

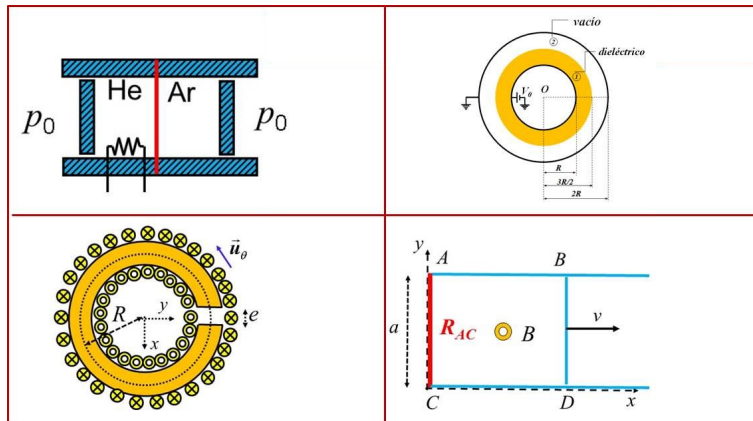


POLITÉCNICA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS  
NAVALES

# FÍSICA II

## PRÁCTICAS DE LABORATORIO Electromagnetismo





POLITÉCNICA

# ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS NAVALES



## PRÁCTICA 1 OSCILOSCOPIO Y GENERADOR DE SEÑAL

*Jesús GÓMEZ GOÑI*

## ÍNDICE OSCILOSCOPIO Y GENERADOR DE SEÑAL

---

<b>1. Osciloscopio y generador de señal</b>	<b>1</b>
1.1. Objetivo de la práctica . . . . .	1
1.2. Fundamentos teóricos . . . . .	1
1.2.1. Características del osciloscopio . . . . .	1
1.2.2. El tubo de rayos catódicos (TRC) . . . . .	1
1.2.3. Funcionamiento elemental de un osciloscopio . . . . .	5
1.2.4. Sincronización de la base de tiempo . . . . .	8
1.2.5. Magnitudes más importantes usadas en las especificaciones de un osciloscopio . . . . .	8
1.2.6. Descripción del osciloscopio utilizado en el Laboratorio . . . . .	9
1.2.7. Instrucciones de operación . . . . .	13
1.2.8. Generador de funciones . . . . .	13
1.2.9. Composición de m.a.s. perpendiculares: figuras de Lissajous . . . . .	14
1.2.10. Circuito RC . . . . .	18
1.3. DESARROLLO DE LA PRACTICA . . . . .	21
1.3.1. Material necesario . . . . .	21
1.3.2. Medida de una señal alterna de forma variable . . . . .	21
1.3.3. Medida de las figuras de Lissajous . . . . .	21
1.3.4. Medida de la constante de tiempo en un circuito RC . . . . .	21
1.4. Informe del alumno . . . . .	22
1.5. Bibliografía . . . . .	22

# 1

## Osciloscopio y generador de señal

---

### 1.1. Objetivo de la práctica

El objetivo de esta práctica consiste en aprender a manejar el osciloscopio y ser capaz de visualizar distintas formas de señal, así como medir sus propiedades fundamentales. Igualmente visualizar las figuras de Lissajous, obtenidas mediante la composición de dos oscilaciones perpendiculares.

### 1.2. Fundamentos teóricos

#### 1.2.1. Características del osciloscopio

Un osciloscopio es un instrumento de medida que permite representar señales eléctricas en función del tiempo. Aunque, en principio, el osciloscopio sólo mide tensión eléctrica en función del tiempo, es posible visualizar también intensidades de corriente, midiendo la tensión en bornes de una resistencia, de modo que la tensión  $V$ , cumple la ley de Ohm ( $V = I R$ ).

También podemos utilizar el osciloscopio para medir la relación entre dos señales eléctricas (como por ejemplo tensión e intensidad) o representar simultáneamente dos señales en función del tiempo, utilizando los dos canales con los que habitualmente cuenta.

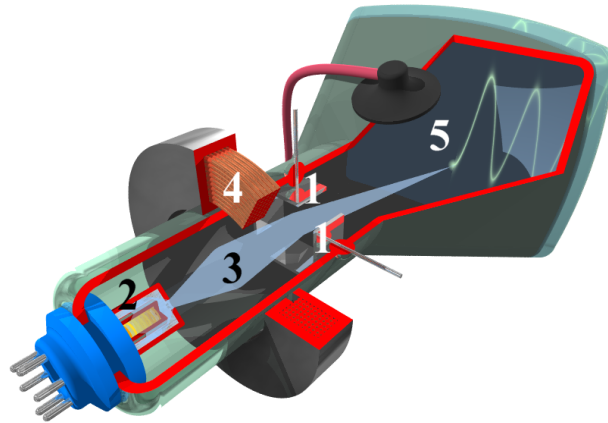
#### 1.2.2. El tubo de rayos catódicos (TRC)

Los *rayos catódicos*, fueron vistos por vez primera por el físico alemán, Julius Plücker en 1858. Estos rayos se producían en una lámpara de vacío en la que estaba trabajando. En 1897, el físico inglés Joseph John Thomson, estudió su comportamiento y llegó a la conclusión de que se trataba de partículas cargadas, a las que posteriormente se bautizó con el nombre de *electrones*.

Un tubo de rayos catódicos cuenta con un cañón de electrones, un sistema deflector y una pantalla fosforescente capaz de transformar a energía luminosa la energía depositada por los electrones en la misma. Todo este conjunto está dentro de un tubo, generalmente de vidrio, en el interior del cual se ha hecho el vacío.

En la figura 1.1 podemos ver el esquema de un tubo de rayos catódicos, con sus diferentes partes:

1. Electrodo de deflexión
2. Cañón de electrones
3. Haz de electrones
4. Bobina de enfoque
5. Pantalla fosforescente



**Figura 1.1:** Esquema de un osciloscopio

El cañón de electrones está formado por un filamento incandescente que calienta un cátodo (conductor a potencial negativo) generalmente cilíndrico que es capaz de emitir electrones. Estos electrones son acelerados y focalizados mediante una rejilla y un ánodo (conductor a potencial positivo). El ánodo tiene un orificio que hace que los electrones salgan aún más colimados y así el haz tenga una mayor intensidad. Las tensiones entre cátodo y ánodo pueden ser del orden de 1000 V, por lo que los electrones salen a una gran velocidad.

La rejilla de control también suele ser cilíndrica y envuelve parcialmente al cátodo. Con la rejilla se puede controlar la intensidad del haz de electrones.

El sistema de deflexión hace que el haz de electrones incida sobre un punto concreto de la pantalla. Normalmente consta de dos condensadores planos que forman un ángulo de  $90^\circ$ .

Al incidir los electrones sobre la pantalla fosforescente se produce la luz. La pantalla está formada por un depósito de sustancia fosforescente semitransparente con un cierto tiempo de persistencia, permitiendo así que la imagen no aparezca ni confusa ni solapada.

