

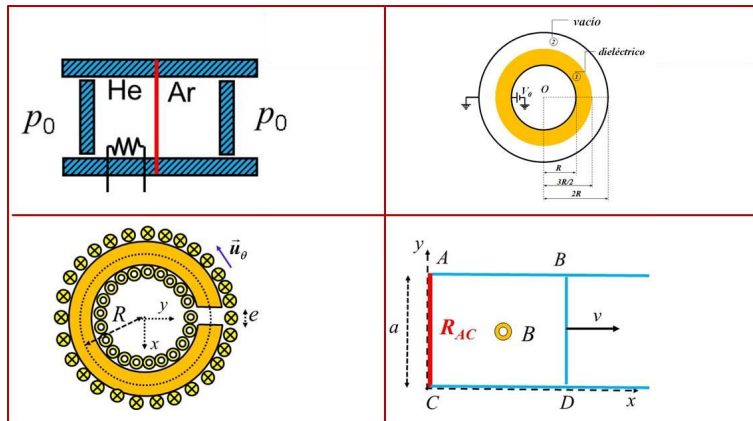


POLITÉCNICA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS
NAVALES

FÍSICA II

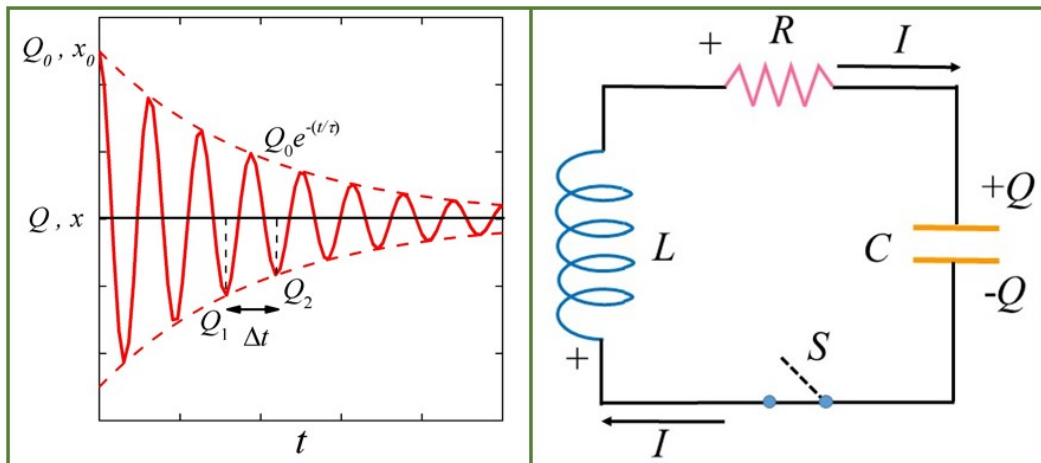
PRÁCTICAS DE LABORATORIO Electromagnetismo





POLITÉCNICA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS NAVALES



PRÁCTICA 3 CIRCUITO LCR

Jesús GÓMEZ GOÑI

3. Circuito LCR	1
3.1. Objetivo de la práctica	1
3.2. Aparatos y material necesarios	1
3.3. Fundamentos teóricos	1
3.3.1. Oscilaciones libres	1
3.3.2. Oscilaciones amortiguadas	3
3.3.3. El circuito LCR	5
3.3.4. Oscilaciones forzadas: el circuito LCR	8
3.4. Desarrollo de la práctica	11
3.4.1. Oscilaciones inframortiguadas	11
3.4.2. Amortiguamiento crítico	12
3.4.3. Resonancia	12
3.5. Informe del alumno	13

3

Circuito LCR

3.1. Objetivo de la práctica

El objetivo de esta práctica consiste en estudiar los regímenes de oscilación de un sistema dependiendo del valor del amortiguamiento que exista en el mismo. El sistema empleado para ello es un circuito LCR y las oscilaciones se visualizan mediante un osciloscopio.

