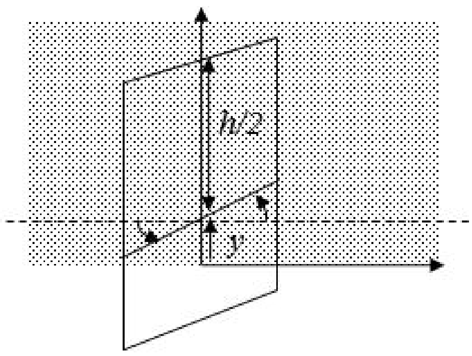


$$\phi = \int B\vec{k} \cdot [\cos(\omega t)\vec{k} + \mathrm{sen}(\omega t)\vec{i}]\, dS = BS\cos\omega t$$

$$\phi = Bb\frac{h}{2}\cos\omega t \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = Bb\frac{h}{2}\omega\ sen\omega t$$

El valor de la intensidad inducida cuando empieza a girar ($\omega\, t = 0$) es:

$$i_{ind} = \frac{\varepsilon}{R} = 0\ A$$



3) El valor del flujo es el mismo que en el apartado anterior con la diferencia ahora que la superficie cambia al aumentar y.

$$\phi = BS\cos\omega t = Bb\left(\frac{h}{2} + y(t)\right)\cos\omega t$$

Derivamos:

$$\frac{d\phi}{dt} = Bb\left[v\cos\omega t - (\frac{h}{2} + y(t))\omega\ sen\omega t\right]$$

Y con $y = vt$:

$$i_{ind} = \frac{-Bb\left[v\cos\omega t - (\frac{h}{2} + vt)\omega\ sen\omega t\right]}{R} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad i_{ind} = \frac{-2.4\ \cos 4t + (0.48 + 9.6t)sen\, 4t}{10}$$

PROBLEMA RESUELTO 9.4

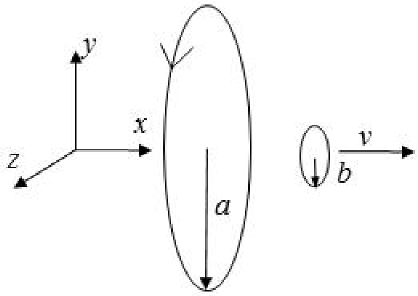
En la figura se muestran dos espiras circulares, una de radio a y otra de radio b, con el mismo eje (eje Ox), colocadas ambas de forma paralela al plano $x = 0$.

La espira de radio a se halla recorrida por una intensidad I constante en el sentido dibujado en la figura. Esta espira se encuentra en reposo. Por su parte la espira de radio b se mueve con velocidad uniforme $\vec{v} = v\vec{i}$ y tiene una resistencia eléctrica R.

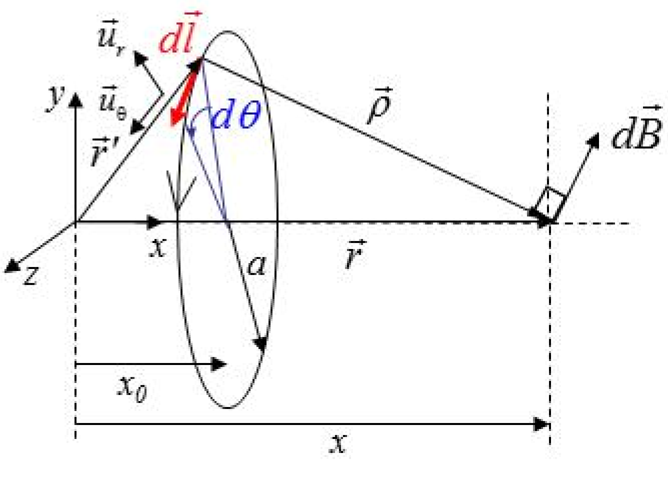
1. Deducir la expresión del vector inducción magnética creado por la espira de radio a en un punto de su eje.

2. Calcular la intensidad inducida en la espira de radio b indicando cuál es su sentido de giro. (Supóngase que el vector inducción magnética es el mismo en todos los puntos del interior de la espira de radio b dado que $b << a$) e igual al valor en su centro.

3. Representar gráficamente la intensidad obtenida en el apartado 2 en función de la distancia que separa las dos espiras.