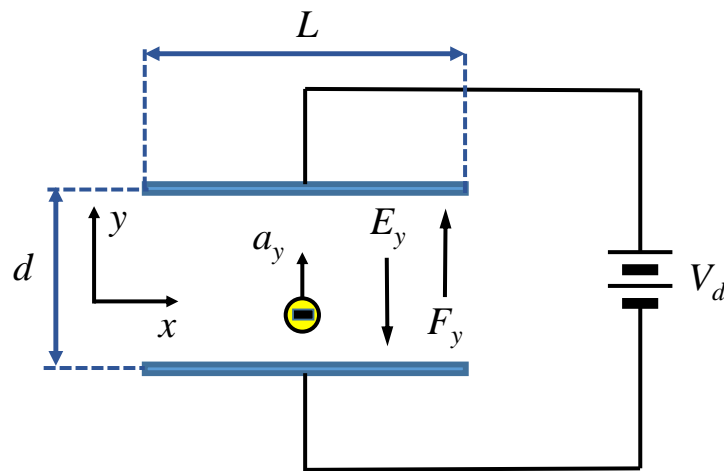
Para poder cerrar el circuito eléctrico y que la pantalla no se quede cargada, existe un revestimiento interno de la pantalla fosforescente que recoge los electrones secundarios producidos por el impacto del haz a grandes velocidades.

El cálculo de la desviación que sufre el haz de electrones debido a las placas deflectoras puede realizarse según el siguiente estudio.

Llamemos  $V$  a la d.d.p. total aceleradora del ánodo respecto al cátodo (si hay más de un ánodo será  $V = V_A + V_B + \dots + V_n$ ),  $m$  a la masa y  $e$  a la carga del electrón. La velocidad con que el electrón emerge del ánodo ( $v_x$ ) será:

$$\frac{1}{2} m v_x^2 = eV \quad (1.1)$$

Cuando el haz pasa entre dos láminas paralelas sometidas a una d.d.p.  $V$  y separadas una distancia  $d$  (Fig. 1.2) sufrirá una desviación debida a un campo  $E_y = V_d/d$  que produce una fuerza  $F_y = eE_y = eV_d/d$  cuyo sentido será contrario al del campo (Fig.1.2) por ser la carga del electrón negativa.



**Figura 1.2:** Efecto del campo eléctrico deflector sobre el haz de electrones

Atendiendo a lo anterior el haz de electrones estará sometido a una aceleración constante de valor:

$$a_y = \frac{e}{m} \frac{V_d}{d} \quad (1.2)$$

de manera que en el trayecto  $L$  la velocidad de desviación en el eje  $Y$  para un tiempo  $t$ , será:

$$v_y = \frac{e}{m} \frac{V_d}{d} t \quad (1.3)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones 1.2 y 1.3:

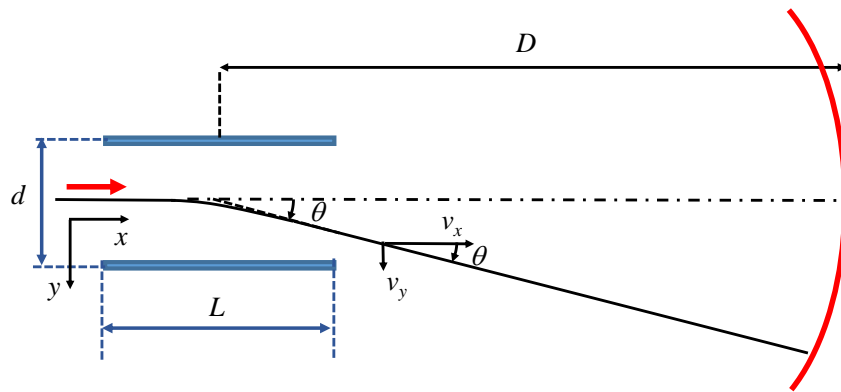
$$\begin{aligned} x &= v_x t \\ y &= \frac{1}{2} \frac{e V_d}{m d} t^2 \end{aligned} \quad (1.4)$$

De modo que despejando  $t$  en ambas ecuaciones, obtenemos:

$$y = \frac{1}{2v_x^2} \frac{e V_d}{m d} x^2 \quad (1.5)$$

teniendo de nuevo en cuenta la ecuación 1.2, obtenemos la ecuación de la trayectoria del electrón:

$$y = \frac{1}{4d} \frac{V_d}{V} x^2 \quad (1.6)$$



**Figura 1.3:** Trayectoria de los electrones

Considerando que las laminas tienen una longitud  $L$ , a la salida de ellas la velocidad del haz electrónico será:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (1.7)$$

que según indica la Figura 1.3 forma un ángulo  $\theta$  con el eje  $x$ , que se calculará a través de:

$$\tan \theta = \frac{v_y}{v_x} \quad (1.8)$$

donde  $v_y$  en ese momento es:

$$v_y = \frac{e V_d}{m d} t = \frac{e V_d}{m d} \frac{L}{v_x} \quad (1.9)$$

ya que el tiempo que el electrón permanece bajo las placas será  $t = L/v_x$

Por lo tanto:

$$\tan \theta = \frac{1}{v_x} \frac{e V_d L}{m d v_x} = \frac{L V_d}{2d V} \quad (1.10)$$

En la fórmula anterior se puede observar que el ángulo de desviación aumenta con  $V_d$  o al reducir el potencial acelerador  $V$ . Asimismo, para potenciales  $V_d$  y  $V$  fijos, el ángulo de desviación,  $\theta$ , es directamente proporcional a la longitud de las placas,  $L$ , e inversamente a la distancia que las separa  $d$ . Una vez que el electrón sale de las placas su movimiento será rectilíneo hasta la pantalla, donde incide produciendo un impacto luminoso a una distancia  $y$  de su centro, dada aproximadamente por:

$$y = D \tan \theta \quad (1.11)$$

siendo  $D$  la distancia que hay desde el centro de las placas a la pantalla.

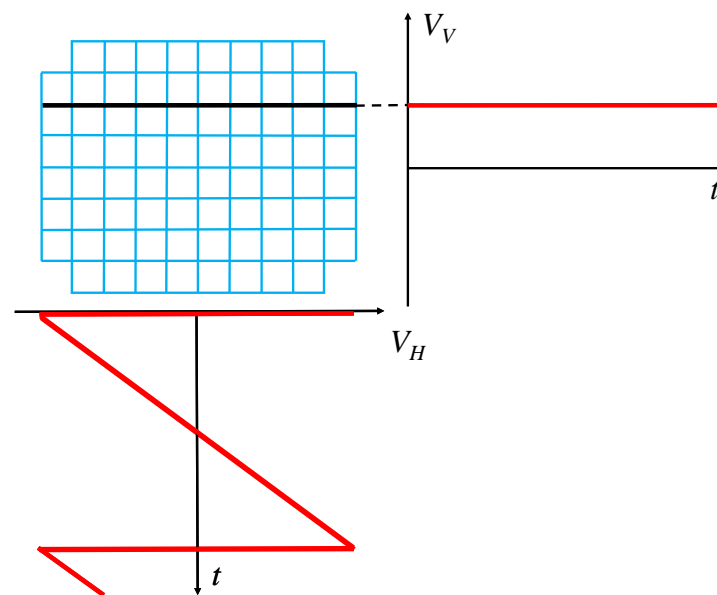
### 1.2.3. Funcionamiento elemental de un osciloscopio

En el osciloscopio podemos visualizar señales dependientes del tiempo, como señales sinusoidales, cuadradas, triangulares, etc, dependiendo del generador de señales que utilicemos.