3.2. Aparatos y material necesarios

- Generador de señal
- Bobina
- Cajas de décadas de capacidad y resistencia
- Osciloscopio

3.3. Fundamentos teóricos

3.3.1. Oscilaciones libres

Los sistemas físicos más simples, si se separan ligeramente de su situación de equilibrio estable oscilan alrededor de dicha situación con una frecuencia característica (*frecuencia propia o de resonancia*).

Podemos establecer un paralelismo entre dos sistemas, uno mecánico y otro eléctrico, que presentan un comportamiento idéntico en cuanto a sus pequeñas oscilaciones en torno a una posición de equilibrio estable. Como sistema mecánico, una partícula de masa m sujeta a un muelle fijo por uno de sus extremos, realiza pequeñas oscilaciones si se separa ligeramente de su posición de equilibrio $x = 0$ (que corresponde a tener el muelle relajado, figura 3.1). Si la constante recuperadora del muelle es k , la frecuencia de oscilación, f , viene dada por:

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi}, \quad \text{donde } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.1)$$

Como se puede observar, la frecuencia angular ω_0 depende exclusivamente de las características físicas del sistema (la masa de la partícula y la constante del muelle).

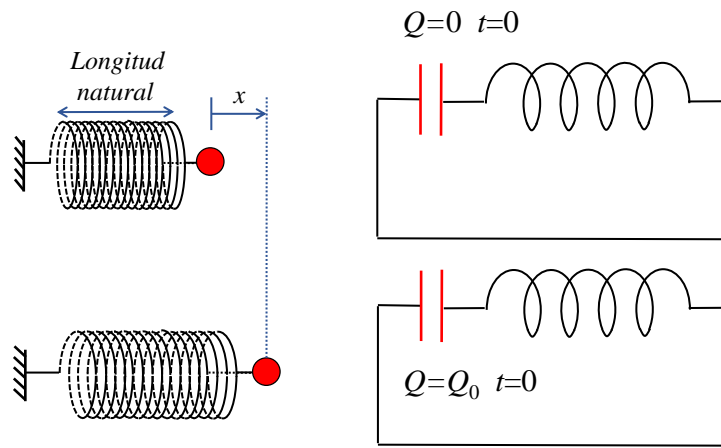


Figura 3.1: Sistemas con variables (x, Q) que describen un movimiento armónico simple

En el caso de un sistema eléctrico formado por un circuito con un condensador y una bobina y sin resistencia apreciable, la situación de equilibrio consiste en que el condensador esté descargado. Cuando el condensador se carga y se cierra el circuito se generan oscilaciones de carga en el condensador (y por tanto de corriente en el circuito). La frecuencia de las oscilaciones en este sistema también depende exclusivamente de las características físicas del circuito, es decir de la capacidad C del condensador y de la autoinductancia L de la bobina.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \tag{3.2}$$

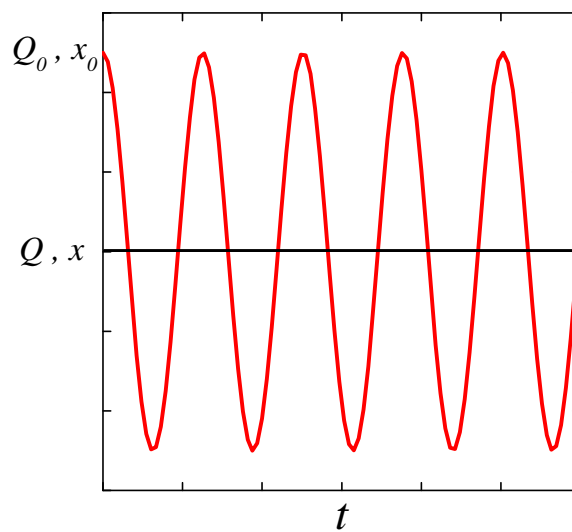


Figura 3.2: Movimiento armónico simple

Al estar regidos ambos sistemas por una misma ecuación diferencial su comportamiento debe ser el mismo, variando únicamente las magnitudes físicas implicadas

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \qquad L \frac{d^2Q}{dt^2} = -\frac{Q}{C} \qquad (3.3)$$