SOLUCIÓN 9.4



Un diferencial de campo magnético producido por un $d\vec{l}$ de la espira es: $d\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi} d\vec{l} \times \dfrac{\vec{\rho}}{\rho^3}$, donde: $\vec{\rho} = \vec{r} - \vec{r}'$. Por simetría sólo queda campo en la dirección del eje x: $\vec{B} = B\vec{i}$

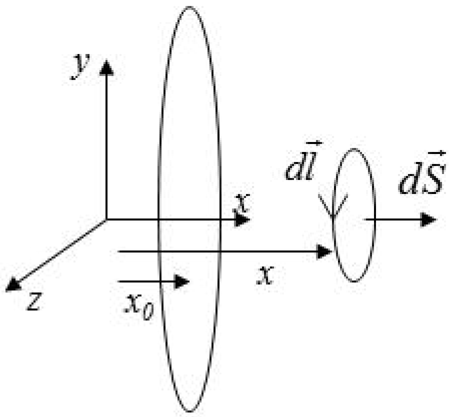
En cilíndricas, siendo $x = x_0$ la posición de la espira de radio a en el eje Ox:

$$\vec{\rho} = (x - x_0)\vec{i} - a\vec{u}_r; \quad d\vec{l} = a\, d\theta \vec{u}_\theta$$

La componente $\vec{i}$ del campo es:

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{a^2 d\theta}{\rho^3} \rightarrow B = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{a^2 d\theta}{\rho^3} = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{a^2}{\left((x-x_0)^2+a^2\right)^{3/2}}$$

2) Calculamos el flujo a través de la espira pequeña, suponiendo que esta se halla en la posición x del eje Ox. El sentido positivo para el $d\vec{S}$ y el $d\vec{l}$ aparece en la figura:



$$\phi = \int BdS \approx \int \frac{\mu_0 I}{2}\frac{a^2}{\left((x-x_0)^2+a^2\right)^{3/2}}dS = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{\pi b^2 a^2}{\left((x-x_0)^2+a^2\right)^{3/2}}$$

Derivamos para obtener la fuerza electromotriz inducida aplicando la regla de la cadena:

$$\varepsilon = \oint \vec{\xi}_m \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\mu_0 I \pi b^2 a^2}{2}\frac{d}{dx}\frac{1}{\left((x-x_0)^2+a^2\right)^{3/2}}\frac{dx}{dt}$$

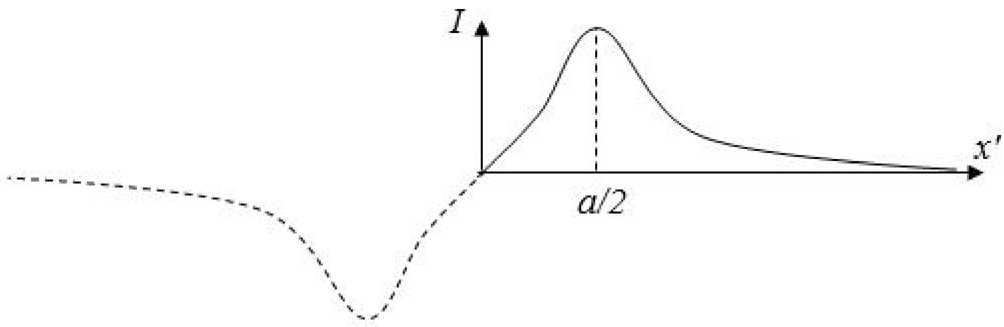
$$\varepsilon = \frac{3\mu_0 I \pi b^2 a^2}{4}\frac{2(x-x_0)v}{\left((x-x_0)^2+a^2\right)^{5/2}}$$

Aplicando la ley de Ohm obtenemos la intensidad inducida ($x - x_0 = x'$):

$$I = \frac{3\mu_0 I \pi b^2 a^2}{4R}\frac{2(x-x_0)v}{\left((x-x_0)^2+a^2\right)^{5/2}} = K\frac{x'}{\left(x'^2+a^2\right)^{5/2}}$$

La f.e.m. es positiva, por tanto, el campo motriz y el $d\vec{l}$ tienen el mismo sentido. Esto indica que la intensidad gira con el $d\vec{l}$. Físicamente, la espira pequeña pierde flujo al alejarse de la espira grande, la intensidad inducida en esta espira pequeña intenta compensar la pérdida produciendo una intensidad en el mismo sentido que la que existe en la espira grande.