Para poder hacer esta visualización utilizamos una *base de tiempo*, es decir, un sistema que produzca un movimiento horizontal del haz, que será, por tanto, el eje del tiempo. Este recorrido se hace a velocidad constante, por lo que existe una relación entre el espacio recorrido y el tiempo, que nos permite medir el tiempo transcurrido entre dos puntos de la señal representada en el osciloscopio, sin más que medir su distancia horizontal.

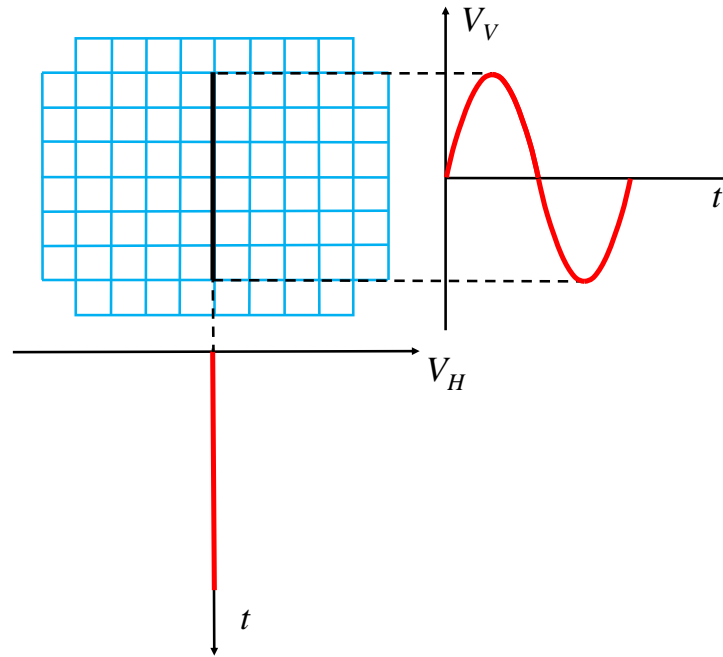
En general, la base de tiempo genera una tensión de salida que desplaza el haz a lo ancho de la pantalla del tubo siguiendo una línea horizontal y que luego la hace retroceder rápidamente al punto de partida. Dependiendo de la velocidad de desplazamiento, veremos el movimiento de un punto más o menos rápido de izquierda a derecha o una línea continua si dicha velocidad de desplazamiento es superior al umbral de persistencia del ojo humano. Esta acción de barrido se realiza mediante la aplicación a las placas deflectoras horizontales de una tensión en diente de sierra (ver Fig. 1.4). Una señal de esta forma va aumentando de valor de manera lineal, hasta alcanzar el valor de cresta y disminuir rápidamente hasta el valor cero.

En las siguientes figuras, podemos ver el efecto que se produce al introducir distintas señales en las placas verticales y horizontales.

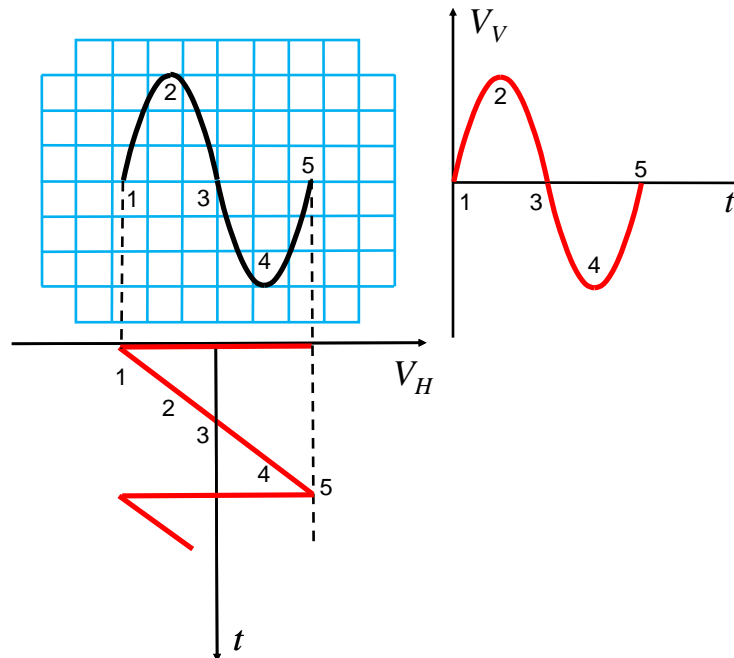


**Figura 1.4:** Placas verticales: señal continua. Placas horizontales: diente de sierra. En la pantalla se obtiene una traza desplazada en el sentido vertical de acuerdo con el nivel de tensión continua aplicado

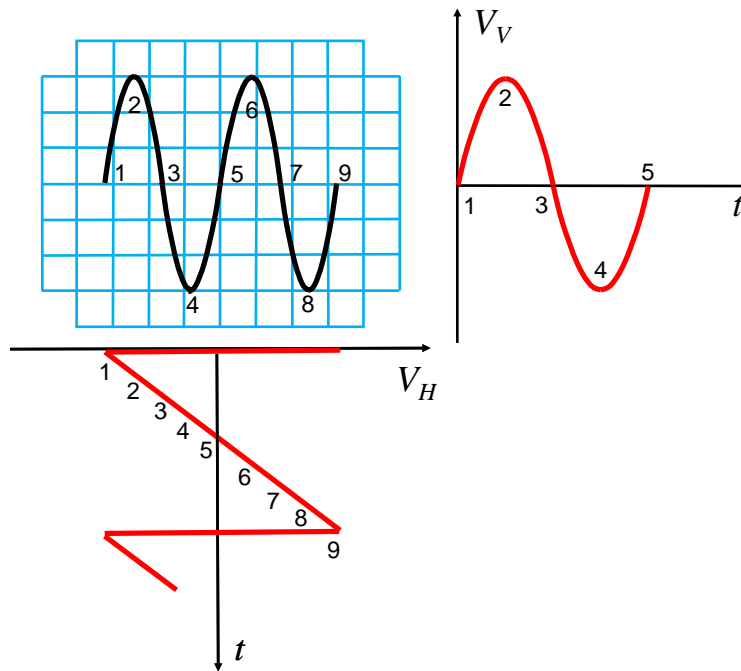




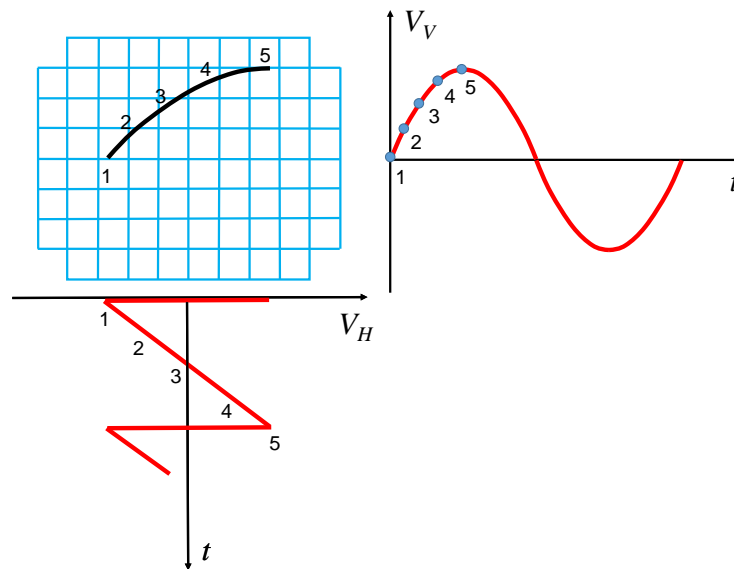
**Figura 1.5:** Placas verticales: señal sinusoidal. Placas horizontales: tensión nula. Aparece en la pantalla un segmento centrado de tamaño proporcional al valor de pico a pico de la señal sinusoidal.