Como se observa, la autoinducción L de la bobina equivale a la masa m del sistema mecánico y la constante del muelle, k , equivale al inverso de la capacidad $1/C$. Las dos expresiones de ω_w que se dan más arriba resultan ser, en el fondo, la misma expresión.

$$x = x_0 \text{sen}(\omega_0 t + \phi) \qquad Q = Q_0 \text{sen}(\omega_0 t + \phi) \qquad (3.4)$$

Cuando estos sistemas oscilan libremente las oscilaciones generadas son armónicas donde las constantes x_0 , Q_0 y ϕ dependen de las condiciones iniciales del movimiento u oscilación eléctrica.

3.3.2. Oscilaciones amortiguadas

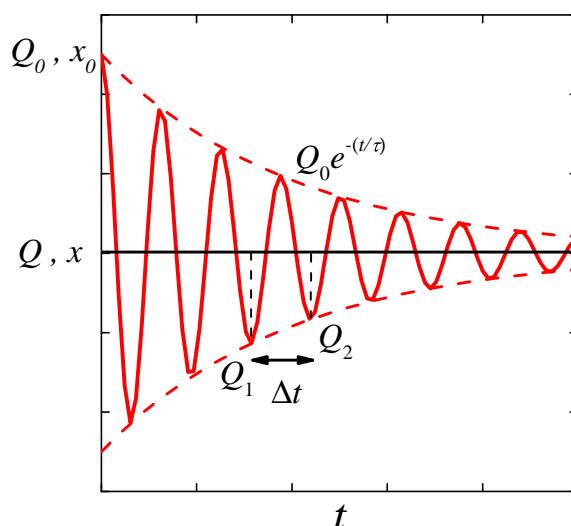


Figura 3.3: Sistema oscilante con amortiguación exponencial

Régimen inframortiguado

En el apartado anterior no hemos tenido en cuenta que cualquier sistema físico en movimiento suele disipar energía; en el caso de un sistema mecánico la causa se suele encontrar en la existencia de fuerzas de fricción, mientras que para los sistemas eléctricos se suele deber a la existencia de resistencia en los circuitos. Todo ello da lugar a que las oscilaciones del sistema se vayan amortiguando lentamente (exponencialmente), como se ve en la figura 3.3, siempre que los rozamientos y resistencias sean pequeños, de manera que podemos escribir:

$$x = x_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\omega_A t + \phi) \quad Q = Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\omega_A t + \phi) \quad (3.5)$$

donde la constante τ depende de la fricción y la masa (para el sistema mecánico) o de la resistencia y la autoinducción (para el circuito). En este último caso

$$\frac{1}{\tau} = \frac{R}{2L} \quad (3.6)$$

siendo R la resistencia en el circuito. En general, al existir disipación de energía, la expresión de la frecuencia propia de oscilación queda modificada y se transforma en

$$\omega_A = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left[\frac{R}{2L}\right]^2} \quad (3.7)$$

Cuando la resistencia es pequeña el valor de ω_A se aproxima mucho al de la frecuencia para oscilaciones libres, ω_0 .

Oscilaciones sobreamortiguadas

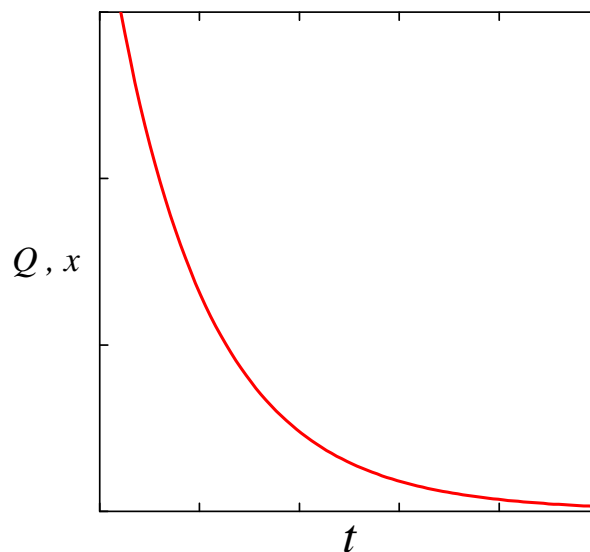


Figura 3.4: Sistema con amortiguación no oscilante

En la expresión de ω_A , cuando la resistencia es muy grande, el radicando puede ser negativo y entonces ω_A sería imaginaria. En este caso el sistema tiende a alcanzar su posición de equilibrio, $Q = 0$ ó $x = 0$, sin oscilar (figura 3.4). La transición de oscilación a no-oscilación tiene lugar cuando