3) La intensidad en función de la distancia presenta la siguiente gráfica:

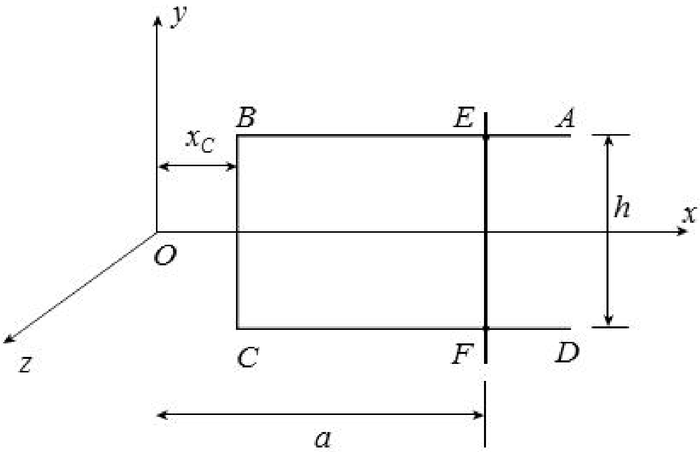


Se hace 0 cuando la distancia x' entre las dos espiras es nula y tiende a cero también cuando la distancia tiende a infinito. Además presenta un máximo en $x' = a/2$.

$$\frac{dI}{dx'} = K\frac{\left(x'^2+a^2\right)^{5/2} - x'\frac{5}{2}\left(x'^2+a^2\right)^{3/2}2x}{\left(x'^2+a^2\right)^5} = 0 \rightarrow x' = a/2$$

PROBLEMA RESUELTO 9.5

El conductor $ABCD$, en forma de U, está contenido en el plano XOY, se mueve con velocidad $\vec{v} = v_0\vec{i}$ constante y apoya sobre el conductor fijo EF, con contacto eléctrico en ambos puntos. Los dos conductores están fabricados con alambre calibrado de sección recta A y resistividad ρ_c.



En el instante inicial, $t_0 = 0$, BC está sobre el eje OY (posición x de BC: $x_C = 0$).

En el espacio donde están los conductores, existe un campo magnético de intensidad $\vec{B} = -B_0 e^{(x_C/a)}\vec{k}$ (B_0 constante positiva y a es la cota indicada en la figura).

Calcular, para cualquier instante t tal que $x_c < a$ y para el circuito $BCFE$:

1) Flujo magnético que atraviesa el circuito.

2) F.e.m. inducida en el circuito.

3) Resistencia del circuito.

4) Intensidad inducida, indicando su sentido.

5) Valores máximo y mínimo de la intensidad en el intervalo (t_0, t^*) siendo t^* el instante en el que $x_C = a$.

SOLUCIÓN 9.5

1) Al ser el campo de dirección constante, el flujo es simplemente: $\phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$.

La posición de la varilla BC varía con el tiempo: $x_C = v_o t$.

La superficie $ABCD$ varía con el tiempo: $S = h(a - v_o t)$.

El flujo resultante tomando positivo para el flujo el sentido $\vec{k}$ es: $\phi = -B_0 h(a - v_o t)e^{\frac{v_0 t}{a}}$.

Esta expresión es válida para todo instante tal que BC no alcance EF, por tanto:

$$t \in (0, t^*) \text{ siendo } t^* = a/v_0$$

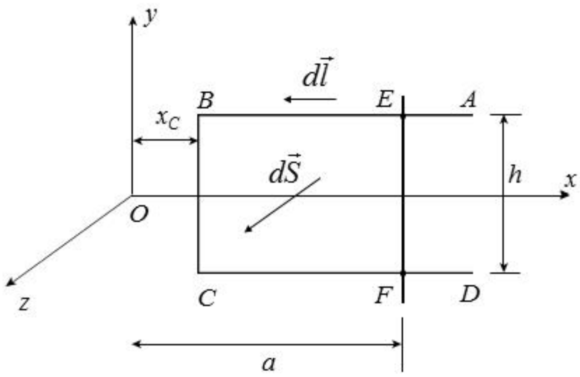
2) La f.e.m. inducida es:

$$\oint \vec{\xi} \cdot d\vec{l} = \varepsilon_i = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{B_0 h v_0^2 t}{a} e^{\frac{v_0 t}{a}}$$

Donde se ha tomado como sentido positivo de la circulación el antihorario al considerar positivo el sentido $\vec{k}$ para el flujo.

Como la f.e.m. ha salido negativa el sentido de la intensidad es el opuesto al sentido antihorario.