**Figura 1.6:** Placas verticales: Señal sinusoidal. Placas horizontales: Diente de sierra. La frecuencia de barrido (de la señal en diente de sierra) es igual a la frecuencia de la señal sinusoidal.



**Figura 1.7:** Placas verticales: Señal sinusoidal. Placas horizontales: Diente de sierra. La frecuencia de barrido (de la señal en diente de sierra) es menor que la de la señal sinusoidal.



**Figura 1.8:** Placas verticales: Señal sinusoidal. Placas horizontales: Diente de sierra. La frecuencia de barrido (de la señal en diente de sierra) es mayor que la de la señal sinusoidal.

### 1.2.4. Sincronización de la base de tiempo

Para que la imagen que aparece en pantalla sea una imagen fija y no se desplace es imprescindible que la frecuencia de barrido sea igual a la de la señal. Si la frecuencia de onda en diente de sierra fuera mayor que la frecuencia de la señal, ésta se desplazaría en la pantalla de derecha a izquierda.

Si la imagen se desplazara de izquierda a derecha la frecuencia de la onda en diente de sierra sería demasiado baja. Por consiguiente se requiere que el circuito disponga de algún medio para sincronizar ambas frecuencias de entrada, este papel lo juega el circuito de sincronismo que bien puede utilizar una señal externa (sincronismo externo) o una señal procedente de la que se quiere visualizar, consiguiendo en cualquiera de los dos casos que el barrido se inicie en el punto de la señal que se quiere visualizar.

### 1.2.5. Magnitudes más importantes usadas en las especificaciones de un osciloscopio

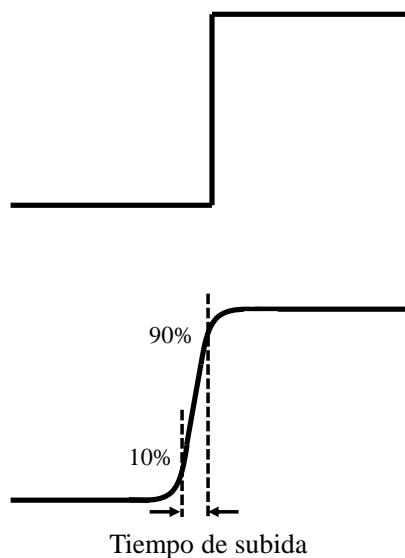


Figura 1.9: Tiempo de subida

- *Sensibilidad vertical y horizontal.*- Es el valor de la tensión que aplicada a la entrada produce una deflexión del haz de 1cm o 1 división. Viene dada en V/cm ó en V/div.
- *Ancho de banda de un canal.*- Margen de frecuencias para las cuales la sensibilidad es constante en un margen de 3 dB de su valor nominal. Suele venir dada en Hz o MHz, (entender por canal cada entrada *y* al osciloscopio).
- *Tiempo de subida.*- Intervalo de tiempo entre los instantes en que la señal alcanza el 10 % y el 90 % de su valor de pico, al aplicar, a la entrada una señal escalón ideal (ver figura 1.9). Suele venir dado en  $\mu$ s (microsegundo) o ns (nanosegundo).

- *Impedancia de entrada.*- Cualquiera de las entradas del osciloscopio presenta una cierta impedancia que en general está compuesta de una resistencia en paralelo con una capacidad.
- *Tiempo de barrido.*- Es el tiempo que tarda el haz en recorrer sobre la pantalla, a lo largo del eje horizontal una distancia de 1cm o una división.

### 1.2.6. Descripción del osciloscopio utilizado en el Laboratorio

Vamos a describir el osciloscopio utilizado en el Laboratorio, que es el modelo de marca Tektronix 2205, cuya imagen se puede ver en la figura 1.10.



Figura 1.10: Osciloscopio utilizado en el Laboratorio (Tektronix 2205)

En la figura, se puede apreciar a la izquierda, la pantalla del osciloscopio, que tiene sobreimpresa una grátula dividida en 8 divisiones verticales y 10 horizontales. Además, cada división está dividida en 5 subdivisiones que equivalen a 0,2 de división. Cuando en los controles del osciloscopio hace referencia a las divisiones, se refiere a las divisiones grandes, no a las subdivisiones.

Podemos ver que en el osciloscopio hay 4 zonas delimitadas: La zona de la izquierda en la que tenemos el mando de encendido y algunos controles sobre el haz, a continuación VERTICAL, que controla las entradas a ambos canales, después HORIZONTAL, que controla la base de tiempos y luego TRIGGER, que controla el disparador.

#### Controles del haz

##### 1. POWER ON

Interruptor de encendido

##### 2. TRACE ROTATION

El magnetismo terrestre puede ocasionar inclinación en el trazo horizontal dependiendo de la ubicación del instrumento. Este mando contrarresta este efecto. El alumno no debe tocar dicho mando.

### 3. FOCUS (enfoco)

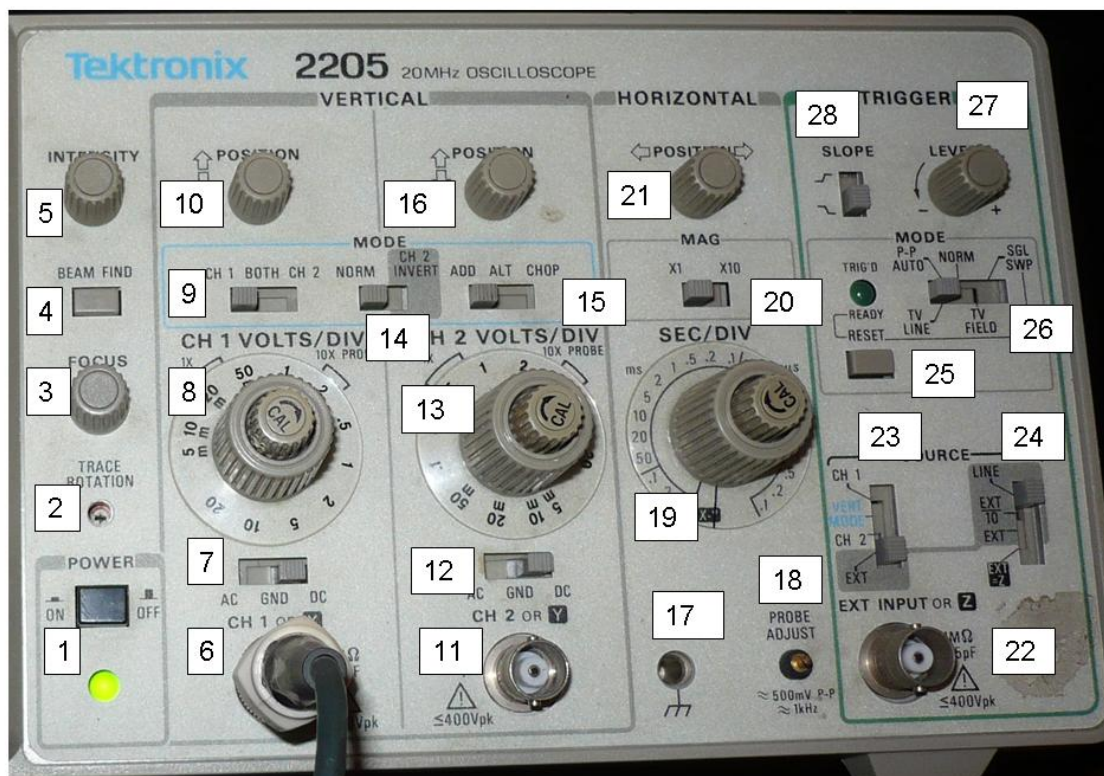
Ajusta el voltaje de la rejilla de enfoco para mayor claridad del trazo.