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 = \frac{1}{LC} \quad (3.8)$$

3.3.3. El circuito LCR

Consideremos un circuito LCR, como el indicado en la figura, en el que el condensador C se carga con una carga inicial Q_0 .

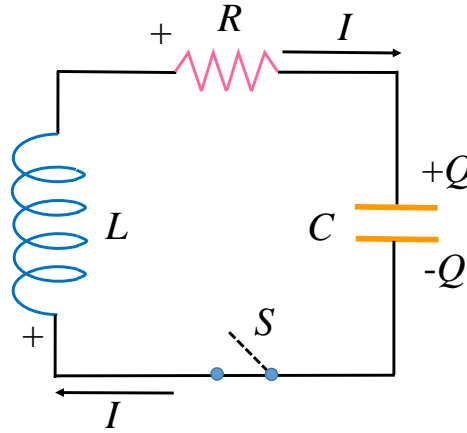


Figura 3.5: Circuito LCR

Cuando cerramos el interruptor, comienza a pasar una corriente I y la bobina crea una f.e.m. para impedir la variación de la corriente. Aplicando las leyes de Kirchoff, tenemos:

$$\mathcal{E}_L = \mathcal{E}_R + \mathcal{E}_C \quad (3.9)$$

O lo que es lo mismo:

$$-L \frac{dI}{dt} = IR + \frac{Q}{C} \quad (3.10)$$

Como

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (3.11)$$

Entonces,

$$-L \frac{d^2Q}{dt^2} = R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} \quad (3.12)$$

De manera que dividiendo por L y agrupando términos, nos queda:

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{LC} = 0 \quad (3.13)$$

que representa la ecuación diferencial del circuito LCR.

Para resolver esta ecuación diferencial de segundo orden homogénea y con coeficientes constantes, tenemos que hallar las raíces de la ecuación característica:

$$\lambda^2 + \frac{R}{L} \lambda + \frac{1}{LC} = 0 \quad (3.14)$$

La solución de la ecuación característica es:

$$\lambda = \frac{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}}}{2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} \quad (3.15)$$

Tomando

$$\gamma = \frac{R}{2L} \quad (3.16)$$

y

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (3.17)$$

entonces,

$$\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad (3.18)$$

El tipo de oscilación dependerá del signo del discriminante $\gamma^2 - \omega_0^2$. Podemos considerar tres casos, dependiendo de si el discriminante es negativo, positivo o nulo.

Oscilación subamortiguada (o pseudoperiódica)

En este caso, el discriminante es negativo, por lo que $\gamma^2 < \omega_0^2$. Como γ representa un amortiguamiento pequeño, cabe esperar que existan oscilaciones, aunque su amplitud se irá haciendo más pequeña con el tiempo.

Como el discriminante es negativo, las soluciones serán imaginarias:

$$\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} j \quad (3.19)$$

Las soluciones de la ecuación diferencial son:

$$Q(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 e^{(-\gamma + \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} j)t} + C_2 e^{(-\gamma - \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} j)t} \quad (3.20)$$

Teniendo en cuenta, que $e^{\pm j\omega t} = \cos(\omega t) \pm j \operatorname{sen}(\omega t)$, podemos simplificar la ecuación (3.20), de la siguiente forma:

$$Q(t) = A e^{-\gamma t} \operatorname{sen} \left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t + \phi \right) \quad (3.21)$$

Si representamos esta ecuación, nos queda la siguiente gráfica:

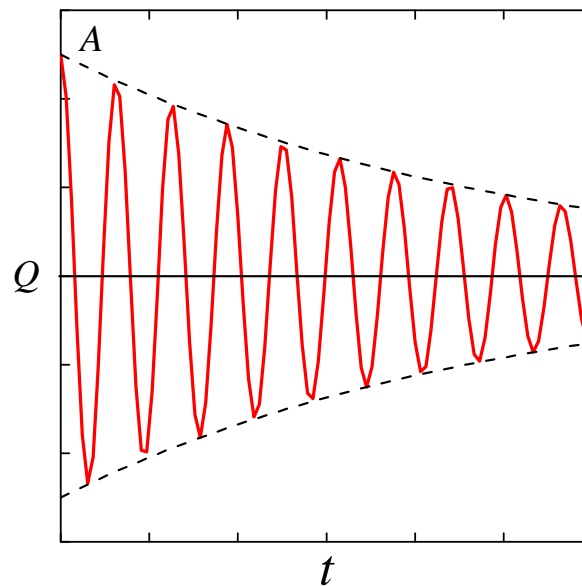


Figura 3.6: Oscilaciones infraamortiguadas

Oscilación sobreamortiguada (o aperiódica)

En este caso, el discriminante es positivo, por lo que $\gamma^2 > \omega_0^2$. Dado que γ representa el amortiguamiento, cabe esperar que no existan oscilaciones, sino que la carga vaya tendiendo poco a poco a la situación de equilibrio.

Como el discriminante es positivo, las raíces de la ecuación característica serán reales:

$$\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad (3.22)$$

Las soluciones de la ecuación diferencial son:

$$Q(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 e^{(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} \quad (3.23)$$

Puesto que $\gamma > \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$, ambas raíces son negativas y la suma de exponenciales negativas es una función decreciente, pero sin oscilaciones (es decir, aperiódico, sin período).

Oscilación crítica

Cuando el discriminante es nulo, es decir $\gamma = \omega_0$, las raíces de la ecuación característica son iguales e iguales a $-\gamma$, por lo que la solución de la ecuación diferencial es:

$$Q(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 t e^{\lambda_2 t} = C_1 e^{-\gamma t} + C_2 t e^{-\gamma t} \quad (3.24)$$

Esta expresión es también una función decreciente y se puede demostrar que cae más rápidamente a la situación de equilibrio que la que corresponde a la situación sobreamortiguada.

La comparación entre ambas se puede ver en la siguiente gráfica:

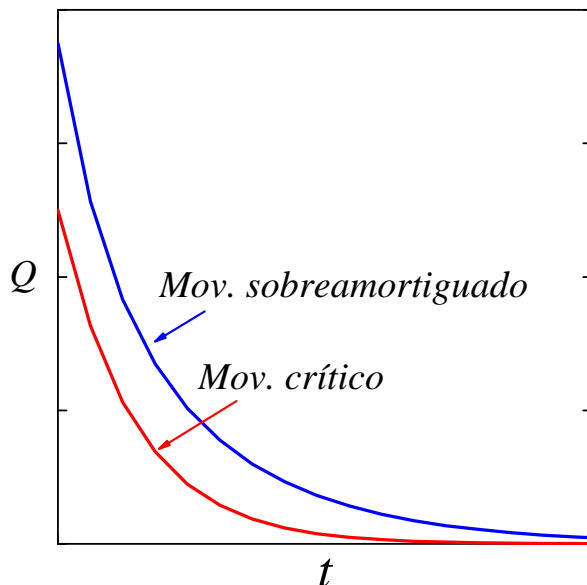


Figura 3.7: Oscilaciones sobreamortiguadas y oscilación crítica

3.3.4. Oscilaciones forzadas: el circuito LCR

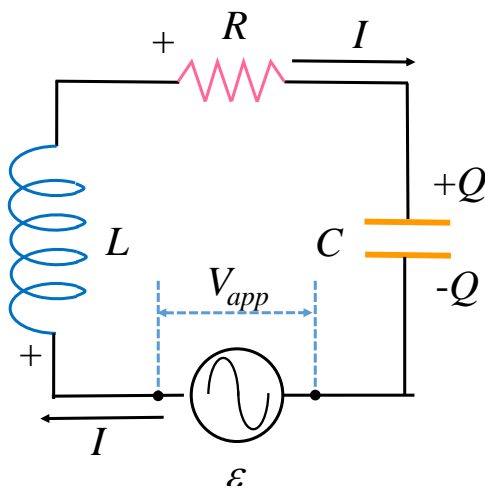


Figura 3.8: Circuito LCR con generador

En el desarrollo anterior hemos estudiado el circuito LCR sin generador y hemos analizado los distintos tipos de oscilaciones que se pueden presentar. Vamos ahora a analizar el comportamiento del circuito en presencia de un generador de corriente alterna, como se refleja en la siguiente figura.

Si al circuito LCR le suministramos una energía en cada oscilación, mediante un generador de corriente alterna, éste puede reponer la energía perdida en la resistencia.

Supongamos que la fuerza electromotriz, \mathcal{E} , suministrada por el generador es:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \text{ sen } \omega_g t \quad (3.25)$$

Esta fuerza electromotriz debe ser igual a la suma de las fuerzas electromotrices de la resistencia, de la autoinducción y del condensador:

$$\mathcal{E}_0 \text{ sen } \omega_g t = L \frac{dI}{dt} + IR + \frac{Q}{C} \quad (3.26)$$

Dividiendo por L y sustituyendo I por su relación con la carga Q tenemos:

$$\frac{\mathcal{E}_0}{L} \text{ sen } \omega_g t = \frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{LC} \quad (3.27)$$

Derivando ambos miembros de la ecuación con respecto al tiempo, obtenemos:

$$\frac{\omega_g \mathcal{E}_0}{L} \cos \omega_g t = \frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{I}{LC} \quad (3.28)$$

La ecuación es similar a la estudiada para el circuito sin generador, salvo que no es una ecuación homogénea. La solución general se puede hallar como la suma de la solución de la ecuación homogénea, $I_h(t)$, y de la solución particular, $I_p(t)$:

$$I(t) = I_h(t) + I_p(t) \quad (3.29)$$

La solución de la ecuación homogénea tiende a cero, ya sea infraamortiguada, sobreamortiguada o crítica, siendo importante en el período transitorio, pero podemos tomarla como nula en el régimen permanente.

En cuanto a la solución particular, podemos explorar soluciones periódicas del tipo:

$$I_p(t) = I_0 \text{ sen}(\omega_g t - \phi) \quad (3.30)$$

Desde el punto de vista físico es razonable suponer que la frecuencia de la oscilación es la misma que la del generador.

Sustituyendo esta expresión en la ecuación diferencial y operando podemos obtener I_0 :

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega_g L - \frac{1}{\omega_g C}\right)^2}} \quad (3.31)$$

donde podemos definir la *impedancia*, Z , como:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega_g L - \frac{1}{\omega_g C}\right)^2} \quad (3.32)$$

Si definimos la *reactancia*, X , como:

$$X = \omega_g L - \frac{1}{\omega_g C} \quad (3.33)$$

Entonces podemos escribir la impedancia, Z , como:

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} \quad (3.34)$$

En cuanto a la diferencia de fase entre la tensión y la intensidad de corriente, ϕ , se puede calcular como:

$$\tan \phi = \frac{X}{R} = \frac{\omega_g L - \frac{1}{\omega_g C}}{R} \quad (3.35)$$

Si observamos la expresión (3.34), podemos ver que existe un valor de ω_g que hace que la intensidad sea un máximo para unos valores determinados de L y C . Concretamente, este valor es el que hace que la reactancia X sea nula:

$$X = \omega_g L - \frac{1}{\omega_g C} = 0 \quad (3.36)$$

Despejando, el valor de ω_g que anula la reactancia es:

$$\omega_g = \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (3.37)$$

donde ω_0 es la frecuencia natural del circuito sin resistencia.