3) La longitud del circuito varía con el tiempo:



$$L = 2(a - x_C) + 2hL = 2(a - v_0 t) + 2h$$

La resistencia es:

$$R = \frac{\rho_c L}{A} = \frac{\rho_c 2(a - v_0 t + h)}{A}$$

4) La intensidad inducida por la ley de Ohm es:

$$I_i = \frac{\varepsilon_i}{R} = -\frac{B_0 h v_0^2 t e^{\frac{v_0 t}{a}} A}{\rho_c 2a(a - v_0 t + h)}$$

Si aplicamos la ley de Lenz tenemos que si t aumenta, el flujo entrante es mayor a pesar de que el área del circuito disminuye. Esto implica que I_i debe producir una disminución de flujo entrante, con lo cual el sentido de I_i es $BCFE$.

5) En la intensidad inducida, el numerador aumenta con el tiempo, mientras que el denominador disminuye. Por tanto, el valor mínimo en valor absoluto se produce para $t = 0$ y el máximo en valor absoluto para $t = t^*$.

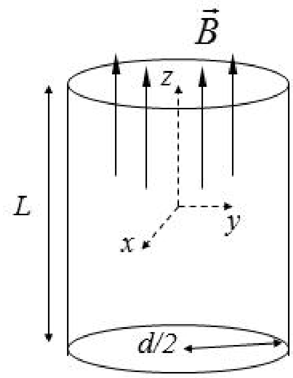
El valor mínimo en valor absoluto es: $|I_i| = 0$

El valor máximo en valor absoluto es:

$$|I_i| = \frac{B_0 v_0 e A}{\rho_c 2}$$

PROBLEMA RESUELTO 9.6

Se dispone de un tubo metálico cilíndrico de radio $d/2$ y longitud L muy grande comparada con el radio ($R << L$). El eje del cilindro coincide con el eje Oz. El espesor del tubo e es muy pequeño comparado con su radio. La resistividad del cilindro es ϱ_c. En el hueco interior se tiene un campo magnético de valor: $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t)\vec{k}$.



Se pide:

1) La intensidad inducida en el cilindro indicando cuál es su sentido de circulación.

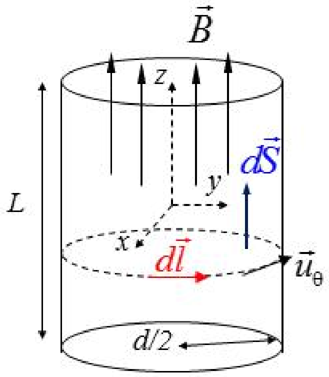
2) El campo eléctrico en el interior del tubo.

3) El campo magnético producido por dicha intensidad inducida.

4) Represéntense en función del tiempo los dos campos magnéticos.

SOLUCIÓN 9.6

Aplicamos la ley de Faraday a una sección circular del cilindro. El convenio de signos positivos para el $d\vec{S}$ y el $d\vec{l}$ se muestra en la figura.



Calculamos el flujo a través del círculo:

$$\phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = B_0 \cos(\omega t) S = \frac{\pi d^2}{4} B_0 \cos(\omega t)$$

Y calculamos la fuerza electromotriz inducida en la circunferencia perimetral:

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = \frac{\omega \pi d^2}{4} B_0 \sin(\omega t)$$

Para una superficie de radio r interior al tubo tendríamos que el campo eléctrico en el interior es:

$$E 2\pi r = \omega B_0 \sin(\omega t) \pi r^2 \rightarrow \vec{E}(r) = \frac{\omega B_0 r}{2} \sin(\omega t) \vec{u}_\theta$$

Sólo podríamos calcular campo electromotor, no el campo electrostático pues su circulación es cero.

Aplicamos la ley de Ohm a un conductor de sección transversal L por e con forma cilíndrica, de manera que la resistencia es: $R = \rho_c \dfrac{\pi d}{Le}$. La intensidad fluye al estilo de un solenoide.