### 4. BEAM FIND

Sirve para encontrar el haz, si éste está fuera de escala.

### 5. INTENSITY (ajuste de intensidad luminosa)

Ajusta el brillo del trazo en la pantalla. Al girar el mando a la derecha, el brillo del trazo se incrementa y hacia la izquierda decrece.



**Figura 1.11:** Mandos de control del osciloscopio utilizado en el Laboratorio (Tektronix 2205)

## VERTICAL

### 6 (y 11). CH1 OR X (CH2 OR Y)

Terminales de los canales 1 y 2 o de los canales X (CH1) e Y (CH2). Los conectores deben ser conectores coaxiales. La selección entre el modo XY o el modo normal se hace con el selector de la base de tiempo (ver 19).

## 7 (y 12). SELECTOR DE CH1 Y CH2

Estos interruptores permiten seleccionar corriente alterna (AC), tierra (GND) o corriente continua (DC). Al seleccionar AC eliminamos la componente continua de la señal, si dejamos DC veremos tanto la componente continua como la alterna. Si seleccionamos GND, enviaremos la señal a tierra.

## 8 (y 13). CH1 VOLTS/DIV (CH2 VOLTS/DIV)

Selector de escala vertical (o en caso de estar en modo XY, de escala horizontal en el canal 1) en voltios por división. El selector tiene un mando adicional que permite corregir la calibración de la escala. En condiciones de medida, hay que asegurarse de que este mando está en posición de Calibración, girando la rueda en dirección de las agujas del reloj hasta oír un clic.

## 9. SELECTOR DE CANAL

Permite seleccionar el canal 1 o el 2 o ambos (ver control 15)

## 10. POSITION CH 1

Permite mover la traza del canal 1 hacia arriba o hacia abajo.

## 14. INVERSOR DEL CANAL 2

Puede invertir el canal 2 o dejarlo normal.

## 15. SELECTOR DE MODO SIMULTÁNEO (ADD, ALT y CHOP)

En la posición ADD, se suman las señales de ambos canales. En la posición ALT se barre primero un canal y luego el otro. En la posición CHOP se van barriendo ambos canales a la vez: Cada cierto intervalo se conmutan los canales y así se van haciendo casi simultáneamente.

## 16. POSITION CH 2

Permite mover la traza del canal 1 hacia arriba o hacia abajo.

**HORIZONTAL**

## 17. TERMINAL DE TIERRA

Terminal de tierra.

## 18. PROBE ADJUST

Sirve para ajustar la sonda de conexión. El alumno no debe tocar este mando.

## 19. SELECTOR DE LA BASE DE TIEMPO

Mediante este selector se ajusta el tiempo de barrido, es decir, la escala horizontal (excepto en el modo XY). Como los selectores de los canales, tiene una rueda más pequeña para poder ajustar la base de tiempo. Durante las medidas, se debe girar en sentido horario hasta que se oiga un clic.

## 20. MAG

Aumenta la escala de los canales 1 y 2 en un factor 10. En los selectores se puede ver lo que representaría cuando esté activado, ya que aparece una ventana denominada "10X PROBE"

## 21. POSITION

Ajusta la posición horizontal, excepto cuando el selector está en la posición XY.

**TRIGGER**

El sistema de disparo (TRIGGER) es el responsable de la sincronización de la señal o señales que se muestran en el osciloscopio. Es importante ajustar el sistema de disparo correctamente para poder visualizar bien la señal.

## 22. EXT INPUT OR Z

Sirve para poder conectar una fuente de sincronización externa (EXT INPUT). En general, en este Laboratorio no se emplearán fuentes de sincronización externas, por lo que, caso de que sea necesario para alguna práctica, se explicará en el correspondiente guión.

También puede servir para conectar un falso eje Z, ya que tan sólo se producen cambios en la intensidad de la señal dando apariencia de profundidad.

## 23 Y 24. SOURCE

Mediante el selector 23, podemos elegir la fuente de sincronización, bien el canal 1, el canal 2, la fuente externa o poner la fuente en modo vertical.

Con el selector 24, podemos seleccionar una fuente interna (LINE), externa EXT, externa dividida por 10 (EXT/10) o EJE Z.

## 25. RESET

Sirve para desactivar temporalmente el modo del disparador.

## 26. SELECTOR DEL MODO DEL DISPARADOR

Existen unas opciones especializadas, pero las dos más utilizadas son: NORM y AUTO. Generalmente, se utilizará AUTO, ya que el disparador funciona en cualquier caso, mientras que en NORM, si la señal no adquiere un determinado nivel, la señal no se representa en la pantalla.

## 27. LEVEL

Mediante este control, podemos ajustar el disparador para que la señal se visualice en la pantalla correctamente.

## 28. SELECTOR DE LA PENDIENTE (SLOPE)

Podemos hacer que el disparador represente la señal con pendiente positiva o negativa.

### 1.2.7. Instrucciones de operación

Se describen a continuación las operaciones fundamentales para observar formas de onda en el osciloscopio.

1. Con el osciloscopio y el generador o generadores apagados, conecte el cable o cables coaxiales con la señal o señales a representar.
2. Seleccione el modo AC o DC (7 y 12), en cada canal conectado.
3. Seleccione el modo de visualización (9, 14 y 15), según corresponda: sólo canal 1, sólo canal 2 o ambos. Compruebe si el canal 2 está o no invertido (mando 14). Por último, seleccione ADD, ALT o CHOP en el mando 15.
4. Después de estos ajustes encienda el instrumento (interruptor POWER (1) en ON). Pasado un cierto tiempo aparecerán dos trazos en la pantalla. Ajuste los controles *INTENSITY* (5) y *FOCUS* (3) para obtener unos trazos claros.

### 1.2.8. Generador de funciones

Un generador de funciones es un dispositivo capaz de generar una señal periódica, que puede ser sinusoidal, triangular, cuadrada, de impulsos, etc.

Podemos entender por señales periódicas aquellas cuyos valores instantáneos se repitan en un intervalo de tiempo fijo denominado periodo de la señal.



**Figura 1.12:** Generador de funciones utilizado en el Laboratorio

En toda señal periódica hay que distinguir:

- Valor instantáneo

Valor de la señal para un tiempo de estudio cualquiera, por ejemplo el valor  $V_1$  corresponde al tiempo  $t_1$ .