En estas condiciones, se dice que el circuito está en resonancia. Si nos fijamos en la expresión de la diferencia de fase entre tensión e intensidad de corriente, ϕ , podemos ver que, en las condiciones de la resonancia, es nula, por lo que la tensión y la intensidad están en fase, obteniéndose, por tanto, una potencia máxima.

3.4. Desarrollo de la práctica

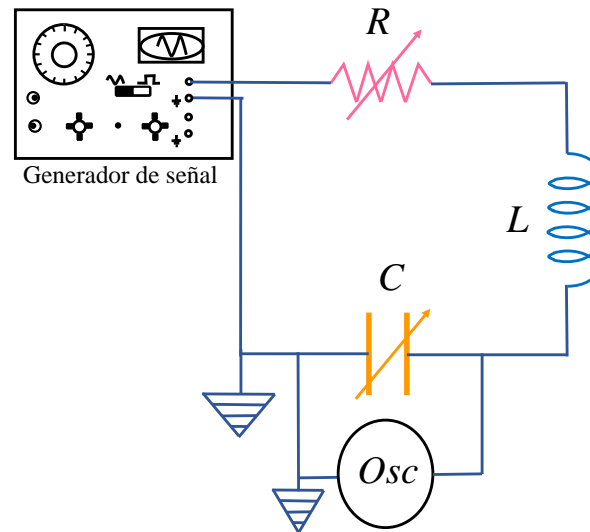


Figura 3.9: Montaje experimental

Montar un circuito RLC como el que se muestra en la figura 3.9 y alimentarlo con una tensión (**onda cuadrada**) de frecuencia entre 50 y 500 Hz (**usar la salida de baja impedancia**). Se trata de medir las oscilaciones de la carga Q del condensador, para lo que se mide la diferencia de potencial entre sus extremos mediante un osciloscopio (**¡ojo con las conexiones a tierra!**).

3.4.1. Oscilaciones inframortiguadas

En primer lugar comprobar que para resistencias bajas, incluso nula, la frecuencia de las oscilaciones es independiente de la de la señal aplicada mediante el generador. ¿Cuál es el motivo?

En segundo lugar, y para resistencias muy bajas, comprobar que se verifica la expresión de ω_0 midiendo el periodo, T . Se puede observar que T varía con la capacidad utilizada, para capacidades entre 100 y 1000 pF. Representar gráficamente C frente a T^2 y obtener a partir de dicha representación el valor del coeficiente de autoinducción o autoinductancia, de la bobina, L . Hacer estas medidas utilizando varios valores de R , yendo a valores comprendidos entre unos 100 ohmios a 1000 ohmios.

Explicar la diferencia que existe entre las gráficas obtenidas con valores pequeños de R y las obtenidas con valores grandes (de centenares de ohmios). En particular, justificar la forma de la curva obtenida si R es de centenares de ohmios (básate en la expresión de ω_A).

Teniendo en cuenta que la amplitud de oscilación disminuye exponencialmente con el tiempo, según la expresión 3.5, medir el cociente entre dos máximos de Q , Q_1 y Q_2 (no necesariamente consecutivos), y su separación temporal correspondiente Δt (ver figura 3.3).

Como $\ln \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R \Delta t}{2L}$ se puede representar gráficamente $\ln \frac{Q_1}{Q_2}$ frente a $R \Delta t$ para diversos valores de R entre los 50Ω y los $2 \text{ k}\Omega$. De dicha representación volver a obtener el valor de L .

3.4.2. Amortiguamiento crítico

La situación en la que el régimen de oscilaciones pasa de inframortiguado (el sistema oscila) a sobreamortiguado (el sistema no oscila) corresponde a lo que se denomina como amortiguamiento crítico. En dicho caso se cumple la ecuación 3.8. Determinar la resistencia R_C necesaria para llegar a dicha situación, para distintos valores de C , entre 10 nF y $1 \mu\text{F}$, y obtener de nuevo el valor de la inductancia L , a partir de la representación gráfica de C frente a $1/R^2$.

Compara el valor obtenido ahora con el obtenido en los apartados anteriores. ¿En qué caso te ha resultado más fácil la medida? ¿Por qué?.