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\omega B_0 \sin(\omega t)\pi d^2/4}{\rho_c \pi d/Le} = \frac{\omega B_0 Le \sin(\omega t) d}{4\rho_c} = \frac{\omega B_0 Lde\sigma_c \sin(\omega t)}{4}$$

Dada la simetría que existe en el sistema, no hay ninguna diferencia de potencial entre ningún par de puntos a y b de una circunferencia contenida en el plano xy, por tanto se tiene que no hay campo electrostático.

$$\varepsilon = RI \rightarrow \varepsilon_{ab} = R_{ab} I$$

$$\int_a^b \vec{E}_m \cdot d\vec{l} + \int_a^b \vec{E}_e \cdot d\vec{l} = R_{ab} I \rightarrow \varepsilon_{ab} - (V_b - V_a) = R_{ab} I$$

Por tanto: $(V_b - V_a) = 0$

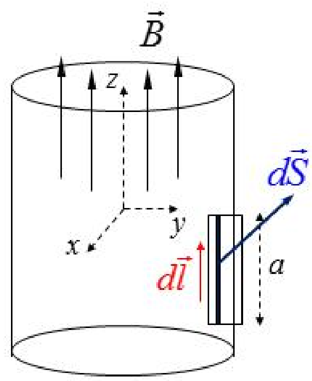
Se supone que el campo magnético que nos dan es producido por una intensidad I_{dato} tal que: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{dato}$

Para calcular el campo magnético creado por la intensidad inducida aplicamos la ley de Ampère generalizada a una curva análoga a la que se utiliza para calcular el campo de un solenoide largo:

$$\oint \vec{H}_i \cdot d\vec{l} = I + \int \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \rightarrow \oint \vec{B}_i \cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \frac{1}{c^2} \int \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint \vec{H}_i \cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \frac{1}{c^2} \int \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \frac{1}{\sigma_c c^2} \int \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \cdot d\vec{S} =$$

$$= \mu_0 I + \frac{1}{c^2} \int \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \frac{1}{\sigma_c c^2} \frac{\partial I}{\partial t}$$



$$\vec{B}_i = B_i \vec{k}; \quad d\vec{S} = a\, d\, r\, \vec{u}_\theta$$

Si la intensidad I calculada antes pasaba por una longitud L, por una longitud a pasará: $I_a = \dfrac{aI}{L}$.

$$B_i a = \mu_0 I_a + \frac{1}{c^2} \int_r^{d/2} \frac{\omega^2 B_0 r}{2} \cos(\omega\, t) \cdot a dr + \frac{1}{\sigma_c c^2} \frac{\partial I_a}{\partial t}$$

$$B_i a = \mu_0 \frac{aI}{L} + \frac{a\omega^2 B_0}{4c^2} \cos(\omega\, t)(d^2/4 - r^2) + \frac{1}{\sigma_c c^2} \frac{a}{L} \frac{\partial I}{\partial t}$$

$$B_i(r) = \omega B_0\left(\frac{\mu_0 de\sigma_c \sin(\omega t)}{4} + \frac{\omega}{4c^2}\cos(\omega t)(d^2/4 - r^2) + \frac{\omega de \cos(\omega t)}{4c^2}\right)$$

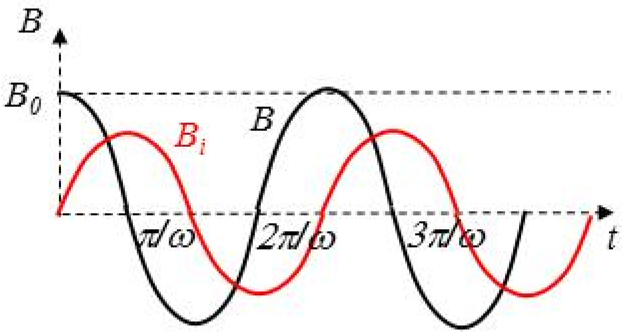
$\sigma_c \sim 10^7 s\, m^{-1}$; $\quad \mu_0 = 4\pi 10^{-7} m\, kg\, s^{-2} A^{-2}$; $\quad c \sim 3 \cdot 10^8 m/s$

$de \sim 10^{-5} m$; $\quad d^2 \sim 10^{-4} m$; $\quad \omega \sim 10^5 Hz\, (ondas\, de\, radio)$

Los términos debidos a la corriente de desplazamiento son despreciables:

$$B_i \approx \frac{\omega B_0 \mu_0 de\sigma_c \sin(\omega t)}{4}$$

El cociente entre la amplitud del campo inducido y del inductor es:



$$\frac{(B_i)_{\text{máx}}}{B_0} = \frac{\omega \mu_0 de\sigma_c}{4} \approx \omega de$$

Este campo inducido daría lugar a otro campo eléctrico, de manera que el campo eléctrico y magnético total es la suma de todos los campos calculados recursivamente.