- Amplitud de la señal  
Valor máximo de la señal durante un periodo. Se suele dar en módulo ya que puede ser positivo o negativo
- Periodo de la señal  
Tiempo que tarda en repetirse los valores instantáneo de la señal.
- Frecuencia  
Criterio inverso al de periodo, e indicativo de las veces que la señal se repite en un segundo. Su unidad es el hercio, (Hz). Por lo tanto es lógico pensar que si vamos a emplear señales periódicas para estudiar el comportamiento de circuitos en el laboratorio, poseamos un instrumento capaz de generar dichas señales. Este instrumento es el Generador de Funciones que puede entregar diferentes formas de ondas cuyas frecuencias son ajustables en un amplio margen de valores, también suelen ser ajustables los valores de amplitud de la señal seleccionada.
- Valor eficaz  
Aplicado generalmente a las ondas sinusoidales, es la raíz cuadrada del valor cuadrático medio, es decir:

$$V_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} V^2(t) dt.} \quad (1.12)$$

donde  $T$  es el periodo de la señal. Cuando las ondas son sinusoidales, el valor cuadrático medio es la mitad de la amplitud al cuadrado, por lo que el valor eficaz es:

$$V_{ef} = \frac{V_{max}}{\sqrt{2}} \quad (1.13)$$

### 1.2.9. Composición de m.a.s. perpendiculares: figuras de Lissajous

Cuando se introducen dos señales sinusoidales en el osciloscopio y se selecciona el modo  $X - Y$ , se visualizan en el osciloscopio una serie de figuras que dependen de la frecuencia y del desfase entre ambas señales. A estas figuras se las conoce como *figuras de Lissajous*. Vamos a analizar en primer lugar las figuras que se producen cuando la frecuencia de ambas señales es la misma, pero cambia el desfase y luego cuando las frecuencias no son iguales.

#### Movimientos armónicos perpendiculares de la misma frecuencia ( $\omega_x = \omega_y = \omega$ )

Compondremos dos M.A.S de direcciones perpendiculares dados por las ecuaciones

$$x = A_x \text{ sen}(\omega t + \phi_1) \quad (1.14)$$

$$y = A_y \text{ sen}(\omega t + \phi_2) \quad (1.15)$$

Si despejamos  $t$  de estas ecuaciones nos queda la siguiente ecuación:

$$\frac{x^2}{A_x^2} + \frac{y^2}{A_y^2} - \frac{xy}{A_x A_y} \cos \delta = \sin^2 \delta \quad (1.16)$$

donde  $\delta = \phi_2 - \phi_1$

Para hallar esta ecuación, tomaremos  $\delta = \phi_2 - \phi_1$  como la diferencia de fase y escribiremos las ecuaciones 1.14 y 1.15, como:

$$x = A_x \sin(\omega t + \delta) \quad (1.17)$$

$$y = A_y \sin(\omega t) \quad (1.18)$$

Desarrollando el seno de la suma de dos ángulos, obtenemos:

$$x = A_x (\sin \omega t \cos \delta + \cos \omega t \sin \delta) \quad (1.19)$$

Teniendo en cuenta que,

$$\sin(\omega t) = \frac{y}{A_y} \quad (1.20)$$

y que

$$\cos(\omega t) = 1 - \frac{y^2}{A_y^2} \quad (1.21)$$

obtenemos,

$$\frac{x}{A_x} = \frac{y}{A_y} \cos \delta + \left(1 - \frac{y^2}{A_y^2}\right)^{1/2} \sin \delta \quad (1.22)$$

pasando el primer término de la expresión de la derecha a la izquierda y elevando todo al cuadrado, obtenemos,

$$\frac{x^2}{A_x^2} + \frac{y^2}{A_y^2} \cos^2 \delta - \frac{2xy}{A_x A_y} \cos \delta = \left(1 - \frac{y^2}{A_y^2}\right) \sin^2 \delta \quad (1.23)$$

agrupando términos,

$$\frac{x^2}{A_x^2} + \frac{y^2}{A_y^2} (\cos^2 \delta + \sin^2 \delta) - \frac{2xy}{A_x A_y} \cos \delta = \sin^2 \delta \quad (1.24)$$

y, por lo tanto,

$$\frac{x^2}{A_x^2} + \frac{y^2}{A_y^2} - \frac{xy}{A_x A_y} \cos \delta = \sin^2 \delta \quad (1.25)$$

Podemos ver, por tanto, que el movimiento está confinado en un rectángulo de lados  $2A_x$  y  $2A_y$  ( $\pm A_x; \pm A_y$ ).

Algunos casos particulares, especialmente interesantes son:

- $\delta = 0$

En este caso,  $\text{sen}\delta = 0$  y  $\text{cos}\delta = +1$ , de modo que la ecuación 1.16 resulta ser una recta de pendiente positiva:  $y = \frac{A_y}{A_x} x$  y el movimiento es un m.a.s. de frecuencia  $\omega$  y amplitud  $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$ . Al tener fases iguales, la fase inicial será la de cualquiera de los dos m.a.s.

- $\delta = \pi$

En este caso,  $\text{sen}\delta = \pi$  y  $\text{cos}\delta = -1$ , de modo que la ecuación 1.16 resulta ser una recta de pendiente negativa:  $y = -\frac{A_y}{A_x} x$  y el movimiento es un m.a.s. de frecuencia  $\omega$  y amplitud  $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$ . La fase inicial depende de cuál de los dos movimientos está adelantado o retrasado.

- $\delta = \pm \frac{\pi}{2}$

En este caso,  $\text{sen}\delta = \pm 1$  y  $\text{cos}\delta = 0$ , de modo que la ecuación 1.16 resulta ser una elipse centrada en los ejes:

$$\frac{x^2}{A_x^2} + \frac{y^2}{A_y^2} = 1 \quad (1.26)$$

El sentido de giro depende del signo de  $\delta$ .

En resumen, la composición de dos m.a.s. perpendiculares de la misma frecuencia es un movimiento periódico, pero no es un m.a.s., excepto en el caso de que el desfase  $\delta$  sea cero o  $\pi$ , en cuyo caso, el movimiento resultante es un m.a.s. con la misma frecuencia, amplitud  $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$ , fase inicial que depende del caso y la trayectoria es una recta con pendiente positiva ( $\delta = 0$ ) o negativa ( $\delta = \pi$ ).

**Movimientos armónicos perpendiculares de distinta frecuencia ( $\omega_x \neq \omega_y \neq \omega$ )**

En el caso de movimientos perpendiculares con distinta frecuencia, se forman las llamadas Figuras de Lissajous, que varían con el desfase y la relación entre las frecuencias.

Podemos ver algunos ejemplos en las siguientes figuras:

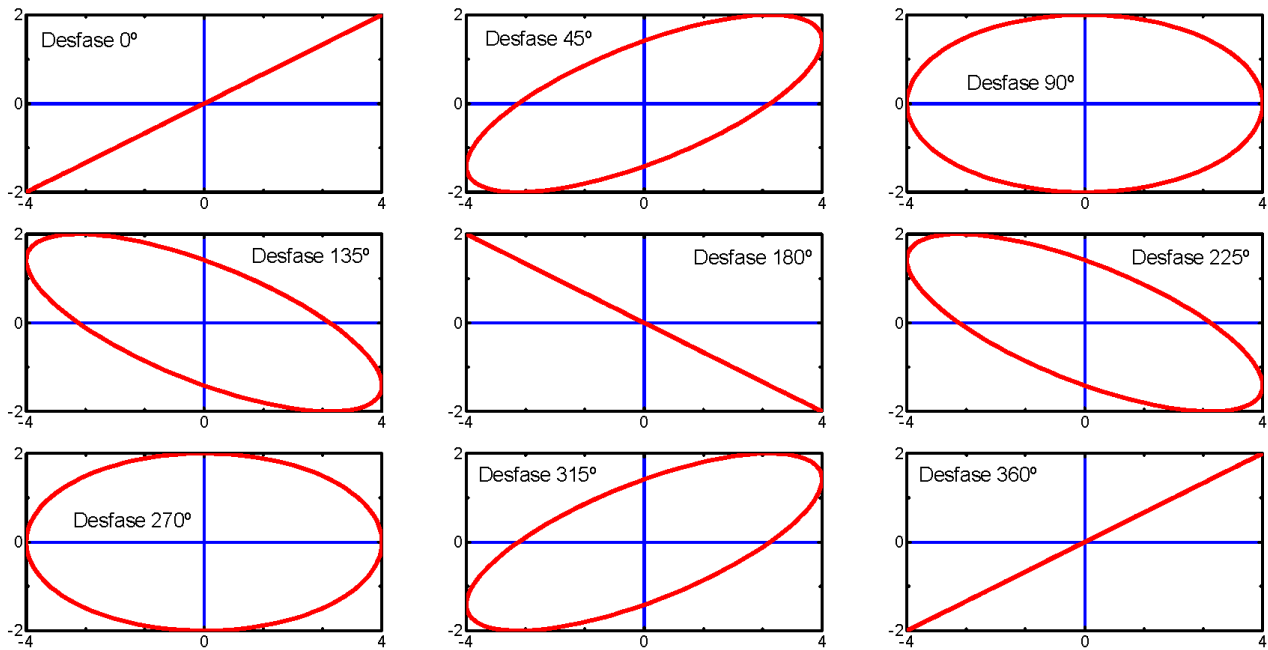


Figura 1.13: Figuras de Lissajous (1)

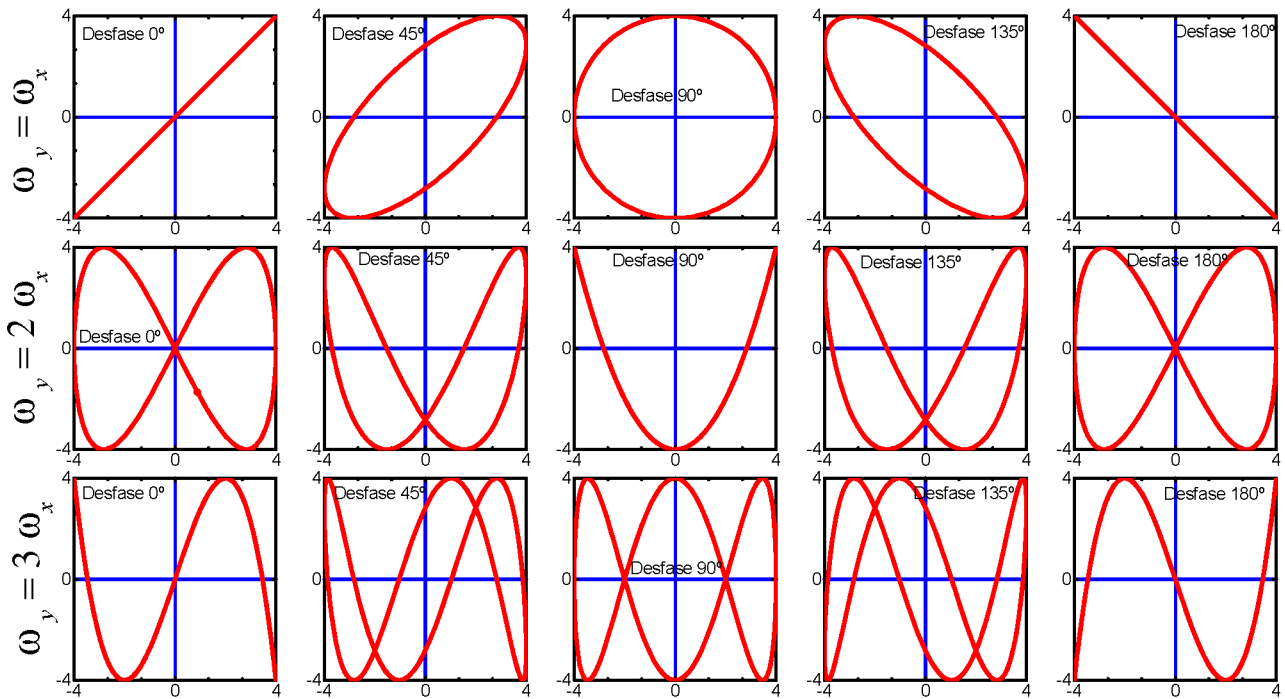


Figura 1.14: Figuras de Lissajous (2)

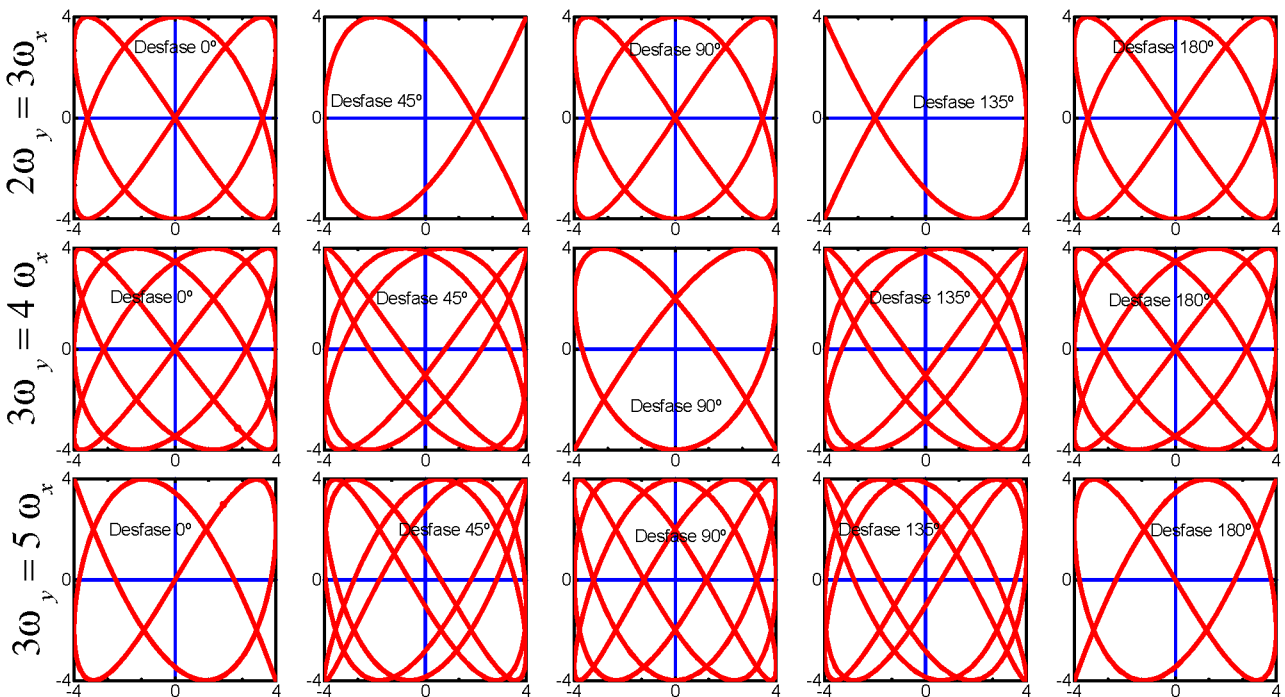


Figura 1.15: Figuras de Lissajous (3)

### 1.2.10. Circuito RC

Supongamos un condensador de capacidad  $C$  cargado con una carga inicial  $Q_0$ , conectado a una resistencia  $R$  con un interruptor que inicialmente está abierto (ver figura 1.16).