3.4.3. Resonancia

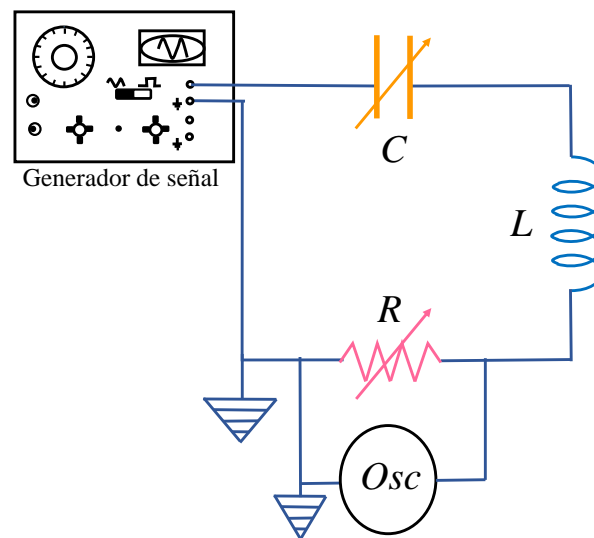


Figura 3.10: Montaje experimental

Como se mencionó en el apartado 3.3.2, cuando en un circuito RLC la frecuencia de la señal externa coincide con la frecuencia propia del circuito (Ecuación 3.2) se produce un máximo de intensidad.

Conectar el circuito como se indica en la figura 3.10 y alimentarlo mediante una señal sinusoidal. Para un valor de R y C fijos buscar la frecuencia (frecuencia de resonancia) que hace máxima la intensidad en el circuito (la tensión entre extremos de la resistencia). Comprobar que la frecuencia de resonancia es independiente de la resistencia del circuito (para resistencias bajas).

Haciendo uso de la relación 3.2 y midiendo para distintas capacidades determinar el valor de L .

Para visualizar mejor esta resonancia, se puede conectar al otro canal del osciloscopio la señal procedente directamente del generador. Esta señal es proporcional a la diferencia de potencial, mientras que la señal en bornes de la resistencia es proporcional a la intensidad de corriente. Cuando se encuentre el máximo de intensidad, podemos visualizar ambas señales y veremos que están en fase, extremo que podemos comprobar poniendo al osciloscopio en modo $X - Y$ y viendo la figura de Lissajous correspondiente, que debería ser una recta.

3.5. Informe del alumno

1. Presentación. Objetivos.
2. Aparatos y precisiones.
3. Oscilaciones inframortiguadas
 - a) Montaje experimental.
 - b) Medida del periodo de las señales en función de la capacidad.
 - c) Cálculo de las incertidumbres.
 - d) Representación gráfica de la capacidad en función del periodo al cuadrado para tres valores de R .
 - e) Cálculo del coeficiente de autoinducción mediante el ajuste de las gráficas.
 - f) Estimación de las incertidumbres en el coeficiente de autoinducción, mediante el ajuste de las gráficas.
 - g) Medida de la caída de la señal en función del tiempo Δt entre máximos.
 - h) Cálculo de las incertidumbres.
 - i) Representación gráfica del logaritmo neperiano de los cocientes entre máximos en función de $R\Delta t$.
 - j) Cálculo del coeficiente de autoinducción mediante el ajuste de la gráfica.
 - k) Estimación de la incertidumbre en el coeficiente de autoinducción.
4. Amortiguamiento crítico
 - a) Montaje experimental.
 - b) Medida de la resistencia crítica en función de la capacidad.
 - c) Cálculo de las incertidumbres.
 - d) Representación gráfica de la capacidad frente a $1/R^2$.
 - e) Cálculo del coeficiente de autoinducción mediante el ajuste de la gráfica.
 - f) Cálculo de las incertidumbres del coeficiente de autoinducción.

5. Resonancia

- a) Montaje experimental.
- b) Medida de la frecuencia de resonancia en función de R y C .
- c) Cálculo de incertidumbres.
- d) Cálculo del coeficiente de autoinducción.
- e) Estimación de la incertidumbre.

6. Conclusiones de la práctica.