PROBLEMA RESUELTO 9.7

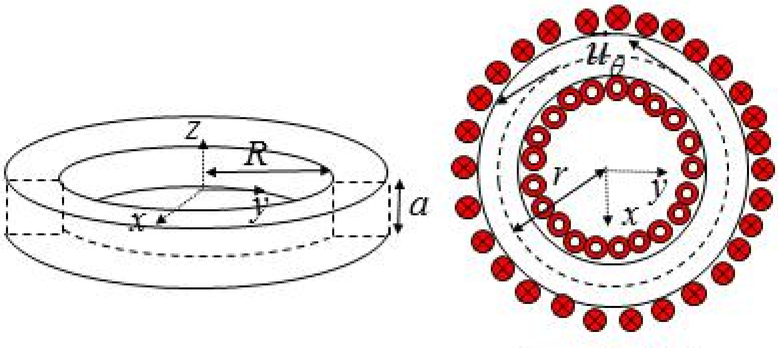
Se tiene un toroide de sección cuadrada de lado a. Su radio menor es R y su eje de simetría es el eje Oz. Sobre él se han arrollado de forma uniforme N espiras por las que circula una intensidad I.

Se pide:

1. Coeficiente de autoinducción del toroide.
2. Energía magnética del sistema.
3. Variación de la energía magnética que se produce en el sistema si dentro de introduce un material magnético lineal de permeabilidad magnética μ.

SOLUCIÓN 9.7

1) Aplicamos el teorema de Ampère a una circunferencia de radio r y centro el eje Oz.



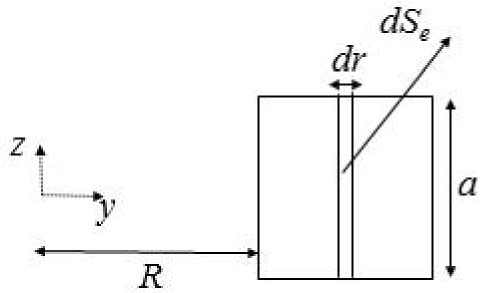
Sección XY

El diferencial de superficie que encierra la curva es positivo en el sentido del eje $\vec{k}$: $d\vec{S} = dS\vec{k}$ con lo cual el diferencial de longitud de la curva es positivo en el sentido $\vec{u}_\theta$: $d\vec{l} = Rd\theta\vec{u}_\theta$ siendo $\vec{u}_\theta$ el versor azimutal orientado como indica la figura.

Para $\vec{B} = B\vec{u}_\theta$ se tiene:

$$B2\pi r = \mu_0 NI \to B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

Calculamos el flujo producido por este campo a través de una espira:



$$\phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}_e = \int_R^{R+a} B a dr = \int_R^{R+a} \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} a dr = \frac{\mu_0 N I a}{2\pi} \ln \frac{R+a}{R}$$

Calculamos el coeficiente de autoinducción obteniendo el flujo por todo el solenoide (N espiras) y dividiendo por la intensidad:

$$L = \frac{N\phi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi} \ln \frac{R+a}{R}$$

2) La energía magnética del sistema la obtenemos aplicando la fórmula:

$$U_m = (1/2)LI^2 = \frac{\mu_0 N^2 a I^2}{4\pi} \ln \frac{R+a}{R}$$

Esta energía se puede obtener también a partir del campo magnético en el toroide:

$$U_m = \frac{1}{2} \int \vec{B} \cdot \vec{H} dv = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 \, dv = \frac{\mu_0 N^2 I^2}{8\pi^2} \int_R^{R+a} \frac{dv}{r}$$

Tomamos como diferencial de volumen: $dv = 2\pi \, r \, a \, dr$ (diferencial de superficie de la espira dS_e girado $2\pi r$)

$$U_m = \frac{\mu_0 N^2 I^2}{8\pi^2} \int_R^{R+a} \frac{2\pi r a dr}{r^2} = \frac{\mu_0 N^2 a I^2}{4\pi} \ln \frac{R+a}{R}$$

3) Para un medio en la misma circunferencia Γ: $\displaystyle\oint_\Gamma \vec{H} \cdot d\vec{l} = H 2\pi r = NI \quad \rightarrow \quad H = \frac{NI}{2\pi r}$

$$U_m = \frac{1}{2} \int \vec{B} \cdot \vec{H} dv = \frac{1}{2} \int H^2 dv = \frac{\mu N^2 a I^2}{4\pi} \ln \frac{R+a}{R}$$

$$\Delta U_m = \frac{(\mu - \mu_0) N^2 a I^2}{4\pi} \ln \frac{R+a}{R}$$