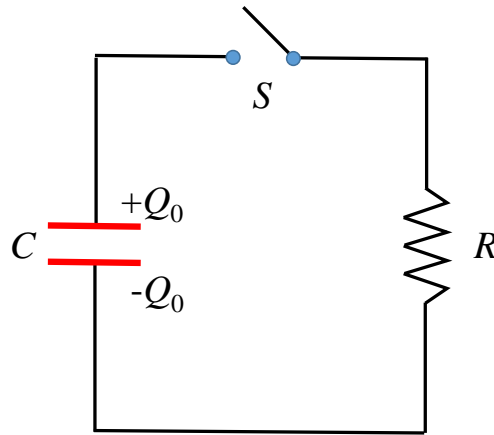


Figura 1.16: Circuito RC

Cuando se cierra el interruptor, la carga del condensador se descarga a través de la resistencia  $R$ , de modo que la diferencia de potencial en el condensador se iguala a la caída de potencial en la resistencia:

$$\frac{Q}{C} = IR = -\frac{dQ}{dt} R \quad (1.27)$$

ya que la intensidad  $I$  que circula por el circuito es igual a la disminución en la carga del condensador.

Agrupando términos, tenemos:

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{1}{RC} dt \quad (1.28)$$

Integrando,

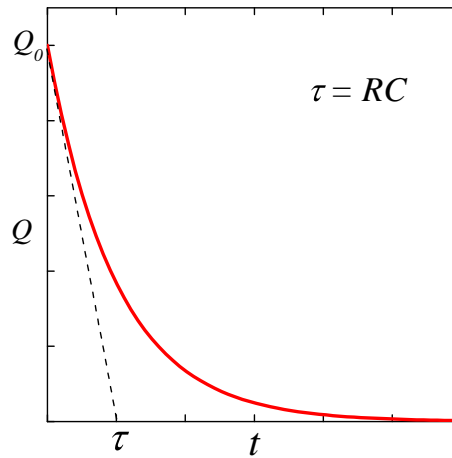
$$\ln \frac{Q(t)}{Q_0} = -\frac{t}{RC} \quad (1.29)$$

Despejando  $Q(t)$ , obtenemos:

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (1.30)$$

donde  $\tau$  es la llamada constante de tiempo y es el tiempo durante el cual la carga cae hasta un valor  $1/e$  de su valor original. Es fácil ver que  $\tau = RC$ .

En la figura 1.17 podemos ver la caída de la carga en un circuito  $RC$ .

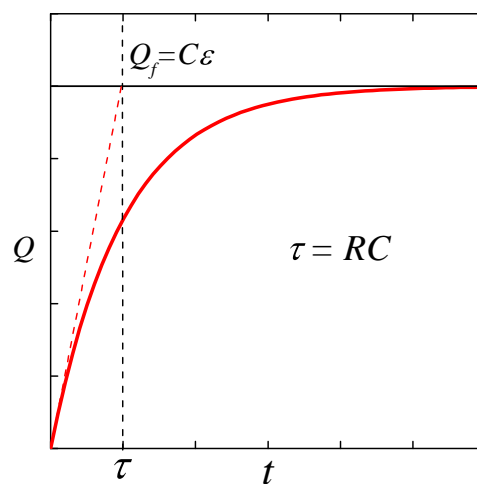


**Figura 1.17:** Caída de la carga en un circuito  $RC$

En un tiempo  $\tau$ , la carga cae a un valor  $1/e$  de su valor inicial, que es aproximadamente  $1/3$ , por lo que utilizaremos este hecho para medir la constante de tiempo en un circuito  $RC$ .

Aunque no haremos el análisis detallado, se puede demostrar que el proceso de carga es análogo y está determinado por la constante de tiempo  $\tau$ . Podemos ver en la figura 1.18 cómo es el proceso de carga y en la ecuación 1.15 la expresión matemática de la misma.

$$Q(t) = Q_f \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (1.31)$$



**Figura 1.18:** Proceso de carga en un circuito  $RC$

## 1.3. DESARROLLO DE LA PRACTICA

### 1.3.1. Material necesario

- Generador de señal
- Osciloscopio
- Caja de resistencias
- Condensadores
- Cables, conectores, etc

### 1.3.2. Medida de una señal alterna de forma variable

Mediante el generador de señales, introduciremos una señal sinusoidal en el osciloscopio y la representaremos en un diagrama, obteniendo sus principales características: valor de potencial pico a pico, valor eficaz, periodo y frecuencia. Además, comprobaremos si hay discrepancias entre el valor medido de la frecuencia y el valor que refleja el generador de funciones.

Haremos este mismo ejercicio para ondas cuadradas y ondas triangulares.

### 1.3.3. Medida de las figuras de Lissajous

Ahora representaremos dos señales sinusoidales en el osciloscopio, para lo que utilizaremos los dos canales del generador de funciones. Para ello, conectaremos cada una de estas señales a cada uno de los canales del osciloscopio. Para obtener la figuras de Lissajous correspondientes a la relación de frecuencias 1:1, sintonizaremos la misma frecuencia en cada uno de los canales en el generador.

Representaremos ambas señales en el osciloscopio, midiendo sus valores pico a pico y sus frecuencias. Igualmente variaremos la fase, para obtener todas las figuras de Lissajous.

Repetiremos estas medidas para las relaciones de frecuencia 1:2, 1:3 y 2:3.

### 1.3.4. Medida de la constante de tiempo en un circuito RC

Conectaremos en serie el condensador dado con la caja de resistencias y éstos con el generador de funciones en modo onda cuadrada. Eligiendo cuidadosamente, junto con el profesor, el intervalo de frecuencias adecuado, representaremos la forma de la onda y mediremos de manera aproximada, la constante de tiempos. Para ello, tomaremos como aproximación que el valor de la carga cae en  $1/3$  en un tiempo  $\tau = RC$ .



## 1.4. Informe del alumno

1. Portada, con nombre, grupo de Laboratorio, fecha y práctica
2. Introducción y objetivos de la práctica.
3. Aparatos utilizados y precisiones, en su caso.
4. Medidas realizadas sobre la señal del generador
  - a) Esquema de las conexiones.
  - b) Medidas realizadas de forma gráfica.
  - c) Medida de los valores pico a pico, eficaz, periodo y frecuencia.
  - d) Evaluación de las incertidumbres.
  - e) Comentarios.
5. Figuras de Lissajous
  - a) Esquema de las conexiones.
  - b) Medidas realizadas de forma gráfica para las distintas relaciones de frecuencia.
  - c) Medida de los valores pico a pico.
  - d) Cálculo de las incertidumbres.
  - e) Comentarios.
6. Circuito  $RC$ 
  - a) Esquema eléctrico.
  - b) Medidas realizadas de forma gráfica.
  - c) Medida de la constante de tiempo.
  - d) Cálculo de las incertidumbres.
  - e) Comparación con el valor teórico de la constante de tiempo.
7. Conclusiones de la práctica.

## 1.5. Bibliografía

1. Física con ordenador,  
<http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/electromagnet/movimiento/osciloscopio/osciloscopio.htm>